1P041

不連続ガレルキン法による非線形磁気流体コードの開発 I
Development of nonlinear MHD code by discontinuous Galerkin method, part-I

白戸 高志 [1]，松山 顕之 [1]，相羽 信行 [2]
Takashi Shiroto[1], Akinobu Matsuyama[1], Nobuyuki Aiba[2],

量研六ヶ所 [1]，量研那珂 [2]
QST Rokkasho[1], QST Naka[2]

実機形状で核融合プラズマの磁気流体 (MHD) 現象を模擬することを目的として，非構造格子を用いた非線形 MHD コード開発が各国で進められている．核融合プラズマでは圧縮性を無視した簡約化 MHD モデルがしばしば用いられるが，現実には圧縮性が MHD 現象の安定化に寄与するため，計算機の発達した今日では磁気音波を考慮した full-MHD モデルによるコード開発が望まれる．近年では欧州の JOREK コード [1] や米国の M3D-C1 コード [2] 等，ポロイダル断面とトロイダル方向をそれぞれ有限要素法とスペクトル法により離散化するコードの full-MHD 化が進められている．しかしながら，これらは現代的な計算機アーキテクチャに適さないアルゴリズムである上，線形な理想 MHD モードの計算精度と非線形領域における数値安定性を両立できているとは言い難い．

前述の背景に基づき QST プラズマ理論シミュレーショングループでは，有限要素法の一種である不連続ガレルキン (DG) 法に基づく非線形 full-MHD コード開発を行っている．保存形式の支配方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = 0, \tag{1}$$

の DG 法による離散化を考える．ここで，Q は保存変数，$\mathbf{F}$ は流束を表す．DG 法では保存変数 Q を

$$Q(t, \mathbf{r}) = \sum_i Q_i(t)\psi_i(\mathbf{r}), \tag{2}$$

の様に自由度 Q_i と基底関数 ψ_i の線形結合により表現し，

$$\sum_i \frac{\mathrm{d}Q_i}{\mathrm{d}t} \iiint_\Omega \psi_i \psi_j \mathrm{d}V + \iint_{\partial\Omega} \psi_j (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \mathrm{d}S - \iiint_\Omega (\nabla \psi_j \cdot \mathbf{F}) \mathrm{d}V = 0, \tag{3}$$

なる弱形式により自由度 Q_i に関する連立常微分方程式に帰着することで系の時間発展を計算する．ここで，Ω は検査体積，$\mathbf{n}$ は単位外向き法線ベクトル．一般的な有限要素法とは異なり，DG 法は式 (2) による基底関数展開を各セル独立に行い，セル境界での物理量の連続条件を課さない．従って，式 (3) の面積分を計算するには近似リーマン解法により数値流束を算出する必要があるが，人工粘性を加えて方程式の型を変えることなく数値安定性を保証することができる．また，有限体積法とは異なりセル内の分布を先天的に有するため，基底関数の次数を上げることで自由に高次精度化することが可能である．

円柱プラズマにアルフベン波を与えて計算した結果を図 1 に示す．この計算では沿磁力線座標を用いることなく非構造格子を使用しているが，内部自由度を持つ DG 法の特性によりメッシュに沿わないモードを精度良く表現できている．本手法はメッシュジェネレータ次第であらゆる形状を表現することが可能であり，炉心の固有モードやダイバータ領域，ディスラプションのように全く異なる MHD 現象を単一のコードで取り扱うことを目指している．

References

[1] S. J. P. Pamela et al., Phys. Plasmas 27, 102510 (2020).

[2] S.C. Jardin et al., J. Comput. Phys. 226, 2146 (2007).

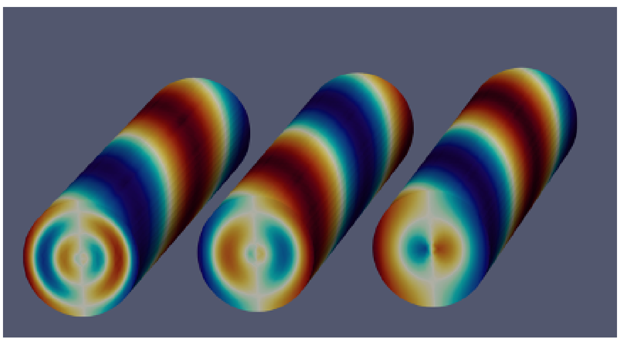

Fig. 1: 非構造格子により円柱プラズマのポロイダル方向速度分布を精度良く再現できる．