

小特集 プラズマにおける非加法的統計力学

5. 非平衡弱電離プラズマにおける電子温度・励起温度

5. Electron and Excitation Temperatures of Weakly Ionized Plasmas in a Non-Equilibrium State

赤塚 洋

AKATSUKA Hiroshi

東京科学大学 総合研究院 ゼロカーボンエネルギー研究所

(原稿受付: 2024 年 12 月 7 日)

非平衡プラズマ中においては、電子エネルギー分布関数や、励起状態数密度分布は、一般に Boltzmann 分布には従わない。そのような非平衡状態に対しても、統計力学的には、エントロピー S と内部エネルギー U を用い、 $1/T = \partial S / \partial U$ として温度 T を定義できる可能性がある。この計算においてはエントロピー最大化の原理が適用されるべきであり、非平衡の場合には Gibbs エントロピーではなく、Tsallis のような非加法的エントロピーやあるいは Rényi のような加法的エントロピーが候補となる。我々は、水素プラズマ中の励起状態密度分布、さらには低温弱電離プラズマの電子エネルギー分布に着目して、その非加法的エントロピーから新たに定義される各種の温度について計算し、巨視的な意味で理解される「各種温度」と、エントロピーを用いて偏微分計算から導出される「統計力学的温度」の関係を検討しており、本章にて紹介する。

Keywords:

non-equilibrium plasma, excited-state population, electron energy distribution function, excitation temperature, Tsallis entropy, statistical physics

5.1 はじめに

衝突輻射モデル (Collisional Radiative model; CR モデル) を適用すれば、第 i 準位の励起状態数密度 n_i ($i \geq 2$) を、電子温度 T_e 及び密度 N_e 並びに原子基底状態の数密度 N_1 を入力として計算することができる。ただし、励起状態分布は一般に Boltzmann 分布には従わない。そのような非平衡状態に対しても、統計力学的には、エントロピー S と内部エネルギー U を用いれば、

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} \quad (1)$$

として、励起状態分布の温度 T を定義できる可能性があると考えられ、そのような非平衡状態での適切な温度の定義を探るような理論的考察を我々は行なってきた [1, 2]。すなわち、Gibbs エントロピー S_G の適用が許されるのであれば、状態 i の存在確率 p_i および Boltzmann 定数 k を用いて、

$$S_G = -k \sum_i p_i \ln p_i, \quad (2)$$

および各準位の励起エネルギーを ϵ_i としてその総和として与えられる原子系の内部 (= 励起) エネルギー

$$U = \sum_i p_i \epsilon_i \quad (3)$$

から S_G, U を求め、適切な制約条件 (全原子数が一定、な

ど) のもとで $S = S_G$ として式 (1) を適用し温度が導出できると考えられる。一般に、系が平衡状態にあって、速度やエネルギーの確率分布関数 $\{p_i\}$ が Boltzmann 分布に従う場合、分配関数を Z とすれば

$$p_i = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{\epsilon_i}{kT} \right) \quad (4)$$

と書けるであろう。 $\{p_i\}$ が (4) で与えられていれば、統計力学に基づき式 (1)–(3) を適用すれば、矛盾なく温度 T を導出できる。式 (1) を用いて計算した温度は、 p_i を Boltzmann プロットし、その傾きから決定した温度と一致する。しかし速度やエネルギーの分布関数が Maxwell 分布や Boltzmann 分布に従わない非平衡状態では、図 1 の様に分布関数を指数関数で表すことができないため、何かしら近似をしない限り Boltzmann プロットの傾きから温度を決定することはできない。

非加法的エントロピーの重要性に気づく以前、本研究の前段階として、我々は弱電離プラズマを対象として、Gibbs のエントロピー S_G と、電子集団のエネルギー U から、次のように温度を計算した [2]。すなわち、電子エネルギー分布関数 (EEDF) $F(\epsilon)$ を解とする Boltzmann 方程式を、酸素や窒素のプラズマに対して立式し、2 項近似を用いて電界方向の一次元問題として換算電界 E/N を入力として求

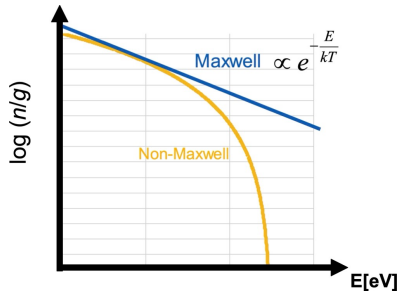


図1 Maxwell 分布と非 Maxwell 分布の Boltzmann プロット [3].

解し、その EEDF $F(\varepsilon)$ から次式で計算される平均電子エネルギー U および Gibbs のエントロピー S_G から温度を算出し種々検討を重ねた。

$$S_G = -k \int_0^\infty F(\varepsilon) \ln[f(\varepsilon)] d\varepsilon, \quad (5)$$

$$U = \int_0^\infty \varepsilon F(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (6)$$

式 (5) で、 ε は電子エネルギー（なお電子エネルギーの様な連続変数に対してはフォントを ε とし、離散変数の ϵ_i と区別した）、 $f(\varepsilon)$ は電子エネルギー確率関数 (Electron Energy Probabilistic Function; EEPF) であり、次式で定義される。

$$f(\varepsilon) = F(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon} \quad (7)$$

しかし、この計算式 (5)–(6) を式 (1) に直接代入すると、エントロピー最大化の原理が考慮されていないことになる。したがって、理論の修正が必要となる。そこで、Tsallis あるいは Rényi のエントロピーなど、定義されたエントロピーがエネルギー一定など各種の制約条件のもとで最大となることが担保されている非加法的あるいは加法的エントロピーが有力候補となる。

我々は、水素プラズマ中の励起状態密度分布 [3] さらには低温弱電離プラズマの電子エネルギー分布 [4–6] に着目して、その Tsallis エントロピーから新たに定義される各種の温度について計算し、巨視的な意味で理解される「各種温度」と、エントロピーを用いて偏微分計算から導出される「非加法的統計力学的温度」の関係を検討したので、本章にて紹介する。

5.2 理論的背景および計算方法

5.2.1 Tsallis 統計

1988 年、Tsallis エントロピー S_q が提唱された [7]。本報告では熱力学との統合のため、Boltzmann 定数 k 倍した値を採用する。まず、 q -指数関数 $\exp_q(x)$ とその逆関数の q -対数関数 $\ln_q(x)$ をそれぞれ次のように定義する。ただし $q \neq 1$ とする。

$$\exp_q(x) \equiv [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (8)$$

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (9)$$

$\ln_q(x)$ は底が q という意味ではない点に留意されたい。こ

れを用いて Tsallis エントロピー S_q を

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1} = -k \sum_i p_i^q \ln_q(p_i) \quad (10)$$

と定義する。Tsallis エントロピー S_q は、分布関数が q -指数関数に従う確率分布に対して見出されたエントロピーであり、Boltzmann 分布である指数分布をべき乗分布へ拡張する際に意味を有する。 S_q は $q \rightarrow 1$ のとき、式 (2) の Gibbs エントロピー $S = -k \sum_i p_i \ln p_i$ に一致する。Tsallis 統計は、宇宙線の流束 [8]、地球磁気圏 [9]、乱流の理論 [10, 11]、電子対消滅 [12]、ブラックホールなどの宇宙物理学 [13, 14]、Bose-Einstein 凝縮 [15]、絶縁破壊 [16]、やプラズマ物理 [17]、など、様々な分野の解析に応用されている。そこでは p_i が q -指数関数に従う場合、Tsallis エントロピーを定義でき、Tsallis 統計に従う温度 T_q を、ワンパラメータ増の温度として決定することができる [18]。Tsallis 統計では、Boltzmann 分布の様な指数分布を、 q -指数関数というべき乗分布を用いて拡張することで、非平衡状態に対応できる点が特徴である。

Tsallis 統計によって導かれる確率分布 p_i は Boltzmann 分布ではなく、べき乗分布に従っている。Tsallis エントロピーを次の条件の元で最大化することで、べき乗の形をした確率分布 p_i を導出できることが示されている。次の 2 つの束縛条件が課された系を考える。

$$\sum_{i=1}^w p_i = 1, \quad (11)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^w p_i^q \epsilon_i}{\sum_{j=1}^w p_j^q} = U_q. \quad (12)$$

なお式 (12) の U_q は q -平均エネルギーと称される。これらの条件下で Tsallis エントロピー S_q を最大化すると確率分布 p_i は、

$$p_i = \frac{1}{Z_q} \exp_q \left[-\frac{\beta}{\sum_{j=1}^w p_j^q} (\epsilon_i - U_q) \right] \quad (13)$$

と表すことができる。上式の Z_q は分配関数に対応し

$$Z_q(\beta) = \sum_{i=1}^w \exp_q \left[-\frac{\beta}{\sum_{j=1}^w p_j^q} (\epsilon_i - U_q) \right] \quad (14)$$

であり、 β は Lagrange 乗数である。式 (13) では、右辺と左辺の両方に p_i が存在し、 p_i は自己参照型関数となっている。この式をラグランジュ乗数法の束縛式で整理すると、

$$p_i = \frac{1}{Z_q(\beta)} \exp_q [-\beta_q (\epsilon_i - U_q)] \quad (15)$$

とまとめられ、式 (15) の分母に現れる分配関数は

$$Z_q(\beta) = \sum_{i=1}^w \exp_q [-\beta_q (\epsilon_i - U_q)], \quad (16)$$

また式 (15) の q -指数関数内の β_q は

$$\beta_q = \frac{q}{q + (1 + \alpha)(1 - q)} \beta \quad (17)$$

となり、 α は規格化定数と関係した Lagrange 乗数である。

β_q は式 (15) においてエネルギーの係数であるから, $T_{q-\beta}$ を α, β, q の関数として

$$T_{q-\beta} \equiv \frac{1}{k\beta_q} \quad (18)$$

と定義すると, 全く別の方法で導かれている物理的温度と言われる温度の式

$$T_{q-Tsallis} = \left(1 + \frac{1-q}{k} S_q\right) \left(\frac{\partial S_q}{\partial U_q}\right)^{-1} \quad (19)$$

と一致することが見出されている [19]. 以上をまとめると, S_q を最大化することにより, p_i として式 (15) の確率分布が得られた. したがって, S_q を含んでいる式 (18) を用いて温度 T_q を計算する場合, p_i は式 (15) の確率分布に従っていないといけないこととなる.

5.2.2 衝突輻射モデル (Collisional-Radiative Model; CR モデル)

本研究では, 放電管内の減圧マイクロ波放電で生成される現実的な弱電離水素プラズマ中の, 水素原子の励起状態をモデルに検討を進めた [20–24]. ガス温度 $T_g = 0.055$ eV, 放電圧力 $P \simeq 133$ Pa, 水素分子解離度 5%, 電子密度 $N_e = 5.0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ を定数として固定し, EEDF は Maxwell 分布を仮定し, 電子温度 $1 \leq T_e [\text{eV}] \leq 10$ の範囲で水素原子の第 j 状態数密度 n_j を計算した [25].

今回 CR-Model で考慮する係数は, 第 i 状態から第 j 状態への電子衝突励起・脱励起 (それぞれの速度定数を $C_{i,j}, F_{i,j}$), 輻射遷移 (遷移確率 $A_{i,j}$), 第 j 状態からの電子衝突電離と第 j 状態への三体再結合・放射再結合 (それぞれの速度定数を S_j, O_j, R_j) である. 水素原子の任意の準位 j のポピュレーション n_j ($j \geq 2$) に対する速度方程式は, プラズマが光学的に薄く共鳴吸収が無視できる場合, プラズマ中の荷電粒子として H^+ イオン及び同密度の電子のみが存在していると考え, 次のような連立常微分方程式で書くことができる.

$$\begin{aligned} \frac{dn_j}{dt} = & \sum_{i < j} C_{i,j} N_e n_i + \sum_{i > j} (F_{i,j} N_e + A_{i,j}) n_i \\ & + (O_j N_e + R_j) N_e^2 \\ & - \left[\left(\sum_{i < j} F_{j,i} + \sum_{i > j} C_{j,i} + S_j \right) N_e + \sum_{i < j} A_{j,i} \right] n_j. \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) に対して準定常 ($d/dt \equiv 0$) 近似が適用できるとし, 励起準位数密度 n_j を T_e, N_e, N_1 の関数として計算した.

5.3 結果及び考察

5.3.1 励起状態確率密度分布の計算結果と q 分布によるフィッティング

励起準位ポピュレーション n_i を求め, 次式で正規化し p_i を求め, E_i vs p_i の片対数プロット, 即ち Boltzmann プロットを図 2 に示す [3].

$$p_i = \frac{n_i/g_i}{\sum_i (n_i/g_i)}, \quad (21)$$

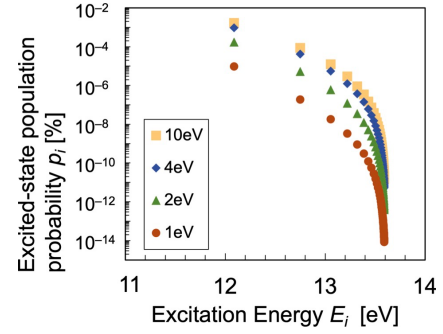


図 2 水素原子励起状態確率分布 p_i の電子温度依存性. ガス温度 $T_g = 0.055$ eV, 圧力 $P = 133$ Pa, 電子密度 $N_e = 5.0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, 解離度 5% [3].

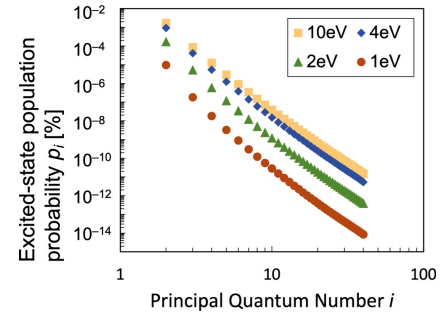


図 3 水素原子励起状態確率分布 p_i を主量子数 i の関数として両対数したプロットの電子温度依存性. 計算条件は図 2 と同一 [3].

ただし g_i は第 i 準位の統計的重みである. 分布関数が Boltzmann 分布とはならないことは明らかである. なお, 図 2 の横軸を主量子数 i と取り直して両対数プロットとして図 3 に示す. こちらは良好な直線状の関係 $\sim p_i \propto i^{-6}$ の分布が見出され, 電離進行プラズマにおける梯子様励起を主たる生成消滅過程とする準位群に相当することが理解される [21].

次に q -分布を用いて励起状態確率分布 p_i のフィッティングを行う. 式 (15) に従う様にフィッティングするのであるが, 先述の通り式 (15) は自己参照型であるため, 定量的計算は面倒となる. 我々は表 1 に示す様な自己無撞着反復法を考案し適用した. 計算結果の一例として, $T_e = 2$ eV の条件でフィッティングを行ったグラフを図 4 に示す. 図 4 から, q -指数分布を使用したフィッティングは, Boltzmann 分布を仮定したフィッティングよりも, 励起状態分布 p_i の非平衡特性をより適切に捉えていることが理解される [3].

5.3.2 統計力学的考察から求められた各種温度の比較

ここまで述べてきたさまざまな温度を計算し比較考察する. 即ち, 確率分布 $\{p_i\}$ の q -指数関数フィッティングの係数として式 (18) から求められる $T_{q-\beta}$, Tsallis エントロピー S_q の q -平均エネルギー U_q (式 (12)) に対する偏微分係数 $\partial S_q / \partial U_q$ を用いて式 (19) から計算される $T_{q-Tsallis}$, および単純に q -平均エネルギーの $2/3$ 倍で定義された平衡時と同様に計算される q -平均温度

表 1 式 (15) から自己参照関数 p_i を解く際の反復スキーム [3].

1: Initialize

$$Z_{q(0)}(\beta) = \sum_{i=1}^W \exp_q(-\beta_q \epsilon_i)$$

$$p_{i(0)} = \frac{1}{Z_{q(0)}(\beta)} \exp_q(-\beta_q \epsilon_i)$$

$$U_{q(0)} = \frac{\sum_{i=1}^W p_{i(0)}^q \epsilon_i}{\sum_{j=1}^W p_{j(0)}^q}$$

2: Iterate $k = 0, 1, 2, \dots$ until convergence

$$Z_{q(k+1)}(\beta) = \sum_{i=1}^W \exp_q[-\beta_q \{\epsilon_i - U_{q(k)}\}]$$

$$p_{i(k+1)} = \frac{1}{Z_{q(k+1)}(\beta)} \exp_q[-\beta_q \{\epsilon_i - U_{q(k)}\}]$$

$$U_{q(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^W p_{i(k+1)}^q \epsilon_i}{\sum_{j=1}^W p_{j(k+1)}^q}$$

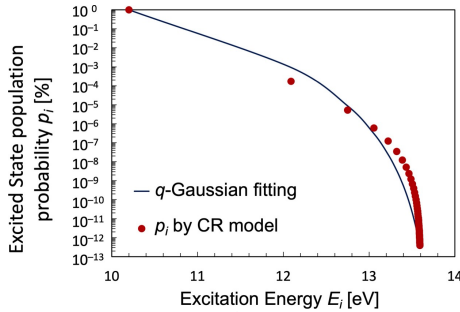
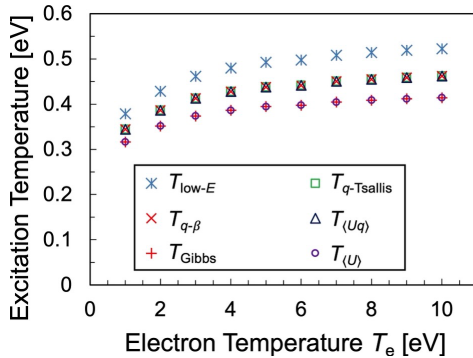
図 4 $T_e = 2$ eV の水素プラズマに対する $q = 0.89$ の q -指数分布を持つ励起状態確率分布 p_i の Boltzmann プロットのフィッティング. T_e 以外の計算条件は図 2 と同一 [3].

図 5 電子温度に対してプロットされた様々な温度の比較. 計算条件は図 2 と同一 [3].

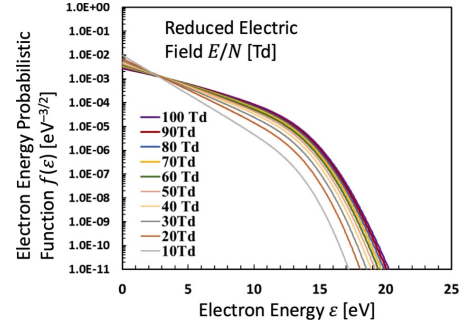
$$T_{\langle U_q \rangle} \equiv \frac{2}{3k} U_q \quad (22)$$

の 3 種の温度を Tsallis 統計の下で考えることができる. さらに, Gibbs 統計のもとで定義される式 (1) で計算される T_{Gibbs} , 並びに平衡時の平均エネルギーの 2/3 倍として単純に係数を乗じて求められる「平均温度」

$$T_{\langle U \rangle} \equiv \frac{2}{3k} U \quad (23)$$

さらには最も低いエネルギー準位間の励起温度として計算される $T_{\text{low-E}}$ を比較したものが図 5 である.

図 5 から, 電子温度の上昇とともに各温度が単調に増加

図 6 BOLSIG+を用い, 換算電界 $30 \leq E/N [\text{Td}] \leq 100$ として計算した弱電離 Ar プラズマの EEPF. 電子密度 $N_e = 2 \times 10^{13} \text{cm}^{-3}$, ガス温度 $T_g = 0.026$ eV, 電離度 0.012% と設定 [4-6].

することが解る. さらに, $T_{q-\text{Tsallis}}$ は厳密に $T_{q-\beta}$ と同一であった. これは Tsallis 統計では既に証明されている事項ではあるが, 弱電離非平衡プラズマ中の水素原子励起状態に関しても確認されたという意義を有し, 大きな意味を持つ. 既知の事実である $T_{q-\text{Tsallis}} = T_{q-\beta}$ のみならず, q -平均温度 $T_{\langle U_q \rangle}$ がこれらと同一の値を取ることが, 少なくとも今回の計算の範囲内で確認された. なお, 図 5 から $T_{\text{Gibbs}} = T_{\langle U \rangle}$ という関係も確認され, Gibbs 統計の妥当性も示していると考えられる. この Gibbs-Boltzmann の統計力学を拡張した非加法的 Tsallis 統計においても, $T_{q-\text{Tsallis}} = T_{q-\beta} = T_{\langle U_q \rangle}$ が確認されたことの意義は大きいと考えられる.

5.4 連続変数系 - 電子エネルギー分布関数と電子温度解析への展開の可能性

前節では, 離散エネルギー系である原子励起状態を対象として, 非平衡プラズマ中の Tsallis 統計の有用性を議論した. 一方エネルギー変数が連続値となる電子集団に対しても, 前節の手法・議論は, 有用であると期待される. 電子エネルギー確率関数 EEPF(7) を記述する Boltzmann 方程式から EEPF を求め, Tsallis エントロピーはもちろん, Rényi エントロピーをも対象として, 各種温度を算出し議論する様な研究を, 現在進行させている [4-6].

一例として, 低温弱電離アルゴンプラズマを対象として, 2 項近似を施した Boltzmann 方程式を解き, 弾性・非弾性の各種衝突を含めて数値的に EEPF を求めるフリーウェアである BOLSIG+を用いて [26], 換算電界 $10 \leq E/N [\text{Td}] \leq 100$ の範囲で EEPF を求めた例を図 6 に示す. 得られた EEPF が Maxwell 的でないことは明らかである.

この図 6 の EEPF を, 式 (15) の p_i を f と書き換えることで, Tsallis 統計の q 分布でフィッティングすることができ, 前節と同様の議論により 3 種類の温度 $T_{q-\text{Tsallis}}, T_{q-\beta}, T_{\langle U_q \rangle}$ を求めることができる. その結果を図 7 に示した. なお, 同図には, Rényi 統計により計算した各種温度も合わせて示す. すなわち, 加法的統計の一つである Rényi 統計によれば, 式 (11) および (3) の制約条件の下で (註: Rényi 統計の場合は (12) ではなく (3) によ

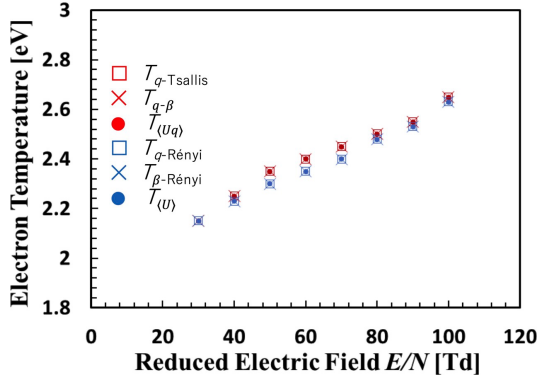


図7 非加法的および加法的統計力学を用いて算出した電子温度の比較 [4-6].

る) 以下の Rényi エントロピー

$$S_{R-q} = -k \frac{\ln \sum_i p_i^q}{1-q} \quad (24)$$

を最大にする分布が, 以下の Rényi 統計の q -分布として得られることが示されている [27].

$$p_i \propto \left[1 - \beta_R \frac{q-1}{q} (\epsilon_i - E) \right]^{\frac{1}{q-1}}. \quad (25)$$

また, 図6の EEPF を Rényi の q -分布 (25) でフィッティングすることで式 (25) 中の β_R を決めることができれば, Rényi 統計においても以下の3つの温度を定義できることとなり, 実はこれら3つの温度は一致することがすでに示されている [28].

$$T_{q\text{-Rényi}} = \left(\frac{\partial S_{R-q}}{\partial U} \right)^{-1}, \quad (26)$$

$$T_{\beta\text{-Rényi}} = \frac{1}{k\beta_R}, \quad (27)$$

$$T_{\langle U \rangle} = \frac{2}{3k} U. \quad (28)$$

以上まとめて, Tsallis 及び Rényi 統計のべき乗確率分布を用いてフィッティングを行い, 非加法的および加法的統計力学に基づく温度を算出しまとめた結果を図7へ示す. 以上示した様に, 本研究のプラズマパラメータの場合, Tsallis 統計及び Rényi 統計力学からそれぞれ導出された3つの温度は良好な一致, すなわち

$$T_{q\text{-Tsallis}} = T_{q-\beta} = T_{\langle Uq \rangle}, \quad (29)$$

$$T_{q\text{-Rényi}} = T_{\beta\text{-Rényi}} = T_{\langle U \rangle} \quad (30)$$

を示し, 非加法的あるいは加法的統計力学の範囲内で, 矛盾のない温度が導かれることが確認された [4-6].

5.5 おわりに

著者は従来, 主に産業応用を旨とする非平衡プラズマ分光計測の研究を様々に行ってきた. その温度計測からさまざまな非平衡性に気づき, 「温度とは何か?」という基礎物理学の問題にも興味を持つに至った. その結果, 情報工学基礎論と統計力学に基づく本研究の様な課題にも取り組んでいる.

プラズマ分光学やプラズマ物理学において, 本小特集に

示されるように, 天文学や地球惑星物理学, 統計物理学や非線形微分方程式論などとも, 産業応用向けの非平衡プラズマには接点があり, その方向性を非常に興味深く感じている. 応用工学発の成果を抽象化し, 普遍化・一般化し純粋物理学へと帰還させる活動に, 「学術」として意義があると確信しており, 今後も本研究を継続していきたい. この様に産業応用から若干の距離のある理学的分野に対し, 工学系の方々も関心を抱かれることを願っている.

謝 辞

本研究は JSPS 科研費 22K03566 の助成を受けたものである. また本章の成果の多くは東京科学大学 博士後期課程学生 菊池浩司氏による. 記して謝意を表する.

参 考 文 献

- [1] 田中 昌徳, 赤塚 洋: Plasma Conference 2014 オンライン予稿集, 21PA-039 (2014).
- [2] H. Akatsuka and Y. Tanaka, Entropy **25**, 276 (2023).
- [3] K. Kikuchi and H. Akatsuka, Entropy **25**, 1400 (2023).
- [4] 菊池 浩司, 赤塚 洋: 第41回プラズマ・核融合学会 年会オンライン予稿集, 17Bp08 (2024).
- [5] 菊池 浩司, 赤塚 洋: 令和6年度 放電学会年次大会 講演論文集, A-5 (2024).
- [6] K. Kikuchi and H. Akatsuka, Phys. Rev. E **112**, 015201 (2025).
- [7] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- [8] C. Tsallis *et al.*, Phys. Lett. A **310**, 372 (2003).
- [9] G.P. Pavlos *et al.*, Physica A **390**, 2819 (2011).
- [10] B.M. Boghosian, Phys. Rev. E **53**, 4754 (1996).
- [11] C. Beck *et al.*, Phys. Rev. E **63**, 035303 (2001).
- [12] I. Bediaga *et al.*, Physica A **286**, 156 (2000).
- [13] C. Tsallis, Entropy **22**, 17 (2019).
- [14] S. Nojiri *et al.*, Phys. Rev. D **105**, 044042 (2022).
- [15] A. Guha, and P.K. Das, Phys. A Stat. Mech. Its Appl. **497**, 272 (2018).
- [16] L. Enciso *et al.*, J. Stat. Mech. **2019**, 094011 (2019).
- [17] J.L. Reis Jr *et al.*, Physica A **404**, 192 (2014).
- [18] C. Tsallis *et al.*, Physica A **261**, 534 (1998).
- [19] H. Suyari, Prog. Theor. Phys. Suppl. **162**, 79 (2006).
- [20] T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **47**, 265 (1979).
- [21] T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **47**, 273 (1979).
- [22] T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **49**, 1561 (1980).
- [23] T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **49**, 1569 (1980).
- [24] T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, 2905 (1985).
- [25] Y. Shimizu *et al.*, IEEE Trans. Plasma Sci. **43**, 1758 (2015).
- [26] G.J.M. Hagelaar and L.C. Pitchford, Plasma Sources Sci. Technol. **14**, 011 (2005).
- [27] A. Rényi, Contrib. Theor. Stat. **4.1**, 547 (1961).
- [28] A.G. Bashkurov, Theor. Math. Phys. **149**, 1559 (2006).