

## 小特集 プラズマにおける非加法的統計力学

## 2. Tsallis エントロピーとマルチフラクタル構造

## 2. Tsallis Entropy and Multi-Fractal Structures

須鎗 弘樹

SUYARI Hiroki

千葉大学大学院情報学研究院

(原稿受付: 2025 年 1 月 20 日)

本稿では、Tsallis エントロピーの起源から始め、Tsallis エントロピーと Rényi エントロピーの直接的関係、Tsallis エントロピーの背景にある基本的な非線形微分方程式の存在、そして、その非線形微分方程式から、マルチフラクタルも含め、いかに、Tsallis 統計の主要な結果が導かれるのかを述べる。

Keywords:

Tsallis entropy, Rényi entropy, multi-fractal,  $q$ -exponential, thermodynamic relation

## 2.1 Tsallis エントロピーの起源

今日、非加法的統計力学の代表例として、Tsallis 統計が知られている。これは、1988 年に、Boltzmann-Gibbs 統計の一般化のために、物理学者 Constantino Tsallis が導入したエントロピーが起源である [1]。情報数理が専門である筆者から言えば、Boltzmann-Gibbs 統計の最大の特徴は、系の独立性である。それゆえ、その適用範囲は、独立性からの僅かなずれを許容する範囲内に限定される。つまり、対象とする物理系の相互作用は短距離である。数学的に言えば、Boltzmann-Gibbs 統計は、指数関数族による統計力学である。これに対して、複雑系などで広く知られる、異常統計、べき乗則、スケールフリー、ロングテールなどの特徴は、長距離相関などが特徴であり、べき関数族の統計力学である。Tsallis は、これらの特徴を捉えられるように、マルチフラクタルに着目して、一般化エントロピーを提案した [1]。

Tsallis 統計の起源となった論文 [1] の 1 ページ目に、マルチフラクタルを背景に Tsallis エントロピー  $S_q^{\text{Tsallis}}$  を提案することが書かれている。しかし、そこには、導出過程の記載はない。

$$S_q^{\text{Tsallis}}(p_1, \dots, p_n) := \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_i^q}{q-1} \quad (1)$$

ここで、 $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$  で、 $q \rightarrow 1$  のとき、Shannon エントロピーに一致する。

2009 年に、筆者が、Tsallis らを招待した国際ワークショップを京都で開催した際、京都に到着された日の昼食時に、他の招待講演者も交えて、直接、ご本人に、Tsallis エントロピーの発見の経緯を尋ねた。ご自身曰く、ある会

議で、研究者が議論しているのを少し遠目で見ているとき、ホワイトボードの数式の多くに、 $p_i^q$  あるいは  $\sum_i p_i^q$  が書かれていることに気づき、これをエントロピーの式に使えないかと思ったことがきっかけだったとのことである。実際、そのときの導出は、ご自身によって、[2] に書かれており、直観的な導出であったことがわかる。Tsallis エントロピーとほぼ同等の式は、情報理論の世界では、すでに導かれていたが [3, 4]、Boltzmann-Gibbs 統計の一般化のために、Jaynes の最大エントロピー原理の枠組み [5] で、Tsallis エントロピーの最大化を用いたのは、筆者の知る限り、1988 年の Tsallis の論文 [1] が初めてであったと思う。

## 2.2 Rényi エントロピーとの関係

マルチフラクタルを背景に、Tsallis エントロピーが生まれたのであれば、当時、マルチフラクタルの分野で、すでによく知られていた Rényi エントロピー [6] との関係を知るのは自然であろう。先の京都での会話で、当時、Rényi エントロピーがすでに知られていたのではと尋ねたところ、皆にそう言われたそうだが、ご本人は査読者の指摘で、初めて知ったとのことである。

実は、Rényi エントロピーと Tsallis エントロピーの間には、次のような簡潔な関係がある [7]。

$$\exp\left(S_q^{\text{Rényi}}(p_i)\right) = \exp_q\left(S_q^{\text{Tsallis}}(p_i)\right) \quad (2)$$

$$= \exp_{1/q}\left(S_{1/q}^{\text{Tsallis}}(P_i)\right) \simeq \varepsilon^{-D_q} \quad (3)$$

ここで、 $S_q^{\text{Rényi}}$  は、Rényi エントロピー：

$$S_q^{\text{Rényi}}(p_1, \dots, p_{n(\varepsilon)}) := \frac{\ln \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q}{1-q}, \quad (4)$$

$\exp_q$  は  $q$ -指数関数と呼ばれ、 $1 + (1 - q)x > 0$  のときに、

$$\exp_q(x) := (1 + (1 - q)x)^{\frac{1}{1-q}} \quad (5)$$

で定義される。なお、この逆関数の  $q$ -対数関数  $\ln_q$  は、 $x > 0$  に対して、

$$\ln_q x := \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (6)$$

で定義される。 $q$ -指数関数も  $q$ -対数関数も、 $q \rightarrow 1$  のとき、それぞれ、通常の数値関数と対数関数に一致する。また、(3)における  $\{P_i\}$  は、 $\{p_i\}$  のエスコート分布と呼ばれ、次で定義される。

$$P_i := \frac{p_i^q}{\sum_j p_j^q} \quad (7)$$

(3) の  $D_q$  は、与えられた集合  $A \subset \mathbb{R}^n$  の一般化次元 [8-10] であり、(4) の  $n(\varepsilon)$  は、対象としている集合  $A$  を直径  $d(V) = \varepsilon$  の  $V \subset \mathbb{R}^n$  で被覆したときの数である。このとき、(2),(3)における Tsallis エントロピーでは、 $n$  を  $n(\varepsilon)$  で置き換えている。(3)における  $\simeq$  は、 $\varepsilon$  が十分に小さい時に、ほぼ等しくなるという意味である。

式 (2),(3) の関係は、有名なボルツマンの関係式  $S = k_B \ln W$  を変形したアインシュタインの関係式 [11] :

$$\exp(S) = W \quad (8)$$

の拡張になっている (簡単のため、ボルツマン定数  $k_B = 1$  とおいた)。つまり、Rényi エントロピーと Tsallis エントロピーの違いは、同じ微視的な状態数  $W_q := \varepsilon^{-D_q}$  に対して、とる対数の違いだけである。

$$S_q^{\text{Rényi}} = \ln W_q, \quad S_q^{\text{Tsallis}} = \ln_q W_q \quad (9)$$

次元という意味 (この場合、一般化次元  $D_q$ ) では、状態数の対数  $\ln$  をとるのは、自然であろう。また、Rényi エントロピーは、通常対数  $\ln$  をとっているがゆえに、加法的である。対して、Tsallis エントロピーは、 $q$ -対数  $\ln_q$  をとっているがゆえに、非加法的である。しかも、Tsallis エントロピーは、数理的な意味で、極めて自然なエントロピーである。そのことを次で述べる。

### 2.3 基本的な非線形微分方程式から導かれる Tsallis エントロピー

Tsallis エントロピーが、導出過程なく与えられ、その最大化で得られる  $q$ -指数関数を中心に、Boltzmann-Gibbs 統計の一般化という理論展開 (特に、Legendre 変換構造 [12]) と、 $q$ -指数関数による観測データの説明から、多くの論文が生まれてきた。しかし、同時に、多くの研究者が Tsallis エントロピーを懐疑的に思うのは致し方なかった [13]。なぜなら、そもそも、Tsallis エントロピーの導出の背景が直観的で、なぜ、Tsallis エントロピーを使うのかという素朴な疑問に対して、Tsallis 統計が、Legendre 変換構造 [12] などの望ましい性質を満たしているなど間接的な解答はできても、当時、誰も直接的な解答を持ち合わせていなかっ

たからである。

筆者も、当初、なぜ、このエントロピーを使うのか懐疑的であったが、本稿で簡潔に述べるように、数学的に疑いようなない理論的背景が存在することを見つけた。結論から書けば、Tsallis 統計とは、最も簡潔な非線形微分方程式 :

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (10)$$

の数理である。つまり、この非線形微分方程式 (10) から、Tsallis 統計の数々の理論的結果が自然に導かれる。

非線形微分方程式 (10) は、変数分離形の非線形微分方程式なので、解析的に解くことができる。ただし、初期値は、 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, y_0 > 0$  を満たすものとする。(10) を、通常の数値関数の一般化を特徴づける微分方程式として解くと、

$$\frac{y}{\exp_q(C)} = \exp_q\left(\frac{x}{(\exp_q(C))^{1-q}}\right) \quad (11)$$

を得る。ここで、 $C$  は、 $1 + (1 - q)C > 0$  を満たす積分定数で、初期条件で決まり、 $C = \ln_q y_0 - x_0$  である。この導出より、以後、 $q$ -指数関数  $\exp_q$  と  $q$ -対数関数  $\ln_q$  が中心的な役割を演じる。なお、出発点となる非線形微分方程式 (10) の解が  $q$ -指数関数であることを見つけたのは、Tsallis 自身である [14, 15]。しかし、そこでは、初期条件として、 $(x_0, y_0) = (0, 1)$  を採用している。つまり、 $C = 0$  である。このとき、 $q$  の値に関係なく  $\exp_q(C) = 1$  であり、非線形微分方程式 (10) が本来持っているスケールが見えない。

通常の数値関数の基本的な法則として、指数法則が知られているように、 $q$ -指数関数  $\exp_q$  に対しても、同様の指数法則が満たされるように新しい演算  $q$ -積  $\otimes_q$  を導入する [16, 17]。

$$\exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y) = \exp_q(x + y) \quad (12)$$

あるいは、

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q x + \ln_q y. \quad (13)$$

$q$ -指数関数  $\exp_q$  の定義が (5) でわかっているのだから、 $q$ -積  $\otimes_q$  の定義を具体的に書き下せるが、省略する。

ここで、 $q$ -積の物理的な意味を与えておく [18]。(12) の右辺の  $x + y$  があるように、 $x$  と  $y$  は、同じスケール (物差し) 上の値なので、 $x + y$  という和の演算が可能という当然のことに着目する。実際、通常の数値関数を用いて、 $\exp_q(x + y) = \exp_q(x) \exp_q\left(\frac{y}{1 + (1 - q)x}\right)$  と書けるが、 $x$  と  $\frac{y}{1 + (1 - q)x}$  は、もはや同じスケール (物差し) 上の値ではない。 $x$  と  $y$  それぞれに、エネルギーなどの物理的な単位を考えれば、 $x$  はエネルギーの単位であり、 $\frac{y}{1 + (1 - q)x}$  は、エネルギーの比なので単位を持たない。つまり、 $\exp_q(x + y)$  を、同じスケール (物差し) 上の値に分割するのが、 $q$ -積である。よって、非線形微分方程式 (10) で支配される物理系を各エネルギーごとに  $q$ -積で分割する場合の数を考え

ることができる。その基本となるのは、次の有名な関係である。

$$\ln \binom{n}{n_1 \dots n_k} \simeq n S_1 \left( \frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right). \quad (14)$$

$\binom{n}{n_1 \dots n_k}$  は多項係数,  $n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$  は,  $n = \sum_{i=1}^k n_i$  を満たす自然数,  $\simeq$  はスターリングの近似,  $S_1$  は, Shannon エントロピーを表す. この定式化と同様に,  $q$ -積  $\otimes_q$  とその逆演算である  $q$ -比  $\oslash_q$  (すなわち,  $\exp_q(x) \oslash_q \exp_q(y) = \exp_q(x-y)$ ,  $\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q x + \ln_q y$ ) を用いて  $q$ -多項係数  $\binom{n}{n_1 \dots n_k}_q$  を定義する. さらに,  $\ln_q n!_q := \sum_{i=1}^n \ln_q i$  に対する  $q$ -スターリングの公式 ( $q \neq 2$  のとき) は, 次のように求まる.

$$\ln_q(n!_q) \simeq \frac{n}{2-q} \ln_q n - \frac{n}{2-q} \quad (15)$$

$q \rightarrow 1$  のとき, 通常スターリングの公式に一致する. (14) と同様に, この  $q$ -スターリングの公式を  $q$ -多項係数に適用すると, 次を得る ( $0 < q < 2$  のとき) [19].

$$\ln_q \binom{n}{n_1 \dots n_k}_q \simeq \frac{n^{2-q}}{2-q} \cdot S_{2-q}^{\text{Tsallis}} \left( \frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right). \quad (16)$$

$q = 2$  のとき,  $\ln_q n!_q$  に対する  $q$ -スターリングの公式は  $\ln_q n!_q \simeq n - \ln$  で,  $q$ -多項係数に適用すると, (16) の右辺は,  $-S_0(n) + \sum_{i=1}^k S_0(n_i)$ ,  $S_0(n) := \ln n$  となる. なお, 最近, (16) の結果について, 解析接続を用いた, より正確な式が報告されている [20].

以上より, 非線形微分方程式 (10) から,  $q$ -指数関数  $\exp_q$  と  $q$ -対数関数  $\ln_q$  を得, これらの数値から, 非線形微分方程式 (10) に対応するエントロピーとして, Tsallis エントロピーが一意に得られた. Rényi エントロピーなど, 最大化して  $q$ -指数関数  $\exp_q$  が得られる一般化エントロピーがあるが,  $q$ -指数関数  $\exp_q$  を特徴づける非線形微分方程式 (10) から出発すると, 対応するエントロピーは, Rényi エントロピーなど他の一般化エントロピーではなく, Tsallis エントロピーであることがわかる. しかも, 後に述べる加法的双対性  $q \leftrightarrow 2 - q$  が自然に現れている.

### 2.4 熱力学的関係

Jaynes が最大エントロピー原理の枠組みで, Boltzmann-Gibbs 統計を再構築したとき [5] と同じように, Tsallis は, 提案したエントロピー  $S_q$  を最大化し, Boltzmann-Gibbs 統計を一般化した. しかし, エントロピーの起源は, (14) あるいは (16) のような多項係数で表される場合の数である. つまり, 与えられた条件のもとで, どのような配分  $(n_1, \dots, n_k)$  が支配的なのか, つまり, 平衡状態は何かを問題にしている. これは, 歴史的にも, Wallis による Jaynes のアプローチの裏付けがある ( [21] の 11.4 節参照). ただ, 1988 年当時には, (16) の関係は, まだ発見されてい

なかった.

(16) の関係に従えば, 条件  $\sum_{i=1}^k p_i = 1, \sum_{i=1}^k \varepsilon_i p_i = U_1$  の下で,  $S_{2-q}$  を最大化する. このとき,  $\Phi_1(p_i, \alpha, \beta) := S_{2-q} - \alpha \left( \sum_{i=1}^k p_i - 1 \right) - \beta \left( \sum_{i=1}^k p_i (\varepsilon_i - U_1) \right)$  の極値問題を解くことになり, 次の熱力学的関係が得られる [22,23].

$$\frac{\partial S_{2-q}}{\partial U_1} = \beta \quad (17)$$

一方, 期待値に関する変遷を経て, 条件  $\sum_{i=1}^k p_i = 1, \sum_{i=1}^k \varepsilon_i p_i = U_q$  の下で,  $S_q$  の最大化が最もよく知られている. ここで,  $\{P_i\}$  は,  $\{p_i\}$  のエスコート分布 (7) である. このとき,  $\Phi_q(p_i, \alpha, \beta) := S_q - \alpha \left( \sum_{i=1}^k p_i - 1 \right) - \beta \left( \sum_{i=1}^k p_i (\varepsilon_i - U_q) \right)$  の極値問題を解くことになり, 次の熱力学的関係が得られる [12].

$$\frac{\partial S_q}{\partial U_q} = \beta \quad (18)$$

(17), (18) からわかるように,  $\frac{\partial S_{2-q}}{\partial U_1}$  も  $\frac{\partial S_q}{\partial U_q}$  もそれぞれの未定数  $\beta$  と一致し, 熱力学的関係  $\frac{\partial S_1}{\partial U_1} = \beta = \frac{1}{T}$  ( $T$  は温度) の自然な拡張になっていることがわかる.

ここで, 少し注意が必要である.  $S_{2-q}$  も  $S_q$  も, 上の最大化で得られる最大エントロピー分布 (Tsallis 統計の文脈では,  $q$ -カノニカル分布ともいう) は,

$$p_i^* = \frac{\exp_q(-\beta_q(\varepsilon_i - U))}{Z_q} \quad (19)$$

と求めることができるが,  $\beta_q$  が少し異なる. (いずれの場合も,  $q \rightarrow 1$  のとき,  $\beta_q \rightarrow \beta$  である.)

$$\beta_q = \begin{cases} \frac{\beta}{1 - \alpha + q\alpha} & S_{2-q} \text{ を最大化したとき} \\ \frac{q\beta}{q + (1 + \alpha)(1 - q)} & S_q \text{ を最大化したとき} \end{cases} \quad (20)$$

ここで,  $\alpha$  は,  $\sum_{i=1}^k p_i = 1$  に関する未定数である. 導出の詳細などは, [24] を参照.

### 2.5 $q$ -Gauss 分布

論文 [16,17] で,  $q$ -積が発表された時, 筆者が最初に  $q$ -積を応用したのは, (16) ではなく, Gauss の誤差法則の一般化であった [25]. なぜなら,  $q$ -積は独立性の拡張とも考えられ, 量子確率論の世界で, 複数の独立性が存在し, それぞれに付随する中心極限定理が重要な話題になっていたからである [26,27].

よく知られている Gauss の誤差法則は, 独立に観測された観測値  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$  に対して, 尤度関数  $L_1(\theta) := f(\theta - x_1) \dots f(\theta - x_n)$  が算術平均  $\theta^* := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$  で最大となるとき, つまり, このときが最も尤もらしいとき, 誤差が従う分布  $f$  (確率密度関数) として Gauss 分布が得られる. 正規分布は, Gauss が天体の観測において, 誤差に着目して最初に発見したので, Gauss 分布とも呼ばれる. 当時の Gauss の導出を現在の統計の言葉で書き直した方法

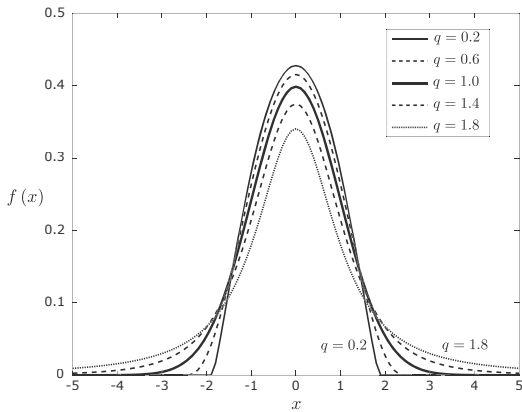


図1 q-Gauss 分布

が、尤度関数による導出である。この一般化として、 $q$ -積を用いて、 $q$ -尤度関数  $L_q(\theta) := f(\theta - x_1) \otimes_q \dots \otimes_q f(\theta - x_n)$  を定め、同様の手順をとると、次の  $q$ -Gauss 分布が得られる。

$$f(e) = \frac{\exp_q(-b_q e^2)}{\int \exp_q(-b_q e^2) de} \quad (21)$$

ただし、 $L_q(\theta)$  の  $\theta = \theta^*$  における最大性より、 $b_q > 0$ 。この  $q$ -Gauss 分布は、確率とエスコート分布 (7) による分散一定の条件の下で、Tsallis エントロピー (1) の最大化により、既に求められていた [28,29]。

誤差法則で求めた (21) に、エスコート分布 (7) による分散 ( $\sigma^2$ ) 一定の条件を課すと、 $b_q = 1/(3-q)\sigma^2$  と求まる (図 1 では  $\sigma^2 = 1$ )。  $q$ -Gauss 分布の典型例として、 $q = 1$  のときは Gauss 分布、 $q = 2$  のときは Cauchy 分布、 $q = 1 + \frac{2}{n+1}$  のときは自由度  $n$  の  $t$ -分布がある。

これらの結果からわかるように、誤差法則の一般化による  $q$ -Gauss 分布は、Tsallis エントロピー (1) の最大化による分布と一致する。しかも、誤差法則の一般化による方法では、エントロピーもエスコート分布も不要で、非線形微分方程式 (10) だけで導かれる。これらの結果より、 $q$ -積の有効性が明らかであろう。

### 2.6 Tsallis 統計の 4 つの数理

非線形微分方程式 (10) を解いて、 $q$ -対数関数、 $q$ -指数関数、 $q$ -積、 $q$ -スターリングの公式、 $q$ -多項係数の順番に定式化し、 $q$ -多項係数と Tsallis エントロピーの 1 対 1 の関係 (16) を得た。 (16) のように、 $q$  と  $2-q$  を入れ替えても成り立つので、そのような性質は、加法的双対性  $q \leftrightarrow 2-q$  と呼ばれる。 (3) からわかるように、乗法的双対性  $q \leftrightarrow 1/q$  も知られていた。そこで、この乗法的双対性も表現できるように (16) を一般化したところ、その副産物として、それ以前に理論的に知られていた  $q$  とマルチフラクタルとの関係 (著者は、これをマルチフラクタルトリプレットと呼んでいる)、ならびに、Tsallis が予想として発表していた  $q$ -トリプレット [15] も解析的に得られる [7]。つまり、Tsallis 統計力学における代表的な 4 つの数理構造 (加法的双対性、乗法的双対性、マルチフラクタルトリプレット、

$q$ -トリプレット) は従来は別々に扱われてきたが、これらは (16) の一般化により、たった 1 つの式 (23) に統合でき、これら 4 つの数理構造は、その特別な場合であることがわかった [7]。

ここでは、その結果のみを簡潔に紹介しておく。乗法的双対性が現れるのは、(3) からわかるように、エスコート分布 (7) が現れるときであることに注目する。そこで、(15)(16) の結果において、各  $n$  を  $n^\nu$  に拡張する (ただし、 $\nu \neq 0$ )。このとき、 $\ln_q n!_q := \sum_{i=1}^n \ln_q i$  の拡張として、 $\ln_\mu n!_{(\mu,\nu)} := \sum_{i=1}^n \ln_\mu i^\nu$  に対する  $q$ -スターリングの公式 ( $\nu(1-\mu) + 1 \neq 0$  のとき) :

$$\ln_\mu n!_{(\mu,\nu)} \simeq \frac{n \ln_\mu n^\nu - \nu n}{\nu(1-\mu) + 1} \quad (22)$$

が計算できる。これを  $(\mu, \nu)$ -多項係数  $\binom{n}{n_1 \dots n_k}_{(\mu,\nu)}$  に適用すると、次の関係が得られる。

$$\nu(1-\mu) + 1 = q \quad (> 0) \quad (23)$$

のとき、

$$\frac{1}{\nu} \ln_\mu \binom{n}{n_1 \dots n_k}_{(\mu,\nu)} \simeq \frac{n^q}{q} \cdot S_q \left( \frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right). \quad (24)$$

なお、 $q = 0$  のときは、加法的双対性により (16) における  $q = 2$  のときと同じ結果になる。また、 $q = 1$  のとき、(23) と  $\nu \neq 0$  より  $\mu = 1$  となり、(14) に帰着することがわかる。

先に述べた 4 つの数理構造は、 $\nu$  の設定によって、次のように再現できる。

- (i)  $\nu = 1$  のとき : (23) より  $\mu = 2-q$  となり、(16) が得られる。つまり、加法的双対性  $q \leftrightarrow 2-q$  の表現である。
- (ii)  $\nu = q$  のとき : (23) より  $\mu = 1/q$  となり、 $(\mu, \nu) = (1/q, q)$ 。このとき、(24) は、乗法的双対性  $q \leftrightarrow 1/q$  を表す。つまり、 $q$  と  $1/q$  を入れ替えても (24) が成り立つ。
- (iii)  $\nu = 2-q$  のとき : (23) より  $\mu = (3-2q)/(2-q)$  となり、 $(\mu, \nu, q) = ((3-2q)/(2-q), 2-q, q)$ 。この結果に先立ち、Tsallis は  $q$  には 3 種類  $q_{sen}, q_{rel}, q_{stat}$  があり、この 3 つ組を  $q$ -トリプレットと呼んだ [15]。

$q_{sen}$  の  $sen$  は sensitivity を表し、リアプノフ指数  $\lambda_1$  の特徴付けである  $d\xi/dt = \lambda_1 \xi$  を先の (10) と同様に

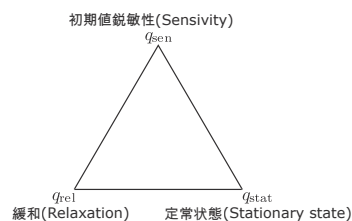


図2 q-トリプレット ( $q_{rel} + \frac{1}{q_{sen}} = q_{stat} + \frac{1}{q_{rel}} = 2$ )



$d\xi/dt = \lambda_q \xi^q$  と拡張したときの  $q$  を表す.  $q_{\text{rel}}$  の rel は relaxation を表し, 物理量  $\Omega$  の緩和時間  $\tau_1$  の特徴付けである  $d\Omega/dt = -\Omega/\tau_1$  を  $d\Omega/dt = -\Omega^q/\tau_q$  と拡張したときの  $q$  を表す.  $q_{\text{stat}}$  の stat は stationary state を表し, Tsallis エントロピー最大化で現れる  $q$  を表す. 特に, 論文 [30] の脚注で, これら 3 つの  $q$  の間には,  $q_{\text{rel}} + 1/q_{\text{sen}} = 2, q_{\text{stat}} + 1/q_{\text{rel}} = 2$  の関係があることを数値計算から予想していた. 実は, これら 2 つの関係式より, ここで求めた  $(\mu, \nu, q)$  と  $(q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}}, q_{\text{stat}})$  の間には,  $(\mu, \nu, q) = (1/q_{\text{sen}}, 1/q_{\text{rel}}, q_{\text{stat}})$  の関係があることを容易に確かめることができる.

(iv)  $\nu = 1/q$  のとき: (23) より  $1/(1-\mu) = 1/(q-1) - 1/q$  を得る. これは, 論文 [31] において理論的に導かれていた  $1/(1-q_{\text{sen}}) = 1/\alpha_{\text{min}} - 1/\alpha_{\text{max}}$  において,  $\alpha_{\text{max}} - \alpha_{\text{min}}$  を 1 にリスケールした結果に一致する. ここで,  $\alpha_{\text{max}}, \alpha_{\text{min}}$  は, マルチフラクタルの理論で現れる  $f(\alpha)$  スペクトルにおいて  $f(\alpha) = 0$  を満たす局所次元  $\alpha$  ( $\alpha_{\text{min}} < \alpha_{\text{max}}$ ) である.

以上のように, Tsallis 統計の代表的な 4 つの数理解造は (23) と (24) の式で統一的に表現できる. つまり, (23) より, Tsallis エントロピー  $S_q$  の  $q$  は  $\mu$  と  $\nu$  で定まる.

べき指数を決める  $q$  が, 何によって決まるのかという点は, この分野の多くの研究者が関心をもつ. (23) は, その一つの解答になっている. 今後, ここで述べた 4 つの数理解造以外にも, Tsallis エントロピー  $S_q$  の  $q$  を決める構造が現れるかもしれないが, 式 (24) を満たすことが予想される.

## 2.7 まとめ

Tsallis 統計の基礎であり, また, 出発点となった Tsallis エントロピーを中心に, その基礎数理について述べてきた. 時間軸で追えば, Tsallis エントロピーの提案が最初であったが, その背後には, 非線形微分方程式 (10) があることがわかっていただけたかと思う. そのため, Tsallis 統計の適用範囲は, 統計力学に限らない. たとえば, 本稿で出てくる  $q$ -Gauss 分布 (21) は, 数理統計学の検定で重要な  $t$ -分布そのものである.

一方で, Boltzmann-Gibbs 統計で実験データを説明できず, かつ, データが示す分布がべき乗則にしたがう場合, 適切な  $q$  を選べば, そのデータをこの数理の枠組みで説明できる可能性は高くなる. ある程度, データフィッティングの操作をすることは避けられそうにないが, 本稿の数理の枠組みを使えば, その整合の意味を深く理解する助けになるだろう.

なお, ここでは, Tsallis 統計を扱ったが, Tsallis エントロピー以外にも, 一般化エントロピーは, 数多く提案されている. 私が国際会議で見た範囲では, 約 20 個ぐらいの一般化エントロピーはあったと思われ, その多くは, エントロピーを特徴づける公理系から始まり, 適当な条件下で,

そのエントロピーを最大化することにより, 大統一理論の志向なのか, より一般的なカノニカル分布を網羅していることを示すものが少なくない. しかし, Tsallis エントロピーのように, 非線形微分方程式 (10) のような基本的な微分方程式に立脚できる非加法的統計力学は, 筆者の知る限り, 未だ見つかっていない.

## 参考文献

- [1] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- [2] M. Gell-Mann and C. Tsallis, eds., *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications* (Oxford Univ. Press, New York, 2004).
- [3] J.H. Havrda and F. Charvát, Kybernetika **3**, 30 (1967).
- [4] Z. Daróczy, Inf. Control **16**, 36 (1970).
- [5] E.T. Jaynes, Phys. Rev. **106**, 620 (1957); Phys. Rev. **108**, 171 (1957).
- [6] A. Rényi, Proc. of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability (1960) p.547.
- [7] H. Suyari and T. Wada, Physica A **387**, 71 (2008).
- [8] P. Grassberger, Phys.Lett. A **97**, 227 (1983).
- [9] H.G.E. Hentschel and I. Procaccia, Physica D **8**, 435 (1983).
- [10] 松下貢: フラクタルの物理 (II) (裳華房, 2004).
- [11] A. Einstein, Annalen der Physik **33**, 1275 (1910).
- [12] C. Tsallis *et al.*, Physica A **261**, 534 (1998).
- [13] A. Cho: Science **297**, 1268 (2002); R. Balian and M. Nauenberg *et al.*: Europhysics News **37**, 9 (2006).
- [14] C. Tsallis, Physica D **193**, 3 (2004).
- [15] C. Tsallis, Physica A **340**, 1 (2004).
- [16] L. Nivanen *et al.*, Rep. Math. Phys. **52**, 437 (2003)
- [17] E.P. Borges, Physica A **340**, 95 (2004).
- [18] H. Suyari *et al.*, EPJ ST **229**, 773 (2020).
- [19] H. Suyari, Physica A **368**, 63 (2006).
- [20] K. Okamura, Phys. Lett. A **525**, 129912 (2024).
- [21] E.T. Jaynes, *Probability Theory: the logic of science* (Cambridge univ. press, 2003).
- [22] J. Naudts, Physica A **340**, 32 (2004).
- [23] T. Wada and A.M. Scarfone, Phys. Lett. A **335**, 351 (2005).
- [24] 須鎗弘樹: ツァリス統計入門 (電子書籍のみ) (共立出版, 2024) [複雑系のための基礎数理 (牧野書店, 2010) の継承発行].
- [25] H. Suyari and M. Tsukada, IEEE Trans. Inform. Theory **51**, 753 (2005).
- [26] 村木尚文: 応用数理 **13**, 137 (2003).
- [27] 明出伊類似, 尾畑伸明: 量子確率論の基礎 (オーム社, 2021).
- [28] C. Tsallis *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3589 (1995) [Erratum: **77**, 5442 (1996)].
- [29] D. Prato and C. Tsallis, Phys. Rev. E **60**, 2398 (2000).
- [30] C. Tsallis *et al.*, Proc. Natl. Acad. Sci. **102**, 15377 (2005).
- [31] M.L. Lyra and C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **80**, 53 (1998).