

小特集

プラズマにおける非加法的統計力学

Non-Extensive Statistical Mechanics in Plasmas

1. はじめに

1. Introduction

川手 朋子

KAWATE Tomoko

量子科学技術研究開発機構

(原稿受付: 2025 年 7 月 9 日)

多くのプラズマ物理現象の理解の基礎となっている Boltzmann-Gibbs 統計力学は、相互作用の時間・空間スケールが十分小さく、エルゴート性の条件が満たされていることを前提とする。一方、相互作用が長距離・長時間に及ぶ系や、カオス領域の縁で見られる必ずしもエルゴート性の条件が成立しない複雑現象では、Boltzmann-Gibbs 統計力学を拡張する試みがなされてきた。その一つが Tsallis 統計力学 [1] による理論体系である。Boltzmann-Gibbs 統計力学においてエントロピーは加法的 (示量変数)、つまり部分系を合わせた全体系について、全体系のエントロピーは各部分系のエントロピーの和になる。一方 Tsallis 統計力学では全体のエントロピーは部分のエントロピーの単純な和ではなく、相関や結合の寄与が加わる。このようにエントロピーを非加法的な量として拡張し、最大エントロピー原理に基づいて定式化することにより、開放系における非平衡定常状態の記述への応用が広く議論されている。たとえば、銀河の質量分布に見られるような遮蔽のない長距離相互作用が働く自己重力系 [2]、生物の移動においてまれに長距離移動が生じるレヴィウォーク [3]、あるいは金融市場における株価の変動のように履歴依存性が長時間持続する時系列系 [4] など、多様な非平衡系においてモデル化に用いられてきた。

プラズマ科学分野においては、長距離相互作用の例として純電子プラズマの準平衡分布があげられる [5]。非中性プラズマではクーロン相互作用の長距離力が遮蔽されず、

中性プラズマとは異なる性質を示す。また特に議論されてきたのが太陽風など無衝突プラズマ中のエントロピー生成過程である [6]。衝突頻度が十分に高いプラズマでは、クーロン衝突によりエントロピーが増加する。一方、無衝突プラズマにおいては、波動を介したエネルギー散逸が重要となる。太陽風における粒子のエネルギー分布関数が、Tsallis 統計力学においてエントロピーが最大となるカップパ分布 (高エネルギー側で冪関数的な減衰を示す分布) とよく一致することが知られている。太陽圏内で観測されるさまざまな冪型エネルギー分布に対して、冪関数の指数と対応づけられるカップ指数も明らかにされてきている [7]。Tsallis 統計力学においてカップ指数は非加法的性の度合い q と紐ついており、分布関数を形成する物理過程とも関連する。さらに、非平衡弱電離プラズマにおける温度の定義についても議論の対象となっている。統計力学的に様々な形式で導出される温度に対し、Boltzmann-Gibbs 統計力学でこれらは異なる値となったが [8]、Tsallis 統計力学の上で一致することを示す結果 [9,10] が得られている。

本小特集では Tsallis 統計力学を概説するとともに、プラズマ研究におけるその応用について、理論および実験・観測の両面から近年の進展を取り上げる。2 章では数理科学の観点から Tsallis 統計力学の理論体系を解説する。3 章ではプラズマ粒子シミュレーションにおける Tsallis 統計力学の取り扱いについて議論する。4 章では宇宙プラズマに見られるカップパ分布の記述について、観測的側面から考

察する。5章では非平衡弱電離プラズマにおける電子温度の扱いについて、Boltzmann-Gibbs 統計力学と Tsallis 統計力学の比較を通じて論じる。本小特集が、非平衡状態にあるプラズマ現象の理解と一般化を深化させる契機となることを期待する。

参 考 文 献

- [1] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 21, 479 (1988).
- [2] J. Sánchez Almeida *et al.*, Astron. Astrophys. Lett. **642**, L14 (2020).
- [3] C. Tsallis *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3589 (1995).
- [4] L. Borland *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 098701 (2002).
- [5] 阿部純義: プラズマ・核融合学会誌 **78**, 1, 36 (2002).
- [6] V. Zhdankin, Phys. Rev. X **12**, 031011 (2022).
- [7] M. Oka *et al.* Space Sci. Rev. **214**, 5, 82 (2018).
- [8] H. Akatsuka and Y. Tanaka, Entropy **25**, 276 (2023).
- [9] K. Kikuchi and H. Akatsuka, Entropy **25**, 1400 (2023).
- [10] K. Kikuchi and H. Akatsuka, Phys. Rev. E **112**, 015201 (2025).

小特集 プラズマにおける非加法的統計力学

2. Tsallis エントロピーとマルチフラクタル構造

2. Tsallis Entropy and Multi-Fractal Structures

須鎗 弘樹

SUYARI Hiroki

千葉大学大学院情報学研究院

(原稿受付: 2025 年 1 月 20 日)

本稿では、Tsallis エントロピーの起源から始め、Tsallis エントロピーと Rényi エントロピーの直接的関係、Tsallis エントロピーの背景にある基本的な非線形微分方程式の存在、そして、その非線形微分方程式から、マルチフラクタルも含め、いかに、Tsallis 統計の主要な結果が導かれるのかを述べる。

Keywords:

Tsallis entropy, Rényi entropy, multi-fractal, q -exponential, thermodynamic relation

2.1 Tsallis エントロピーの起源

今日、非加法的統計力学の代表例として、Tsallis 統計が知られている。これは、1988 年に、Boltzmann-Gibbs 統計の一般化のために、物理学者 Constantino Tsallis が導入したエントロピーが起源である [1]。情報数値が専門である筆者から言えば、Boltzmann-Gibbs 統計の最大の特徴は、系の独立性である。それゆえ、その適用範囲は、独立性からの僅かなずれを許容する範囲内に限定される。つまり、対象とする物理系の相互作用は短距離である。数学的に言えば、Boltzmann-Gibbs 統計は、指数関数族による統計力学である。これに対して、複雑系などで広く知られる、異常統計、べき乗則、スケールフリー、ロングテールなどの特徴は、長距離相関などが特徴であり、べき関数族の統計力学である。Tsallis は、これらの特徴を捉えられるように、マルチフラクタルに着目して、一般化エントロピーを提案した [1]。

Tsallis 統計の起源となった論文 [1] の 1 ページ目に、マルチフラクタルを背景に Tsallis エントロピー S_q^{Tsallis} を提案することが書かれている。しかし、そこには、導出過程の記載はない。

$$S_q^{\text{Tsallis}}(p_1, \dots, p_n) := \frac{1 - \sum_{i=1}^n p_i^q}{q - 1} \quad (1)$$

ここで、 $q \in \mathbb{R}, q \neq 1$ で、 $q \rightarrow 1$ のとき、Shannon エントロピーに一致する。

2009 年に、筆者が、Tsallis らを招待した国際ワークショップを京都で開催した際、京都に到着された日の昼食時に、他の招待講演者も交えて、直接、ご本人に、Tsallis エントロピーの発見の経緯を尋ねた。ご自身曰く、ある会

議で、研究者が議論しているのを少し遠目で見ているとき、ホワイトボードの数式の多くに、 p_i^q あるいは $\sum_i p_i^q$ が書かれていることに気づき、これをエントロピーの式に使用できないかと思ったことがきっかけだったとのことである。実際、そのときの導出は、ご自身によって、[2] に書かれており、直観的な導出であったことがわかる。Tsallis エントロピーとほぼ同等の式は、情報理論の世界では、すでに導かれていたが [3, 4]、Boltzmann-Gibbs 統計の一般化のために、Jaynes の最大エントロピー原理の枠組み [5] で、Tsallis エントロピーの最大化を用いたのは、筆者の知る限り、1988 年の Tsallis の論文 [1] が初めてであったと思う。

2.2 Rényi エントロピーとの関係

マルチフラクタルを背景に、Tsallis エントロピーが生まれたのであれば、当時、マルチフラクタルの分野で、すでによく知られていた Rényi エントロピー [6] との関係我问うのは自然であろう。先の京都での会話で、当時、Rényi エントロピーがすでに知られていたのではと尋ねたところ、皆にそう言われたそうだが、ご本人は査読者の指摘で、初めて知ったとのことである。

実は、Rényi エントロピーと Tsallis エントロピーの間には、次のような簡潔な関係がある [7]。

$$\exp(S_q^{\text{Rényi}}(p_i)) = \exp_q(S_q^{\text{Tsallis}}(p_i)) \quad (2)$$

$$= \exp_{1/q}(S_{1/q}^{\text{Tsallis}}(P_i)) \simeq \varepsilon^{-D_q} \quad (3)$$

ここで、 $S_q^{\text{Rényi}}$ は、Rényi エントロピー：

$$S_q^{\text{Rényi}}(p_1, \dots, p_{n(\varepsilon)}) := \frac{\ln \sum_{i=1}^{n(\varepsilon)} p_i^q}{1 - q}, \quad (4)$$

$\exp_q$ は q -指数関数と呼ばれ、 $1 + (1 - q)x > 0$ のときに、

$$\exp_q(x) := (1 + (1 - q)x)^{\frac{1}{1-q}} \quad (5)$$

で定義される。なお、この逆関数の q -対数関数 $\ln_q$ は、 $x > 0$ に対して、

$$\ln_q x := \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q} \quad (6)$$

で定義される。 q -指数関数も q -対数関数も、 $q \rightarrow 1$ のとき、それぞれ、通常の指数関数と対数関数に一致する。また、(3)における $\{P_i\}$ は、 $\{p_i\}$ のエスコート分布と呼ばれ、次で定義される。

$$P_i := \frac{p_i^q}{\sum_j p_j^q} \quad (7)$$

(3) の D_q は、与えられた集合 $A \subset \mathbb{R}^n$ の一般化次元 [8–10] であり、(4) の $n(\varepsilon)$ は、対象としている集合 A を直径 $d(V) = \varepsilon$ の $V \subset \mathbb{R}^n$ で被覆したときの数である。このとき、(2),(3)における Tsallis エントロピーでは、 n を $n(\varepsilon)$ で置き換えている。(3)における $\simeq$ は、 ε が十分に小さい時に、ほぼ等しくなるという意味である。

式 (2),(3) の関係は、有名なボルツマンの関係式 $S = k_B \ln W$ を変形したアインシュタインの関係式 [11]：

$$\exp(S) = W \quad (8)$$

の拡張になっている（簡単のため、ボルツマン定数 $k_B = 1$ とおいた）。つまり、Rényi エントロピーと Tsallis エントロピーの違いは、同じ微視的な状態数 $W_q := \varepsilon^{-D_q}$ に対して、とる対数の違いだけである。

$$S_q^{\text{Rényi}} = \ln W_q, \quad S_q^{\text{Tsallis}} = \ln_q W_q \quad (9)$$

次元という意味（この場合、一般化次元 D_q ）では、状態数の対数 $\ln$ をとるのは、自然であろう。また、Rényi エントロピーは、通常の対数 $\ln$ をとっているがゆえに、加法的である。対して、Tsallis エントロピーは、 q -対数 $\ln_q$ をとっているがゆえに、非加法的である。しかも、Tsallis エントロピーは、数理的な意味で、極めて自然なエントロピーである。そのことを次で述べる。

2.3 基本的な非線形微分方程式から導かれる Tsallis エントロピー

Tsallis エントロピーが、導出過程なく与えられ、その最大化で得られる q -指数関数を中心に、Boltzmann-Gibbs 統計の一般化という理論展開（特に、Legendre 変換構造 [12]）と、 q -指数関数による観測データの説明から、多くの論文が生まれてきた。しかし、同時に、多くの研究者が Tsallis エントロピーを懐疑的に思うのは致し方なかった [13]。なぜなら、そもそも、Tsallis エントロピーの導出の背景が直観的で、なぜ、Tsallis エントロピーを使うのかという素朴な疑問に対して、Tsallis 統計が、Legendre 変換構造 [12] などの望ましい性質を満たしているなど間接的な解答はできても、当時、誰も直接的な解答を持ち合わせていなかった

たからである。

筆者も、当初、なぜ、このエントロピーを使うのか懐疑的であったが、本稿で簡潔に述べるように、数学的に疑いのようなない理論的背景が存在することを見つけた。結論から書けば、Tsallis 統計とは、最も簡潔な非線形微分方程式：

$$\frac{dy}{dx} = y^q \quad (10)$$

の数理である。つまり、この非線形微分方程式 (10) から、Tsallis 統計の数々の理論的結果が自然に導かれる。

非線形微分方程式 (10) は、変数分離形の非線形微分方程式なので、解析的に解くことができる。ただし、初期値は、 $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2, y_0 > 0$ を満たすものとする。(10) を、通常の指数関数の一般化を特徴づけする微分方程式として解くと、

$$\frac{y}{\exp_q(C)} = \exp_q\left(\frac{x}{(\exp_q(C))^{1-q}}\right) \quad (11)$$

を得る。ここで、 C は、 $1 + (1 - q)C > 0$ を満たす積分定数で、初期条件で決まり、 $C = \ln_q y_0 - x_0$ である。この導出より、以後、 q -指数関数 $\exp_q$ と q -対数関数 $\ln_q$ が中心的な役割を演じる。なお、出発点となる非線形微分方程式 (10) の解が q -指数関数であることを見つけたのは、Tsallis 自身である [14, 15]。しかし、そこでは、初期条件として、 $(x_0, y_0) = (0, 1)$ を採用している。つまり、 $C = 0$ である。このとき、 q の値に関係なく $\exp_q(C) = 1$ であり、非線形微分方程式 (10) が本来持っているスケーリングが見えない。

通常の指数関数の基本的な法則として、指数法則が知られているように、 q -指数関数 $\exp_q$ に対しても、同様の指数法則が満たされるように新しい演算 q -積 $\otimes_q$ を導入する [16, 17]。

$$\exp_q(x) \otimes_q \exp_q(y) = \exp_q(x + y) \quad (12)$$

あるいは、

$$\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q x + \ln_q y. \quad (13)$$

q -指数関数 $\exp_q$ の定義が (5) でわかっているので、 q -積 $\otimes_q$ の定義を具体的に書き下せるが、省略する。

ここで、 q -積の物理的な意味を与えておく [18]。(12) の右辺の $x + y$ にあるように、 x と y は、同じスケール（物差し）上の値なので、 $x + y$ という和の演算が可能という当然のことに着目する。実際、通常の積を用いて、 $\exp_q(x + y) = \exp_q(x) \exp_q\left(\frac{y}{1 + (1 - q)x}\right)$ と書けるが、 x と $\frac{y}{1 + (1 - q)x}$ は、もはや同じスケール（物差し）上の値ではない。 x と y それぞれに、エネルギーなどの物理的な単位を考えれば、 x はエネルギーの単位であり、 $\frac{y}{1 + (1 - q)x}$ は、エネルギーの比なので単位を持たない。つまり、 $\exp_q(x + y)$ を、同じスケール（物差し）上の値に分割するのが、 q -積である。よって、非線形微分方程式 (10) で支配される物理系を各エネルギーごとに q -積で分割する場合の数を考え

ることができる。その基本となるのは、次の有名な関係である。

$$\ln \binom{n}{n_1 \dots n_k} \simeq n S_1 \left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right). \quad (14)$$

$\binom{n}{n_1 \dots n_k}$ は多項係数, $n, n_1, \dots, n_k \in \mathbb{N}$ は, $n = \sum_{i=1}^k n_i$ を満たす自然数, $\simeq$ はスターリングの近似, S_1 は, Shannon エントロピーを表す。この定式化と同様に, q -積 $\otimes_q$ とその逆演算である q -比 $\oslash_q$ (すなわち, $\exp_q(x) \oslash_q \exp_q(y) = \exp_q(x-y)$, $\ln_q(x \otimes_q y) = \ln_q x + \ln_q y$) を用いて q -多項係数 $\binom{n}{n_1 \dots n_k}_q$ を定義する。さらに, $\ln_q n!_q := \sum_{i=1}^n \ln_q i$ に対する q -スターリングの公式 ($q \neq 2$ のとき) は, 次のように求まる。

$$\ln_q(n!_q) \simeq \frac{n}{2-q} \ln_q n - \frac{n}{2-q} \quad (15)$$

$q \rightarrow 1$ のとき, 通常のスターリングの公式に一致する。(14)と同様に, この q -スターリングの公式を q -多項係数に適用すると, 次を得る ($0 < q < 2$ のとき) [19]。

$$\ln_q \binom{n}{n_1 \dots n_k}_q \simeq \frac{n^{2-q}}{2-q} \cdot S_{2-q}^{\text{Tsallis}} \left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n} \right). \quad (16)$$

$q = 2$ のとき, $\ln_q n!_q$ に対する q -スターリングの公式は $\ln_q n!_q \simeq n - \ln$ で, q -多項係数に適用すると, (16) の右辺は, $-S_0(n) + \sum_{i=1}^k S_0(n_i)$, $S_0(n) := \ln n$ となる。なお, 最近, (16) の結果について, 解析接続を用いた, より正確な式が報告されている [20]。

以上より, 非線形微分方程式 (10) から, q -指数関数 $\exp_q$ と q -対数関数 $\ln_q$ を得, これらの数値から, 非線形微分方程式 (10) に対応するエントロピーとして, Tsallis エントロピーが一意的に得られた。Rényi エントロピーなど, 最大化して q -指数関数 $\exp_q$ が得られる一般化エントロピーがあるが, q -指数関数 $\exp_q$ を特徴づける非線形微分方程式 (10) から出発すると, 対応するエントロピーは, Rényi エントロピーなど他の一般化エントロピーではなく, Tsallis エントロピーであることがわかる。しかも, 後に述べる加法的双対性 $q \leftrightarrow 2-q$ が自然に現れている。

2.4 熱力学的関係

Jaynes が最大エントロピー原理の枠組みで, Boltzmann-Gibbs 統計を再構築したとき [5] と同じように, Tsallis は, 提案したエントロピー S_q を最大化し, Boltzmann-Gibbs 統計を一般化した。しかし, エントロピーの起源は, (14) あるいは (16) のような多項係数で表される場合の数である。つまり, 与えられた条件のもとで, どのような配分 $(n_1, \dots, n_k)$ が支配的なのか, つまり, 平衡状態は何かを問題にしている。これは, 歴史的にも, Wallis による Jaynes のアプローチの裏付けがある ([21] の 11.4 節参照)。ただ, 1988 年当時には, (16) の関係は, まだ発見されてい

なかった。

(16) の関係に従えば, 条件 $\sum_{i=1}^k p_i = 1, \sum_{i=1}^k \varepsilon_i p_i = U_1$ の下で, S_{2-q} を最大化する。このとき, $\Phi_1(p_i, \alpha, \beta) := S_{2-q} - \alpha \left(\sum_{i=1}^k p_i - 1 \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^k p_i (\varepsilon_i - U_1) \right)$ の極値問題を解くことになり, 次の熱力学的関係が得られる [22,23]。

$$\frac{\partial S_{2-q}}{\partial U_1} = \beta \quad (17)$$

一方, 期待値に関する変遷を経て, 条件 $\sum_{i=1}^k p_i = 1, \sum_{i=1}^k \varepsilon_i p_i = U_q$ の下で, S_q の最大化が最もよく知られている。ここで, $\{P_i\}$ は, $\{p_i\}$ のエスコート分布 (7) である。このとき, $\Phi_q(p_i, \alpha, \beta) := S_q - \alpha \left(\sum_{i=1}^k p_i - 1 \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^k p_i (\varepsilon_i - U_q) \right)$ の極値問題を解くことになり, 次の熱力学的関係が得られる [12]。

$$\frac{\partial S_q}{\partial U_q} = \beta \quad (18)$$

(17), (18) からわかるように, $\frac{\partial S_{2-q}}{\partial U_1}$ も $\frac{\partial S_q}{\partial U_q}$ もそれぞれの未定数 β と一致し, 熱力学的関係 $\frac{\partial S_1}{\partial U_1} = \beta = \frac{1}{T}$ (T は温度) の自然な拡張になっていることがわかる。

ここで, 少し注意が必要である。 S_{2-q} も S_q も, 上の最大化で得られる最大エントロピー分布 (Tsallis 統計の文脈では, q -カノニカル分布ともいう) は,

$$p_i^* = \frac{\exp_q(-\beta_q(\varepsilon_i - U))}{Z_q} \quad (19)$$

と求めることができるが, β_q が少し異なる。(いずれの場合も, $q \rightarrow 1$ のとき, $\beta_q \rightarrow \beta$ である。)

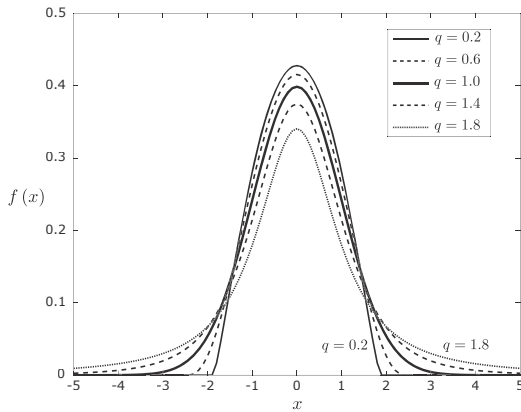
$$\beta_q = \begin{cases} \frac{\beta}{1 - \alpha + q\alpha} & S_{2-q} \text{ を最大化したとき} \\ \frac{q\beta}{q + (1 + \alpha)(1 - q)} & S_q \text{ を最大化したとき} \end{cases} \quad (20)$$

ここで, α は, $\sum_{i=1}^k p_i = 1$ に関する未定数である。導出の詳細などは, [24] を参照。

2.5 q -Gauss 分布

論文 [16,17] で, q -積が発表された時, 筆者が最初に q -積を応用したのは, (16) ではなく, Gauss の誤差法則の一般化であった [25]。なぜなら, q -積は独立性の拡張とも考えられ, 量子確率論の世界で, 複数の独立性が存在し, それぞれに付随する中心極限定理が重要な話題になっていたからである [26,27]。

よく知られている Gauss の誤差法則は, 独立に観測された観測値 $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$ に対して, 尤度関数 $L_1(\theta) := f(\theta - x_1) \cdots f(\theta - x_n)$ が算術平均 $\theta^* := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ で最大となるとき, つまり, このときが最も尤もらしいとき, 誤差が従う分布 f (確率密度関数) として Gauss 分布が得られる。正規分布は, Gauss が天体の観測において, 誤差に着目して最初に発見したので, Gauss 分布とも呼ばれる。当時の Gauss の導出を現在の統計の言葉で書き直した方法

図1 q -Gauss 分布

が、尤度関数による導出である。この一般化として、 q -積を用いて、 q -尤度関数 $L_q(\theta) := f(\theta - x_1) \otimes_q \cdots \otimes_q f(\theta - x_n)$ を定め、同様の手順をとると、次の q -Gauss 分布が得られる。

$$f(e) = \frac{\exp_q(-b_q e^2)}{\int \exp_q(-b_q e^2) de} \quad (21)$$

ただし、 $L_q(\theta)$ の $\theta = \theta^*$ における最大性より、 $b_q > 0$ 。この q -Gauss 分布は、確率とエスコート分布 (7) による分散一定の条件の下で、Tsallis エントロピー (1) の最大化により、既に求められていた [28, 29]。

誤差法則で求めた (21) に、エスコート分布 (7) による分散 (σ^2) 一定の条件を課すと、 $b_q = 1/(3-q)\sigma^2$ と求まる (図 1 では $\sigma^2 = 1$)。 q -Gauss 分布の典型例として、 $q = 1$ のときは Gauss 分布、 $q = 2$ のときは Cauchy 分布、 $q = 1 + \frac{2}{n+1}$ のときは自由度 n の t -分布がある。

これらの結果からわかるように、誤差法則の一般化による q -Gauss 分布は、Tsallis エントロピー (1) の最大化による分布と一致する。しかも、誤差法則の一般化による方法では、エントロピーもエスコート分布も不要で、非線形微分方程式 (10) だけで導かれる。これらの結果より、 q -積の有効性が明らかであろう。

2.6 Tsallis 統計の 4 つの数理

非線形微分方程式 (10) を解いて、 q -対数関数、 q -指数関数、 q -積、 q -スターリングの公式、 q -多項係数の順番に定式化し、 q -多項係数と Tsallis エントロピーの 1 対 1 の関係 (16) を得た。 (16) のように、 q と $2-q$ を入れ替えても成り立つので、そのような性質は、加法的双対性 $q \leftrightarrow 2-q$ と呼ばれる。 (3) からわかるように、乗法的双対性 $q \leftrightarrow 1/q$ も知られていた。そこで、この乗法的双対性も表現できるように (16) を一般化したところ、その副産物として、それ以前に理論的に知られていた q とマルチフラクタルとの関係 (著者は、これをマルチフラクタルトリプレットと呼んでいる)、ならびに、Tsallis が予想として発表していた q -トリプレット [15] も解析的に得られる [7]。つまり、Tsallis 統計力学における代表的な 4 つの数理構造 (加法的双対性、乗法的双対性、マルチフラクタルトリプレット、

q -トリプレット) は従来は別々に扱われてきたが、これらは (16) の一般化により、たった 1 つの式 (23) に統合でき、これら 4 つの数理構造は、その特別な場合であることがわかった [7]。

ここでは、その結果のみを簡潔に紹介しておく。乗法的双対性が現れるのは、(3) からわかるように、エスコート分布 (7) が現れるときであることに注目する。そこで、(15)(16) の結果において、各 n を n^ν に拡張する (ただし、 $\nu \neq 0$)。このとき、 $\ln_q n!_q := \sum_{i=1}^n \ln_q i$ の拡張として、 $\ln_\mu n!_{(\mu,\nu)} := \sum_{i=1}^n \ln_\mu i^\nu$ に対する q -スターリングの公式 ($\nu(1-\mu) + 1 \neq 0$ のとき)：

$$\ln_\mu n!_{(\mu,\nu)} \simeq \frac{n \ln_\mu n^\nu - \nu n}{\nu(1-\mu) + 1} \quad (22)$$

が計算できる。これを (μ, ν) -多項係数 $\binom{n}{n_1 \cdots n_k}_{(\mu,\nu)}$ に適用すると、次の関係が得られる。

$$\nu(1-\mu) + 1 = q \quad (> 0) \quad (23)$$

のとき、

$$\frac{1}{\nu} \ln_\mu \binom{n}{n_1 \cdots n_k}_{(\mu,\nu)} \simeq \frac{n^q}{q} \cdot S_q\left(\frac{n_1}{n}, \dots, \frac{n_k}{n}\right). \quad (24)$$

なお、 $q = 0$ のときは、加法的双対性により (16) における $q = 2$ のときと同じ結果になる。また、 $q = 1$ のとき、(23) と $\nu \neq 0$ より $\mu = 1$ となり、(14) に帰着することがわかる。

先に述べた 4 つの数理構造は、 ν の設定によって、次のように再現できる。

(i) $\nu = 1$ のとき：(23) より $\mu = 2-q$ となり、(16) が得られる。つまり、加法的双対性 $q \leftrightarrow 2-q$ の表現である。

(ii) $\nu = q$ のとき：(23) より $\mu = 1/q$ となり、 $(\mu, \nu) = (1/q, q)$ 。このとき、(24) は、乗法的双対性 $q \leftrightarrow 1/q$ を表す。つまり、 q と $1/q$ を入れ替えても (24) が成り立つ。

(iii) $\nu = 2-q$ のとき：(23) より $\mu = (3-2q)/(2-q)$ となり、 $(\mu, \nu, q) = ((3-2q)/(2-q), 2-q, q)$ 。この結果に先立ち、Tsallis は q には 3 種類 $q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}}, q_{\text{stat}}$ があり、この 3 つ組を q -トリプレットと呼んだ [15]。

q_{sen} の sen は sensitivity を表し、リアプノフ指数 λ_1 の特徴付けである $d\xi/dt = \lambda_1 \xi$ を先の (10) と同様に

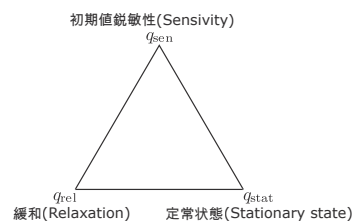


図2 q -トリプレット ($q_{\text{rel}} + \frac{1}{q_{\text{sen}}} = q_{\text{stat}} + \frac{1}{q_{\text{rel}}} = 2$)

$d\xi/dt = \lambda_q \xi^q$ と拡張したときの q を表す. q_{rel} の rel は relaxation を表し, 物理量 Ω の緩和時間 τ_1 の特徴付けである $d\Omega/dt = -\Omega/\tau_1$ を $d\Omega/dt = -\Omega^q/\tau_q$ と拡張したときの q を表す. q_{stat} の stat は stationary state を表し, Tsallis エントロピー最大化で現れる q を表す. 特に, 論文 [30] の脚注で, これら 3 つの q の間には, $q_{\text{rel}} + 1/q_{\text{sen}} = 2, q_{\text{stat}} + 1/q_{\text{rel}} = 2$ の関係があることを数値計算から予想していた. 実は, これら 2 つの関係式より, ここで求めた (μ, ν, q) と $(q_{\text{sen}}, q_{\text{rel}}, q_{\text{stat}})$ の間には, $(\mu, \nu, q) = (1/q_{\text{sen}}, 1/q_{\text{rel}}, q_{\text{stat}})$ の関係があることを容易に確かめることができる.

(iv) $\nu = 1/q$ のとき: (23) より $1/(1-\mu) = 1/(q-1) - 1/q$ を得る. これは, 論文 [31] において理論的に導かれていた $1/(1-q_{\text{sen}}) = 1/\alpha_{\text{min}} - 1/\alpha_{\text{max}}$ において, $\alpha_{\text{max}} - \alpha_{\text{min}}$ を 1 にリスケールした結果に一致する. ここで, $\alpha_{\text{max}}, \alpha_{\text{min}}$ は, マルチフラクタルの理論で現れる $f(\alpha)$ スペクトルにおいて $f(\alpha) = 0$ を満たす局所次元 α ($\alpha_{\text{min}} < \alpha_{\text{max}}$) である.

以上のように, Tsallis 統計の代表的な 4 つの数理解造は (23) と (24) の式で統一的に表現できる. つまり, (23) より, Tsallis エントロピー S_q の q は μ と ν で定まる.

べき指数を決める q が, 何によって決まるのかという点は, この分野の多くの研究者が関心をもつ. (23) は, その一つの解答になっている. 今後, ここで述べた 4 つの数理解造以外にも, Tsallis エントロピー S_q の q を決める構造が現れるかもしれないが, 式 (24) を満たすことが予想される.

2.7 まとめ

Tsallis 統計の基礎であり, また, 出発点となった Tsallis エントロピーを中心に, その基礎数理について述べてきた. 時間軸で追えば, Tsallis エントロピーの提案が最初であったが, その背後には, 非線形微分方程式 (10) があることがわかっていただけたかと思う. そのため, Tsallis 統計の適用範囲は, 統計力学に限らない. たとえば, 本稿で出てくる q -Gauss 分布 (21) は, 数理統計学の検定で重要な t -分布そのものである.

一方で, Boltzmann-Gibbs 統計で実験データを説明できず, かつ, データが示す分布がべき乗則にしたがう場合, 適切な q を選べば, そのデータをこの数理の枠組みで説明できる可能性は高くなる. ある程度, データフィッティングの操作をすることは避けられそうにないが, 本稿の数理の枠組みを使えば, その整合の意味を深く理解する助けになるだろう.

なお, ここでは, Tsallis 統計を扱ったが, Tsallis エントロピー以外にも, 一般化エントロピーは, 数多く提案されている. 私が国際会議で見た範囲では, 約 20 個ぐらいの一般化エントロピーはあったと思われる, その多くは, エントロピーを特徴づけする公理系から始まり, 適当な条件下で,

そのエントロピーを最大化することにより, 大統一理論の志向なのか, より一般的なカノニカル分布を網羅していることを示すものが少なくない. しかし, Tsallis エントロピーのように, 非線形微分方程式 (10) のような基本的な微分方程式に立脚できる非加法的統計力学は, 筆者の知る限り, 未だ見つかっていない.

参考文献

- [1] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- [2] M. Gell-Mann and C. Tsallis, eds., *Nonextensive Entropy: Interdisciplinary Applications* (Oxford Univ. Press, New York, 2004).
- [3] J.H. Havrda and F. Charvát, Kybernetika **3**, 30 (1967).
- [4] Z. Daróczy, Inf. Control **16**, 36 (1970).
- [5] E.T. Jaynes, Phys. Rev. **106**, 620 (1957); Phys. Rev. **108**, 171 (1957).
- [6] A. Rényi, Proc. of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability (1960) p.547.
- [7] H. Suyari and T. Wada, Physica A **387**, 71 (2008).
- [8] P. Grassberger, Phys.Lett. A **97**, 227 (1983).
- [9] H.G.E. Hentschel and I. Procaccia, Physica D **8**, 435 (1983).
- [10] 松下貢: フラクタルの物理 (II) (裳華房, 2004).
- [11] A. Einstein, Annalen der Physik **33**, 1275 (1910).
- [12] C. Tsallis *et al.*, Physica A **261**, 534 (1998).
- [13] A. Cho: Science **297**, 1268 (2002); R. Balian and M. Nauenberg *et al.*: Europhysics News **37**, 9 (2006).
- [14] C. Tsallis, Physica D **193**, 3 (2004).
- [15] C. Tsallis, Physica A **340**, 1 (2004).
- [16] L. Nivanen *et al.*, Rep. Math. Phys. **52**, 437 (2003).
- [17] E.P. Borges, Physica A **340**, 95 (2004).
- [18] H. Suyari *et al.*, EPJ ST **229**, 773 (2020).
- [19] H. Suyari, Physica A **368**, 63 (2006).
- [20] K. Okamura, Phys. Lett. A **525**, 129912 (2024).
- [21] E.T. Jaynes, *Probability Theory: the logic of science* (Cambridge univ. press, 2003).
- [22] J. Naudts, Physica A **340**, 32 (2004).
- [23] T. Wada and A.M. Scarfone, Phys. Lett. A **335**, 351 (2005).
- [24] 須鎗弘樹: ツァリス統計入門 (電子書籍のみ) (共立出版, 2024) [複雑系のための基礎数理 (牧野書店, 2010) の継承発行].
- [25] H. Suyari and M. Tsukada, IEEE Trans. Inform. Theory **51**, 753 (2005).
- [26] 村木尚文: 応用数理 **13**, 137 (2003).
- [27] 明出伊類似, 尾畑伸明: 量子確率論の基礎 (オーム社, 2021).
- [28] C. Tsallis *et al.*, Phys. Rev. Lett. **75**, 3589 (1995) [Erratum: **77**, 5442 (1996)].
- [29] D. Prato and C. Tsallis, Phys. Rev. E **60**, 2398 (2000).
- [30] C. Tsallis *et al.*, Proc. Natl. Acad. Sci. **102**, 15377 (2005).
- [31] M.L. Lyra and C. Tsallis, Phys. Rev. Lett. **80**, 53 (1998).

小特集 プラズマにおける非加法的統計力学

3. カッパ分布とプラズマ粒子シミュレーションのための数値解法

3. Numerical Methods for Kappa Distributions in Particle-in-Cell Simulations

銭谷 誠司

ZENITANI Seiji

オーストリア宇宙科学研究所

(原稿受付: 2025 年 1 月 21 日)

宇宙空間物理学では、高エネルギー領域に「べき乗」成分をもつカッパ分布 (Kappa distribution) が重要だと考えられている。カッパ分布は最近、ボルツマン統計力学の拡張の 1 つであるツァリス統計力学との類似性が明らかになり、背景に未解明の理論が隠れていると期待されている。本章では、カッパ分布の基礎的な性質とツァリス統計力学との類似性を紹介し、今後、理論背景を解明するための有力手段であるプラズマ粒子シミュレーションで、カッパ分布を使うための数値解法を紹介する。

Keywords:

Kappa distribution, velocity distribution, Tsallis statistics, particle-in-cell simulation, Monte-Carlo method

3.1 はじめに

宇宙空間物理学では、高エネルギー部分に「べき乗」成分をもつカッパ分布 (Kappa distribution) という速度分布関数を議論することが多い。カッパ分布は 1960 年代に Olbert, Vasyliunas らのグループによって観測データを説明する経験的数式モデルとして提案された [1, 2]。その後、太陽・太陽風・太陽圏深部といったさまざまな場所でプラズマ観測が進むにつれて、分布関数の高エネルギー領域に「べき乗」成分が頻繁に観測されるようになり、熱的コア成分と高エネルギー「べき乗」成分を同時に扱うことができるカッパ分布の有用性が認知されてきた [3-6]。そうした中、カッパ分布と、ボルツマン統計力学を拡張したツァリス統計力学とが理論的に関連していることが示唆され [4, 7]、観測されるカッパ分布の背景に未解明の理論的・物理的根拠があるという期待が高まっている。現在、カッパ分布は、マクスウェル分布に次いで重要な、宇宙空間プラズマの基本速度分布関数の 1 つだと認知されている。

本章では、個々のプラズマ粒子の運動を解き進めるプラズマ粒子 (Particle-in-cell; PIC) シミュレーションを念頭に、カッパ分布の基礎的な性質とシミュレーションでの実践的な利用方法を解説する。まず、3.2 でカッパ分布の基礎的な性質を概観し、3.3 で理論背景であるツァリス統計力学との関係を述べる。続く 3.4 では PIC シミュレーションのためのカッパ分布の乱数生成方法を紹介し、3.5 でさまざまなカッパ分布の派生形と応用分野を紹介する。最後の 3.6 で本章を総括する。

3.2 カッパ分布

最初に、プラズマ速度分布関数の基本形であるマクスウェル分布から出発する。等方的なマクスウェル分布の位相空間密度 f_M は

$$f_M(v)d^3v = N \left(\frac{1}{\pi\theta_M^2} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(-\frac{v^2}{\theta_M^2} \right) d^3v \quad (1)$$

と表される。ここで N はプラズマの数密度、 θ_M は最頻速度 (熱速度) である。マクスウェル分布のプラズマが持つエネルギー密度 $\mathcal{E}$ および (ボルツマン定数を含む) プラズマ温度 T_M は

$$\mathcal{E} = \frac{3}{4} N m \theta_M^2 = \frac{3}{2} N T_M, \quad T_M = \frac{1}{2} m \theta_M^2 \quad (2)$$

となる。

対して、本章で議論するカッパ分布のよく使われる表式は以下の通りである。

$$f_\kappa(v)d^3v = \frac{N}{(\pi\kappa\theta^2)^{3/2}} \frac{\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(\kappa-1/2)} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa\theta^2} \right)^{-(\kappa+1)} d^3v \quad (3)$$

κ はカッパ分布を特徴づけるカッパ指数 (kappa index)、 θ は最頻速度、 $\Gamma(x)$ はガンマ関数である。等方分布の場合、 $d^3v = 4\pi v^2 dv$ として極座標系に移り

$$F_\kappa(v) \equiv f_\kappa(v) 4\pi v^2 \quad (4)$$

を考えると便利である。例えば、 $(d/dv)F_\kappa(v) = 0$ から直ちに最頻値 $v = \theta$ を確認することができる。

カッパ分布 ((3) 式) の特徴は、 $v \gg \theta$ の高エネルギー

側の速度分布が「べき」乗でゆっくり減衰していくことである。べき指数は物理量に応じて

$$f_{\kappa}(v)d^3v \sim v^{-2(\kappa+1)}d^3v \quad (5)$$

$$f_{\kappa}(v)dv \sim v^{-2\kappa}dv \quad (6)$$

$$f_{\kappa}(\varepsilon)d\varepsilon \sim \varepsilon^{-\kappa-1/2}d\varepsilon \quad (7)$$

となる。これに対して $v \ll \theta$ の低エネルギー側はマクスウェル分布に近い性質を持っている。カッパ分布は、「べき」乗の非熱的高エネルギー成分と熱的な低エネルギー成分を同時に備えたハイブリッド分布であり、粒子加速を議論する場合に便利である。

カッパ分布は $\kappa \rightarrow \infty$ のとき、マクスウェル分布に漸近する。実際、(3) 式の $\kappa \rightarrow \infty$ の極限をとると

$$\begin{aligned} \lim_{\kappa^* \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa\theta^2}\right)^{-(\kappa+1)} &\sim \lim_{\kappa^* \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\kappa^* v^2}{\kappa\theta^2}\right) \\ &\sim \exp\left(-\frac{v^2}{\theta^2}\right) \end{aligned} \quad (8)$$

となる。途中、 $\kappa^* \equiv \kappa + 1$ と置き換えて、指数関数の公式

$$\lim_{\kappa^* \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{\kappa^*}\right)^{-\kappa^*} = \exp(-x) \quad (9)$$

を用いた。実用上は、 $\kappa = 3 \sim 6$ の小さな値を用いることが多い。

カッパ分布 (3) 式の例を図 1 に示す。フォーマットやべき指数 κ の値は、カッパ分布の応用研究として広く知られているサマーズ先生の論文 [8] の図 1 に合わせたものである。 κ の値が小さな場合には、 $v/\theta \gg 1$ 領域に「べき乗」成分が顕著に見えていること、また、 κ が大きくなるにつれて分布関数がマクスウェル分布 (点線) に近づいていくようすがわかる。数学的には、カッパ分布は統計学の基本分布の 1 つである t 分布 (「スチューデントの t 分布」ともいう) の多変量版に相当し、 t 分布も同じ極限で多変量正規分布 (=マクスウェル分布) に収束する。

次に、統計分布を用いてカッパ分布の性質をもう少し議論する。ここでは、ベータプライム分布 (第 2 種ベータ分布) を拡張した一般化ベータプライム分布 (Generalized beta-prime distribution) を利用する。

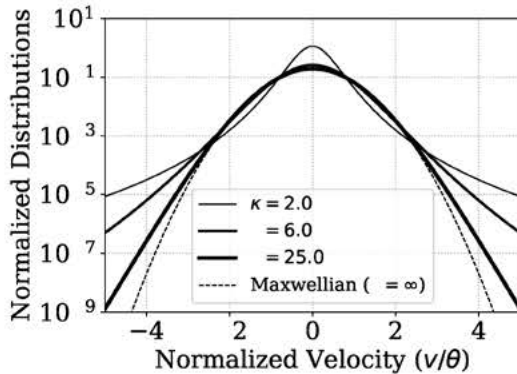


図 1 カッパ分布の関数形のサンプル。カッパ分布は $\kappa = \infty$ の極限でマクスウェル分布 (点線) に収束する。

$$B'(x; \alpha, \beta, k, \lambda) = \frac{k}{\lambda B(\alpha, \beta)} \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{\alpha k - 1} \left(1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^k\right)^{-(\alpha + \beta)} \quad (10)$$

$$\int_0^\infty B'(x; \alpha, \beta, k, \lambda) dx = 1 \quad (11)$$

一般化ベータプライム分布 $B'(x)$ は 4 つのパラメーターをとる。 $B(\alpha, \beta)$ はベータ関数とその 2 つの引数、 k は形状パラメーター、 λ はスケールパラメーターである。(10) 式を使うと、カッパ分布の極座標形 ((4) 式) を

$$F_{\kappa}(v)dv = NB' \left(v; \frac{3}{2}, \kappa - \frac{1}{2}, 2, (\kappa\theta^2)^{1/2}\right) dv. \quad (12)$$

と書くことができる。この延長でカッパ分布プラズマのエネルギー密度 $\mathcal{E}$ を考えると

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_0^\infty \left(\frac{1}{2}mv^2\right) F_{\kappa}(v)dv \\ &= \frac{\kappa Nm\theta^2}{2} \frac{B(\frac{5}{2}, \kappa - \frac{3}{2})}{B(\frac{3}{2}, \kappa - \frac{1}{2})} \left\{ \int_0^\infty B' \left(v; \frac{5}{2}, \kappa - \frac{3}{2}, 2, (\kappa\theta^2)^{1/2}\right) dv \right\} \\ &= \frac{3\kappa}{2(2\kappa - 3)} Nm\theta^2 \end{aligned} \quad (13)$$

となる。 $\kappa = 3/2$ でエネルギー密度が無限大に発散するため、カッパ指数は $\kappa > 3/2$ でなければならない。自由度 3、温度 T のプラズマ系のエネルギー密度が

$$\mathcal{E} = \frac{3}{2} NT \quad (14)$$

であることと、(13) 式を比べて、カッパ分布の実効温度

$$T_{\text{eff}} = \frac{\kappa}{2\kappa - 3} m\theta^2 \quad (15)$$

を得ることができる。 $\kappa \rightarrow \infty$ のとき、(15) 式はマクスウェル分布のもの ((2) 式) と一致する。

なお、カッパ分布は (3) 式のほかに

$$f_{\kappa}^*(v)d^3v = \frac{N}{(\pi\kappa^*[\theta^*]^2)^{3/2}} \frac{\Gamma(\kappa^*)}{\Gamma(\kappa^* - 3/2)} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa^*[\theta^*]^2}\right)^{-\kappa^*} d^3v \quad (16)$$

の形で使われることもある [9]。(3) 式と (16) 式は、

$$\kappa^* = \kappa + 1, \quad \theta^* = \sqrt{\frac{\kappa}{\kappa + 1}} \theta \quad (17)$$

と置き換えて、お互いに変換することができる。

3.3 ツァリス統計力学

カッパ分布は、通常のパルツマン・ギブス統計力学の枠組みを拡張したツァリス (Tsallis) 統計力学と関連していると考えられている。ツァリス統計力学は、大きく言うと (1) エントロピーの表式を拡張 [10] したうえで、(2) 期待値の扱いに新しい原理 [11] を取り入れた統計力学である。ツァリス統計の解説は本誌旧記事を含む文献・書籍に譲るが [4, 7, 12–14]、本章でも必要最小限の概要を説明する。

パルツマン・ギブス統計では、以下のようにエントロピーを定義する。

$$S_B \equiv - \sum_i p_i \ln p_i \quad (18)$$

簡単のため、ここではボルツマン定数を無視した。 p_i は i 番目の物理状態をとる確率で、 $\sum p_i = 1$ を満たす。よく知られている通り、内部エネルギーが一定のときに (18) 式のボルツマン・エントロピーを最大化する分布関数が、(1) 式のマクスウェル分布である。さらに1つの系内で、統計的に独立な2つの事象、A, B が起こるとすると、両者が同時に起きる事象と、各部分系のそれぞれのエントロピーは

$$S_B(A+B) = S_B(A) + S_B(B) \quad (19)$$

を満たすことが知られている。この性質をボルツマン・エントロピーの加法性と呼ぶ。

しかし、これらの議論は、局所局所で粒子が相互作用する系を前提としている。重力ポテンシャルを通じて遠隔相互作用する星団系や、電磁場を介する無衝突プラズマ系に、これらの議論を適用して良いかどうか自明ではない [12]。そこで、制約の1つ（具体的には加法性）を緩める形でエントロピーを拡張し、これを起点に統計力学を再構成する。さまざまな非加法的 (nonextensive) 統計力学が提案されてきた。ツァリス統計力学はその中で最も成功し、支持を得ているものである。

ツァリス [10] が提案した拡張エントロピー S_q を (20) 式に示す。これは今日、ツァリス・エントロピーと呼ばれているものである。

$$S_q \equiv \frac{1}{q-1} \left(1 - \sum p^q \right) = \frac{1}{q-1} \sum (p - p^q) \quad (20)$$

q はエントロピー指数 (Entropy index) と呼ばれる拡張パラメーターであり、 $q=1$ のとき、 $S_{q=1} = S_B$ となってボルツマン・エントロピー ((18) 式) に帰着する。先ほどの例と同様、2つの独立事象 A, B を考えると、ツァリス・エントロピーは

$$S_q(A+B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \quad (21)$$

となり、 $q \neq 1$ のときに加法性を満たさない。また、導出を別の文献 [4, 7, 14] に譲るが、ツァリス・エントロピーを最大化する速度分布関数が q -正規分布と呼ばれる分布関数

$$f_q(v)d^3v \sim \left(1 - \frac{2(1-q)}{5-3q} \frac{v^2}{\theta_{\text{eff}}^2} \right)^{\frac{1}{1-q}} d^3v \quad (22)$$

であることがわかっている。 θ_{eff} は実効的なスケールファクターである。エントロピー最大化の帰結として、自然界で頻繁に観測される「べき」乗分布が登場することもツァリス統計力学の特徴の1つである。

ツァリス統計力学では、上記のツァリス・エントロピーに加えて、確率 p を q 乗で重みづけた「エスコート確率」 P を利用する [11, 15]。通常確率 p とエスコート確率 P は、以下のように換算することができる。

$$P = \frac{p^q}{\sum (p^q)}, \quad p = \frac{P^{1/q}}{\sum (P^{1/q})} \quad (23)$$

そして、物理量 $f(x)$ の期待値をエスコート確率を用いて算出する。これを q -期待値と呼ぶ。

$$\mathbb{E}_q[f(x)] = \int f(x)P(x)dx = \frac{\int f(x)p(x)^q dx}{\int p(x)^q dx} \quad (24)$$

実は (22) 式の導出過程でも q -期待値を使っている。そして (22) 式を q 乗して重みづけしたエスコート確率の分布は

$$f_q(v)d^3v \sim \left(1 - \frac{2(1-q)}{5-3q} \frac{v^2}{\theta_{\text{eff}}^2} \right)^{\frac{q}{1-q}} d^3v \quad (25)$$

となる。ここで

$$\kappa = \frac{1}{q-1} \longleftrightarrow q = 1 + \frac{1}{\kappa} \quad (26)$$

を使って変数変換し、 $\kappa\theta^2 \equiv (\kappa - 3/2)\theta_{\text{eff}}^2$ と置き換えると、(16) 式のカッパ分布を q -正規分布 ((22) 式) に、(3) 式のカッパ分布をエスコート分布 ((25) 式) に対応させることができる。ツァリス統計の世界では、エスコート確率 P が実質的な確率分布の役割を果たすため、(3) 式のカッパ分布がより理論と整合するとされている [7]。

3.4 カッパ分布の乱数生成法

カッパ分布を含むさまざまな運動論プラズマ素過程を研究する有力手段の1つが、プラズマ粒子 (PIC) シミュレーションやモンテカルロシミュレーションである [16, 17]。これらのシミュレーションでは、計算の最初に粒子の速度を乱数で初期化することが多い [18]。粒子の速度分布は多くの場合、マクスウェル分布を想定しているが、カッパ分布プラズマをシミュレーションする場合には当然、カッパ分布を使う必要がある。本章では、PIC シミュレーション等で、カッパ分布に従う粒子の速度分布を乱数で生成する方法を紹介する。

準備のため、マクスウェル分布 ((1) 式) の乱数生成法を復習する。(1) 式は3方向が独立した正規分布であるから、正規分布に従う乱数 n_1, n_2, n_3 を3つ用意して

$$v_x = \sigma n_1, \quad v_y = \sigma n_2, \quad v_z = \sigma n_3, \quad (27)$$

とすれば良い。 $\sigma^2 = (1/2)\theta_M^2$ は正規分布の分散である。正規乱数を生成するには、数学ライブラリの正規乱数生成ルーチンを使うか、移植性を考えて Box-Muller 法 [19] を実装すれば良い。Box-Muller 法は、2つの独立した一様乱数 $X_1, X_2 \sim U(0, 1)$ を使って

$$n_1 = \sqrt{-2 \ln X_1} \sin(2\pi X_2) \quad (28)$$

$$n_2 = \sqrt{-2 \ln X_1} \cos(2\pi X_2) \quad (29)$$

の手順で2つの正規乱数 $n_1 \sim \mathcal{N}(0, 1)$, $n_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ を生成する。 $\mathcal{N}(0, 1)$ は平均0、分散1の正規分布である。生成される n_1, n_2 の分布はそれぞれ独立である。

次に、マクスウェル分布 ((1) 式) を極座標系に移して ($d^3v = 4\pi v^2 dv$)、変数 $x \equiv (v^2/v_M^2)$ で書き換えると

$$f_M(x)dx = \frac{2N_M}{\sqrt{\pi}} x^{1/2} e^{-x} dx = N_M \text{Ga} \left(x; \frac{3}{2}, 1 \right) dx \quad (30)$$

となる。ここで

$$\text{Ga}(x; k, \lambda) = \frac{x^{k-1} e^{-x/\lambda}}{\Gamma(k) \lambda^k}, \quad \int_0^\infty \text{Ga}(x; k, \lambda) dx = 1 \quad (31)$$

はガンマ分布であり, k, λ をそれぞれ形状パラメーター, スケールパラメーターと呼ぶ. (30) 式は, マクスウェル分布の速度 ($|v|$) 分布がガンマ分布に従うことを示している. 転じて, ガンマ分布に従って分布するガンマ乱数 $X_{\text{Ga}(\alpha, \beta)}$ を使えば, マクスウェル分布の速度 $|v|$ を乱数生成することができる.

$$v = \theta_M \sqrt{X_{\text{Ga}(3/2, 1)}} = \sigma \sqrt{X_{\text{Ga}(3/2, 2)}}. \quad (32)$$

それではカッパ分布の話に戻ろう. 一般化ベータプライム分布 ((10) 式) に従う乱数は

$$X_{B'(\alpha, \beta, k, \lambda)} = \lambda (X_{B'(\alpha, \beta, 1, 1)})^{1/k} = \lambda \left(\frac{X_{\text{Ga}(\alpha, \delta)}}{X_{\text{Ga}(\beta, \delta)}} \right)^{1/k} \quad (33)$$

という手順で生成することができる [20]. (33) 式右辺の分子と分母のガンマ乱数のスケールファクター δ は, 両者が一致する限り任意のものを選んで良い. ここでは $\delta = 2$ とおく. (33) 式から, (12) 式のカッパ分布に従う速度分布を以下の手順で乱数生成できることがわかる.

$$v = \left(\kappa \theta^2 \frac{X_{\text{Ga}(3/2, 2)}}{X_{\text{Ga}(\kappa-1/2, 2)}} \right)^{1/2} \quad (34)$$

さらに (34) 式の右辺の分子は (32) 式と同じ形だから, 各次元ごとに正規乱数 n_1, n_2, n_3 を生成してから, ガンマ乱数 $\chi_\nu^2 = X_{\text{Ga}(\kappa-1/2, 2)}$ の平方根で割ってやれば, カッパ分布を乱数生成できることがわかる.

$$v_x = \frac{\sqrt{\kappa \theta^2} n_1}{\sqrt{\chi_\nu^2}}, \quad v_y = \frac{\sqrt{\kappa \theta^2} n_2}{\sqrt{\chi_\nu^2}}, \quad v_z = \frac{\sqrt{\kappa \theta^2} n_3}{\sqrt{\chi_\nu^2}}, \quad (35)$$

このアルゴリズムを表 1 に示す. ガンマ乱数を生成するためには, 数値計算ライブラリを使うか, あるいは Marsaglia & Tsang [21] の方法を使えば良いだろう. 後者の方法の詳細は, 原論文あるいは当該分野の教科書を参照していただきたい [21–24]. なお, $\nu (\equiv 2\kappa - 1)$ が整数のとき, 表 1 の 2 行目のガンマ乱数の分布は自由度 ν のカイ自乗分布と等価である. 多変量 t 分布であるカッパ分布を乱数生成するためには, 多変量正規分布を自由度 ν のカイ自乗分布 χ_ν^2 で割ってやればよいことは知られており [24–26], 表 1 はこの有名な方法と一致する.

表 1 のアルゴリズムで, 10^6 個の粒子を使って $\kappa = 3.5$

表 1 カッパ分布の乱数生成法.

input: $\kappa > 3/2, \theta > 0$
generate $n_1, n_2, n_3 \sim \mathcal{N}(0, 1)$
generate $\chi_\nu^2 \sim \text{Ga}(\kappa - 1/2, 2)$
$r \leftarrow \sqrt{\kappa \theta^2 / \chi_\nu^2}$
$v_x \leftarrow r n_1$
$v_y \leftarrow r n_2$
$v_z \leftarrow r n_3$

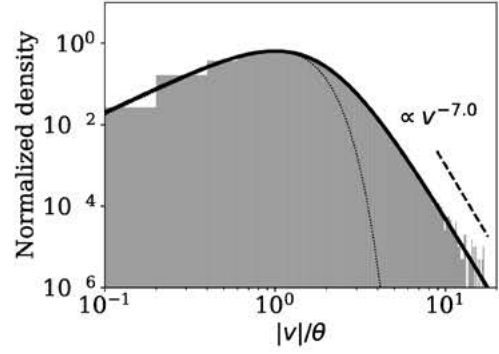


図 2 $\kappa = 3.5$ のカッパ分布に従って乱数生成した粒子速度分布 (ヒストグラム) と解析解 (黒線). 黒の点線は内接マクスウェル分布.

のカッパ分布を生成した結果を図 2 に示す. 速度の関数 $F(|v|)$ の形で, 数値結果 (ヒストグラム) と解析解 (黒の実線) を比較しており, 両者がよく一致することがわかる. 黒の点線は $v_0 = \theta$ でカッパ分布に内接するマクスウェル分布である. これを基準にすると, 高エネルギー帯の「べき」乗分布が見やすいだろう. べき指数が $\approx 2\kappa$ であることと, カッパ分布の最頻速度が $|v| = \theta$ であることも確認できる.

3.5 さまざまなカッパ分布

3.2 で紹介した基本形のほかに, カッパ分布のさまざまな発展形・派生形が考えられている. 本章では宇宙空間・天体プラズマ研究で重要な, カッパロスコーン分布, 相対論的カッパ分布, 正則化カッパ分布を簡単に紹介する.

太陽のコロナループや磁化惑星のダイポール磁場などのループ磁場領域では, ピッチ角 (速度ベクトルと磁力線のなす角) の大きな粒子がミラー反射で閉じ込められる一方, ピッチ角の小さな粒子が磁力線に沿って流出する. そのため, 速度分布関数は, 磁力線方向に穴が空いた「ロスコーン」を形成する. そして, ロスコーンと高エネルギーのべき乗成分を同時に扱うのが, カッパ分布とロスコーン分布を組み合わせたカッパロスコーン (Kappa Loss-Cone; KLC) 分布である [8].

$$f_{\text{KLC}}(v) = \frac{N}{\pi^{3/2} \theta_\parallel^2 \theta_\perp^2 \kappa^{j+3/2}} \frac{\Gamma(\kappa + j + 1)}{\Gamma(j + 1) \Gamma(\kappa - 1/2)} \times \left(\frac{v_\perp}{\theta_\perp} \right)^{2j} \left(1 + \frac{v_\parallel^2}{\kappa \theta_\parallel^2} + \frac{v_\perp^2}{\kappa \theta_\perp^2} \right)^{-(\kappa + j + 1)} \quad (36)$$

$j \geq 0$ はロスコーンの形状を決めるロスコーン指数で, 磁力線水平・垂直方向の特徴速度を $\theta_\parallel, \theta_\perp$ としている. 垂直速度 $v_\perp$ のべき乗で擬似的にロスコーンの形状を近似している. 一方, ロスコーンの生成原理を踏まえ, その形状がピッチ角 α のみで決まるとして, 以下の分布関数を使うこともある [27, 28].

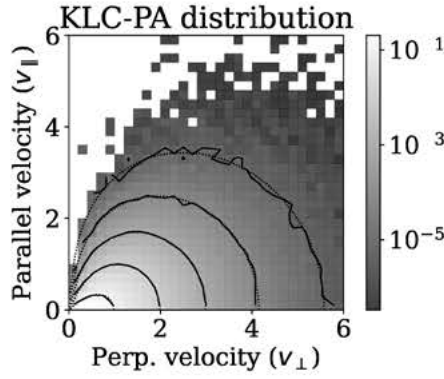


図3 カップロスコーン分布 (37 式) の乱数生成結果 [28]. 数値解と厳密解のコンターをそれぞれ実線と点線で示す. 縦軸は磁力線水平方向, 横軸は磁力線垂直方向の速度である.

$$f_{\text{KLC}}(v) = \frac{N}{\pi^2 \theta^3 \kappa^{3/2}} \frac{2\Gamma(j+3/2)\Gamma(\kappa+1)}{\Gamma(j+1)\Gamma(\kappa-1/2)} \times (\sin \alpha)^{2j} \left(1 + \frac{v^2}{\kappa \theta^2}\right)^{-(\kappa+1)} \quad (37)$$

こうした KLC 分布は, 主にプラズマ波動の伝搬・生成といった理論研究で使われてきた. 最近, PIC シミュレーションのために, 正規乱数やガンマ乱数を組み合わせ, これらの KLC 分布を乱数生成する数値解法を筆者らが提案したところである [28]. 本章では詳細には触れないが, 提案手法を用いて, 10^6 個の粒子を用いて, $j=2$, $\kappa=3.5$ の KLC 分布 (37 式) を乱数生成した結果を図 3 に示す. 磁力線の向きを基準にした $v_{||}$ - $v_{\perp}$ 平面の第一象限で, 位相空間密度 f を示している. 縦軸 ($v_{||}$) 方向にロスコーンが出来る KLC 分布の特徴がよく見えている. 横軸 ($v_{\perp}$) 方向では, 密度分布が v のべき乗で小さくなっていく. 今後, この新しい数値解法を使って, KLC 分布を利用した PIC シミュレーション研究が立ち上がり, 新しい成果が出てくることを期待している.

高エネルギー天体プラズマ環境では, プラズマ温度 T が静止質量エネルギー mc^2 と比べて無視できないことがある. 電子の場合は 512 keV が静止質量エネルギーに相当し, 数百 keV ぐらいから, 特殊相対論効果を加味した相対論的マクスウェル分布や相対論的カップ分布を考える必要がある. 例えば, ブラックホール近傍の電子の放射スペクトルの見積もりに相対論的カップ分布が利用されるようになってきた [29–31]. よく使われる相対論的カップ分布の表式は以下の通りである [32–34].

$$f_{\text{RK}}(p) d^3p \sim \left(1 + \frac{(\gamma-1)mc^2}{\kappa T_{\kappa}}\right)^{-(\kappa+1)} d^3p \quad (38)$$

ここで $\gamma = [1 - (v/c)^2]^{-1/2}$ はローレンツ因子, $p = m\gamma v$ は運動量, T_{κ} はカップ分布の特徴温度である. κ パラメータの定義域は, 非相対論では $\kappa > 3/2$ だったのに対して, 相対論的カップ分布では $\kappa > 3$ となる. これは, 相対論的エネルギーでは $p \propto \gamma$ となるため, エネルギー密度が $\propto \int \gamma f_{\text{RK}}(p) p^2 dp \sim \int p^{2-\kappa} dp$ となり, べき指数 $\kappa=3$ で無限大に発散してしまうからである. PIC・モンテカル

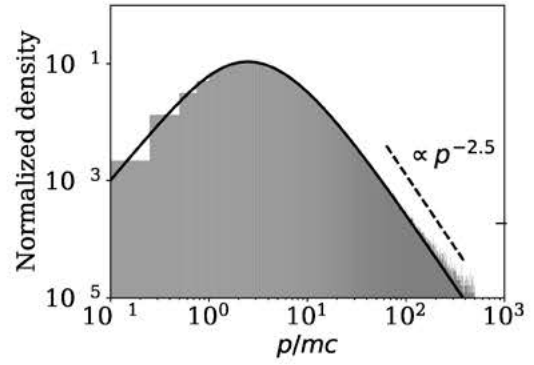


図4 相対論的カップ分布の乱数生成結果 [20]. モンテカルロ粒子の運動量ヒストグラム (グレー) と厳密解 (黒線) を示す.

ロシミュレーションでは, ガンマ分布と棄却法を用いて相対論的カップ分布を生成する数値解法が提案されたところである [20, 35]. 図 4 に, 筆者らの提案手法 [20] を使って, 10^6 個の粒子を用いて特徴温度 $T_{\kappa}/mc^2 = 1.0$, カップ指数 $\kappa = 3.5$ の相対論的カップ分布を乱数生成した結果を示す. 粒子の運動量 p のヒストグラム (グレー) が厳密解 (黒線) とよく一致している. また, 低エネルギーの熱的コア成分から高エネルギーの「べき」乗成分に変化する, カップ分布の特徴がよく現れている. 高エネルギー部の「べき」指数は非相対論 (6 式) のときと違い, $\kappa-1=2.5$ となる.

最後の例として, 最近提案された正則化カップ分布 (Regularized Kappa Distribution) を紹介する [36, 37]. 正則化カップ分布はカップ分布にカットオフ関数を掛けあわせたもので, 関数形は

$$f_{\text{RKD}}(v; \kappa, \alpha) \sim \left(1 + \frac{v^2}{\kappa \theta^2}\right)^{-(\kappa+1)} \exp\left(-\alpha^2 \frac{v^2}{\theta^2}\right) \quad (39)$$

である. α はカットオフ速度 θ/α を決めるパラメータで, $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.01$ などの小さな値を用いることが多い. 正則化カップ分布は, 低エネルギーの熱的コアから出発して $v \sim \theta$ あたりから「べき」乗分布に移移するところまでは, 標準カップ分布と同じである. しかし, $v \sim \theta/\alpha$ あたりから, 減衰の速い指数関数が効いて分布を抑えてしまう. 標準カップ分布は $\kappa = 3/2$ でエネルギー (2 次モーメント), $\kappa = 1/2$ で密度が発散する性質を持っていたが, 正則化カップ分布はカットオフ速度以遠の分布を強制的に打ち切るため, 例えば $\kappa < 3/2$ でもエネルギー密度が発散しない. そのため正則化カップ分布は, 明示的に光速以上の速度を避けたり, 一時的にハードなべきが現れる現象を議論するために役立つと期待されている. 興味深いことに, 正則化カップ分布のボルツマンエントロピーは, 加法的であることが示されている [38]. 正則化カップ分布を使った PIC シミュレーション研究もこれから登場することが期待される. 例えば, 3.4 の方法で標準カップ分布を生成した後, 一様乱数 $X \sim U(0, 1)$ を使って

$$X < \exp\left(-\alpha^2 \frac{v^2}{\theta^2}\right) \quad (40)$$

のときの結果を採用すれば (棄却法), 正則化カッパ分布を生成できるだろう。

3.6 議論

現在, PIC シミュレーションを使って運動論プラズマ現象を調べる研究が活発に行われている。しかし, 問題設定の時点でカッパ分布を考慮した PIC シミュレーション研究はそれほど多くなく [26, 39–42], シミュレーションの結果からも, 「べき」乗のエネルギースペクトルのフィッティング手段としてカッパ分布を利用するぐらいであった [43]。筆者の私見だが, カッパ分布の重要性に反してシミュレーション研究が下火だった理由の 1 つは, 3.4 で紹介した数値解法があまり知られてなかったからだと感じている。Abdul & Mace [26] がカッパ分布と多変量 t 分布の関係から表 1 相当の乱数生成方法を示したのに続いて, その後の筆者らの仕事 [20, 28] で 3.5 の派生形も含むカッパ分布の乱数生成方法が整備された。今後, カッパ分布を取り入れた PIC シミュレーション研究が盛んになるとともに, シミュレーション結果を活かして, プラズマ物理とツァリス統計力学との関係の理解が進むことも期待している。

運動論プラズマ分野では, PIC シミュレーションで得られた分布関数の H 関数

$$H(x) = - \int f(x, v) \ln f(x, v) d^3v \quad (41)$$

を使って, 運動論エントロピーを議論する研究が進められている [44–46]。これらはプラズマ現象の可逆性という重要問題に通じるテーマでもある。今後は, カッパ分布と各種運動論エントロピーとの関係を理解したうえで, 議論の枠組みにツァリス・エントロピーを取りこむことなどが面白い研究テーマになるだろう。

謝 辞

本研究の一部は, 科学研究費助成事業 基盤研究 (C) 21K03627 の支援を得て行われた。

参 考 文 献

- [1] S. Olbert, in *Physics of the Magnetosphere*, eds. R.L. Carovillano, J.F. McClay, & H.R. Radoski (Astrophysics and Space Science Library, Vol. 10; Dordrecht: Reidel), 641 (1968).
- [2] V.M. Vasyliunas, *J. Geophys. Res.* **73**, 2839 (1968).
- [3] V. Pierrard and M. Lazar, *Sol. Phys.* **267**, 153 (2010).
- [4] G. Livadiotis (ed.), *Kappa Distributions: Theory and Applications in Plasmas* (Elsevier, Amsterdam, 2017).
- [5] M. Lazar and H. Fichtner (eds.), *Kappa Distributions: From Observational Evidences via Controversial Predictions to a Consistent Theory of Nonequilibrium Plasmas* (Berlin: Springer, 2021).
- [6] 岡 光夫: プラズマ・核融合学会誌, 本特集 (2025).
- [7] G. Livadiotis and D.J. McComas, *J. Geophys. Res.* **114**, A11105 (2009).
- [8] D. Summers and R.M. Thorne, *Phys. Fluids B* **3**, 1835 (1991).
- [9] M.P. Leubner, *Phys. Plasmas* **11**, 1308 (2004).
- [10] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [11] C. Tsallis *et al.*, *Physica A* **261**, 534 (1998).
- [12] C. Tsallis, *Introduction to Nonextensive Statistical Mechanics: Approaching a Complex World*, 2nd edition (Springer, 2023), ISBN:978-3-030-79569-6.
- [13] 阿部 純義: プラズマ・核融合学会誌 **36**, 2 (2002).
- [14] 須鎔 弘樹: 複雑系のための基礎数理—べき乗則とツァリスエントロピーの数理 (牧野書店, 2010).
- [15] C. Beck and F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [16] C. K. Birdsall and A.B. Langdon, *Plasma Physics via Computer Simulation* (McGraw-Hill, New York, 1985).
- [17] R. W. Hockney and J. W. Eastwood, *Computer simulation using particles* (McGraw-Hill, New York, 1981).
- [18] 宇佐見 俊介: プラズマ・核融合学会誌 **96**, 290 (2020).
- [19] G.E. P. Box and M.E. Muller, *Ann. Math. Stat.* **29**, 610 (1958).
- [20] S. Zenitani and S. Nakano, *Phys. Plasmas* **29**, 113904 (2022).
- [21] G. Marsaglia and W.W. Tsang, *ACM Trans. Math. Software* **26**, 363 (2000).
- [22] W.H. Press *et al.*, *Numerical Recipes 3rd Edition: The Art of Scientific Computing* (Cambridge University Press, 2007).
- [23] 四辻 哲章: 計算機シミュレーションのための確率分布乱数生成法 (ブレアデス出版, 2010), ISBN:978-4-903814-35-3.
- [24] D.P. Kroese *et al.*, *Handbook of Monte Carlo methods* (John Wiley & Sons, 2011), (邦訳: D.P. クローゼ他: モンテカルロ法ハンドブック (朝倉書店, 2014)).
- [25] M. Hofert, *R Journal* **5**, 129 (2013).
- [26] R.F. Abdul and R.L. Mace, *Phys. Plasmas* **22**, 102107 (2015).
- [27] C.F. Kennel, *Phys. Fluids* **9**, 2190 (1966).
- [28] S. Zenitani and S. Nakano, *J. Geophys. Res.* **128**, e2023JA031983 (2023).
- [29] A. Pandya *et al.*, *Astrophys. J.* **822**, 34 (2016).
- [30] J. Davelaar *et al.*, *Astron. Astrophys.* **612**, A34 (2018).
- [31] M. Zhang *et al.*, *Astron. Astrophys.* **687**, A88 (2024).
- [32] O. Naito *et al.*, *Phys. Plasmas* **3**, 1474 (1996).
- [33] F. Xiao, *Plasma Phys. Control. Fusion* **48**, 203 (2006).
- [34] L. Han-Thanh *et al.*, *Phys. Plasmas* **29**, 022901 (2022).
- [35] J. Davelaar *et al.*, *MNRAS* **526**, 5326 (2023).
- [36] K. Scherer *et al.*, *Europhys. Lett.* **120**, 50002 (2017).
- [37] K. Scherer *et al.*, *Astrophys. J.* **881**, 93 (2019).
- [38] H. Fichtner *et al.*, *Phys. Rev. E* **98**, 053205 (2018).
- [39] Q. Lu *et al.*, *J. Geophys. Res.* **115**, A02213 (2010).
- [40] E.J. Koen *et al.*, *Phys. Plasmas* **19**, 042102 (2012).
- [41] J. Park *et al.*, *Astrophys. J.* **765**, 147 (2013).
- [42] H. Ma *et al.*, *Astrophys. J.* **954**, 21 (2023).
- [43] M. Hoshino, *Phys. Plasmas* **29**, 042902 (2022).
- [44] H. Liang *et al.*, *Phys. Plasmas* **26**, 082903 (2019).
- [45] M.R. Argall *et al.*, *Phys. Plasmas* **29**, 022902 (2022).
- [46] H. Hasegawa *et al.*, *Space Sci. Rev.* **220**, 68 (2024), 3.2.4 章.

小特集 プラズマにおける非加法的統計力学

4. 宇宙プラズマにおける粒子加速とカップパ分布

4. Particle Acceleration and Kappa Distribution in Space Plasmas

岡 光夫

OKA Mitsuo

カリフォルニア大学バークレー校 宇宙科学研究所

(原稿受付: 2025 年 3 月 24 日)

宇宙空間は、超音速プラズマが衝撃波を形成し、磁力線がつなぎ変わってエネルギーを解放し、さらには粒子が非熱的な高エネルギーにまで加速される、ダイナミックな世界である。これらの物理機構の詳細は未解明であるが、太陽フレアや地球磁気圏などにおける粒子加速の研究では、ツァリス統計に基づくカップパ分布が観測とモデルの両面から注目されている。今後は、エネルギー分配の全体像をツァリス統計とプラズマ物理の枠組みで統合的に理解することが期待される。

Keywords:

Kappa distribution, Tsallis statistics, particle acceleration, shock, magnetic reconnection, solar flare, Earth's magnetosphere

4.1 はじめに

地球や惑星、太陽、宇宙天体など、宇宙のさまざまなプラズマ環境においては、一部の粒子が非常に高い非熱的なエネルギーにまで加速される [1–4]。衝撃波 [5] や磁気リコネクション (磁力線再結合) [6, 7] などプラズマの基本的なエネルギー変換過程が重要な役割を果たしていることはわかっているが、具体的にどのような機構で粒子が加速されるか、エネルギーが各粒子種や電磁場にどのように分配されるか、については未解決課題となっている。しかし、過去数十年にわたる精力的な研究により、多くの知見が蓄積されてきた。特に、地球磁気圏やその周辺の惑星間空間では「その場」でのプラズマ直接計測が行われ、身近な恒星である太陽に関しては遠い宇宙天体とは比較にならないほど豊富なリモートセンシング観測が実施されてきた。その中で注目を集めた話題の1つにカップパ分布がある。カップパ分布は、観測される粒子の速度分布 (もしくはエネルギースペクトル) を特徴づける関数形の1つであり、本特集のテーマであるツァリス統計 [8, 9] のエントロピーを最大化した状態に対応する。

そこで本章では、カップパ分布に注目しつつ、宇宙プラズマにおける粒子加速の研究を概説する。特に、これまで筆者が取り組んできた太陽フレアと地球磁気圏、太陽風などにおけるプラズマを中心に扱う。なお、本章における「加速」は粒子の非熱的なエネルギーまでの加速を指し、加熱やプラズマのバルクの加速とは使い分けているので注意されたい。また、参考文献にはなるべく日本語による解説記事を選んでいく。

4.2 ベキ分布

宇宙プラズマにおける高エネルギー粒子加速を理解する上での基本は統計的フェルミ加速である [1, 10, 11]。統計的フェルミ加速は、粒子が波動や乱流などの中で散乱を繰り返しながら加速される過程であり、エネルギースペクトル $F(E)$ は非熱的なベキ型となる。

$$F(E) \propto E^{-\delta} \quad (1)$$

ここで、ベキ指数 δ の値は $F(E)$ の定義に応じて変わる (便利なベキ指数換算表があるので参照されたい [2])。ただし、宇宙線や地球磁気圏プラズマなど、粒子を直接計測する分野においては $F(E)$ として微分フラックスを使うことが多く、本章もそれに倣う。 δ が小さい場合はスペクトルが硬いと表現し、大きい場合はスペクトルが軟らかいと表現される。理論的には、ベキ指数は加速の時間スケールと損失の時間スケールの比に依存するが、そのあたりの詳細をどうモデル化するかに応じて多種多様な理論が存在する。また、統計的フェルミ加速は衝撃波の物理の文脈で議論されることが多いが、リコネクションや乱流などにおける粒子加速を理解する上でも必須である [2, 3, 12]。

4.3 カップパ分布

プラズマの物理として熱的成分 (マクスウェル分布) と非熱的成分 (ベキ分布) を同時に扱うのは難しく、両者を分けて考えることが多い (図 1(b), (c))。しかし、非熱的成分が十分に大きい場合にはマクスウェル分布からベキ分布へ滑らかにつなげる必要がある (図 1(d))。それを実現する関数形がカップパ分布である。

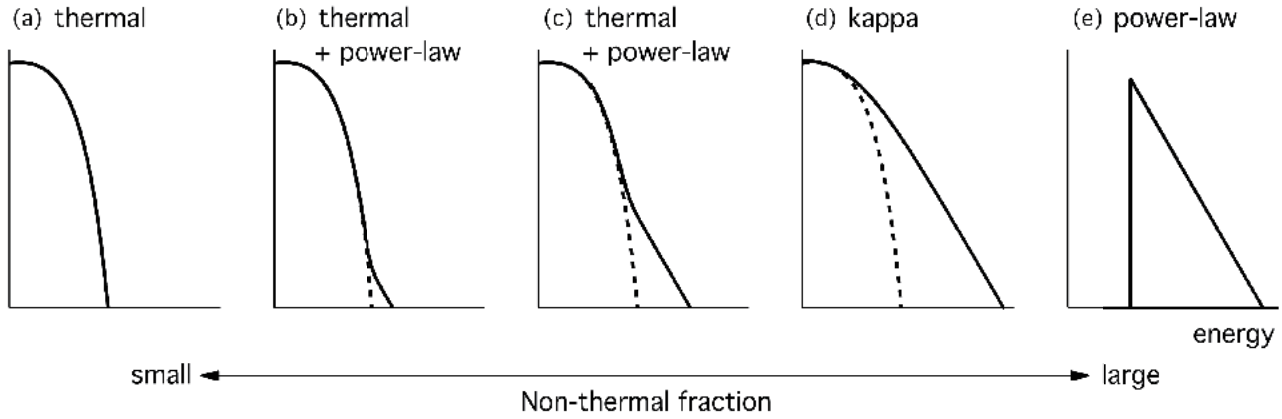


図1 ベキ指数を固定したまま非熱的成分の割合を変化させた場合のエネルギースペクトルの形状変化．熱的なマクスウェル分布 (a) と非熱的なベキ分布 (e) の中間的な性質を持つカッパ分布 (d) が、非熱的成分が十分に大きい場合に適用される．[13] より抜粋．

等方3次元の場合、カッパ分布の位相空間密度 $f(v)$ は以下のように与えられる [14, 15]．

$$f(v) \propto \left(1 + \frac{v^2}{\kappa\theta^2}\right)^{-(\kappa+1)} \quad (2)$$

ここで、 v は粒子の速度、 θ は粒子の最頻速度、 κ は定数で、 $\kappa \rightarrow \infty$ の極限でマクスウェル分布に収束する．ベキ指数に+1を追加しているため、エネルギースペクトルを微分フラックスで表示した際のベキ指数が κ になる（したがって $\delta = \kappa$ ）．また、 κ の取りうる最小値は1.5である．温度については、筆者らは実効温度（銭谷氏の記事 [16] にある (15) 式）を使っているが、他にも定義の仕方があるので注意されたい [17]．

ちなみに、カッパ分布は、もともと地球磁気圏で観測される電子の速度分布を表現するために経験的に導き出された．出典として Vasyliūnas (1968) がよく引用されるが [15]、この論文は Vasyliūnas の指導教官 Olbert の配慮により単著として発表されたものであり [18]、実際にカッパ分布を考案したのも Olbert である [14]．また、Binsack は 1966 年の学位論文で、カッパ分布は Olbert が（1963 年 11 月に打ち上げられた）IMP-1 衛星の観測データを用いて導出したと記している [19]．したがって、カッパ分布が導出されたのは 1964 年から 1966 年頃と考えられる．

当初、このカッパ分布の理論的根拠は不明瞭だったが、カッパ分布がツァリス統計においてエントロピーを最大化したツァリス分布と等価であることが 2000 年代までに確立された [16, 17]．プラズマ物理の観点でも、フェルミ加速の散乱のもとになる乱流と、損失過程に対応する粒子間衝突をフォッカー・プランク方程式の中で考えれば、カッパ分布を得られることがやはり 2000 年代までには認識されるようになった [20–22]．ただし、磁気圏プラズマは無衝突なので、粒子間衝突を必要としない自己無撞着なカッパ分布形成理論が今でも模索されている [23, 24]．いずれにせよ、これらの理論的進展とあいまって、地球磁気圏プラズマにとどまらず、太陽観測データの解析やプラズマ理論シミュレーションでの応用が広まっている．

4.4 地球磁気圏

図2右に地球磁気圏尾部のリコネクション領域におけるカッパ分布の観測例を示す．2015年に打ち上げられた4機から成るMMS衛星群によるもので、観測データ（黒点）をカッパ分布でフィット（オレンジ線）することで、カッパ分布のパラメータ（密度 N_κ 、温度 T_κ 、ベキ指数 κ ）を求めている．スペクトルが3桁以上のエネルギー範囲に渡るため、20 keV以下の低エネルギー側を静電分析器、高エネルギー側を固体素子検出器で観測している．MMSではこれらの装置がいずれも正常に動作し、観測後の相互のデータ較正も丁寧に行われているため、カッパ分布のパラメータを高い精度で求めることができる．しかし、温度 T_κ やベキ指数 κ といったパラメータがどのような物理によって決まるか、については今なお不明な点が多い．

地球磁気圏尾部のリコネクション領域で観測されるカッパ分布について言えば、 κ の値はイオン・電子ともに4以上のことが多いが [2]、プラズマが強く加熱されて温度が高くなるケースでは κ の値が大きいことが近年明らかになってきている [25, 26]．ただし、人工衛星による「その場」の観測だけでは、その時の上流の境界条件がどうなっているかを知るのは難しい．リコネクションの数値シミュレーションでは、初期のガイド磁場や密度非対称性が大きい場合にベキが4以上の大きい値になることが示されているが [27]、地球磁気圏尾部でのガイド磁場や密度非対称性は小さい．リコネクションの物理によらない、磁気圏のグローバルな構造の影響があるのかもしれない．

4.5 太陽風

地球磁気圏以外では、太陽風の速度分布関数も「その場」観測でよく調べられており、カッパ分布の報告例も多い [28, 29]．太陽風の電子の速度分布関数は、コア・ハロー・ストラルと複数の成分に分けられることが知られているが、これらの成分のうちハロー成分がカッパ分布で表現されることが多い．そのベキ指数 κ は、地球磁気圏のそれより小さく、4より小さいときの方が多い．なお、太陽風中で観測される電子の速度分布は衛星電位による影響

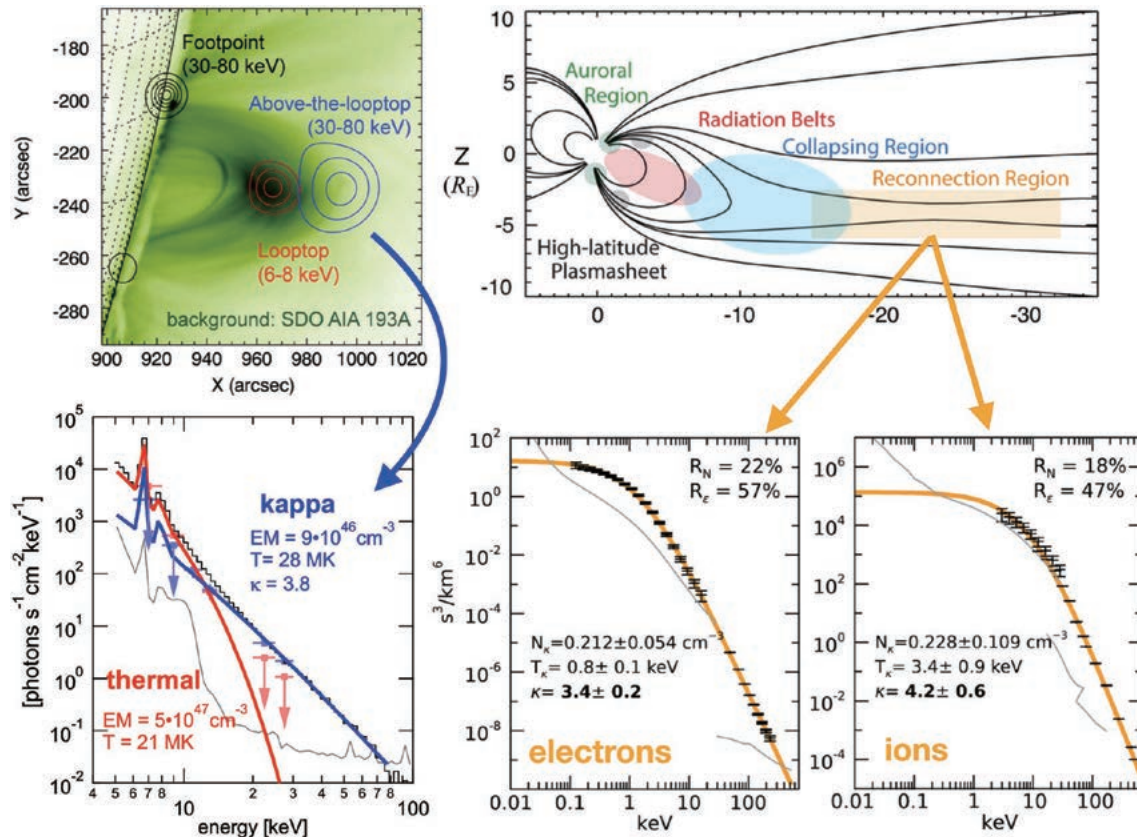


図2 カップパ分布の太陽フレア（左）および地球磁気圏（右）での観測例。太陽フレアは、ループトップ上空硬X線源（画像における青い等高線）から得られる光子スペクトルを制動放射の thin-target モデルで解釈した場合、カップパ分布でフィットできる（スペクトル図の青線）[13, 38]。地球磁気圏尾部の磁気リコネクション領域では、イオン・電子が直接計測されており、いずれのエネルギースペクトルもカップパ分布でフィットできることが多い（速度分布図のオレンジ線）[2, 7, 25]。

を受ける場合があるため、プラズマ振動数付近の電場スペクトルから速度分布を推定する方法も補助的に実施されている（準熱雑音分光法）。そして、そこでもカップパ分布を使えば観測されるスペクトルをフィットできることが示されている。

太陽風中のイオンについても速度分布関数の観測からベキ指数が小さいことが知られており、太陽風乱流を介したポンプ機構の可能性が指摘されていることは以前にも紹介した[28]。最近の話題としては、太陽表面近傍での観測が挙げられる。これまで太陽風の直接観測は主に惑星間空間、特に地球軌道周辺のものに限られていたが、2018年に打ち上げられた米国の探査機パーカー・ソーラー・プローブが太陽表面に接近して「その場」観測を行っている。その結果、太陽表面の超粒状斑の空間スケールに対応する太陽風速度の変動が検出され、合わせて非熱的イオンによるベキ型エネルギースペクトルも観測された[30]。これらは、閉じた磁力線と開いた磁力線による交換型リコネクションで解釈され、コロナ加熱と太陽風の生成においてリコネクションが重要な役割を果たしていることを示唆するものである[31]。ただし、イオンのエネルギースペクトルのベキ指数は9～10程度と非常に大きいものだった（論文ではエネルギーフラックスが使われているので、本章のベキ指数 δ に換算した）。これは非熱的成分が非常に少ないことを意味する。やはり太陽風中の非熱的イオンは惑星間

空間を伝搬中に生成・卓越するものなのかもしれない。

4.6 太陽フレア

太陽フレアで解放される磁気エネルギーのうち、最大で実に50%もの割合が非熱的電子に渡る可能性がある、と古くから指摘されている[32, 33]。最近のX線（連続成分）およびマイクロ波の観測でも、太陽フレアのループトップ上空の電子については、熱的成分がすべて加速されて非熱的成分のみが残る、という結論が出されている[34, 35]。観測の時間スケールは少なくとも4秒であり、粒子間衝突やプラズマ不安定による熱化の時間スケール（0.1秒以下）を上回っている。つまり、報告が正しければ図1(e)のような状況が安定的に存在していることになる。地球磁気圏における非熱的電子のエネルギー密度が、熱的電子のそれと比べて10%程度に過ぎないことも考えると[36]、太陽フレアにおけるエネルギー分配は深刻な未解決課題と言える[37]。

しかし、太陽フレアの解析では、1つのエネルギー値（カットオフ・エネルギー）を境にして熱的成分（マクスウェル分布）と非熱的成分（ベキ分布）を分けることが一般的であるため、その値の取り方で結果が大きく変わってしまう。そもそも、熱的成分から非熱的成分までに至る幅広いエネルギー範囲を1つの装置で同時に観測できることが少なく、エネルギー分配の見積りの不定性が高い。そこで筆者らのグループは、カップパ分布モデルを用いて

データを解釈することを提案している (図 2 左) [13, 38]. カッパ分布であれば, 熱的成分と非熱的成分を無理なく合理的に定義・区別することができ, 熱的成分が存在しないという極端な結論を回避することもできる. これらの利点もあり, カッパ分布を用いる太陽フレア・データ解析 [39–41] や理論・シミュレーション研究が近年増えている [22, 27, 42]. 今後は電子のスペクトル形状を確定的に診断する必要があり, 軟 X 線から硬 X 線までの幅広い帯域を継ぎ目なく撮像分光観測できる次世代 X 線望遠鏡の実現が期待されている [43].

なお, 太陽フレアに伴う高エネルギーイオンを直接的に調べるのは難しい. 太陽大気からの X 線 (連続成分) は電子による制動放射がほとんどだからである. γ 線であれば, 数 MeV 帯の核脱励起線や, 2.2MeV の中性子捕獲線なども使えるが, それらの観測や解釈は依然として難しい. ただし, 紫外線領域の輝線スペクトルから重イオンの情報を得る試みはある [44]. ひので衛星による鉄輝線の観測では, ドップラシフトや装置起因の広がりを考慮したとしても, カッパ分布を使わないとスペクトル形状 (線幅) を説明できないことが示されている [45–47]. κ の値は, コロナのループトップ領域では 4–7 だったという報告もあるが, おおむね 2–3 程度だったとされている. ただし, 解析例が少ないため κ の傾向を判断するのは難しく, さらなる検証が待たれる.

4.7 その他の非平衡分布

太陽風や地球磁気圏などで観測される無衝突プラズマは基本的に非平衡であり, 異方性を呈していたりビーム状成分が加わっていたりして複雑な速度分布関数を示していることがほとんどである. その中で, カッパ分布と似て非なるものとして知られているのが「フラットトップ分布」である [25]. 位相空間密度 $f(v)$ は以下のように与えられる.

$$f(v) \propto \left[1 + \left(\frac{v}{v_L} \right)^{2\kappa} \right]^{-\frac{\kappa+1}{\kappa}} \quad (3)$$

ここで, v_L は「肩エネルギー」に対応する速度である. 「肩エネルギー」を境にして低エネルギー側では平坦, 高エネルギー側ではベキに従う形になっている. 衝撃波遷移層やリコネクションの拡散領域近傍など, イオンと電子が分離してポテンシャルを形成するような場所で観測されることが多いため, ポテンシャルにより形成される電子ビームが熱化した状態に対応しているのかもしれない. なお, 筆者の地球磁気圏観測の経験では, 高い時間分解能ではフラットトップをはじめとする複雑な分布関数が見られるが, 長めの時間平均を取るとカッパ分布に近づくことがある. カッパ分布がツァリス・エントロピーを最大化した形に対応していることと関係しているのかもしれない.

その他には「 n 分布」が興味深い. 定数 n, θ を用いて

$$f(v) \propto \left(\frac{v}{\theta} \right)^n \exp \left(-\frac{v^2}{\theta^2} \right) \quad (4)$$

と表現されるもので, 太陽フレアの分光観測において,

鉄 XXV の共鳴線とダイエレクトロニック再結合線の比が非熱的ベキ成分では説明できないことから提案された [48, 49]. 同様の関数形は実験室プラズマの研究でも提案されている [50]. 対応する物理的な状況として, ドリフト速度をもつマクスウェル分布が考えられている [29]. そのような状況は地球磁気圏でもありうるため (たとえば衝撃波やリコネクションの下流にあるジェット), MMS のデータを用いて n 分布の検証を試みるのも面白いかもしれない.

4.8 ベキ指数の比較

太陽圏におけるすべてのプラズマ環境でカッパ分布が観測されたり適用されたりしているわけではないが, ベキ型スペクトルはほぼすべてのプラズマ環境で観測されている. そこで, ベキ指数 $\delta (= \kappa)$ を比較してみると, その値が大きく異なることがわかる.

まず電子の場合については, 太陽フレアや地球磁気圏尾部における磁場エネルギー解放現象に関わる観測では, スペクトルが相対的に軟らかく, $\delta (= \kappa)$ が 4 以上であることがほとんどである [2]. 太陽フレアの足元からの X 線放射スペクトルは硬いが, 制動放射の thick-target モデルで解釈すれば, 元の電子のベキ指数 δ はやはり 4 以上のことが多い (もちろん例外イベントもある). 一方, 太陽風や衝撃波など, 必ずしも磁場エネルギーの爆発的解放現象を伴わない場合には 4 以下の小さい値が観測されることが多い. 磁場エネルギーの解放現象は電子の加速よりも加熱に強く作用するのかもしれない.

一方, イオンのベキ指数についてはまだ体系的な比較研究がされていない. 地球磁気圏では, 陽子の熱速度がバルク速度と比べて相対的に小さく, プラズマ静止系でのスペクトル関数形をそのまま適用できるとは限らない. そこで筆者らのグループでは, 観測者系とプラズマ静止形でベキ指数 κ がほとんど変わらないことを確認した上でカッパ分布を用いた統計解析を行った. その結果, 陽子のベキ指数 ($\kappa \sim 5 - 10$) は電子のそれ ($\kappa \sim 4 - 6$) よりもおおむね大きいことがわかった [26]. 前述したように, 太陽表面での交換型リコネクションを示唆する観測でもスペクトルが軟らかだったことを考えると, やはりリコネクションは加速よりも加熱に強く作用するのかもしれない.

ただし, 太陽フレアの輝線スペクトルから小さいベキ指数 $\kappa = 2 \sim 3$ が報告されていることは第 4.6 節で述べた. 加えて, 太陽フレアの起きていない時の活動領域や [51], 高速太陽風の起源であるコロナホールにおいても [52], $\kappa = 2 \sim 2.5$ と非常に小さいベキ指数が輝線スペクトルから示唆されている. 輝線スペクトルが陽子ではなく重イオンの速度分布に対応しているせいもあるかもしれないが, スペクトル形状の理解にはカッパ分布が必要であることや, これまでのところおおむね小さいベキ指数を示唆している点は興味深い.

4.9 エネルギー分配の統一的理解に向けて

以上, 粒子加速, つまり非熱的なベキ型スペクトルの形

成を中心に据えつつ、カッパ分布の有用性を紹介してきた。しかし、プラズマのエネルギー分配という観点では、熱的成分も含めたスペクトル全体を理解することが求められる。この観点からは、カッパ分布を用いることで、熱的成分と非熱的成分の割合を定義し、それをベキ指数 κ の関数として解析的に表現できることも指摘しておきたい [13,38]。実際に計算してみると、 $\kappa=4$ のときに熱的成分と非熱的成分が等分配された状況となり、 κ がこれより小さい場合（衝撃波など）には、非熱的成分が優勢となる。

ただ、本来カッパ分布のスペクトルは折れ曲がりのない滑らかなものである（図 1(d)）。「加速」も「加熱」も粒子がエネルギーを獲得する過程である点は同じで、その違いは便宜上の区別に過ぎないかもしれない。たとえば、粒子のエネルギー増加量 $\Delta\varepsilon$ は

$$\Delta\varepsilon = qVBL \quad (5)$$

と統一的に表せる。ここで q は電荷、 V はプラズマのバルク速度、 B は特徴的な磁場強度、 L は粒子のエネルギー増加に必要な空間スケールである。このとき、 L としてシステム全体を取れば最大粒子エネルギーを [4,53,54]、運動論的スケールを取れば、衝撃波や磁気リコネクションで観測される温度増加を説明できることが近年示された [55]。運動論的スケールとは、イオン加熱ではイオン慣性長やジャイロ半径、電子加熱ではハイブリッド慣性長を指す。電磁流体力学（ランキン・ユゴニオ条件を含む）ではイオンと電子の温度を別々に扱うことはできないので、この新しい知見はイオンと電子のエネルギー分配を理解する上で重要な足掛かりであると筆者らは考えている。もちろん、実際の加速や加熱の過程は複雑で粒子ごとに異なるし [56]、太陽大気下層など粒子間衝突が無視できず、上式だけで説明できないプラズマ環境もあるだろう。しかし、上式には加速と加熱の区別を超える普遍性がある。

そして、カッパ分布は、ツァリス統計のエントロピーを最大化する分布であるため、エネルギー分配の最適解を与えられと考えられる。プラズマのエネルギーはイオンと電子でどのように分配されるのか、熱的成分と非熱的成分でどのように分配されるのか、さらにはそれらの中でカッパ分布がどのような役割を果たしているのか、ツァリス統計学やプラズマ物理学の観点から統一的・包括的な理解が進むことを期待している。

参 考 文 献

- [1] 國枝秀世：プラズマ・核融合学会誌 **81**, 423 (2005).
- [2] M. Oka, Space Sci. Rev. **214**, 82 (2018).
- [3] M. Oka, Space Sci. Rev. **219**, 75 (2023).
- [4] M. Oka, Astrophys. J. **979**, 161 (2025).
- [5] 犬竹正明：プラズマ・核融合学会誌 **83**, 60 (2007).
- [6] 小野 靖：プラズマ・核融合学会誌 **89**, 753 (2013).
- [7] J.F. Drake *et al.*, Space Sci. Rev. **221**, 27 (2025).
- [8] 阿部純義, 日本物理学会誌 **54**, 287 (1999).
- [9] 阿部純義：プラズマ・核融合学会誌 **78**, 36 (2002).
- [10] 坂和洋一, 高部英明：プラズマ・核融合学会誌 **92**, 73 (2016).
- [11] 山崎 了：プラズマ・核融合学会誌 **92**, 78 (2016).
- [12] 星野真弘：プラズマ・核融合学会誌 **78**, 668 (2005).
- [13] M. Oka *et al.*, Astrophys. J. **799**, 129 (2015).
- [14] S. Olbert, *Physics of the Magnetosphere*, Vol.10, p.641 (Springer, 1968).
- [15] V.M. Vasyliūnas, J. Geophys. Res. **73**, 2839 (1968).
- [16] 銭谷誠司：プラズマ・核融合学会誌 **101**, 10 (2025).
- [17] G. Livadiotis and D.J. McComas, J. Geophys. Res. **114**, A11105 (2009).
- [18] V.M. Vasyliūnas, J. Geophys. Res. **125**, e2020JA027865 (2020).
- [19] J. Binsack, Plasma Studies with the IMP-2 Satellite, Ph.D. thesis of Massachusetts Institute of Technology (1966).
- [20] A. Hasegawa, Phys. Rev. Lett. **54**, 2608 (1985).
- [21] C. Ma and D. Summers, Geophys. Res. Lett. **25**, 4099 (1998).
- [22] N.H. Bian *et al.*, Astrophys. J. **796**, 142 (2014).
- [23] P.H. Yoon *et al.* J. Geophys. Res. **111**, A09106 (2006).
- [24] P.H. Yoon *et al.*, Entropy **26**, 310 (2024).
- [25] M. Oka *et al.*, Phys. Plasmas **29**, 052904 (2022).
- [26] A. Rajhans *et al.*, Geophysical. Res. Lett. **52**, e2025GL114931 (2025).
- [27] H. Arnold *et al.*, Phys. Rev. Lett. **126**, 135101 (2021).
- [28] 岡 光夫：プラズマ・核融合学会誌 **90**, 687 (2014).
- [29] J. Dudík *et al.*, Solar Phys. **292**, 100 (2017).
- [30] S. Bale *et al.*, Nature **618**, 252-256 (2023).
- [31] 清水敏文, 他：プラズマ・核融合学会誌 **94**, 597 (2018).
- [32] R.P. Lin and H.S. Hudson, Solar Phys. **50**, 153 (1976).
- [33] M.J. Aschwanden, Astrophys. J. **836**, 17 (2017).
- [34] S. Krucker and M. Battaglia, Astrophys. J. **780**, 107 (2014).
- [35] G.D. Fleishman *et al.*, Nature **606**, 674 (2022).
- [36] M. Øieroset *et al.*, Phys. Rev. Lett. **89**, 195001 (2002).
- [37] E.P. Kontar *et al.*, Astrophys. J. **947**, L12 (2023).
- [38] M. Oka *et al.*, Astrophys. J. **764**, 6 (2013).
- [39] M. Battaglia *et al.*, Astrophys. J. **815**, 73 (2015).
- [40] F. Effenberger *et al.*, Astrophys. J. **835**, 124 (2017).
- [41] Y. Luo *et al.*, Astrophys. J. **974**, 119 (2024).
- [42] Z. Yin *et al.*, Astrophys. J. **974**, 74 (2024).
- [43] M. Oka *et al.*, Bulletin of the AAS **55**, 302 (2023).
- [44] 今田晋亮, 天文月報 **109**, 637 (2016).
- [45] N.L. S. Jeffrey *et al.*, A&A **590**, A99 (2016).
- [46] N.L. S. Jeffrey *et al.*, Astrophys. J. **836**, 35 (2017).
- [47] V. Polito *et al.*, Astrophys. J. **864**, 63 (2018).
- [48] J.F. Seely *et al.*, Astrophys. J. **319**, 541 (1986).
- [49] E. Džifčáková, Solar Phys. **178**, 317 (1998).
- [50] J.D. Hares *et al.* Phys. Rev. Lett. **42**, 1216 (1979).
- [51] J. Dudík *et al.*, Astrophys. J. **842**, 19 (2017).
- [52] N.L. S. Jeffrey *et al.*, Astrophys. J. **855**, L13 (2018).
- [53] K. Makishima, Astronomische Nachrichten **320**, 163 (1999).
- [54] T. Terasawa, Science and Technology of Advanced Materials **2**, 461 (2001).
- [55] M. Oka *et al.*, Astrophys. J. **984**, 150 (2025).
- [56] 銭谷誠司：プラズマ・核融合学会誌 **97**, 47 (2021).

小特集 プラズマにおける非加法的統計力学

5. 非平衡弱電離プラズマにおける電子温度・励起温度

5. Electron and Excitation Temperatures of Weakly Ionized Plasmas in a Non-Equilibrium State

赤塚 洋

AKATSUKA Hiroshi

東京科学大学 総合研究院 ゼロカーボンエネルギー研究所

(原稿受付: 2024 年 12 月 7 日)

非平衡プラズマ中においては、電子エネルギー分布関数や、励起状態数密度分布は、一般に Boltzmann 分布には従わない。そのような非平衡状態に対しても、統計力学的には、エントロピー S と内部エネルギー U を用い、 $1/T = \partial S / \partial U$ として温度 T を定義できる可能性がある。この計算においてはエントロピー最大化の原理が適用されるべきであり、非平衡の場合には Gibbs エントロピーではなく、Tsallis のような非加法的エントロピーやあるいは Rényi のような加法的エントロピーが候補となる。我々は、水素プラズマ中の励起状態密度分布、さらには低温弱電離プラズマの電子エネルギー分布に着目して、その非加法的エントロピーから新たに定義される各種の温度について計算し、巨視的な意味で理解される「各種温度」と、エントロピーを用いて偏微分計算から導出される「統計力学的温度」の関係を検討しており、本章にて紹介する。

Keywords:

non-equilibrium plasma, excited-state population, electron energy distribution function, excitation temperature, Tsallis entropy, statistical physics

5.1 はじめに

衝突輻射モデル (Collisional Radiative model; CR モデル) を適用すれば、第 i 準位の励起状態数密度 n_i ($i \geq 2$) を、電子温度 T_e 及び密度 N_e 並びに原子基底状態の数密度 N_1 を入力として計算することができる。ただし、励起状態分布は一般に Boltzmann 分布には従わない。そのような非平衡状態に対しても、統計力学的には、エントロピー S と内部エネルギー U を用いれば、

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial U} \quad (1)$$

として、励起状態分布の温度 T を定義できる可能性があると考えられ、そのような非平衡状態での適切な温度の定義を探るような理論的考察を我々は行なってきた [1, 2]。すなわち、Gibbs エントロピー S_G の適用が許されるのであれば、状態 i の存在確率 p_i および Boltzmann 定数 k を用いて、

$$S_G = -k \sum_i p_i \ln p_i, \quad (2)$$

および各準位の励起エネルギーを ϵ_i としてその総和として与えられる原子系の内部 (= 励起) エネルギー

$$U = \sum_i p_i \epsilon_i \quad (3)$$

から S_G, U を求め、適切な制約条件 (全原子数が一定、な

ど) のもとで $S = S_G$ として式 (1) を適用し温度が導出できると考えられる。一般に、系が平衡状態にあって、速度やエネルギーの確率分布関数 $\{p_i\}$ が Boltzmann 分布に従う場合、分配関数を Z とすれば

$$p_i = \frac{1}{Z} \exp \left(-\frac{\epsilon_i}{kT} \right) \quad (4)$$

と書けるであろう。 $\{p_i\}$ が (4) で与えられていれば、統計力学に基づき式 (1)–(3) を適用すれば、矛盾なく温度 T を導出できる。式 (1) を用いて計算した温度は、 p_i を Boltzmann プロットし、その傾きから決定した温度と一致する。しかし速度やエネルギーの分布関数が Maxwell 分布や Boltzmann 分布に従わない非平衡状態では、図 1 の様に分布関数を指数関数で表すことができないため、何かしら近似をしない限り Boltzmann プロットの傾きから温度を決定することはできない。

非加法的エントロピーの重要性に気づく以前、本研究の前段階として、我々は弱電離プラズマを対象として、Gibbs のエントロピー S_G と、電子集団のエネルギー U から、次のように温度を計算した [2]。すなわち、電子エネルギー分布関数 (EEDF) $F(\epsilon)$ を解とする Boltzmann 方程式を、酸素や窒素のプラズマに対して立式し、2 項近似を用いて電界方向の一次元問題として換算電界 E/N を入力として求

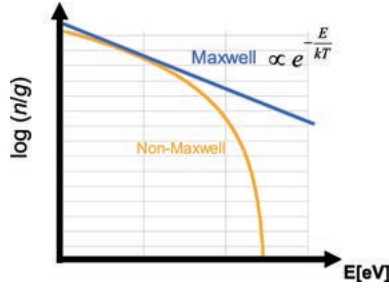


図1 Maxwell分布と非Maxwell分布のBoltzmannプロット [3].

解し、その EEDF $F(\varepsilon)$ から次式で計算される平均電子エネルギー U および Gibbs のエントロピー S_G から温度を算出し種々検討を重ねた。

$$S_G = -k \int_0^\infty F(\varepsilon) \ln[f(\varepsilon)] d\varepsilon, \quad (5)$$

$$U = \int_0^\infty \varepsilon F(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (6)$$

式 (5) で、 ε は電子エネルギー（なお電子エネルギーの様な連続変数に対してはフォントを ε とし、離散変数の ϵ_i と区別した）、 $f(\varepsilon)$ は電子エネルギー確率関数 (Electron Energy Probabilistic Function; EEPF) であり、次式で定義される。

$$f(\varepsilon) = F(\varepsilon)/\sqrt{\varepsilon} \quad (7)$$

しかし、この計算式 (5)–(6) を式 (1) に直接代入すると、エントロピー最大化の原理が考慮されていないことになる。したがって、理論の修正が必要となる。そこで、Tsallis あるいは Rényi のエントロピーなど、定義されたエントロピーがエネルギー一定など各種の制約条件のもとで最大となることが担保されている非加法的あるいは加法的エントロピーが有力候補となる。

我々は、水素プラズマ中の励起状態密度分布 [3] さらには低温弱電離プラズマの電子エネルギー分布 [4–6] に着目して、その Tsallis エントロピーから新たに定義される各種の温度について計算し、巨視的な意味で理解される「各種温度」と、エントロピーを用いて偏微分計算から導出される「非加法的統計力学的温度」の関係を検討したので、本章にて紹介する。

5.2 理論的背景および計算方法

5.2.1 Tsallis 統計

1988 年、Tsallis エントロピー S_q が提唱された [7]。本報告では熱力学との統合のため、Boltzmann 定数 k 倍した値を採用する。まず、 q -指数関数 $\exp_q(x)$ とその逆関数の q -対数関数 $\ln_q(x)$ をそれぞれ次のように定義する。ただし $q \neq 1$ とする。

$$\exp_q(x) \equiv [1 + (1 - q)x]^{\frac{1}{1-q}}, \quad (8)$$

$$\ln_q(x) \equiv \frac{x^{1-q} - 1}{1 - q}. \quad (9)$$

$\ln_q(x)$ は底が q という意味ではない点に留意されたい。こ

れを用いて Tsallis エントロピー S_q を

$$S_q \equiv k \frac{1 - \sum_i p_i^q}{q - 1} = -k \sum_i p_i^q \ln_q(p_i) \quad (10)$$

と定義する。Tsallis エントロピー S_q は、分布関数が q -指数関数に従う確率分布に対して見出されたエントロピーであり、Boltzmann 分布である指数分布をべき乗分布へ拡張する際に意味を有する。 S_q は $q \rightarrow 1$ のとき、式 (2) の Gibbs エントロピー $S = -k \sum_i p_i \ln p_i$ に一致する。Tsallis 統計は、宇宙線の流束 [8]、地球磁気圏 [9]、乱流の理論 [10, 11]、電子対消滅 [12]、ブラックホールなどの宇宙物理学 [13, 14]、Bose-Einstein 凝縮 [15]、絶縁破壊 [16]、やプラズマ物理 [17]、など、様々な分野の解析に応用されている。そこでは p_i が q -指数関数に従う場合、Tsallis エントロピーを定義でき、Tsallis 統計に従う温度 T_q を、ワンパラメータ増の温度として決定することができる [18]。Tsallis 統計では、Boltzmann 分布の様な指数分布を、 q -指数関数というべき乗分布を用いて拡張することで、非平衡状態に対応できる点が特徴である。

Tsallis 統計によって導かれる確率分布 p_i は Boltzmann 分布ではなく、べき乗分布に従っている。Tsallis エントロピーを次の条件の元で最大化することで、べき乗の形をした確率分布 p_i を導出できることが示されている。次の 2 つの束縛条件が課された系を考える。

$$\sum_{i=1}^w p_i = 1, \quad (11)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^w p_i^q \epsilon_i}{\sum_{j=1}^w p_j^q} = U_q. \quad (12)$$

なお式 (12) の U_q は q -平均エネルギーと称される。これらの条件下で Tsallis エントロピー S_q を最大化すると確率分布 p_i は、

$$p_i = \frac{1}{Z_q} \exp_q \left[-\frac{\beta}{\sum_{j=1}^w p_j^q} (\epsilon_i - U_q) \right] \quad (13)$$

と表すことができる。上式の Z_q は分配関数に対応し

$$Z_q(\beta) = \sum_{i=1}^w \exp_q \left[-\frac{\beta}{\sum_{j=1}^w p_j^q} (\epsilon_i - U_q) \right] \quad (14)$$

であり、 β は Lagrange 乗数である。式 (13) では、右辺と左辺の両方に p_i が存在し、 p_i は自己参照型関数となっている。この式をラグランジュ乗数法の束縛式で整理すると、

$$p_i = \frac{1}{Z_q(\beta)} \exp_q [-\beta_q (\epsilon_i - U_q)] \quad (15)$$

とまとめられ、式 (15) の分母に現れる分配関数は

$$Z_q(\beta) = \sum_{i=1}^w \exp_q [-\beta_q (\epsilon_i - U_q)], \quad (16)$$

また式 (15) の q -指数関数内の β_q は

$$\beta_q = \frac{q}{q + (1 + \alpha)(1 - q)} \beta \quad (17)$$

となり、 α は規格化定数と関係した Lagrange 乗数である。

β_q は式 (15) においてエネルギーの係数であるから, $T_{q-\beta}$ を α, β, q の関数として

$$T_{q-\beta} \equiv \frac{1}{k\beta_q} \quad (18)$$

と定義すると, 全く別の方法で導かれている物理的温度と言われる温度の式

$$T_{q-Tsallis} = \left(1 + \frac{1-q}{k} S_q\right) \left(\frac{\partial S_q}{\partial U_q}\right)^{-1} \quad (19)$$

と一致することが見出されている [19]. 以上をまとめると, S_q を最大化することにより, p_i として式 (15) の確率分布が得られた. したがって, S_q を含んでいる式 (18) を用いて温度 T_q を計算する場合, p_i は式 (15) の確率分布に従っていないといけないこととなる.

5.2.2 衝突輻射モデル (Collisional-Radiative Model; CR モデル)

本研究では, 放電管内の減圧マイクロ波放電で生成される現実的な弱電離水素プラズマ中の, 水素原子の励起状態をモデルに検討を進めた [20–24]. ガス温度 $T_g = 0.055$ eV, 放電圧力 $P \simeq 133$ Pa, 水素分子解離度 5%, 電子密度 $N_e = 5.0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ を定数として固定し, EEDF は Maxwell 分布を仮定し, 電子温度 $1 \leq T_e [\text{eV}] \leq 10$ の範囲で水素原子の第 j 状態数密度 n_j を計算した [25].

今回 CR-Model で考慮する係数は, 第 i 状態から第 j 状態への電子衝突励起・脱励起 (それぞれの速度定数を $C_{i,j}, F_{i,j}$), 輻射遷移 (遷移確率 $A_{i,j}$), 第 j 状態からの電子衝突電離と第 j 状態への三体再結合・放射再結合 (それぞれの速度定数を S_j, O_j, R_j) である. 水素原子の任意の準位 j のポピュレーション n_j ($j \geq 2$) に対する速度方程式は, プラズマが光学的に薄く共鳴吸収が無視できる場合, プラズマ中の荷電粒子として H^+ イオン及び同密度の電子のみが存在していると考え, 次のような連立常微分方程式で書くことができる.

$$\begin{aligned} \frac{dn_j}{dt} = & \sum_{i < j} C_{i,j} N_e n_i + \sum_{i > j} (F_{i,j} N_e + A_{i,j}) n_i \\ & + (O_j N_e + R_j) N_e^2 \\ & - \left[\left(\sum_{i < j} F_{j,i} + \sum_{i > j} C_{j,i} + S_j \right) N_e + \sum_{i < j} A_{j,i} \right] n_j. \end{aligned} \quad (20)$$

式 (20) に対して準定常 ($d/dt \equiv 0$) 近似が適用できるとし, 励起準位数密度 n_j を T_e, N_e, N_1 の関数として計算した.

5.3 結果及び考察

5.3.1 励起状態確率密度分布の計算結果と q 分布によるフィッティング

励起準位ポピュレーション n_i を求め, 次式で正規化し p_i を求め, E_i vs p_i の片対数プロット, 即ち Boltzmann プロットを図 2 に示す [3].

$$p_i = \frac{n_i/g_i}{\sum_i (n_i/g_i)}, \quad (21)$$

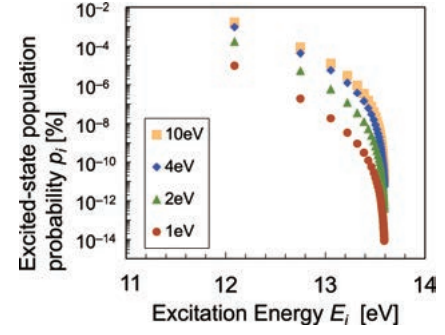


図 2 水素原子励起状態確率分布 p_i の電子温度依存性. ガス温度 $T_g = 0.055$ eV, 圧力 $P = 133$ Pa, 電子密度 $N_e = 5.0 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, 解離度 5% [3].

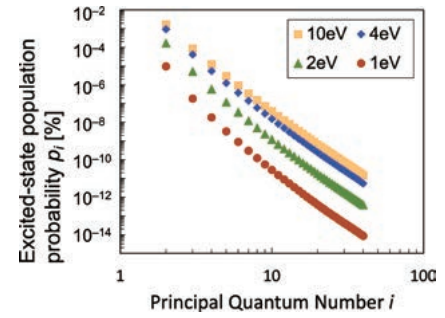


図 3 水素原子励起状態確率分布 p_i を主量子数 i の関数として両対数したプロットの電子温度依存性. 計算条件は図 2 と同一 [3].

ただし g_i は第 i 準位の統計的重みである. 分布関数が Boltzmann 分布とはならないことは明らかである. なお, 図 2 の横軸を主量子数 i と取り直して両対数プロットとして図 3 に示す. こちらは良好な直線状の関係 $\sim p_i \propto i^{-6}$ の分布が見出され, 電離進行プラズマにおける梯子様励起を主たる生成消滅過程とする準位群に相当することが理解される [21].

次に q -分布を用いて励起状態確率分布 p_i のフィッティングを行う. 式 (15) に従う様にフィッティングするのであるが, 先述の通り式 (15) は自己参照型であるため, 定量的計算は面倒となる. 我々は表 1 に示す様な自己無撞着反復法を考案し適用した. 計算結果の一例として, $T_e = 2$ eV の条件でフィッティングを行ったグラフを図 4 に示す. 図 4 から, q -指数分布を使用したフィッティングは, Boltzmann 分布を仮定したフィッティングよりも, 励起状態分布 p_i の非平衡特性をより適切に捉えていることが理解される [3].

5.3.2 統計力学的考察から求められた各種温度の比較

ここまで述べてきたさまざまな温度を計算し比較考察する. 即ち, 確率分布 $\{p_i\}$ の q -指数関数フィッティングの係数として式 (18) から求められる $T_{q-\beta}$, Tsallis エントロピー S_q の q -平均エネルギー U_q (式 (12)) に対する偏微分係数 $\partial S_q / \partial U_q$ を用いて式 (19) から計算される $T_{q-Tsallis}$, および単純に q -平均エネルギーの $2/3$ 倍で定義された平衡時と同様に計算される q -平均温度

表 1 式 (15) から自己参照関数 p_i を解く際の反復スキーム [3].

1: Initialize

$$Z_{q(0)}(\beta) = \sum_{i=1}^W \exp_q(-\beta_q \epsilon_i)$$

$$p_{i(0)} = \frac{1}{Z_{q(0)}(\beta)} \exp_q(-\beta_q \epsilon_i)$$

$$U_{q(0)} = \frac{\sum_{i=1}^W p_{i(0)}^q \epsilon_i}{\sum_{j=1}^W p_{j(0)}^q}$$

2: Iterate $k = 0, 1, 2, \dots$ until convergence

$$Z_{q(k+1)}(\beta) = \sum_{i=1}^W \exp_q[-\beta_q \{\epsilon_i - U_{q(k)}\}]$$

$$p_{i(k+1)} = \frac{1}{Z_{q(k+1)}(\beta)} \exp_q[-\beta_q \{\epsilon_i - U_{q(k)}\}]$$

$$U_{q(k+1)} = \frac{\sum_{i=1}^W p_{i(k+1)}^q \epsilon_i}{\sum_{j=1}^W p_{j(k+1)}^q}$$

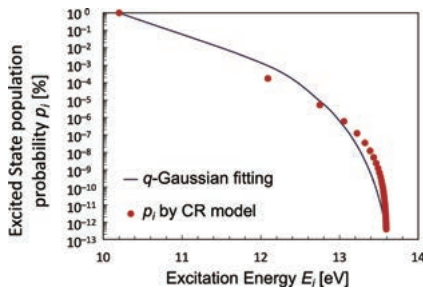
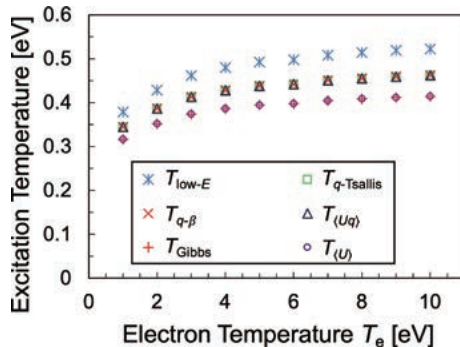
図 4 $T_e = 2$ eV の水素プラズマに対する $q = 0.89$ の q -指数分布を持つ励起状態確率分布 p_i の Boltzmann プロットのフィッティング. T_e 以外の計算条件は図 2 と同一 [3].

図 5 電子温度に対してプロットされた様々な温度の比較. 計算条件は図 2 と同一 [3].

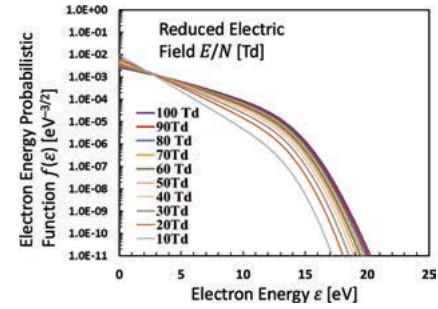
$$T_{\langle U_q \rangle} \equiv \frac{2}{3k} U_q \quad (22)$$

の 3 種の温度を Tsallis 統計の下で考えることができる. さらに, Gibbs 統計のもとで定義される式 (1) で計算される T_{Gibbs} , 並びに平衡時の平均エネルギーの 2/3 倍として単純に係数を乗じて求められる「平均温度」

$$T_{\langle U \rangle} \equiv \frac{2}{3k} U \quad (23)$$

さらには最も低いエネルギー準位間の励起温度として計算される $T_{\text{low-E}}$ を比較したものが図 5 である.

図 5 から, 電子温度の上昇とともに各温度が単調に増加

図 6 BOLSIG+を用い, 換算電界 $30 \leq E/N$ [Td] ≤ 100 として計算した弱電離 Ar プラズマの EEPF. 電子密度 $N_e = 2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, ガス温度 $T_g = 0.026$ eV, 電離度 0.012% と設定 [4-6].

することが解る. さらに, $T_{q-\text{Tsallis}}$ は厳密に $T_{q-\beta}$ と同一であった. これは Tsallis 統計では既に証明されている事項ではあるが, 弱電離非平衡プラズマ中の水素原子励起状態に関しても確認されたという意義を有し, 大きな意味を持つ. 既知の事実である $T_{q-\text{Tsallis}} = T_{q-\beta}$ のみならず, q -平均温度 $T_{\langle U_q \rangle}$ がこれらと同一の値を取ることが, 少なくとも今回の計算の範囲内で確認された. なお, 図 5 から $T_{\text{Gibbs}} = T_{\langle U \rangle}$ という関係も確認され, Gibbs 統計の妥当性も示していると考えられる. この Gibbs-Boltzmann の統計力学を拡張した非加法的 Tsallis 統計においても, $T_{q-\text{Tsallis}} = T_{q-\beta} = T_{\langle U_q \rangle}$ が確認されたことの意義は大きいと考えられる.

5.4 連続変数系 - 電子エネルギー分布関数と電子温度解析への展開の可能性

前節では, 離散エネルギー系である原子励起状態を対象として, 非平衡プラズマ中の Tsallis 統計の有用性を議論した. 一方エネルギー変数が連続値となる電子集団に対しても, 前節の手法・議論は, 有用であると期待される. 電子エネルギー確率関数 EEPF(7) を記述する Boltzmann 方程式から EEPF を求め, Tsallis エントロピーはもちろん, Rényi エントロピーをも対象として, 各種温度を算出し議論する様な研究を, 現在進行させている [4-6].

一例として, 低温弱電離アルゴンプラズマを対象として, 2 項近似を施した Boltzmann 方程式を解き, 弾性・非弾性の各種衝突を含めて数値的に EEPF を求めるフリーウェアである BOLSIG+を用いて [26], 換算電界 $10 \leq E/N$ [Td] ≤ 100 の範囲で EEPF を求めた例を図 6 に示す. 得られた EEPF が Maxwell 的でないことは明らかである.

この図 6 の EEPF を, 式 (15) の p_i を f と書き換えることで, Tsallis 統計の q 分布でフィッティングすることができ, 前節と同様の議論により 3 種類の温度 $T_{q-\text{Tsallis}}, T_{q-\beta}, T_{\langle U_q \rangle}$ を求めることができる. その結果を図 7 に示した. なお, 同図には, Rényi 統計により計算した各種温度も合わせて示す. すなわち, 加法的統計の一つである Rényi 統計によれば, 式 (11) および (3) の制約条件の下で (註: Rényi 統計の場合は (12) ではなく (3) によ

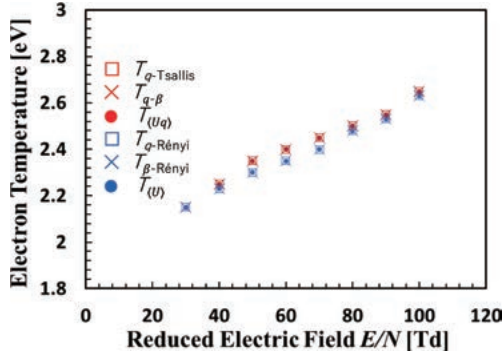


図7 非加法的および加法的統計力学を用いて算出した電子温度の比較 [4-6].

る) 以下の Rényi エントロピー

$$S_{R-q} = -k \frac{\ln \sum_i p_i^q}{1-q} \quad (24)$$

を最大にする分布が, 以下の Rényi 統計の q -分布として得られることが示されている [27].

$$p_i \propto \left[1 - \beta_R \frac{q-1}{q} (\epsilon_i - E) \right]^{\frac{1}{q-1}}. \quad (25)$$

また, 図6の EEPF を Rényi の q -分布 (25) でフィッティングすることで式 (25) 中の β_R を決めることができれば, Rényi 統計においても以下の3つの温度を定義できることとなり, 実はこれら3つの温度は一致することがすでに示されている [28].

$$T_{q\text{-Rényi}} = \left(\frac{\partial S_{R-q}}{\partial U} \right)^{-1}, \quad (26)$$

$$T_{\beta\text{-Rényi}} = \frac{1}{k\beta_R}, \quad (27)$$

$$T_{\langle U \rangle} = \frac{2}{3k} U. \quad (28)$$

以上まとめて, Tsallis 及び Rényi 統計のべき乗確率分布を用いてフィッティングを行い, 非加法的および加法的統計力学に基づく温度を算出しまとめた結果を図7へ示す. 以上示した様に, 本研究のプラズマパラメータの場合, Tsallis 統計及び Rényi 統計力学からそれぞれ導出された3つの温度は良好な一致, すなわち

$$T_{q\text{-Tsallis}} = T_{q-\beta} = T_{\langle U \rangle}, \quad (29)$$

$$T_{q\text{-Rényi}} = T_{\beta\text{-Rényi}} = T_{\langle U \rangle} \quad (30)$$

を示し, 非加法的あるいは加法的統計力学の範囲内で, 矛盾のない温度が導かれることが確認された [4-6].

5.5 おわりに

著者は従来, 主に産業応用を旨とする非平衡プラズマ分光計測の研究を様々に行ってきた. その温度計測からさまざまな非平衡性に気づき, 「温度とは何か?」という基礎物理学の問題にも興味を持つに至った. その結果, 情報工学基礎論と統計力学に基づく本研究の様な課題にも取り組んでいる.

プラズマ分光学やプラズマ物理学において, 本小特集に

示されるように, 天文学や地球惑星物理学, 統計物理学や非線形微分方程式論などとも, 産業応用向けの非平衡プラズマには接点があり, その方向性を非常に興味深く感じている. 応用工学発の成果を抽象化し, 普遍化・一般化し純粋物理学へと帰還させる活動に, 「学術」として意義があると確信しており, 今後も本研究を継続していきたい. この様に産業応用から若干の距離のある理学的分野に対し, 工学系の方々も関心を抱かれることを願っている.

謝 辞

本研究は JSPS 科研費 22K03566 の助成を受けたものである. また本章の成果の多くは東京科学大学 博士後期課程学生 菊池浩司氏による. 記して謝意を表する.

参 考 文 献

- [1] 田中 昌徳, 赤塚 洋: Plasma Conference 2014 オンライン予稿集, 21PA-039 (2014).
- [2] H. Akatsuka and Y. Tanaka, Entropy **25**, 276 (2023).
- [3] K. Kikuchi and H. Akatsuka, Entropy **25**, 1400 (2023).
- [4] 菊池 浩司, 赤塚 洋: 第41回プラズマ・核融合学会 年会オンライン予稿集, 17Bp08 (2024).
- [5] 菊池 浩司, 赤塚 洋: 令和6年度 放電学会年次大会 講演論文集, A-5 (2024).
- [6] K. Kikuchi and H. Akatsuka, Phys. Rev. E **112**, 015201 (2025).
- [7] C. Tsallis, J. Stat. Phys. **52**, 479 (1988).
- [8] C. Tsallis *et al.*, Phys. Lett. A **310**, 372 (2003).
- [9] G.P. Pavlos *et al.*, Physica A **390**, 2819 (2011).
- [10] B.M. Boghosian, Phys. Rev. E **53**, 4754 (1996).
- [11] C. Beck *et al.*, Phys. Rev. E **63**, 035303 (2001).
- [12] I. Bediaga *et al.*, Physica A **286**, 156 (2000).
- [13] C. Tsallis, Entropy **22**, 17 (2019).
- [14] S. Nojiri *et al.*, Phys. Rev. D **105**, 044042 (2022).
- [15] A. Guha, and P.K. Das, Phys. A Stat. Mech. Its Appl. **497**, 272 (2018).
- [16] L. Enciso *et al.*, J. Stat. Mech. **2019**, 094011 (2019).
- [17] J.L. Reis Jr *et al.*, Physica A **404**, 192 (2014).
- [18] C. Tsallis *et al.*, Physica A **261**, 534 (1998).
- [19] H. Suyari, Prog. Theor. Phys. Suppl. **162**, 79 (2006).
- [20] T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **47**, 265 (1979).
- [21] T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **47**, 273 (1979).
- [22] T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **49**, 1561 (1980).
- [23] T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **49**, 1569 (1980).
- [24] T. Fujimoto, J. Phys. Soc. Jpn. **54**, 2905 (1985).
- [25] Y. Shimizu *et al.*, IEEE Trans. Plasma Sci. **43**, 1758 (2015).
- [26] G.J.M. Hagelaar and L.C. Pitchford, Plasma Sources Sci. Technol. **14**, 011 (2005).
- [27] A. Rényi, Contrib. Theor. Stat. **4.1**, 547 (1961).
- [28] A.G. Bashkurov, Theor. Math. Phys. **149**, 1559 (2006).

小特集執筆者紹介



かわて ともこ
川手 朋子

量子科学技術研究開発機構 主幹研究員。2012 年 3 月京都大学大学院理学研究科博士課程修了。宇宙科学研究所 ポスドク、核融合科学研究所 助教等を経て 2025 年 3 月より現職。主な研究分野は天体・核融合プラズマとその分光計測および原子・分子物理過程。プラズマ・核融合学会、物理学会、天文学会の各会員。



おか みつお
岡 光夫

カリフォルニア大学バークレー校・宇宙科学研究所の常勤研究員。2005 年に東京大学大学院理学系研究科地球惑星科学専攻を満期退学後、4 年間のポスドク期間を経て現職。宇宙プラズマにおける粒子の加速や加熱に関心を持ち、地球磁気圏から太陽・宇宙天体に至る多様なプラズマ環境に共通するスケール則の探索とその解明を、理論・観測の両面から進めている。



すやり ひろき
須鎗 弘樹

現在、千葉大学大学院情報学研究院教授。博士(理学)。IEEE、電子情報通信学会、日本物理学会、人工知能学会の各会員。専門は、情報数理。特に、Tsallis 統計を広く情報数理物理の観点で研究。近年は、AI の応用として、自然言語処理、医用画像診断の共同研究にも取り組んでいる。



あかつか ひろし
赤塚 洋

1987 年 3 月 京都大学大学院工学研究科修士課程修了。同年 4 月 日本電気(株)勤務。1991 年 4 月 東京工業大学 原子炉工学研究所 助手。1995 年 3 月 論文提出により博士(工学)。同年 8 月 東京工業大学 原子炉工学研究所 助教授。現在、東京科学大学 総合研究院。准教授。プラズマ・核融合学会、応用物理学会、電気学会、IEEE、日本物理学会、分光学会、可視化情報学会、レーザー学会、燃焼学会、日本原子力学会の各会員。

ぜにたに せいじ
銭谷 誠司

オーストリア宇宙科学研究所研究員。2006 年東京大学大学院・博士(理学)。NASA ゴダード研究所・国立天文台・京都大学生存圏研究所 研究員、神戸大学都市安全研究センター特命准教授を経て 2023 年から現職。専門は宇宙空間物理学で、磁気リコネクションなどのプラズマ素過程のプラズマ粒子(PIC)シミュレーションと、そのための数値解法の開発に取り組んでいます。