J. Plasma Fusion Res. Vol.100, No.7 (2024) 304-313

小特集 古くて新しい新古典輸送理論の新展開

2．新古典輸送理論の概要

2. Overview of Neoclassical Transport Theory

佐竹真介
SATAKE Shinsuke
核融合科学研究所　構造形成・持続性ユニット

（原稿受付：2024年２月21日）

新古典輸送理論の礎となるドリフト運動論方程式の導出から，新古典輸送方程式の導出と，モーメンタムバランスや両極性径電場の決定など，新古典輸送現象において重要となる事柄についてまとめる．また，ジャイロ運動論との違いについても概観する．

Keywords:
Neoclassical transport theory, drift-kinetic equation, gyrokinetic theory, numerical simulation

2.1　輸送現象のクラス分け

トーラス型のプラズマ閉じ込め装置は，トーラスを周回する磁力線によって作る入れ子状の磁気面構造によって，プラズマを真空容器壁に接触しないように隔離し，高温のプラズマを長時間安定に保持することを目的とするものである．プラズマを構成する電子とイオンは磁力線に巻きつくジャイロ運動をしながら磁力線方向に走り回る．従って端のないトーラス状の磁気面を構成することで荷電粒子を長時間閉じ込める，というのが磁場閉じ込め核融合炉の基本的なアイデアである．しかしながら荷電粒子は永久にトーラス中を周回し続けるわけではなく，様々な原因によって磁気面を横切る方向に拡散される．また正負の荷電粒子の流速の差はプラズマ中を流れる電流となり，プラズマ自身を閉じこめている磁場を変化させる．このような閉じ込め磁場中の粒子や熱の流れを扱うのが磁場閉じ込め核融合の研究分野における**輸送理論（transport theory）**である．

磁場閉じ込めプラズマ中で起こる輸送現象には，大別すると流体的なものと運動論的なものの２つがある．前者は，電磁流体力学（Magneto-Hydro-Dynamics, MHD）理論で扱われる閉じ込め磁場の巨視的な流体力学的不安定性に伴い，閉じ込め磁場そのものがマクロ（スケール長$L\sim$小半径a）かつ高速（時間スケール$t\sim L/v_{\mathrm{th,i}}$，$v_{\mathrm{th,i}}$はイオン熱速度）に変化し，時にプラズマの圧力分布自体が大きく変化するような巨視的な粒子・熱の吐き出し現象である．この代表例としては，キンクモード，バルーニングモード，Alfvén共鳴モードなどのMHD不安定性が挙げられる．このようなマクロな不安定性に伴う輸送では，磁場に閉じ込められたプラズマのエネルギーを大きく失うことになる．MHD理論で現象を記述する際に使われるのは閉じ込め磁場と電場$(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E})$の他には密度$n$，温度$T$，圧力テンソル$\boldsymbol{P}$, 流体速度$\boldsymbol{V}$といった一般の流体力学でも使われる量であり，後に述べる運動論的モデルで扱う速度空間分布の情報を必要としない（Alfvén共鳴モードを駆動する高速粒子の分布など，速度分布の情報が重要な現象も一部含まれる）．また，一様磁場中でジャイロ運動する荷電粒子同士のCoulomb衝突による，Larmor半径をステップサイズとする拡散現象を古典拡散と呼ぶが，後で見るようにこれは流体力学的変数によって記述可能なため，流体的な輸送現象の１つと見なすこともできる．MHD不安定性に伴う輸送は核融合炉の定常運転を実現する上で十分に抑制されるように磁場配位や運転条件を設計・調整しなければならない．また，古典拡散による熱輸送のタイムスケールは核融合炉に求められる熱閉じ込め時間に比べて十分に遅いため，流体的な輸送現象だけを想定するならば，MHD安定なプラズマは核融合炉の炉心条件を容易に満たす．しかしながら実際には，古典拡散よりずっと大きい輸送をもたらす運動論的な輸送現象によってプラズマの閉じ込め性能は決定されている．

運動論的な輸送現象は，安定的なMHD平衡磁場が存在しているという前提のもとで，荷電粒子の平均自由行程l_{mfp}が閉じ込め磁場のスケール長（～大半径R）程度かそれ以上となる，高温で低衝突性な磁場閉じ込めプラズマにおいて特徴的に現れる現象である．平均自由行程が長く衝突による緩和が効きにくいこと，ジャイロ運動をする粒子の旋回中心（ガイディングセンター）がトーラス磁場の不均一性や電場の影響で磁力線を横切る方向にドリフト運動すること，そのドリフト軌道が粒子の磁力線平行及び垂直方向の比$(v_{\|} : v_{\perp})$に応じて様々に変化すること，プラズマの温度密度が磁気面関数になっており

National Institute for Fusion Science, Toki, GIFU 509-5292, Japan
author's e-mail: satake.shinsuke@nifs.ac.jp

©2024 The Japan Society of Plasma Science and Nuclear Fusion Research

磁気面を横切る方向に温度密度勾配が存在すること，これらのことの帰結として速度空間における荷電粒子の分布関数には熱平衡状態である局所Maxwell分布からのずれ（非等方性）が残る．この速度空間の非等方性から，一つには圧力テンソル$\boldsymbol{P}$の磁力線方向成分と垂直成分に関する非等方性と空間的非一様性を生み，その応力（プラズマの運動論では一般に粘性と呼ばれる）粘性$\nabla\cdot\boldsymbol{P}$とCoulomb衝突による摩擦力のバランス関係が運動論的な輸送現象を引き起こす．これを**新古典輸送現象**と呼ぶ．何をもって「新」古典なのかと言えば，今説明した現象はトーラス磁場が非一様で曲がっているために生じるドリフト運動に起因するためである．これに対して古典拡散現象は一様な磁場中でも起こる，ジャイロ運動をする荷電粒子の衝突拡散現象を指す．運動論的な輸送現象には新古典輸送の他に，Larmor半径程度の微視的な電磁場の揺らぎによって生じる波（ドリフト波）によって生じる乱流現象がある．これは位相空間においてある種の共鳴を引き起こし，磁気面を横切る方向に微視的な渦を成長させ，プラズマの粒子・熱閉じ込め性能を劣化させる．これを異常輸送，あるいは（微視的）乱流輸送などと呼ぶ．新古典輸送，乱流輸送ともに磁気面を横切る方向の温度密度勾配を駆動力として生じる．運動論的な輸送現象はMHD的なものに比べると穏やかかつゆっくりした時間スケールで起こるが，核融合炉の定常的な閉じ込め性能を評価する上で重要な役割を果たし，実験においても実質的にプラズマの熱閉じ込め時間を決定している．

新古典輸送と乱流輸送の大きさを比べると，新古典輸送は一般的にドリフト軌道の磁気面を横切る幅に応じて大きくなるが，このドリフト軌道幅は磁場配位にある種の空間的な対称性を持たせることによって小さくできる．そのため核融合実験装置では磁場形状を工夫することで，程度の差こそあれ新古典輸送は低いレベルに抑えられている．軸対称磁場を持つトカマク装置はその最たるものであるが，他にもHSX，W7-X，CFQSなどの先進的なステラレータ装置は，複雑な形状のコイルによって新古典輸送を抑制する磁場配位を作ることが主要な設計指針となっている．一方，微視的乱流はプラズマの圧力勾配が強くなるほど一般的に不安定になり，高温プラズマでは微視的乱流によって閉じ込め性能が決まっていることがこれまでの様々な装置での実験から評価した閉じ込め時間のスケーリング則から示唆されている[1, 2]．しかし，例えば新古典輸送が比較的大きいLHDでは新古典輸送と乱流輸送のレベルが同程度になる場合も見られ[3, 4]，また4章で紹介するように乱流と新古典の輸送の釣り合いがプラズマの不純物輸送レベルを決定しているとみられるケースも見つかっている．軸対称なトカマク装置では新古典輸送による磁気面を横切る径方向の輸送は乱流に比べ十分小さいが，ブートストラップ電流と呼ばれる，径方向の圧力勾配によって新古典的なメカニズムで駆動される磁力線方向の自発的な電流は，閉じ込め磁場の形成にプラズマ内部のトロイダル電流を必要とするトカマクにおいて外部駆動電流の割合を下げる重要な役割を持つ[5]．このように，新古典輸送は磁場閉じ込め核融合装置の設計や閉じ込め性能予測にとって重要な要素の一つであり，核融合研究の最初期から今日に至るまで継続的に研究が続けられている．

2.2　ドリフト運動論方程式とジャイロ運動論方程式

ここからはまず，磁場閉じ込めプラズマの運動論的記述から，新古典輸送現象を扱うドリフト運動論方程式と，微視的乱流輸送を扱うジャイロ運動論方程式がどのように導出され，どのように両者が分離されるかの概要を見ていく．歴史的に両者はスケール分離が可能であるという前提のもと，それぞれ個別の現象として扱われてきたが，最近ではスーパーコンピュータの発達に伴い両者を分離せずに1つの運動論的モデルとして数値計算するシミュレーションも発展してきている．そこではこれまで想定されていなかった乱流と新古典輸送の相関関係があることが発見され始めている．本節ではまず，従来からの定式化に従って2つの運動論方程式の導出過程を概観する．

運動論的記述のベースとなるのは，空間3次元$\boldsymbol{X}$，速度空間3次元(U, μ, ξ)の6次元位相空間に荷電粒子のおけるジャイロ中心の分布関数$F(\boldsymbol{X}, U, \mu, \xi, t)$である．ここで，$\boldsymbol{X}$はジャイロセンター位置，$U$はジャイロセンターの磁力線方向速度，$\mu$は磁気モーメント，$\xi$は磁力線周りのジャイロ運動の位相角，$t$は時間を表す．以下，$(\boldsymbol{X}, U, \mu, \xi)$をまとめて$\boldsymbol{Z}$と表す．これらの変数の厳密な定義の説明は文献[6, 7]に譲るが，近似的には荷電粒子の位置と速度$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$を用いて$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{x} - m\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{v}_\perp/eB^2$，$U = v_\parallel$，$\mu = mv_\perp^2/2B$である．なお，文献[6, 7]においてはジャイロ平均された粒子位置のラグランジアンがξに依らないように定義された「ジャイロ中心」と，初学者向けの教科書で一般的に使われる，粒子位置からLarmor半径ρだけ移動したガイディングセンターとを厳密に使い分けているが，本章では細かい区別には立ち入らずジャイロ中心と呼ぶことにする．今，新古典輸送や乱流輸送で扱う輸送現象の時間スケールがジャイロ運動の時間スケール$\sim\Omega^{-1}$より十分長いと仮定すると（$\Omega = eB/m$はジャイロ周波数），μは断熱不変量と見なせる．また，背景の電磁場$(\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{E}_0)$やプラズマの温度密度$(n_0, T_0)$も同様にゆっくり時間変化しており，それらの空間の勾配スケールLに比べLarmor半径ρは十分短いと仮定する．ドリフトオーダリングと呼ばれるこの空間スケールに対する分離を，パラメータ$\delta = \rho/L \ll 1$を用いて表現する．

ジャイロ中心分布関数Fの時間発展は以下の運動論方程式で記述される（以下の導出過程については[8]を参照）．

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{X}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} + \dot{U}\frac{\partial}{\partial U}\right\}\langle F\rangle_\xi = \langle C\rangle_\xi \tag{2.1}$$

ここで$\dot{A} = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$，$\langle\cdots\rangle_\xi$はジャイロ角$\xi$に対する平均を表し，

右辺はCoulomb衝突項である．また$\dot{\mu}=0$を利用している．ジャイロ中心の運動方程式$\dot{\boldsymbol{Z}}$は粒子運動のジャイロ平均から求められ（厳密には摂動場の効果を含めた正準変換を用いてジャイロ中心及びその運動論方程式は導かれる），以下のように与えられる（本文中では原論文[6-8]と異なりMKSA単位系で表記する）．

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\frac{1}{B^*_{\parallel}}\left[\left(U+\frac{e}{m}\frac{\partial\langle\phi\rangle_{\xi}}{\partial U}\right)\boldsymbol{B}^*+\boldsymbol{b}\times\left(\frac{\mu}{e}\nabla B_0+\nabla\langle\phi\rangle_{\xi}+\frac{\partial A^*}{\partial t}\right)\right], \tag{2.2a}$$

$$\dot{U}=-\frac{\boldsymbol{B}^*}{mB^*_{\parallel}}\cdot\left[\mu\nabla B_0+e\left(\nabla\langle\phi\rangle_{\xi}+\frac{\partial A^*}{\partial t}\right)\right], \tag{2.2b}$$

$$\dot{\xi}=\Omega+\frac{e^2}{m}\frac{\partial\langle\phi\rangle_{\xi}}{\partial\mu}. \tag{2.2c}$$

なお上式において，背景磁場を平衡部と乱流による摇動部分，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\widehat{\boldsymbol{B}}=\nabla\times(\boldsymbol{A}_0+\widehat{\boldsymbol{A}})$のように分け，これと静電ポテンシャル$\phi(\boldsymbol{x},t)$から以下のジャイロ中心座標の関数を導入した．なお，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}_0/B_0$であり，(2.2)式は$\xi$に依存しないことに注意．

$$\phi(\boldsymbol{Z},t)=\phi(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\rho},t)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{Z},t)\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\rho},t),$$

$$\boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{Z},t)=\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{X},t)+\frac{m}{e}U\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{B}^*(\boldsymbol{Z},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}^*,$$

$$B^*_{\parallel}=\boldsymbol{B}^*\cdot\nabla\boldsymbol{b}. \tag{2.3}$$

次に，ジャイロ中心の分布関数$F(\boldsymbol{Z},t)$を背景電磁場の摇動に対する応答として現れる部分$\hat{F}$と，統計平均（アンサンブル平均）を取ったもの$\langle F\rangle_{\mathrm{ens}}$に分ける．$\hat{F}$の特徴的な周波数は$\omega\sim v_{\mathrm{t}}/L$であり，前述の仮定より$\omega\ll\Omega$である．一方，$\langle F\rangle_{\mathrm{ens}}$は$\hat{F}$より十分ゆっくり変化しており，その特徴的な周波数は$\delta^2\omega$と仮定される（いわゆる輸送（transport）オーダリング）．$\hat{F}$の空間スケールは非等方性を持ち，磁力線垂直方向にはLarmor半径程度の微視的擾乱を含んでおりそのスケール長はρ程度，磁力線平行方向にはL程度と仮定される．また，摇動成分の振幅に関して$\hat{F}/\langle F\rangle_{\mathrm{ens}}\sim\delta$を仮定する．なお補足すると，アンサンブル平均とは統計力学における概念で，対象としている系と巨視的には同等な多数の仮想的な系における，様々な微視的状態に対しその出現確率の重みをかけて平均を取ったものである．エルゴード仮説に基づけば，ジャイロ運動論において上述の摇動成分$\hat{F}$の波長より長くかつ平衡量の勾配長より短いスケールの局所空間平均や，乱流摇動の時間スケールより長くかつ平衡量の時間変化より短い時間で取った時間平均はアンサンブル平均と同等であると解釈される．Fのドリフトオーダリングδによる展開，$F=F_0+\delta F_1+\cdots$を考え(2.1)式に入れると，最低次（δ^{-1}次）及びその次のオーダーの式から$F_0=\langle F_0\rangle_{\mathrm{ens}}$及び$F_1$はジャイロ角に依存しないことが示される．特に$\delta^0$次のオーダーの式

$$\left[U\boldsymbol{b}\cdot\nabla-\frac{1}{m_a}\boldsymbol{b}\cdot(\mu\nabla B_0+e_a\nabla\Phi_0)\frac{\partial}{\partial U}\right]F_{a0}=\sum_b C_{ab}(F_{a0},F_{b0})$$

から，F_{a0}がMaxwell分布$F_{a0}=n_{a0}\left(\frac{m_a}{2\pi T_{0a}}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{1}{T_{0a}}\left(\frac{m_aU^2}{2}+\mu B_0\right)\right]$となること，またこれの磁気面平均を取り準中性条件を課すことで背景密度温度(n_{0a},T_{0a})及びアンサンブル平均した静電ポテンシャル$\Phi_0=\langle\phi\rangle_{\mathrm{ens}}$が磁気面関数となることが示される．なお，上式とこれ以降は，必要に応じて粒子種の添え字a,bを記す．次に(2.1)式のδ^1次の式を考える．(2.1)式のアンサンブル平均を取ると，$\bar{f}_{a1}=\langle F_{a1}\rangle_{\mathrm{ens}}$に対する次の運動論方程式を得る．

$$\left[U\boldsymbol{b}\cdot\nabla-\frac{\mu}{m_a}\boldsymbol{b}\cdot\nabla B_0\frac{\partial}{\partial U}\right]\bar{f}_{a1}+\left(\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}\cdot\nabla-\frac{e_aE_{\parallel}U}{T_{0a}}\right)\mathrm{F}_{a0}=\sum_b C^{\mathrm{L}}_{ab}(\bar{f}_{a1}). \tag{2.4}$$

ここで右辺のC^{L}_{ab}は線形化衝突オペレータで，

$$C^{\mathrm{L}}_{ab}(\bar{f}_{a1})=C_{ab}(\bar{f}_{a1},F_{b0})+C_{ab}(F_{a0},\bar{f}_{b1}) \tag{2.5}$$

を略記したものであり，衝突相手の粒子種の和$\sum_b$には自己衝突$b=a$も含まれることに注意．また，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}$は以下のような磁力線を横切るドリフト速度を表す．

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}=\frac{1}{e_aB_0}\boldsymbol{b}\times(m_aU^2\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\mu\nabla B_0+e_a\nabla\Phi_0) \tag{2.6}$$

これは左から順に，曲率ドリフト，grad-Bドリフト，および$E\times B$ドリフトと呼ばれるもので，無摂動磁場と静電ポテンシャル$\boldsymbol{B_0}$およびΦ_0から与えられており，場の摇動と無関係である．また，$E_{\parallel}=-\boldsymbol{b}\cdot[\nabla\Phi_1+\partial\boldsymbol{A}_0\partial t]$は磁力線方向の電場を表しており，磁気面上のポテンシャル非一様性は$\Phi_1\sim\delta\Phi_0$のオーダーと仮定される．(2.4)式を**ドリフト運動論方程式**と呼び，その解$\bar{f}_{a1}$が生み出すトーラスプラズマ中の輸送を**新古典輸送**と呼ぶ．一方，$\hat{F}_{a1}=\langle F_{a1}\rangle_{\mathrm{ens}}-\bar{f}_{a1}$に対する運動論方程式は(2.1)式の$\delta^1$次の式から(2.4)式を引くことで導かれる．

$$\left[\frac{\partial}{\partial\mathrm{t}}+(U\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}+\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{d}a})\cdot\nabla-\frac{\mu}{m_a}\boldsymbol{b}\cdot\nabla\mathrm{B}_0\frac{\partial}{\partial U}\right]\hat{F}_{a1}+\frac{e_aF_{a0}}{T_{0a}}\left[(U\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a})\cdot\nabla-\frac{\mu}{m_a}\boldsymbol{b}\cdot\nabla B_0\frac{\partial}{\partial U}\right]\langle\hat{\phi}_a\rangle_{\xi}+\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{d}a}\cdot\nabla F_{a0}=\sum_b\langle C^{\mathrm{L}}_{ab}(F_{a1})\rangle_{\xi} \tag{2.7}$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{d}a}=\boldsymbol{b}\times\nabla\langle\hat{\phi}_a\rangle_{\xi}/B_0$（$\hat{\phi}_a(\boldsymbol{Z},t)=\hat{\phi}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\rho}_a,t)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{Z},t)\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\rho}_a,t)$）は摂動電磁場によるジャイロ中心のドリフト速度成分であり，乱流場による軌道の乱れを表している．(2.7)式を**ジャイロ運動論方程式**と呼び，その解$\hat{F}_{a1}$が生み出す輸送が**微視的乱流**や**異常輸送**などと呼ばれるものになる．なお，線形化Coulomb衝突項C^{L}_{ab}は本来，粒子位置と速度$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$で表現された分布関数$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$に対するオペレータである．(2.4)式，(2.7)式において，C^{L}_{ab}の引数として現れる$\bar{f}_{a1}$，$\hat{F}_{a1}$は共にジャイロ角ξに非依存であるが，変数変換$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{Z},t)$を用いて$\hat{F}_1(\boldsymbol{z},t)$を$\boldsymbol{Z}$で表わしたものと解釈される．そのため，(2.7)式では衝突項自体のジャイロ平均を取っている．一方，(2.4)式の

ドリフト運動論方程式では，衝突項のジャイロ角依存性に関係する部分（有限Larmor半径効果）は2.3節で扱う古典輸送の導出で分離され，(2.4)式以降の定式化においては無視される．

2.3　フラックスの定義から見た新古典輸送と乱流輸送

入れ子状の閉じ込め磁気面が存在しているトーラスプラズマで重要な輸送過程は，磁気面を横切る粒子及び熱フラックスである．今，磁気面ラベル，ポロイダル角，トロイダル角(s,θ,ζ)を用いて磁気座標系（Boozer座標系[9]）が構築されており，平衡磁場が

$$\boldsymbol{B}_0=\nabla s\times\nabla\theta+\iota\nabla\zeta\times\nabla s=G\nabla\zeta+I\nabla\theta+\beta^*\nabla s$$

で与えられるものとする．ただしsは磁気面に囲まれるトロイダル磁束を2πで割ったもの，$\iota(s)$は磁力線の回転変換を表し，$G(s)$および$I(s)$は磁気面sに囲まれたポロイダル及びトロイダル電流束を2πで割ったものである．β^*はPfirsch-Schlüter 電流に関係する部分であるが，低ベータプラズマでは無視できる．新古典フラックスの表式を得るために，最初のジャイロ運動論方程式(2.1)式に立ち返り，これの速度モーメントを取ることを考える．ジャイロ中心座標の速度変数(U,μ,ξ)に対して，次の積分をa種粒子種の速度空間積分と定義する．

$$\int d^3v_{\mathrm{gc}}\equiv\int \mathrm{d}\xi\int \mathrm{d}U\int \mathrm{d}\mu\frac{B^*_{\parallel a}}{m_a}\,. \tag{2.8}$$

ここで，$B^*_{\parallel a}/m_a$は$\boldsymbol{z}$から$\boldsymbol{Z}$への座標変換のヤコビアンである．(2.1)式を(2.8)式で積分しアンサンブル平均をとると，次式の粒子保存の式（連続の式）を得る[10]．

$$\frac{\partial n_a^{\mathrm{gc}}}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{NC}}+\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{g}}+\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{c}})=0, \tag{2.9a}$$

$$n_a^{\mathrm{gc}}=\int d^3v_{\mathrm{gc}}F_a, \tag{2.9b}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{NC}}=\int d^3v_{\mathrm{gc}}(U\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a})\bar{f}_{a1}, \tag{2.9c}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{g}}=\int d^3v_{\mathrm{gc}}\langle\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{d}a}\hat{F}_{a1}\rangle_{\mathrm{ens}}\,. \tag{2.9d}$$

n_a^{gc}はジャイロ中心密度，$\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{NC}}$および$\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{g}}$はそれぞれ新古典と乱流の粒子フラックスを表す．$\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{c}}$は古典拡散に対応し，これは(2.1)式右辺の衝突項の中に入る分布関数が粒子位置の分布関数$f(\boldsymbol{z})$ではなくジャイロ中心分布関数$F(\boldsymbol{Z})$であることからジャイロ平均を取った時に残る部分があり，それが$\sum_b\int \mathrm{d}^3v_{\mathrm{gc}}C_{ab}(F_a,F_b)=-\nabla\cdot\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{c}}$と表せることを使っている[10]．また上式の磁気面平均$\langle\cdots\rangle$を取ると，

$$\frac{\partial}{\partial t}(V'\langle n_a^{\mathrm{gc}}\rangle)+\frac{\partial}{\partial s}\left(V'\langle(\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{NC}}+\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{g}}+\boldsymbol{\Gamma}_a^{\mathrm{c}}-n_a^{\mathrm{gc}}\boldsymbol{u}_s)\cdot\nabla s\rangle\right)=0 \tag{2.10}$$

を得る．ここで$\boldsymbol{u}_s=\partial\boldsymbol{X}/\partial t$は背景磁場の変化による磁気面$s$の移動を表している．また，磁気面内の体積を$V$として，$V'=\mathrm{d}V/\mathrm{d}s=\oint\oint \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\zeta\sqrt{g_{\mathrm{B}}}$（$\sqrt{g_{\mathrm{B}}}$は磁気座標系のヤコビアン）である．

一方，上記のような粒子フラックスの分類は，以下のように粒子位置の分布関数$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$を用いたモーメンタムバランスの式からも導くことができ，こちらの方が新古典輸送を生み出す機構を理解しやすい．まず，前節と同様に電磁場をアンサンブル平均成分(B_0,E_0)と揺動成分$(\hat{B},\hat{E})$に分ける．同様に，分布関数も$f=f_0+\hat{f}$と分離する．粒子分布関数の運動論方程式

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla+\frac{e}{m}\left\{\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right\}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\right)f=C(f)$$

にこの分離を適用し，アンサンブル平均を取ると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla+\frac{e}{m}\{\boldsymbol{E_0}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B_0}\}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\right)f_0=\langle C(f)\rangle_{\mathrm{ens}}+D, \tag{2.11}$$

$$D\equiv-\frac{e}{m}\left\langle\{\hat{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{B}}\}\cdot\frac{\partial\hat{f}}{\partial\boldsymbol{v}}\right\rangle_{\mathrm{ens}} \tag{2.12}$$

を得る．Dは乱流場と分布関数の揺動成分の相関を表している．次に，(2.11)×$m\boldsymbol{v}$として速度空間でモーメントを取ると，次のモーメンタムバランスの式となる[11,12]．

$$\frac{\partial}{\partial t}(mn\boldsymbol{u})=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}+en(\boldsymbol{E_0}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B_0})+\boldsymbol{R_1}+\boldsymbol{K_1}. \tag{2.13}$$

ここで，$n=\int \mathrm{d}^3vf_0$，$n\boldsymbol{u}=\int \mathrm{d}^3v\boldsymbol{v}f_0$，$\boldsymbol{P}=m\int \mathrm{d}^3v\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}f_0$，$\boldsymbol{R}_1=m\int \mathrm{d}^3v\boldsymbol{v}\langle C(f)\rangle_{\mathrm{ens}}$，$\boldsymbol{K}_1=m\int \mathrm{d}^3v\boldsymbol{v}D$である．さらにこの式に$\boldsymbol{B_0}\times\nabla s$を内積して磁気面平均を取ると，径方向フラックスの表式を得る．

$$\begin{aligned}\Gamma^s\equiv\langle n\boldsymbol{u}\cdot\nabla s\rangle=&-\left\langle\frac{\boldsymbol{B_0}\times\nabla s\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}}{eB^2}\right\rangle+\left\langle\frac{n\boldsymbol{E_0}\times\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla s}{B^2}\right\rangle\\&+\left\langle\frac{\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla s}{eB^2}\right\rangle+\left\langle\frac{\boldsymbol{K}_1\times\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla s}{eB^2}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}\right)\cdot\nabla s\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.14}$$

ここで，2.2節の結果からドリフトオーダリングのδ^1までで粒子分布関数fが次のように展開できる[8]．

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})&=f_0+\hat{f}=F_0(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{v})+\bar{f}_1+\hat{f}\\&=F_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})-F_0\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{S_0}+\bar{f}_1-\frac{e\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)}{T_0}F_0+\hat{h},\\ \boldsymbol{S_0}&\equiv\frac{\nabla p_0}{p_0}+\frac{e}{T_0}\nabla\Phi_0+\left(\frac{mv^2}{2T_0}-\frac{5}{2}\right)\nabla\ln T_0,\\ \hat{h}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{v},t)&=\hat{F}_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{v},t)+\frac{e\langle\hat{\phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{v},t)\rangle_\xi}{T_0}F_0\end{aligned} \tag{2.15}$$

この表式において$\hat{f}=-e\hat{\phi}F_0/T_0+\hat{h}$であり，それ以外が$f_0$に当たる．$\hat{f}$の第一項，第二項はそれぞれ$\hat{F}_1$のポテンシャル揺動$\hat{\phi}$に対する断熱応答，非断熱応答部分を表している．$f_0$の中には$\boldsymbol{\rho}$を通じてジャイロ角$\xi$に依存する部分があるが，それは(2.13)式下の定義より$O(\delta^1)$までの$(n,\boldsymbol{P})$に寄与しない（速度空間のξ-積分で消える）ことがわかる．

特に圧力テンソルのアンサンブル平均については，

$$\boldsymbol{P}=m\int \mathrm{d}^3v\boldsymbol{vv}(F_0+\bar{f}_1)=\boldsymbol{I}p_0+P_{\|1}\boldsymbol{bb}+(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{bb})P_{\perp 1}, \tag{2.16}$$
$$P_{\|1}=m\int \mathrm{d}^3vv_{\|}^2\bar{f}_1,\quad P_{\perp 1}=m\int \mathrm{d}^3vv_{\perp}^2\bar{f}_1/2,$$

と書き表せる．$p_0(s)=n_0(s)T_0(s)$はMHD平衡$\boldsymbol{J}_0\times\boldsymbol{B}_0=\nabla p_0$を満たす磁気面関数のスカラー圧力である．一方，1次の非等方圧力はドリフト運動論方程式(2.4)式の解$\bar{f}_1$から決まるもので，Chew–Goldberger–Low形式（CGL-form）と呼ばれる磁力線方向と垂直方向の2成分から表される．(2.14)式第1項は∇p_0からの寄与はなく，非等方圧力テンソル$\nabla\boldsymbol{P}_1$によって駆動される．これが新古典輸送に対応する部分である．(2.14)式第2項は$E\times B$ドリフトによる流れであるが，$\boldsymbol{E}_0=-\nabla\Phi_0=-\nabla\langle\phi\rangle_{\mathrm{ens}}$は2.2節で見たように$\Phi_0$が磁気面関数であるとみなすと，この項は$\Gamma^s$に寄与しない．次にCoulomb衝突項による摩擦項$\boldsymbol{R}_1$に目を向ける．衝突項を(2.5)式の線形化オペレータC^{L}でδ^1次の項まで考えるとすると，Maxwell分布F_0はC^{L}_{ab}に寄与しない．また，摂動分布$\hat{F}_1$について$\langle C^{\mathrm{L}}_{ab}(\hat{f})\rangle_{\mathrm{ens}}=0$であるから，$\boldsymbol{R}_1$に寄与するのは$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$のうち$-F_0\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{S_0}+\bar{f}_1$の項のみである．ここで，$\bar{f}_1$はジャイロ平均された分布関数であることから$m\int d^3v\boldsymbol{v}C^{\mathrm{L}}(\bar{f}_1)=\boldsymbol{R}_{\|1}$と，磁力線平行方向(パラレル方向)の摩擦力しか生まないことになる．従って$\bar{f}_1$は(2.14)式第3項に寄与しない．一方，有限Larmor半径効果の最低次の項である$-F_0\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{S_0}$を$C^{\mathrm{L}}$に入れると磁力線に垂直方向の摩擦力が生じ[13]，以下の関係式を得る（簡単のため$T_{0a}=T_{0b}$と置く）．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\perp 1,ab}&=-\frac{n_{0a}m_a}{\tau_{ab}}\frac{c}{eB_0}\boldsymbol{b}\\&\times\left[\frac{\nabla p_{0a}}{z_an_{0a}}-\frac{\nabla p_{0b}}{z_bn_{0b}}-\frac{3}{2z_a}\nabla T_0\frac{1-z_am_a/z_bm_b}{1+m_a/m_b}\right]\\&=-\frac{n_{0a}m_a}{\tau_{ab}}\boldsymbol{b}\times\left[\boldsymbol{u}_{\perp 1,a}-\boldsymbol{u}_{\perp 1,b}\right.\\&\qquad\left.-\frac{3}{5}\left(\boldsymbol{q}_{\perp 1,a}-\frac{m_a}{m_b}\boldsymbol{q}_{\perp 1,b}\right)\left(\frac{m_b}{m_a+m_b}\right)\right],\end{aligned} \tag{2.17a}$$

$$\boldsymbol{u}_{\perp 1,a}=\frac{\boldsymbol{b}\times(\nabla p_{0a}+e_an_{a0}\nabla\Phi_0)}{n_{0a}m_a\Omega_a},$$
$$\boldsymbol{q}_{\perp 1,a}=\frac{5p_{0a}\boldsymbol{b}\times\nabla T_{0a}}{2m_a\Omega_a}. \tag{2.17b}$$

ここで，$\boldsymbol{u}_{\perp 1,a}$，$\boldsymbol{q}_{\perp 1,a}$は分布関数の$-F_0\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{S_0}$の部分が生み出す粒子及び熱の流れで，diamagnetic(反磁性)フローと呼ばれ，温度と圧力が磁気面関数であることから磁力線に垂直かつ磁気面に沿って流れるため，径方向輸送には寄与しない．なお$\boldsymbol{u}_{\perp 1,a}$の表式には摩擦力には寄与しない$E\times B$フローも含めている．(2.17)式より，$\boldsymbol{R}_{\perp 1,ab}$は反磁性フローに起因する垂直方向の摩擦力に対応していることがわかる．(2.14)式の第4項は乱流場と分布関数揺らぎの相関$\boldsymbol{K}_1$に駆動される，乱流輸送を表現している部分である．最後に，(2.14)式の最終項は分極ドリフトによる粒子束を表すもので，後に見るように両極性径電場の形成過程における過渡的応答を扱う際に重要となる．なお(2.17)式の反磁性フローに対し，$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}_{\perp 1}+\boldsymbol{u}_{\|1})=0$，$\nabla\cdot(\boldsymbol{q}_{\perp 1}+\boldsymbol{q}_{\|1})=0$を満たす1次のパラレルフローが存在する．このパラレルフローは以下のように表わすことができる．

$$u_{\|1,a}=\frac{\langle u_{\|1}B_0\rangle}{\langle B_0^2\rangle}B_0+\frac{X_{a1}}{e_a}\widetilde{U},$$
$$q_{\|1,a}=\frac{\langle q_{\|1}B_0\rangle}{\langle B_0^2\rangle}B_0+\frac{5p_{a0}}{2}\frac{X_{a2}}{e_a}\widetilde{U}, \tag{2.18a}$$

$$X_{a1}=-\frac{p'_{0a}}{n_{0a}}-e_a\Phi',\quad X_{a2}=-T'_{0a}, \tag{2.18b}$$

$$\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla\left(\frac{\widetilde{U}}{B_0}\right)=\boldsymbol{B}_0\times\nabla s\cdot\nabla\left(\frac{1}{B_0^2}\right),\quad\langle B\widetilde{U}\rangle=0. \tag{2.18c}$$

$\widetilde{U}$の具体的な求め方については[14]を参照せよ．また，(2.18b)式で$'=\mathrm{d}/\mathrm{d}s$を意味する．$u_{\|1}$，$q_{\|1}$のうち$\widetilde{U}$に比例する部分はMHD平衡の理論にも出てくるPfirsch-Schlüterフローに相当するものであるが，これはB_0を掛けて磁気面平均すると消える．磁気面平均部分はドリフト運動論方程式を解くことによって求まる新古典輸送の寄与であるが，これは後で考える．これまでの議論をまとめて(2.14)式を整理すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}\Gamma^s\equiv\langle n\boldsymbol{u}\cdot\nabla s\rangle&=-\left\langle\frac{\boldsymbol{B}_0\times\nabla s\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1}{eB_0^2}\right\rangle+\left\langle\frac{\boldsymbol{R}_{1\perp}\times\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla s}{eB_0^2}\right\rangle\\&\quad+\left\langle\frac{\boldsymbol{K}_1\times\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla s}{eB_0^2}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}\right)\cdot\nabla s\right\rangle\\&=\Gamma^{\mathrm{NC}}+\Gamma^{\mathrm{C}}+\Gamma^{\mathrm{g}}+\Gamma^{\mathrm{pl}}_{\perp}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

このように，新古典，古典，乱流の粒子束をジャイロ中心のフローとして[(2.9), (2.10)式]，及び粒子位置のフローとして[(2.14)-(2.19)式]表現することができた．3種類のフラックスはここで見たように，ドリフト運動論方程式の解$\bar{f}_1$，背景プラズマの勾配，及びジャイロ運動論方程式の解$\hat{F}_1$によって定義され，それぞれ明確に分離されている．$\boldsymbol{R}_{1\perp}$に比例する古典拡散や(2.17)式の反磁性フロー，(2.18)式の$\widetilde{U}$に比例するPfirsch-Schlüterフローは，MHD平衡磁場と背景プラズマの勾配X_{a1}，X_{a2}のみで決定できる．これらは2.1節の輸送現象の分類に従えば流体的な輸送現象と言える．また，(2.19)式のフラックスはいずれもドリフトオーダリングでδ^2次の項となっているが，それを求めるのに必要なのはδ^1次までの分布関数$(\bar{f}_1,\hat{F}_1)$であることは重要な点である．なお，ここでは粒子フラックスの表式にしぼって話を進めてきたが，$(2.11)\times\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)\boldsymbol{v}$のモーメントを取ることで径方向の熱輸送方程式も同様に導かれ，熱フラックスについても(2.19)式と同様の分解ができる．

このように，新古典輸送と乱流輸送はそれぞれを記述する運動論方程式の上からも[(2.4), (2.7)式]，フラックスの定義からも[(2.9), (2.19)式]明確に分類できることが示された．しかしながら，それは必ずしも2つの輸送

過程が相互に影響しないということを意味しない．これまでのほとんどの研究において両者を独立に取り扱ってきたのは，あくまでも分離できると仮定していたからであり，その理由は個々の輸送現象についての理解のためという面もあるが，実際上２つを分離しないと今までの計算機ではシミュレーションが不可能であったからという側面も大きい．２つの輸送現象の相互作用のパスとしてまず考えられるのは電場Eである．ヘリカル系の新古典輸送ではこの後で説明する両極性条件から大域的な径電場$E_0=-\nabla\Phi_0(s)$が決定されるが，この径電場分布が乱流輸送に影響を与えることが考えられる．一方，乱流の非線形発展の結果，小半径方向に強いシアーを持つゾーナルフローを生み出すポテンシャル構造$\langle\tilde{\phi}_1\rangle_{\rm ens}$が発達する場合があり，これがドリフト軌道を変化させて新古典輸送に影響を与える可能性もある．また，ジャイロ(ドリフト)運動論を解いた結果生じた磁気面上の密度や静電ポテンシャルの偏りが，ドリフト（ジャイロ）運動論を解く際に高次の修正項として効いてくる場合も考えられる．こうした相互作用の可能性を考え，(2.4)式と(2.7)式を分離せずにまとめて数値シミュレーションとして解く試みが最近になってスーパーコンピュータの発達に伴い発展してきている．その内容については４章で紹介する．

2.4 新古典輸送理論の詳細

以降，$\boldsymbol{K}_1$の項を落として新古典輸送に話を限定し，もう少し理論の詳細について見ていくことにする．まず，(2.13)式と$\boldsymbol{B}_0$の内積を取り，磁気面平均することで，δ^1次のパラレル方向のモーメンタムバランスの式が得られる．

$$\langle \boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle = e\langle nE_{1\|}B_0\rangle + \langle R_{1\|}B_0\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial t}(mnu_{\|}B_0)\right\rangle. \tag{2.20}$$

なお，$E_{1\|}$は(2.13)式ではE_0として現れていたものより高次のアンサンブル平均電場で，例えばトカマクの誘導電場のような外部駆動電場を表すものとする．また，これ以降B_0の時間変化は$O(\delta^2)$以上で無視できるものと仮定する．次に，(2.13)式と$\boldsymbol{e}_\zeta=\partial\boldsymbol{x}/\partial\zeta$の内積より，以下の関係式が導かれる．

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_\zeta\right\rangle &\equiv \left\langle\frac{\partial}{\partial t}(mn\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_\zeta)\right\rangle \\ &= e\iota(\Gamma^{\rm NC}+\Gamma_\perp^{\rm pl}) - \langle\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle \\ &\quad + e\langle nE_{1\|\zeta}\rangle + \langle R_{1\|\zeta}\rangle. \end{aligned}\tag{2.21}$$

この式はプラズマのトロイダル回転の時間発展を表し，トカマクにおいて誤差磁場等の影響による軸対称の破れに起因する新古典トロイダル粘性$\langle\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle$がトロイダル回転に与える影響の研究[12,15]などに使われる．なお(2.21)式では古典フラックスに関係する$\Gamma^{\rm C}$と$\boldsymbol{R}_{1\perp}$の項は無視できるとして落としてある．次に，Boozer座標系で$\boldsymbol{B}_0\times\nabla s=(G\boldsymbol{B}_0-B^2\boldsymbol{e}_\zeta)/\iota$と変形できることを使うと，$\Gamma^{\rm NC}$を次のように分解できる．

$$\begin{aligned}\Gamma^{\rm NC} &= -\left\langle\frac{\boldsymbol{B}_0\times\nabla s\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1}{eB_0^2}\right\rangle \\ &= -\frac{G}{e\iota}\left[\frac{\langle\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle}{\langle B_0^2\rangle} + \left\langle\frac{\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1}{e\langle B_0^2\rangle}\left(1-\frac{B_0^2}{\langle B_0^2\rangle}\right)\right\rangle\right] \\ &\quad + \frac{\langle\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle}{e\iota} \\ &= \Gamma^{\rm BP}+\Gamma^{\rm PS}+\Gamma^{\rm na}. \end{aligned}\tag{2.22}$$

$\Gamma^{\rm BP}$，$\Gamma^{\rm PS}$はそれぞれバナナ-プラトー，Pfirsch-Schlüterフラックスと呼ばれるもので，それぞれ低衝突領域（衝突周波数$\nu<R/v_{\rm th}$）及び高衝突領域（$\nu>R/v_{\rm th}$）で主要な新古典輸送を生む．なぜなら，$\Gamma^{\rm BP}$と$\Gamma^{\rm na}$は新古典粘性の磁力線方向及びトロイダル方向成分の磁気面平均であり，そのような項が顕著になるのは圧力テンソル$\boldsymbol{P}_1$に大きな非等方性$(P_{\|1}-P_{\perp1})$が生じる場合，即ちCoulomb衝突によって速度空間における捕捉-非捕捉軌道の境界近傍での分布関数の非等方性をMaxwell分布に戻そうとする効果が弱い場合である．一方$\Gamma^{\rm PS}$は衝突頻度が高く荷電粒子が磁力線に沿ってトーラスの内側，外側を自由に往来できない場合に，磁力線方向に生じる圧力差によって駆動される．また，$\Gamma^{\rm na}$は新古典トロイダル粘性に比例する部分であり，その形から軸対称系ではゼロとなることがわかる．つまり，この項が非軸対称系の新古典輸送を特徴づける部分である．ここで$\Gamma^{\rm BP}+\Gamma^{\rm PS}$の部分に(2.20)式を使うと，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\Gamma^{\rm BP}+\Gamma^{\rm PS} &= -\frac{G}{e\iota}\left\langle\frac{enE_{1\|}+R_{1\|}}{B_0}\right\rangle + \frac{G}{e\iota}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{mnu_\|}{B_0}\right)\right\rangle \\ &= -\frac{1}{e\iota}\langle enE_{1\|\zeta}+R_{1\|\zeta}\rangle + \frac{1}{e\iota}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\|\zeta}\right\rangle. \end{aligned}\tag{2.23}$$

ただしここで$G/B_0=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_\zeta$を使い，$\mathcal{L}_{\|\zeta}=mn\boldsymbol{u}_\|\cdot\boldsymbol{e}_\zeta$等とする．一般的な$\Gamma^{\rm BP}$，$\Gamma^{\rm PS}$の定義では$E_{1\|\zeta}$に関する項を分離し，また$\partial\mathcal{L}_{\|\zeta}/\partial t$の項は定常を仮定して無視することが多いが後に考え直すことにし，$\partial\mathcal{L}_{\|\zeta}/\partial t$の項を除いて各粒子種の電荷$e_a$を掛けて和を取ると，

$$\sum_a e_a(\Gamma_a^{\rm BP}+\Gamma_a^{\rm PS}) = -\frac{1}{\iota}\left\langle\sum_a e_an_aE_{1\|\zeta}+R_{1\|\zeta,a}\right\rangle = 0, \tag{2.24}$$

となり，磁気面を横切る電流を生まない（本質的両極性，intrinsic ambipolarity）ことがわかる．なお，ここで準中性条件$\sum_a e_an_a=0$およびCoulomb衝突項のモーメンタム保存性$\sum_a R_{1\|\zeta,a}=0$を使った．この性質は次に考える両極性条件で重要となる．

さて，(2.19)式で分極フラックス$\Gamma_\perp^{\rm pl}$を特に説明なく導入したが，これについて考察してみる．$\boldsymbol{b}\times$(2.13)式より垂直方向フローの式を導くと，以下のようになる．

$$n\boldsymbol{u}_\perp = \frac{n\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0}{B_0^2} + \frac{\boldsymbol{B}_0\times\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1}{eB_0^2} + \frac{\boldsymbol{R}_{1\perp}\times\boldsymbol{B}_0}{eB_0^2} + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}_\perp\right).$$

ここで今，輸送オーダリングより最終項の時間微分の中で速く変動するのは$E\times B$ドリフトの静電ポテンシャルの時間変化由来の寄与のみであると考える．つまり，これ

を分極フラックスとして以下のように考える.

$$n\boldsymbol{u}_{\perp}^{\mathrm{pl}} \equiv \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}_{\perp}\right) \simeq \frac{n}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\left(-\frac{\partial\Phi_0'}{\partial t}\right)\frac{\nabla s\times\boldsymbol{b}}{B_0}$$
$$= -\frac{mn}{eB_0^2}\frac{\partial\Phi_0'}{\partial t}\nabla s. \tag{2.25}$$

ここで$\Phi_0' = \mathrm{d}\Phi_0/\mathrm{d}s$. これより, (2.19)式の$\Gamma_{\perp}^{\mathrm{pl}} = \langle n\boldsymbol{u}_{\perp}^{\mathrm{pl}}\cdot\nabla s\rangle$に対応していることがわかる. 一方, (2.23)式で現れた$\mathcal{L}_{\|\zeta}$に対応して, $\mathcal{L}_{\perp\zeta} = mn\boldsymbol{u}_{\perp}\cdot\boldsymbol{e}_{\zeta}$という量を導入すると, 次のことがわかる.

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\perp\zeta} \simeq \frac{mn}{B_0^2}\frac{\partial\Phi_0'}{\partial t}\boldsymbol{B}_0\times\nabla s\cdot\boldsymbol{e}_{\zeta} = -\frac{\iota mn\Phi'}{B_0^2}|\nabla s|^2,$$
$$\therefore \left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\perp\zeta}\right\rangle = e\iota\Gamma_{\perp}^{\mathrm{pl}}. \tag{2.26}$$

すると(2.23)式の最終項も, $\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\|\zeta}\right\rangle \equiv e\iota\Gamma_{\|}^{\mathrm{pl}}$と書くのが妥当であり, $\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\|\zeta}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\perp\zeta}\right\rangle = \left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\zeta}\right\rangle = \langle e\iota\Gamma_{\|}^{\mathrm{pl}} + \Gamma_{\perp}^{\mathrm{pl}}\rangle = e\iota\Gamma^{\mathrm{pl}}$と書けることがわかる. つまり, 径方向の分極フラックスは磁気面平均したトロイダル方向の運動量の変化に比例して生じるものと解釈できる. これまでの結果を踏まえて, 磁気面を横切る電流を求めてみると, 以下のように書ける

$$J_{\mathrm{s}} \equiv \sum_a e_a\Gamma_a^s = \sum_a e_a(\Gamma_a^{\mathrm{NC}} + \Gamma_{\perp a}^{\mathrm{pl}}) = \sum_a e_a(\Gamma_a^{\mathrm{na}} + \Gamma_a^{\mathrm{pl}})$$
$$= \frac{1}{\iota}\sum_a\left[\langle\boldsymbol{e}_{\zeta}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle_a + \left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\zeta}\right\rangle\right]. \tag{2.27}$$

ここで, 左から3番目の表現において(2.19)式にもともとあった古典拡散と乱流輸送$\Gamma^{\mathrm{C}} + \Gamma^{\mathrm{g}}$の寄与が現れていないが, これは新古典輸送だけ考えて無視しているわけではなく, この2つの項はそれぞれ, 衝突項のモーメンタムバランスおよび準中性条件[16]から径方向電流を生まないため実際に寄与しない. 同様に, (2.24)式でも見たように(2.27)式の左から3番目から4番目の表現に移る際, Γ^{NC}に含まれていた$\Gamma^{\mathrm{BP}} + \Gamma^{\mathrm{PS}}$の項は本質的両極性のため消えている. このように, J_sによる両極性径電場の形成は新古典輸送現象による, しかも非軸対称系に特徴的な現象であることがわかる.

それでは, J_{s}から径電場$E_{\mathrm{s}} = -\Phi_0'$の時間発展の式を導く. この際, 確かに径方向電流に実質的に寄与するのはΓ^{na}とΓ_a^{pl}であるが, 時間発展型のドリフト運動論方程式コードにおいて, $\Gamma_{\|}^{\mathrm{pl}} = \left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\|\zeta}\right\rangle/e\iota$を高精度に評価するのは難しい. 一方, $\Gamma_{\perp a}^{\mathrm{pl}}$はそれ自体が$\frac{\partial\Phi_0'}{\partial t}$に比例する項として定義されているので, 磁気座標系におけるPoisson方程式から, 以下のようにして径電場の時間発展を求めるのが一般的である.

$$\epsilon_0\langle|\nabla s|^2\rangle\frac{\partial E_s}{\partial t} = -\sum_a e_a(\Gamma_a^{\mathrm{NC}} + \Gamma_{\perp a}^{\mathrm{pl}})$$
$$= -\sum_a\left[e_a\Gamma_a^{\mathrm{NC}} + \left\langle\frac{m_a n_a}{B_0^2}|\nabla s|^2\right\rangle\frac{\partial E_s}{\partial t}\right], \tag{2.28a}$$
$$\therefore \epsilon_0\left\langle|\nabla s|^2 + \frac{c^2}{v_{\mathrm{A}}^2}|\nabla s|^2\right\rangle\frac{\partial E_s}{\partial t} = -\sum_a e_a\Gamma_a^{\mathrm{NC}},$$
$$v_{\mathrm{A}}^2 = \sum_a\frac{\epsilon_0 c^2 B_0^2}{m_a n_a}. \tag{2.28b}$$

なお通常$c^2/v_{\mathrm{A}}^2 \gg 1$であり, 分極電流の効果により径電場の振幅は単純に$e_a\Gamma_a^{\mathrm{NC}}$だけを考慮した場合よりかなり抑制される. (2.28a) = 0を満たす径電場を両極性径電場と呼ぶ. 非軸対称系プラズマでは両極性条件$J_{\mathrm{s}} = 0$を満たす径電場の解が, 1つだけでなく複数個現れる場合がある. この問題については3章でその例が示される. 一方, 定常状態を仮定してドリフト運動論方程式を解く手法の場合は$\Gamma_{\perp a}^{\mathrm{pl}} = 0$であるから, E_{s}の値を入力パラメータとして適当に振りながらΓ_a^{NC}（もしくはΓ_a^{na}）を求め, $J_{\mathrm{s}} = 0$を満たす条件を探索するのが一般的な方法となる. トカマクなど本質的両極性が成り立つ配位では径電場は(2.28)式のように決めることはできず, 径方向力学平衡（Radial force balance）と呼ばれれるプラズマのトロイダル回転, 圧力勾配と径電場の関係式から決定される[17]. 実際には外部からのモーメンタムソース・シンクの情報が必要となる他, 微視的乱流による粘性やモーメンタム輸送など複合的な要素によって決まると考えられる（自発回転, intrinsic rotation[18]）.

さて, ここまで径方向のフラックスにのみ注目してきたが, 新古典輸送理論のもう一つの重要な応用は温度密度勾配に駆動されるパラレルフロー, すなわちブートストラップ電流の評価である. その関係を含めた新古典輸送の表式を導くために, 今一度(2.20)式のパラレル方向のモーメンタムバランスの式に戻ることにする. これ以降, $\frac{\partial}{\partial t}$の項は無視できると仮定する. また, (2.20)式は(2.13)$\cdot mv_{\|}\boldsymbol{b}_0$より得られたが, 同様に$mv_{\|}\left(\frac{mv^2}{2T_0} - \frac{5}{2}\right)\boldsymbol{b}_0$を内積して得られるモーメント量も合わせて考えると, 次のような関係式が得られる[19].

$$\begin{bmatrix}\langle\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle - e\langle nE_{1\|}B_0\rangle \\ \langle\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{\Theta}_1\rangle\end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix}\langle R_{1\|}B_0\rangle \\ \langle R_{2\|}B_0\rangle\end{bmatrix}_a$$
$$= \sum_b\begin{bmatrix}l_{11}^{ab} & -l_{12}^{ab} \\ -l_{21}^{ab} & l_{22}^{ab}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle Bu_{\|b}\rangle \\ \dfrac{2}{5p_{0b}}\langle Bq_{\|b}\rangle\end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

$$R_{1\|a} = m_a\sum_b\int d^3v v_{\|}\,C_{ab}^{\mathrm{L}}(\bar{f}_{1a}),$$
$$R_{2\|a} = m_a\sum_b\int d^3v v_{\|}\left(x_a^2 - \frac{5}{2}\right)C_{ab}^{\mathrm{L}}(\bar{f}_{1a}), \tag{2.30}$$

$$x_a^2 = \frac{m_a v^2}{2T_{0a}}, \quad \boldsymbol{P}_{1a} = (2.16),$$
$$\boldsymbol{\Theta}_{1a} = m_a\int d^3v\left(v_{\|}^2 - \frac{v_{\perp}^2}{2}\right)\left(x_a^2 - \frac{5}{2}\right)\left(\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_0 - \frac{1}{3}\boldsymbol{I}\right)\bar{f}_{1a}. \tag{2.31}$$

なお(2.29)式はジャイロ中心分布関数$\bar{f}_{1a}$をLegendre及びLaguerre多項式で展開したうちの低次の項のみで近似し

て線形化衝突項に入れた場合に得られる関係（13モーメント近似[20]）である．(2.29)式は磁気面平均した磁力線方向の粘性と摩擦力，フローの関係を結び付ける関係式となっている．さて，(2.22)式から$\langle \boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle\propto\Gamma^{\rm BP}$が示されており，径方向の新古典熱フラックスを$q^{\rm NC}\equiv T\left\langle\int d^3v_{\rm gc}\left(x^2-\frac{5}{2}\right)\bar{f}_1\boldsymbol{v}_{\rm d}\cdot\nabla s\right\rangle$と定義すると，(2.21)式−(2.23)式と同様の計算から$q^{\rm NC}=q^{\rm BP}+q^{\rm na}+q^{\rm PS}$，$q^{\rm BP}\propto\langle\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{\Theta}_1\rangle$も示すことができる．さらにここで径方向フラックスについて，バナナ−プラトーと非軸対称成分の和と，Pfirsch-Schlüterの2つに分離することを考える．すなわち，$\Gamma^{\rm NC}=(\Gamma^{\rm BP}+\Gamma^{\rm na})+\Gamma^{\rm PS}=\Gamma^{\rm bn}+\Gamma^{\rm PS}$，$q^{\rm NC}=(q^{\rm BP}+q^{\rm na})+q^{\rm PS}=q^{\rm bn}+q^{\rm PS}$．説明は省くが，$\Gamma^{\rm PS}$，$q^{\rm PS}$は$\Gamma^{\rm PS}=-\frac{\langle\widetilde{U}R_{1||}\rangle}{e}$, $q^{\rm PS}=-\frac{\langle\widetilde{U}R_{2||}\rangle}{e}$と表せるため[19]，これも(2.29)式同様にパラレルフローと関係づけることができる．そうすると，(2.29)式の関係式を使って粘性，フロー，径方向輸送と駆動力（(2.18b)式のX_{a1}，X_{a2}および$X_{\rm E}\equiv\langle E_{||}B\rangle/\langle B^2\rangle$）を結びつける式を導けそうである．ここでは，モーメント法と呼ばれる手法の概略だけを示す．まず，出発点はドリフト運動論方程式(2.4)式を独立変数を（$\boldsymbol{x}, v, \xi=v/v_{||}$）として書き直した以下の式である[19].

$$(V_{||}-C_a^{\rm PAS})\hat{g}_a=\boldsymbol{v}_{{\rm d}a}\cdot\nabla s\left\{X_{a1}+\left(x_a^2-\frac{5}{2}\right)X_{a2}\right\}+\frac{e_a}{T_a}X_{\rm E}Bv\xi-(V_{||}-C_a^{\rm L})g^{(l=1)}, \quad (2.32a)$$

$$V_{||}=v\xi\boldsymbol{b}\cdot\nabla-\frac{v(1-\xi^2)}{2}\boldsymbol{b}\cdot\nabla\ln\xi\frac{\partial}{\partial\xi}, \quad (2.32b)$$

$$g_a\equiv\frac{\bar{f}_{1a}}{F_{a0}}-\frac{e_a}{T_a}\int^l\frac{{\rm d}l}{B}(E_{||}B-B^2X_{\rm E}), \quad (2.32c)$$

$$\hat{g}_a=g-g^{(l=1)}. \quad (2.32d)$$

ここで，(2.32c)式の積分は磁力線に沿った積分であり，$g^{(l)}$はgをLegendre多項式$P_l(\xi)$[$P_0=1$，$P_1=\xi$，$P_2=(3\xi^2-1)/2,\cdots$]で展開ししたときのl次の成分を意味する．また，左辺では衝突項をピッチ角散乱オペレーター$C_a^{\rm PAS}=\frac{\nu_{\rm D}^a}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}$で近似している（$\nu_{\rm D}^a$は90°散乱衝突周波数）．衝突項に関するこの近似は一見大胆に見えるが，$\int d^3v\, mv_{||}C^{\rm L}(\hat{g}_a)=\int d^3v\, mv_{||}C^{\rm PAS}(\hat{g}_a)=0$というモーメンタム保存性を数学的に満たすことが知られている．また，(2.29)式において左辺のテンソル量$\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{\Theta}_1$は$g^{(l=2)}$成分で決まる一方，右辺のパラレルフロー$u_{||}$，$q_{||}$は$g^{(l=1)}$成分のみで決まるという関係になっている．このような関係を使ってg_aの解を求めると，パラレル粘性，フロー，径方向輸送，勾配X_{a1}，X_{a2}を結び付ける線形の関係式が得られる[19].

$$\begin{bmatrix}\langle\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle\\ \langle\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{\Theta}_1\rangle\end{bmatrix}_a=\begin{bmatrix}M_{a1}&M_{a2}\\M_{a2}&M_{a3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle Bu_{||a}\rangle/\langle B^2\rangle\\ \frac{2}{5p_{0a}}\langle Bq_{||a}\rangle\langle B^2\rangle\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}N_{a1}&N_{a2}\\N_{a2}&N_{a3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{a1}\\X_{a2}\end{bmatrix}. \quad (2.33a)$$

$$\begin{bmatrix}\Gamma^{\rm bn}=\Gamma^{\rm BP}+\Gamma^{\rm na}\\ q^{\rm bn}=q^{\rm BP}+q^{\rm na}\end{bmatrix}_a=\begin{bmatrix}N_{a1}&N_{a2}\\N_{a2}&N_{a3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle Bu_{||a}\rangle/\langle B^2\rangle\\ \frac{2}{5p_{0a}}\langle Bq_{||a}\rangle\langle B^2\rangle\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}L_{a1}&L_{a2}\\L_{a2}&L_{a3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{a1}\\X_{a2}\end{bmatrix}. \quad (2.33b)$$

ここで係数行列(M_{ai}, N_{ai}, L_{ai})は$\hat{g}_a$の解（より正確には$\hat{g}_a$をX_{a1}，X_{a2}，$\langle Bu_{||a}\rangle$，$\langle Bq_{||a}\rangle$の線形和で表した時に(2.32a)式を満たすように決まる係数）に関する速度空間積分及び磁気面平均から決定される．(2.29)式と(2.33)式を結び付け，Γ^{bn}，q^{bn}，$J_{\rm BS}\equiv\langle J_{||}B\rangle/\langle B^2\rangle=\langle(e_in_iu_{||i}-en_eu_{||e})B\rangle/\langle B^2\rangle$に対する式として整理すると，以下のような方程式が得られる．（簡単のためここではイオン種は1種類としたが，複数イオン種の場合も同様の表式が得られる）

$$\begin{bmatrix}\Gamma_e^{bn}\\q_e^{bn}\\\Gamma_i^{bn}\\q_i^{bn}\\J_{BS}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{11}^{ee}&L_{12}^{ee}&L_{11}^{ei}&L_{12}^{ei}&L_{1{\rm E}}^{e}\\L_{21}^{ee}&L_{22}^{ee}&L_{21}^{ei}&L_{22}^{ei}&L_{2{\rm E}}^{e}\\L_{11}^{ie}&L_{12}^{ie}&L_{11}^{ii}&L_{12}^{ii}&L_{1{\rm E}}^{i}\\L_{21}^{ie}&L_{22}^{ie}&L_{21}^{ii}&L_{22}^{ii}&L_{2{\rm E}}^{i}\\L_{{\rm E}1}^{e}&L_{{\rm E}2}^{e}&L_{{\rm E}1}^{i}&L_{{\rm E}2}^{i}&L_{\rm EE}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{e1}\\X_{e2}\\X_{i1}\\X_{i2}\\X_{\rm E}\end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

係数$(M_{ai}, N_{ai}, L_{ij}^{ab})$を具体的に求める方法としては主に変分法を使う方法[21-23]とMonte-Carlo法を使う方法[24]が知られているが，ここではその詳細には触れない．(2.34)式のように表現すると，新古典輸送（径方向粒子，熱フラックス，ブートストラップ電流）が$(X_{a1}, X_{a2}, X_{\rm E})$を駆動力として引き起こされる輸送過程であることがよくわかる．特に，粒子フラックスがΓ^{bn}が圧力勾配と径電場X_{a1}だけでなく温度勾配X_{a2}や誘導電場$X_{\rm E}$に駆動されたり，熱フラックスq^{bn}がX_{a1}にも駆動されるといった輸送行列L_{ij}^{ab}に非対角成分があること，また電子（イオン）が自身の勾配だけでなく摩擦力を介してイオン（電子）の勾配にも駆動されることなど，新古典輸送の重要な性質がこの1つの式にまとめられている．一方で(2.22)式，(2.23)式のように表現した場合，新古典輸送は圧力の非等方性（＝粘性），あるいはパラレル方向の摩擦力の結果生じると見ることもできる．いずれの見方においても，(2.20)式と(2.29)式に現れるようにCoulomb衝突によるパラレル方向の摩擦力，モーメンタムバランスが新古典輸送の評価に重要である．なお，Pfirsch-Schlüterフラックスについても同様に表せ[25, 26]，以下の形となる．

$$\begin{bmatrix}\Gamma_a^{\rm PS}\\q_a^{\rm PS}\end{bmatrix}=-\langle\widetilde{U}^2\rangle\sum_b\frac{1}{e_ae_b}\begin{bmatrix}l_{11}^{ab}&-l_{12}^{ab}\\-l_{21}^{ab}&l_{22}^{ab}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_{b1}\\X_{b2}\end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

$\langle\widetilde{U}^2\rangle$はMHD平衡磁場から決まり，摩擦係数$l_{\rm jk}^{ab}$も線形化衝突項の性質のみから決定されるため，(2.35)式はドリフト運動論方程式を解かずとも決定できる．そのような意味において，Pfirsch-Schlüterフラックスは2.1節の分類上流体的な輸送過程と見ることができる．Pfirsch-

Schlüterフラックスは磁気面上のパラレルフローの変動部分（$\propto \widetilde{U}$）によるパラレル方向の摩擦力の変動（＝パラレル粘性の変動，(2.22)式の$1-\frac{B_0^2}{\langle B_0^2\rangle}$に比例する項）に起因する径方向輸送であるため，Pfirsch-Schlüterフローと同様に流体的な輸送過程になっているのはつじつまが合うし，Pfirsch-Schlüterフラックスは衝突周波数が高い場合に顕著になるから，その観点からも流体的な描像と合う．もちろん$\langle \widetilde{U}^2\rangle$は磁場のトーラス性を表す因子になっており，故に$\Gamma_a^{\mathrm{PS}}$と$q_a^{\mathrm{PS}}$は新古典輸送の一部である．

最後に，トカマクや新古典最適化配位の一種である準対称配位において重要な性質である本質的両極性（intrinsic ambipolarity）の概念について説明する．既に(2.24)式で見たように，衝突項のモーメンタム保存性および準中性条件より，径方向の新古典粒子フラックスのうち，パラレル粘性に関係するΓ^{BP}とΓ^{PS}については径方向の電流を生まない．よってトロイダル粘性由来のフラックス$\Gamma^{\mathrm{nq}}\propto\langle \boldsymbol{e}_\zeta\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle$及び分極フラックス$\Gamma^{\mathrm{pl}}$だけが径電場の時間発展に関与することが(2.27)式で示された．ここでは$\boldsymbol{e}_\zeta$としてBoozer座標系における任意のトロイダル角を取っているが，新古典粘性をパラレル方向ともう１つの方向に分離する方法は１つではなく，ポロイダル成分，あるいは任意の成分を取ることも可能である[12,27]．もし，磁場が準軸対称，準ポロイダル対称，あるいは準ヘリカル対称などの準対称配位であれば，磁場に平行な方向と対称性の方向（＝$\boldsymbol{Q}$とする）の２成分に新古典粘性を分離した場合，$\langle \boldsymbol{Q}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle=0$となるのでトカマクと同様に新古典輸送は本質的両極性を満たす．一方，Γ^{BP}とΓ^{PS}（さらにΓ^{C}も）の磁場配位に依らない本質的両極性は，Coulomb衝突項のモーメンタム保存性から導かれた．ここで線形化Coulomb衝突項，特にLandauのFokker-Planckオペレータ[28,29]の持つ重要な性質を述べておこう．(2.5)式の$C_{ab}^{\mathrm{L}}(\bar{f}_{1a})$は，

$$C_{ab}^{\mathrm{L}}(\bar{f}_{a1})=C_{ab}(\bar{f}_{a1},F_{b0})+C_{ab}(F_{a0},\bar{f}_{b1})$$
$$=C_{ab}^{\mathrm{T}}(\bar{f}_{a1})+C_{ab}^{\mathrm{F}}(\bar{f}_{b1})$$

のようにテスト粒子衝突項C_{ab}^{T}とフィールド粒子衝突項C_{ab}^{F}に分けられる．これらは以下のような関係式を満たす．

・粒子数保存則：

$$\int d^3v C_{ab}^{\mathrm{T}}(\bar{f}_{a1})=\int d^3v C_{ab}^{\mathrm{F}}(\bar{f}_{b1})=0, \tag{2.36a}$$

・モーメンタム及びエネルギー保存則：

$$m_a\int d^3v\{\boldsymbol{v},v^2\}C_{ab}^{\mathrm{T}}(\bar{f}_{a1})+m_b\int d^3v\{\boldsymbol{v},v^2\}C_{ba}^{\mathrm{F}}(\bar{f}_{a1})=0, \tag{2.36b}$$

・自己随伴性（Self-adjointness）：

$$\int d^3v\frac{\bar{g}_1}{F_{a0}}C_{ab}^{\mathrm{T}}(\bar{f}_1)=\int d^3v\frac{\bar{f}_1}{F_{a0}}C_{ab}^{\mathrm{T}}(\bar{g}_1),$$
$$T_a\int d^3v\frac{\bar{f}_{a1}}{F_{a0}}C_{ab}^{\mathrm{F}}(\bar{f}_{b1})=T_b\int d^3v\frac{\bar{f}_{b1}}{F_{a0}}C_{ba}^{\mathrm{F}}(\bar{f}_{a1}). \tag{2.36c}$$

なおここで$\{\boldsymbol{v},v^2\}$は$\boldsymbol{v}$またはv^2のいずれかを意味する。モーメント法の説明の中で衝突項の性質については特に触れなかったが，(2.29)式，(2.35)式において摩擦係数l_{jk}^{ab}は自己随伴性から$l_{jk}^{ab}=l_{kj}^{ba}$，またモーメンタム保存性から$\sum_a l_{1k}^{ab}=0$を満たす．後者の性質がΓ^{BP}とΓ^{PS}の本質的両極性を保証するが，自己随伴性はここでは特に必要とはされない．しかし，新古典輸送におけるOnsager対称性というもう一つの重要な性質は，この自己随伴性から導かれる．Onsager対称性は(2.34)式において，

$$L_{jk}^{ab}=L_{kj}^{ba},\ \ L_{j3}^{ab}=-L_{3j}^{ba},\ \ L_{jE}^{a}=L_{Ej}^{a}(j,k=\{1,2\}) \tag{2.37}$$

の形で現れる．この性質は新古典輸送がエントロピーを増大させる方向にのみ起こる散逸過程である事（BoltzmannのH-定理）とも関係しており，文献[25]によくまとめられている．重要な補足として，古典輸送と乱流輸送も同様にOnsager対称性を満たす輸送行列によってフラックスと駆動力が結び付けられる[30]．なお，トカマクにおいては新古典フラックスが本質的両極性を満たすだけでなく，径電場$-\Phi_0'$に依存しなくなることも重要な性質であるが，最近の論文[31]において，この性質を計算で再現するには衝突項のモーメンタム保存性だけでなく自己随伴性も必要であることがわかりやすく示されている．

以上，本章ではドリフト運動論方程式とジャイロ運動論方程式の導出から始めて，新古典輸送理論の基礎について概観してきた．次章では，具体的に新古典輸送の計算を行う上でどのような仮定や近似が使われているのか，それが時代とともにどう進化してきたかについて見ていくことにする．

参 考 文 献

[1] ITER Physics Basis Chap. 2, Nucl. Fusion **39**, 2175 (1999).
[2] Y. Yamada *et al.*, Nucl. Fusion **45**, 1684 (2005).
[3] A. Ishizawa *et al.*, Nucl. Fusion **57**, 066010 (2017).
[4] F. Warmer *et al.*, Phys. Rev. Lett. **127**, 225001 (2021).
[5] R. Sakai *et al.*, Fus. Eng. and Des. **149**, 111322 (2019).
[6] A.J. Brizard and T. S. Hahm, Rev. Mod. Phys. **79**, 421 (2007).
[7] H. Sugama, Phys. Plasmas **7**, 466 (2000).
[8] プラズマ・核融合学会 編：プラズマシミュレーション（京都大学学術出版会，2018）第２章.
[9] A.H. Boozer, Phys. Fluids **24**, 1999 (1981).
[10] H. Sugama, Rev. Mod. Plasma Phys. **1**, 9 (2017).
[11] H. Sugama and W. Horton, Phys. Plasmas **2**, 2989 (1995).
[12] S. Satake *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion. **53**, 054018 (2011).
[13] F.L. Hinton, *Basic Plasma Physics* 2 (edited by A.A. Galeev *et al.*, Handbook of Plasma Physics) (North-Holland Publishing Company 1984) Chap. 1.5.
[14] D.A. Spong, Phys. Plasmas **12**, 056114 (2005).

[15] M. Honda *et al.*, Nucl. Fusion **54**, 114005 (2014).
[16] Sugama *et al.*, Phys. Plasmas **3**, 2379 (1996).
[17] J.D. Callen *et al.*, Phys. Plasmas **17**, 056113 (2010).
[18] J.E. Rice, Plasma Phys. Control. Fusion **58**, 083001 (2016).
[19] H. Sugama and S. Nishimura, Phys. Plasmas **9**, 4637 (2002).
[20] R. Balescu, *Transport Processes in Plasmas* Vol. 2 (North-Holland, Amsterdam, The Netherland, 1988).
[21] S.P. Hirshman *et al.*, Phys. Fluids **29**, 2951 (1986).
[22] W.I. van Rij and S. P. Hirshman, Phys. Fluids B **1**, 563 (1989).
[23] H. Sugama and S. Nishimura, Phys. Plasmas **15**, 042502 (2008).
[24] A. Matsuyama *et al.*, Phys. Plasmas **16**, 052501 (2009).
[25] H. Sugama and W. Horton, Phys. Plasmas **3**, 304 (1996).
[26] J.D. Lore, *Measurement and Transport Modeling with Momentum Conservation of an Electron Internal Transport Barrier in HSX* (Doctor thesis, Univ. Wisconsin-Madison, 2010) Chap. 3.
[27] K.C. Shaing *et al.*, Nucl. Fusion **50**, 125012 (2010).
[28] L. Landau, Phys. Z. Sowjetunion (USSR) **10**, 154 (1936).
[29] M.N. Rosenbluth *et al.*, Phys. Rev. **107**, 1 (1957).
[30] H. Sugama and W. Horton, Phys. Plasmas **4**, 405 (1997).
[31] M. Honda, Phys. Plasmas **30**, 092305 (2023).