J. Plasma Fusion Res. Vol.100, No.7 (2024) 301-303

小特集

古くて新しい新古典輸送理論の新展開

Recent Progress of Old yet New Neoclassical Transport Theory

1．はじめに

1. Introduction

佐竹真介
SATAKE Shinsuke
核融合科学研究所　構造形成・持続性ユニット

（原稿受付：2024年 2 月21日）

磁場閉じ込め核融合の研究は半世紀以上に渡って続けられており，最近ではJT-60SAのファーストプラズマ成功やフランスにおけるITER装置の建設など，大型超電導コイル装置におけるDTプラズマの定常燃焼の実現に向け，一歩ずつではあるが着実に研究が進められている．またこの数年間で見ると，海外だけでなく日本においても民間資本による多くのスタートアップ企業が核融合炉実現に向けた研究に参入してきており，トカマク型，ヘリカル型の両方で新しいコンセプトの装置の建設とそれによる核融合発電の実証に向けた実験がこの先多く進められようとしている．しかしこの現在の活況は数年前は予想もつかなかったことであり，核融合研究の歴史において，新しい実験装置を建設することは多くのコストと時間を要することから実行に移すハードルが高く，これが核融合研究に長い年月を要している原因の一つと筆者は考える．そのような状況においても，核融合プラズマに関する理論研究においては21世紀に入って以降各段の進展があったと言え，その大きな要因は計算機の発達に伴う数値シミュレーション法の高度化にある．今では核融合プラズマの理論研究において単に従来より大規模・高解像度なシミュレーションを行うだけではなく，それまでの計算法で無視されてきた効果を取り入れたより現実に近いモデルに基づくシミュレーション法を開発したり，個別に扱われていた現象を統一的に扱うマルチスケール，マルチフィジックス（multi-scale, multi-physics）モデルのシミュレーションを行ったりすることで，これまでに見過ごされていた現象，これまでの計算法では再現できなかった現象を数値シミュレーションで研究することは当然のように行われるようになってきている．

そのような核融合理論研究の歴史の中で，新古典輸送理論はトーラスプラズマ中の荷電粒子の衝突拡散現象を扱う理論として比較的早期から研究が進められてきており，1980年頃には現代でもよく引用される新古典輸送理論の体系がまとめられた[1-4]．そのような「ベーシック」な新古典輸送理論は現在まで続く核融合研究の基盤となっており，その中では厳密な方程式系の導出も示されていたが，それを実際に応用する際には，計算機が未発達であったため定量的な正確性よりむしろ定性的な理解に重点が置かれていたと言っても過言ではないであろう．新古典輸送計算を実際に行うために採用された多くのモデルは，計算する上での簡便性のために様々な近似や仮定のもとに成り立っている．当時の計算機の性能を考えればこれは至極当然のことであり，筆者はこれを批判するわけではないが，そうした簡易モデルに基づく理論が標準的な新古典輸送理論として教科書等で紹介され，またそのハンドリングのしやすさから実験解析においても多く採用される状況が長年続いたことによって，核融合研究者の中に「新古典輸送理論は既に完結しており，しかも容易に計算可能」という見方が，特に新古典輸送が低く抑えられ，かつ磁場配位が単純な故に簡易的な計算法でも精度のよい新古典輸送計算ができるトカマクの研究コミュニティを中心に広まってしまっているように思われる．

これと比較して，2000年以降の理論研究で特に目立った進展をしているのがジャイロ運動論に基づく微視的乱流輸送の研究である．ジャイロ運動論による乱流輸送の研究も，その初期には平板（スラブ）配位を使いプラズマのごく一部を切り出した簡易モデルによる研究から始

National Institute for Fusion Science, Toki, GIFU 509-5292, Japan

author's e-mail: satake.shinsuke@nifs.ac.jp

まった．しかしその後，スーパーコンピュータの発達と共にジャイロ運動論の研究は進展を続け，実際的な3次元トーラスプラズマの磁場配位を入れ，イオンと電子，さらに不純物イオンを含め，粒子種毎に異なるスケールの乱流の相互作用までを同時に解くレベルにまでシミュレーションの解像度と規模が進展している．また，その進展の過程においてジャイロ運動論のより数学的・物理的厳密性を備えた定式化と，そのモデルに基づいた大規模数値計算を効率的かつ高精度に行うための様々な数値計算技法の開発も絶え間なく進められてきた．このような経緯から，核融合コミュニティの中でジャイロ運動論によるプラズマ乱流研究を完成されたものとみなす研究者はまずいないであろう．実際，シミュレーション研究の進展とともにトーラスプラズマ中の微視的乱流輸送現象に関する新しい知見の数々が産まれ続けており，さらにこれからはそうした知見を新装置の設計や運転予測・制御に活かそうという取り組みも始まっている．

それでは，そのようにジャイロ運動論シミュレーションの研究が進展している間，新古典輸送現象の理論シミュレーション研究は止まってしまっていたのかと言うと決してそのような事はない．特にヘリカル系プラズマにおいては，新古典輸送現象は乱流輸送同様にプラズマ閉じ込め性能を評価する上での最重要指標の一つであるため，2000年以降も従来の新古典輸送計算モデルで使われていた近似を排したより定量的精度の高い計算法の開発が，ヘリカルプラズマの研究分野を中心に2000年以降も進められてきた．ここでも，コンピュータの性能と数値計算技法，両方の発達とともに以前より現実的な仮定に基づく計算モデルが新古典輸送計算に適用されている．さらに，従来は微視的乱流を扱うジャイロ運動論と，新古典輸送現象を扱うドリフト運動論はスケール分離可能という仮定のもとでそれぞれ別個に計算されてきたが，この10年間でジャイロ運動論シミュレーションの中に新古典輸送の効果を含めた計算ができるようになってきた．乱流現象は基本的に非線形なモード間のカップリングが重要であり，それゆえに実際に乱流輸送のレベルを評価するには数値シミュレーションに頼らざるを得ないのと比較して，新古典輸送現象は磁場配位とプラズマの分布を与えれば基本的に確定的に解が求まる類の問題である．このことも乱流現象と比較して新古典輸送の計算は容易であると時に勘違いされる要因になっているかも知れないが，現在の新古典輸送計算は採用するモデルの近似の度合いに応じて，手計算レベルのものから，デスクトップパソコン1台程度のもの，さらにジャイロ運動論シミュレーションと同様にスーパーコンピュータを使った大規模並列計算が必要なものまで，様々なレベルのものが存在している．計算モデルの選択によってはある種の現象を評価できない，あるいは過大・過少評価してしまうことがあり，理論予測や実験解析に新古典輸送シミュレーションを用いる際にはそれが採用している計算モデルの特徴をよく理解した上で利用する必要がある．しかし，このような詳細についてはコードの開発者や新古典輸送の専門家以外からは意識されていないこともあるのが現状である．

筆者は新古典輸送の理論シミュレーション研究が2000年以降，教科書的なよく知られているものから，計算機とシミュレーション技法の発達と共により高度なものへと進展してきた経緯を自らも携わりながら追ってきた．そのような立場から，ここで述べてきた新古典輸送理論・シミュレーションに対するある種不幸な誤解を解き，新古典輸送理論そのものを研究している研究者以外の大多数の利用者としての立場の核融合研究者が，予測研究や実験解析等に新古典輸送計算を利用する際に，その用途に適したモデルの計算法を選択し利用できるようになって欲しいと考えてこの小特集を執筆することにした．また，新古典輸送理論は今でもまだ進化し続けており，最近どのような拡張の取り組みがなされてきているかについてもいくつか紹介したい．こうした新しい拡張は，定常核燃焼プラズマ中の輸送を評価する上で重要になると思われる物理を新古典輸送計算に取り入れるために必要であり，この小特集をきっかけに我こそはと思う若手にぜひ更に発展させてもらいたいと願っている．なお，ここに述べたシミュレーション法に対する古い観念に基づく誤解や，計算に採用されているモデル固有の特徴や近似による限界などに対する理解不足の問題は新古典輸送に限った話ではない．MHD平衡・安定性コード，乱流シミュレーションコードなど，現在の核融合研究において複数の，他人が開発したコードを組み合わせて利用することは理論研究者にとっては当然のことになっているが，そのそれぞれの計算法の中でどのような近似が使われ，どの程度の定量的，定性的な正確さが期待できるかをしっかりと理解して使っているかどうか，この小特集をきっかけに一度考え直す機会になれば幸いである．

本小特集の構成は以下の通りである．まず第2章では，新古典輸送とはそもそも何なのか，電磁流体力学（MHD）乱流や古典輸送，微視的乱流との区別について，特にジャイロ運動論とドリフト運動論の導出過程を概観しながら定義していく．続いて新古典輸送現象について，特に重要となる小半径方向の粒子・熱フラックスやブートストラップ電流と，新古典粘性，Coulomb衝突による粒子種間摩擦などがどのような関係式で結ばれているかを見る．また，トカマクや準軸対称系と，大型ヘリカル装置（LHD）やHeliotron-J,W7-Xなどの非軸対称系配位との大きな違いである両極性径電場についても説明する．なお，本小特集ではよく教科書レベルの新古典輸送理論で紹介される，トカマクのバナナ−プラトー− Pfirsch-Schlüter領域など衝突領域ごとの新古典輸送が具体的にどのようになるか，ヘリカル系ではどうか，などの定性的な説明は行わない．ここでは，新古典輸送現象を扱う方程式系がどのような定式化によって導かれるかについて理解してもらうことを主な目的とする．次に第3章では，ドリフト運動論を実際にシミュレーションで解く際に，どのような近似が用いられ，それぞれの近似がどのような影響を計算結果に与えるかについて，いくつかの主要な新古典輸送コードを挙げながら説明する．さらに，新古典輸送

計算の更なる拡張の方向性として，いくつかの研究を紹介する．これらは，中性粒子ビーム入射（Neutral beam injection, NBI）などの外部加熱や核融合反応によるα粒子による加熱の効果など，非熱平衡的な分布関数に対する取り扱いと，多粒子種プラズマの新古典輸送シミュレーションによる不純物イオンの新古典輸送現象に関する研究である．さらに4章では，新古典輸送シミュレーション研究の最先端として，ジャイロ運動論による微視的乱流と新古典輸送現象の相互作用に関する研究例を紹介してもらう．最後に5章で本小特集の内容に関するまとめを述べる．4章で紹介するような最新のシミュレーションモデルを用いた研究においても，その中で新古典輸送（ドリフト運動論）がどのようなモデルに基づいて数値的に解かれているかを理解することは，計算モデルの妥当性を説明する上でも非常に重要な点であるので，ジャイロ運動論を主に研究している研究者にも，カウンターパートとしての新古典輸送計算がどのように行われているか，この小特集をきっかけにより深く理解していただけると幸いである．また，研究の中で既に新古典輸送コードをユーザーとして利用している方，あるいはこれから利用する方は，3.1章や5章の議論から新古典輸送コードが採用する計算モデルに含まれる近似や制約の概観がつかめ，さらに各章を読むことで理解が深められると思うので，本小特集が新古典輸送現象に関する研究を進める上での一助となることを願う．

参考文献

[1] F.L. Hinton and R.D. Hazeltine, Rev. Mod. Phys. **2**, 239 (1976).

[2] S.P. Hirshman and D.J. Sigmar, Nucl. Fusion **21**, 1079 (1981).

[3] L.M. Kovrizhnyikh, Nucl. Fusion **24**, 851 (1984).

[4] K.C. Shaing and J.D. Callen, Phys. Fluids **26**, 3315 (1983).

J. Plasma Fusion Res. Vol.100, No.7 (2024) 304-313

小特集 古くて新しい新古典輸送理論の新展開

2．新古典輸送理論の概要

2. Overview of Neoclassical Transport Theory

佐 竹 真 介
SATAKE Shinsuke
核融合科学研究所　構造形成・持続性ユニット

（原稿受付：2024年２月21日）

新古典輸送理論の礎となるドリフト運動論方程式の導出から，新古典輸送方程式の導出と，モーメンタムバランスや両極性径電場の決定など，新古典輸送現象において重要となる事柄についてまとめる．また，ジャイロ運動論との違いについても概観する．

Keywords:
Neoclassical transport theory, drift-kinetic equation, gyrokinetic theory, numerical simulation

2.1　輸送現象のクラス分け

トーラス型のプラズマ閉じ込め装置は，トーラスを周回する磁力線によって作る入れ子状の磁気面構造によって，プラズマを真空容器壁に接触しないように隔離し，高温のプラズマを長時間安定に保持することを目的とするものである．プラズマを構成する電子とイオンは磁力線に巻きつくジャイロ運動をしながら磁力線方向に走り回る．従って端のないトーラス状の磁気面を構成することで荷電粒子を長時間閉じ込める，というのが磁場閉じ込め核融合炉の基本的なアイデアである．しかしながら荷電粒子は永久にトーラス中を周回し続けるわけではなく，様々な原因によって磁気面を横切る方向に拡散される．また正負の荷電粒子の流速の差はプラズマ中を流れる電流となり，プラズマ自身を閉じこめている磁場を変化させる．このような閉じ込め磁場中の粒子や熱の流れを扱うのが磁場閉じ込め核融合の研究分野における**輸送理論**（**transport theory**）である．

磁場閉じ込めプラズマ中で起こる輸送現象には，大別すると流体的なものと運動論的なものの２つがある．前者は，電磁流体力学（Magneto-Hydro-Dynamics，MHD）理論で扱われる閉じ込め磁場の巨視的な流体力学的不安定性に伴い，閉じ込め磁場そのものがマクロ（スケール長$L\sim$小半径a）かつ高速（時間スケール$t\sim L/v_{\mathrm{th,i}}$，$v_{\mathrm{th,i}}$はイオン熱速度）に変化し，時にプラズマの圧力分布自体が大きく変化するような巨視的な粒子・熱の吐き出し現象である．この代表例としては，キンクモード，バルーニングモード，Alfvén共鳴モードなどのMHD不安定性が挙げられる．このようなマクロな不安定性に伴う輸送では，磁場に閉じ込められたプラズマのエネルギーを大きく失うことになる．MHD理論で現象を記述する際に使われるのは閉じ込め磁場と電場($\boldsymbol{B}, \boldsymbol{E}$)の他には密度$n$，温度$T$，圧力テンソル$\boldsymbol{P}$，流体速度$\boldsymbol{V}$といった一般の流体力学でも使われる量であり，後に述べる運動論的モデルで扱う速度空間分布の情報を必要としない（Alfvén共鳴モードを駆動する高速粒子の分布など，速度分布の情報が重要な現象も一部含まれる）．また，一様磁場中でジャイロ運動する荷電粒子同士のCoulomb衝突による，Larmor半径をステップサイズとする拡散現象を古典拡散と呼ぶが，後で見るようにこれは流体力学的変数によって記述可能なため，流体的な輸送現象の１つと見なすこともできる．MHD不安定性に伴う輸送は核融合炉の定常運転を実現する上で十分に抑制されるように磁場配位や運転条件を設計・調整しなければならない．また，古典拡散による熱輸送のタイムスケールは核融合炉に求められる熱閉じ込め時間に比べて十分に遅いため，流体的な輸送現象だけを想定するならば，MHD安定なプラズマは核融合炉の炉心条件を容易に満たす．しかしながら実際には，古典拡散よりずっと大きい輸送をもたらす運動論的な輸送現象によってプラズマの閉じ込め性能は決定されている．

運動論的な輸送現象は，安定的なMHD平衡磁場が存在しているという前提のもとで，荷電粒子の平均自由行程l_{mfp}が閉じ込め磁場のスケール長（～大半径R）程度かそれ以上となる，高温で低衝突性な磁場閉じ込めプラズマにおいて特徴的に現れる現象である．平均自由行程が長く衝突による緩和が効きにくいこと，ジャイロ運動をする粒子の旋回中心（ガイディングセンター）がトーラス磁場の不均一性や電場の影響で磁力線を横切る方向にドリフト運動すること，そのドリフト軌道が粒子の磁力線平行及び垂直方向の比($v_{\|}:v_{\perp}$)に応じて様々に変化すること，プラズマの温度密度が磁気面関数になっており

National Institute for Fusion Science, Toki, GIFU 509-5292, Japan
author's e-mail: satake.shinsuke@nifs.ac.jp

磁気面を横切る方向に温度密度勾配が存在すること，これらのことの帰結として速度空間における荷電粒子の分布関数には熱平衡状態である局所Maxwell分布からのずれ（非等方性）が残る．この速度空間の非等方性から，一つには圧力テンソル$\boldsymbol{P}$の磁力線方向成分と垂直成分に関する非等方性と空間的非一様性を生み，その応力（プラズマの運動論では一般に粘性と呼ばれる）粘性$\nabla\cdot\boldsymbol{P}$とCoulomb衝突による摩擦力のバランス関係が運動論的な輸送現象を引き起こす．これを**新古典輸送現象**と呼ぶ．何をもって「新」古典なのかと言えば，今説明した現象はトーラス磁場が非一様で曲がっているために生じるドリフト運動に起因するためである．これに対して古典拡散現象は一様な磁場中でも起こる，ジャイロ運動をする荷電粒子の衝突拡散現象を指す．運動論的な輸送現象には新古典輸送の他に，Larmor半径程度の微視的な電磁場の揺らぎによって生じる波（ドリフト波）によって生じる乱流現象がある．これは位相空間においてある種の共鳴を引き起こし，磁気面を横切る方向に微視的な渦を成長させ，プラズマの粒子・熱閉じ込め性能を劣化させる．これを異常輸送，あるいは（微視的）乱流輸送などと呼ぶ．新古典輸送，乱流輸送ともに磁気面を横切る方向の温度密度勾配を駆動力として生じる．運動論的な輸送現象はMHD的なものに比べると穏やかかつゆっくりした時間スケールで起こるが，核融合炉の定常的な閉じ込め性能を評価する上で重要な役割を果たし，実験においても実質的にプラズマの熱閉じ込め時間を決定している．

新古典輸送と乱流輸送の大きさを比べると，新古典輸送は一般的にドリフト軌道の磁気面を横切る幅に応じて大きくなるが，このドリフト軌道幅は磁場配位にある種の空間的な対称性を持たせることによって小さくできる．そのため核融合実験装置では磁場形状を工夫することで，程度の差こそあれ新古典輸送は低いレベルに抑えられている．軸対称磁場を持つトカマク装置はその最たるものであるが，他にもHSX，W7-X，CFQSなどの先進的なステラレータ装置は，複雑な形状のコイルによって新古典輸送を抑制する磁場配位を作ることが主要な設計指針となっている．一方，微視的乱流はプラズマの圧力勾配が強くなるほど一般的に不安定になり，高温プラズマでは微視的乱流によって閉じ込め性能が決まっていることがこれまでの様々な装置での実験から評価した閉じ込め時間のスケーリング則から示唆されている[1, 2]．しかし，例えば新古典輸送が比較的大きいLHDでは新古典輸送と乱流輸送のレベルが同程度になる場合も見られ[3, 4]，また4章で紹介するように乱流と新古典の輸送の釣り合いがプラズマの不純物輸送レベルを決定しているとみられるケースも見つかっている．軸対称なトカマク装置では新古典輸送による磁気面を横切る径方向の輸送は乱流に比べ十分小さいが，ブートストラップ電流と呼ばれる，径方向の圧力勾配によって新古典的なメカニズムで駆動される磁力線方向の自発的な電流は，閉じ込め磁場の形成にプラズマ内部のトロイダル電流を必要とするトカマクにおいて外部駆動電流の割合を下げる重要な役割を持つ[5]．このように，新古典輸送は磁場閉じ込め核融合装置の設計や閉じ込め性能予測にとって重要な要素の一つであり，核融合研究の最初期から今日に至るまで継続的に研究が続けられている．

2.2 ドリフト運動論方程式とジャイロ運動論方程式

ここからはまず，磁場閉じ込めプラズマの運動論的記述から，新古典輸送現象を扱うドリフト運動論方程式と，微視的乱流輸送を扱うジャイロ運動論方程式がどのように導出され，どのように両者が分離されるかの概要を見ていく．歴史的に両者はスケール分離が可能であるという前提のもと，それぞれ個別の現象として扱われてきたが，最近ではスーパーコンピュータの発達に伴い両者を分離せずに1つの運動論的モデルとして数値計算するシミュレーションも発展してきている．そこではこれまで想定されていなかった乱流と新古典輸送の相関関係があることが発見され始めている．本節ではまず，従来からの定式化に従って2つの運動論方程式の導出過程を概観する．

運動論的記述のベースとなるのは，空間3次元$\boldsymbol{X}$，速度空間3次元(U, μ, ξ)の6次元位相空間に荷電粒子のおけるジャイロ中心の分布関数$F(\boldsymbol{X}, U, \mu, \xi, t)$である．ここで，$\boldsymbol{X}$はジャイロセンター位置，$U$はジャイロセンターの磁力線方向速度，$\mu$は磁気モーメント，$\xi$は磁力線周りのジャイロ運動の位相角，$t$は時間を表す．以下，$(\boldsymbol{X}, U, \mu, \xi)$をまとめて$\boldsymbol{Z}$と表す．これらの変数の厳密な定義の説明は文献[6, 7]に譲るが，近似的には荷電粒子の位置と速度$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$を用いて$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{x} - m\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{v}_\perp / eB^2$，$U = v_\parallel$，$\mu = mv_\perp^2/2B$である．なお，文献[6, 7]においてはジャイロ平均された粒子位置のラグランジアンがξに依らないように定義された「ジャイロ中心」と，初学者向けの教科書で一般的に使われる，粒子位置からLarmor半径ρだけ移動したガイディングセンターとを厳密に使い分けているが，本章では細かい区別には立ち入らずジャイロ中心と呼ぶことにする．今，新古典輸送や乱流輸送で扱う輸送現象の時間スケールがジャイロ運動の時間スケール～Ω^{-1}より十分長いと仮定すると（$\Omega = eB/m$はジャイロ周波数），μは断熱不変量と見なせる．また，背景の電磁場$(\boldsymbol{B}_0, \boldsymbol{E}_0)$やプラズマの温度密度$(n_0, T_0)$も同様にゆっくり時間変化しており，それらの空間の勾配スケールLに比べLarmor半径ρは十分短いと仮定する．ドリフトオーダリングと呼ばれるこの空間スケールに対する分離を，パラメータ$\delta = \rho/L \ll 1$を用いて表現する．

ジャイロ中心分布関数Fの時間発展は以下の運動論方程式で記述される（以下の導出過程については[8]を参照）．

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t} + \dot{\boldsymbol{X}}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{X}} + \dot{U}\frac{\partial}{\partial U}\right\}\langle F\rangle_\xi = \langle C\rangle_\xi \tag{2.1}$$

ここで$\dot{A} = \dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}$，$\langle\cdots\rangle_\xi$はジャイロ角$\xi$に対する平均を表し，

右辺はCoulomb衝突項である．また$\dot{\mu}=0$を利用している．ジャイロ中心の運動方程式$\dot{\boldsymbol{Z}}$は粒子運動のジャイロ平均から求められ（厳密には摂動場の効果を含めた正準変換を用いてジャイロ中心及びその運動論方程式は導かれる），以下のように与えられる（本文中では原論文[6-8]と異なりMKSA単位系で表記する）．

$$\dot{\boldsymbol{X}}=\frac{1}{B_{\parallel}^{*}}\left[\left(U+\frac{e}{m}\frac{\partial\langle\phi\rangle_{\xi}}{\partial U}\right)\boldsymbol{B}^{*}+\boldsymbol{b}\times\left(\frac{\mu}{e}\nabla B_0+\nabla\langle\phi\rangle_{\xi}+\frac{\partial A^{*}}{\partial t}\right)\right], \tag{2.2a}$$

$$\dot{U}=-\frac{\boldsymbol{B}^{*}}{mB_{\parallel}^{*}}\cdot\left[\mu\nabla B_0+e\left(\nabla\langle\phi\rangle_{\xi}+\frac{\partial A^{*}}{\partial t}\right)\right], \tag{2.2b}$$

$$\dot{\xi}=\Omega+\frac{e^2}{m}\frac{\partial\langle\phi\rangle_{\xi}}{\partial\mu}. \tag{2.2c}$$

なお上式において，背景磁場を平衡部と乱流による揺動部分，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\widehat{\boldsymbol{B}}=\nabla\times(\boldsymbol{A}_0+\widehat{\boldsymbol{A}})$のように分け，これと静電ポテンシャル$\phi(\boldsymbol{x},t)$から以下のジャイロ中心座標の関数を導入した．なお，$\boldsymbol{b}=\boldsymbol{B}_0/B_0$であり，(2.2)式は$\xi$に依存しないことに注意．

$$\phi(\boldsymbol{Z},t)=\phi(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\rho},t)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{Z},t)\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\rho},t),$$

$$\boldsymbol{A}^{*}(\boldsymbol{Z},t)=\boldsymbol{A}_0(\boldsymbol{X},t)+\frac{m}{e}U\boldsymbol{b},\ \ \boldsymbol{B}^{*}(\boldsymbol{Z},t)=\nabla\times\boldsymbol{A}^{*},$$

$$B_{\parallel}^{*}=\boldsymbol{B}^{*}\cdot\nabla\boldsymbol{b}. \tag{2.3}$$

次に，ジャイロ中心の分布関数$F(\boldsymbol{Z},t)$を背景電磁場の揺動に対する応答として現れる部分$\hat{F}$と，統計平均（アンサンブル平均）を取ったもの$\langle F\rangle_{\mathrm{ens}}$に分ける．$\hat{F}$の特徴的な周波数は$\omega\sim v_{\mathrm{t}}/L$であり，前述の仮定より$\omega\ll\Omega$である．一方，$\langle F\rangle_{\mathrm{ens}}$は$\hat{F}$より十分ゆっくり変化しており，その特徴的な周波数は$\delta^2\omega$と仮定される（いわゆる輸送（transport）オーダリング）．$\hat{F}$の空間スケールは非等方性を持ち，磁力線垂直方向にはLarmor半径程度の微視的擾乱を含んでおりそのスケール長はρ程度，磁力線平行方向にはL程度と仮定される．また，揺動成分の振幅に関して$\hat{F}/\langle F\rangle_{\mathrm{ens}}\sim\delta$を仮定する．なお補足すると，アンサンブル平均とは統計力学における概念で，対象としている系と巨視的には同等な多数の仮想的な系における，様々な微視的状態に対しその出現確率の重みをかけて平均を取ったものである．エルゴード仮説に基づけば，ジャイロ運動論において上述の揺動成分$\hat{F}$の波長より長くかつ平衡量の勾配長より短いスケールの局所空間平均や，乱流揺動の時間スケールより長くかつ平衡量の時間変化より短い時間で取った時間平均はアンサンブル平均と同等であると解釈される．Fのドリフトオーダリングδによる展開，$F=F_0+\delta F_1+\cdots$を考え(2.1)式に入れると，最低次（δ^{-1}次）及びその次のオーダーの式から$F_0=\langle F_0\rangle_{\mathrm{ens}}$及び$F_1$はジャイロ角に依存しないことが示される．特に$\delta^0$次のオーダーの式

$$\left[U\boldsymbol{b}\cdot\nabla-\frac{1}{m_a}\boldsymbol{b}\cdot(\mu\nabla B_0+e_a\nabla\Phi_0)\frac{\partial}{\partial U}\right]F_{a0}=\sum_b C_{ab}(F_{a0},F_{b0})$$

から，F_{a0}がMaxwell分布$F_{a0}=n_{a0}\left(\frac{m_a}{2\pi T_{0a}}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{1}{T_{0a}}\left(\frac{m_aU^2}{2}+\mu B_0\right)\right]$となること，またこれの磁気面平均を取り準中性条件を課すことで背景密度温度(n_{0a},T_{0a})及びアンサンブル平均した静電ポテンシャル$\Phi_0=\langle\phi\rangle_{\mathrm{ens}}$が磁気面関数となることが示される．なお，上式とこれ以降は，必要に応じて粒子種の添え字a,bを記す．次に(2.1)式のδ^1次の式を考える．(2.1)式のアンサンブル平均を取ると，$\bar{f}_{a1}=\langle F_{a1}\rangle_{\mathrm{ens}}$に対する次の運動論方程式を得る．

$$\left[U\boldsymbol{b}\cdot\nabla-\frac{\mu}{m_a}\boldsymbol{b}\cdot\nabla B_0\frac{\partial}{\partial U}\right]\bar{f}_{a1}+\left(\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}\cdot\nabla-\frac{e_aE_{\parallel}U}{T_{0a}}\right)\mathrm{F}_{a0}=\sum_b C_{ab}^{\mathrm{L}}(\bar{f}_{a1}). \tag{2.4}$$

ここで右辺のC_{ab}^{L}は線形化衝突オペレータで，

$$C_{ab}^{\mathrm{L}}(\bar{f}_{a1})=C_{ab}(\bar{f}_{a1},F_{b0})+C_{ab}(F_{a0},\bar{f}_{b1}) \tag{2.5}$$

を略記したものであり，衝突相手の粒子種の和$\sum_b$には自己衝突$b=a$も含まれることに注意．また，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}$は以下のような磁力線を横切るドリフト速度を表す．

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}=\frac{1}{e_aB_0}\boldsymbol{b}\times(m_aU^2\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\mu\nabla B_0+e_a\nabla\Phi_0) \tag{2.6}$$

これは左から順に，曲率ドリフト，grad-Bドリフト，および$E\times B$ドリフトと呼ばれるもので，無摂動磁場と静電ポテンシャル$\boldsymbol{B_0}$およびΦ_0から与えられており，場の揺動と無関係である．また，$E_{\parallel}=-\boldsymbol{b}\cdot[\nabla\Phi_1+\partial\boldsymbol{A}_0\partial t]$は磁力線方向の電場を表しており，磁気面上のポテンシャル非一様性は$\Phi_1\sim\delta\Phi_0$のオーダーと仮定される．(2.4)式を**ドリフト運動論方程式**と呼び，その解$\bar{f}_{a1}$が生み出すトーラスプラズマ中の輸送を**新古典輸送**と呼ぶ．一方，$\hat{F}_{a1}=\langle F_{a1}\rangle_{\mathrm{ens}}-\bar{f}_{a1}$に対する運動論方程式は(2.1)式の$\delta^1$次の式から(2.4)式を引くことで導かれる．

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}+(U\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}+\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{d}a})\cdot\nabla-\frac{\mu}{m_a}\boldsymbol{b}\cdot\nabla\mathrm{B}_0\frac{\partial}{\partial U}\right]\hat{F}_{a1}+\frac{e_aF_{a0}}{T_{0a}}\left[(U\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a})\cdot\nabla-\frac{\mu}{m_a}\boldsymbol{b}\cdot\nabla B_0\frac{\partial}{\partial U}\right]\langle\hat{\phi}_a\rangle_{\xi}+\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{d}a}\cdot\nabla F_{a0}=\sum_b\langle C_{ab}^{\mathrm{L}}(F_{a1})\rangle_{\xi} \tag{2.7}$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{v}}_{\mathrm{d}a}=\boldsymbol{b}\times\nabla\langle\hat{\phi}_a\rangle_{\xi}/B_0$ $(\hat{\phi}_a(\boldsymbol{Z},t)=\hat{\phi}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\rho}_a,t)-\boldsymbol{v}(\boldsymbol{Z},t)\cdot\widehat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{X}+\boldsymbol{\rho}_a,t))$は摂動電磁場によるジャイロ中心のドリフト速度成分であり，乱流場による軌道の乱れを表している．(2.7)式を**ジャイロ運動論方程式**と呼び，その解$\hat{F}_{a1}$が生み出す輸送が**微視的乱流**や**異常輸送**などと呼ばれるものになる．なお，線形化Coulomb衝突項C_{ab}^{L}は本来，粒子位置と速度$(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$で表現された分布関数$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$に対するオペレータである．(2.4)式，(2.7)式において，C_{ab}^{L}の引数として現れる$\bar{f}_{a1}$，$\hat{F}_{a1}$は共にジャイロ角ξに非依存であるが，変数変換$\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}(\boldsymbol{Z},t)$を用いて$\hat{F}_1(\boldsymbol{z},t)$を$\boldsymbol{Z}$で表わしたものと解釈される．そのため，(2.7)式では衝突項自体のジャイロ平均を取っている．一方，(2.4)式の

ドリフト運動論方程式では，衝突項のジャイロ角依存性に関係する部分（有限Larmor半径効果）は2.3節で扱う古典輸送の導出で分離され，(2.4)式以降の定式化においては無視される．

2.3　フラックスの定義から見た新古典輸送と乱流輸送

入れ子状の閉じ込め磁気面が存在しているトーラスプラズマで重要な輸送過程は，磁気面を横切る粒子及び熱フラックスである．今，磁気面ラベル，ポロイダル角，トロイダル角(s,θ,ζ)を用いて磁気座標系（Boozer座標系[9]）が構築されており，平衡磁場が

$$\boldsymbol{B}_0=\nabla s\times\nabla\theta+\iota\nabla\zeta\times\nabla s=G\nabla\zeta+I\nabla\theta+\beta^*\nabla s$$

で与えられるものとする．ただしsは磁気面に囲まれるトロイダル磁束を2πで割ったもの，$\iota(s)$は磁力線の回転変換を表し，$G(s)$および$I(s)$は磁気面sに囲まれたポロイダル及びトロイダル電流束を2πで割ったものである．β^*はPfirsch-Schlüter 電流に関係する部分であるが，低ベータプラズマでは無視できる．新古典フラックスの表式を得るために，最初のジャイロ運動論方程式(2.1)式に立ち返り，これの速度モーメントを取ることを考える．ジャイロ中心座標の速度変数(U,μ,ξ)に対して，次の積分をa種粒子種の速度空間積分と定義する．

$$\int d^3v_{\rm gc}\equiv\int{\rm d}\xi\int{\rm d}U\int{\rm d}\mu\frac{B^*_{\parallel a}}{m_a}\,. \tag{2.8}$$

ここで，$B^*_{\parallel a}/m_a$は$\boldsymbol{z}$から$\boldsymbol{Z}$への座標変換のヤコビアンである．(2.1)式を(2.8)式で積分しアンサンブル平均をとると，次式の粒子保存の式（連続の式）を得る[10]．

$$\frac{\partial n_a^{\rm gc}}{\partial t}+\nabla\cdot(\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm NC}+\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm g}+\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm c})=0, \tag{2.9a}$$

$$n_a^{\rm gc}=\int d^3v_{\rm gc}F_a, \tag{2.9b}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm NC}=\int d^3v_{\rm gc}(U\boldsymbol{b}+\boldsymbol{v}_{{\rm d}a})\bar{f}_{a1}, \tag{2.9c}$$

$$\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm g}=\int d^3v_{\rm gc}\langle\hat{\boldsymbol{v}}_{{\rm d}a}\hat{F}_{a1}\rangle_{\rm ens}\,. \tag{2.9d}$$

$n_a^{\rm gc}$はジャイロ中心密度，$\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm NC}$および$\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm g}$はそれぞれ新古典と乱流の粒子フラックスを表す．$\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm c}$は古典拡散に対応し，これは(2.1)式右辺の衝突項の中に入る分布関数が粒子位置の分布関数$f(\boldsymbol{z})$ではなくジャイロ中心分布関数$F(\boldsymbol{Z})$であることからジャイロ平均を取った時に残る部分があり，それが$\sum_b\int{\rm d}^3v_{\rm gc}C_{ab}(F_a,F_b)=-\nabla\cdot\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm c}$と表せることを使っている[10]．また上式の磁気面平均$\langle\cdots\rangle$を取ると，

$$\frac{\partial}{\partial t}(V'\langle n_a^{\rm gc}\rangle)+\frac{\partial}{\partial s}\left(V'\langle(\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm NC}+\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm g}+\boldsymbol{\Gamma}_a^{\rm c}-n_a^{\rm gc}\boldsymbol{u}_s)\cdot\nabla s\rangle\right)=0 \tag{2.10}$$

を得る．ここで$\boldsymbol{u}_s=\partial\boldsymbol{X}/\partial t$は背景磁場の変化による磁気面$s$の移動を表している．また，磁気面内の体積を$V$として，$V'={\rm d}V/{\rm d}s=\oint\oint{\rm d}\theta{\rm d}\zeta\sqrt{g_{\rm B}}$（$\sqrt{g_{\rm B}}$は磁気座標系のヤコビアン）である．

一方，上記のような粒子フラックスの分類は，以下のように粒子位置の分布関数$f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$を用いたモーメンタムバランスの式からも導くことができ，こちらの方が新古典輸送を生み出す機構を理解しやすい．まず，前節と同様に電磁場をアンサンブル平均成分(B_0,E_0)と揺動成分$(\hat{B},\hat{E})$に分ける．同様に，分布関数も$f=f_0+\hat{f}$と分離する．粒子分布関数の運動論方程式

$$\frac{{\rm d}f}{{\rm d}t}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla+\frac{e}{m}\left\{\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\,\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right\}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\right)f=C(f)$$

にこの分離を適用し，アンサンブル平均を取ると

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla+\frac{e}{m}\{\boldsymbol{E_0}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B_0}\}\cdot\frac{\partial}{\partial\boldsymbol{v}}\right)f_0=\langle C(f)\rangle_{\rm ens}+D, \tag{2.11}$$

$$D\equiv-\frac{e}{m}\left\langle\{\hat{\boldsymbol{E}}+\boldsymbol{v}\times\hat{\boldsymbol{B}}\}\cdot\frac{\partial\hat{f}}{\partial\boldsymbol{v}}\right\rangle_{\rm ens} \tag{2.12}$$

を得る．Dは乱流場と分布関数の揺動成分の相関を表している．次に，(2.11)$\times\,m\boldsymbol{v}$として速度空間でモーメントを取ると，次のモーメンタムバランスの式となる[11,12]．

$$\frac{\partial}{\partial t}(mn\boldsymbol{u})=-\nabla\cdot\boldsymbol{P}+en(\boldsymbol{E_0}+\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{B_0})+\boldsymbol{R_1}+\boldsymbol{K_1}. \tag{2.13}$$

ここで，$n=\int{\rm d}^3vf_0$，$n\boldsymbol{u}=\int{\rm d}^3v\boldsymbol{v}f_0$，$\boldsymbol{P}=m\int{\rm d}^3v\boldsymbol{vv}f_0$，$\boldsymbol{R}_1=m\int{\rm d}^3v\boldsymbol{v}\langle C(f)\rangle_{\rm ens}$，$\boldsymbol{K}_1=m\int{\rm d}^3v\boldsymbol{v}D$である．さらにこの式に$\boldsymbol{B_0}\times\nabla s$を内積して磁気面平均を取ると，径方向フラックスの表式を得る．

$$\Gamma^s\equiv\langle n\boldsymbol{u}\cdot\nabla{\rm s}\rangle=-\left\langle\frac{\boldsymbol{B}_0\times\nabla s\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}}{eB^2}\right\rangle+\left\langle\frac{n\boldsymbol{E_0}\times\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla s}{B^2}\right\rangle+\left\langle\frac{\boldsymbol{R}_1\times\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla s}{eB^2}\right\rangle+\left\langle\frac{\boldsymbol{K}_1\times\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla s}{eB^2}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}\right)\cdot\nabla{\rm s}\right\rangle. \tag{2.14}$$

ここで，2.2節の結果からドリフトオーダリングのδ^1までで粒子分布関数fが次のように展開できる[8]．

$$\begin{aligned}f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})&=f_0+\hat{f}=F_0(\boldsymbol{X}=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{v})+\bar{f}_1+\hat{f}\\&=F_0(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})-F_0\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{S_0}+\bar{f}_1-\frac{e\hat{\phi}(\boldsymbol{x},t)}{T_0}F_0+\hat{h},\\\boldsymbol{S_0}&\equiv\frac{\nabla p_0}{p_0}+\frac{e}{T_0}\nabla\Phi_0+\left(\frac{mv^2}{2T_0}-\frac{5}{2}\right)\nabla\ln T_0,\\\hat{h}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{v},t)&=\hat{F}_1(\boldsymbol{X},\boldsymbol{v},t)+\frac{e\langle\hat{\phi}(\boldsymbol{X},\boldsymbol{v},t)\rangle_\xi}{T_0}F_0\end{aligned} \tag{2.15}$$

この表式において$\hat{f}=-e\hat{\phi}F_0/T_0+\hat{h}$であり，それ以外が$f_0$に当たる．$\hat{f}$の第一項，第二項はそれぞれ$\hat{F}_1$のポテンシャル揺動$\hat{\phi}$に対する断熱応答，非断熱応答部分を表している．$f_0$の中には$\boldsymbol{\rho}$を通じてジャイロ角$\xi$に依存する部分があるが，それは(2.13)式下の定義より$O(\delta^1)$までの$(n,\boldsymbol{P})$に寄与しない（速度空間のξ-積分で消える）ことがわかる．

特に圧力テンソルのアンサンブル平均については，

$$\boldsymbol{P} = m\int \mathrm{d}^3v\boldsymbol{vv}(F_0+\bar{f}_1) = \boldsymbol{I}p_0 + P_{\|1}\boldsymbol{bb} + (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{bb})P_{\perp 1}, \tag{2.16}$$
$$P_{\|1} = m\int \mathrm{d}^3v v_{\|}^2\bar{f}_1,\ \ P_{\perp 1} = m\int \mathrm{d}^3v v_{\perp}^2\bar{f}_1/2,$$

と書き表せる．$p_0(s) = n_0(s)T_0(s)$ はMHD平衡 $\boldsymbol{J}_0\times\boldsymbol{B}_0 = \nabla p_0$ を満たす磁気面関数のスカラー圧力である．一方，1次の非等方圧力はドリフト運動論方程式(2.4)式の解 $\bar{f}_1$ から決まるもので，Chew–Goldberger–Low形式（CGL-form）と呼ばれる磁力線方向と垂直方向の2成分から表される．(2.14)式第1項は ∇p_0 からの寄与はなく，非等方圧力テンソル $\nabla\boldsymbol{P}_1$ によって駆動される．これが新古典輸送に対応する部分である．(2.14)式第2項は $E\times B$ ドリフトによる流れであるが，$\boldsymbol{E}_0 = -\nabla\Phi_0 = -\nabla\langle\phi\rangle_{\mathrm{ens}}$ は2.2節で見たように Φ_0 が磁気面関数であるとみなすと，この項は Γ^s に寄与しない．次にCoulomb衝突項による摩擦項 $\boldsymbol{R}_1$ に目を向ける．衝突項を(2.5)式の線形化オペレータ C^{L} で δ^1 次の項まで考えるとすると，Maxwell分布 F_0 は C^{L}_{ab} に寄与しない．また，摂動分布 $\hat{F}_1$ について $\langle C^{\mathrm{L}}_{ab}(\hat{f})\rangle_{\mathrm{ens}} = 0$ であるから，$\boldsymbol{R}_1$ に寄与するのは $f(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$ のうち $-F_0\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{S_0}+\bar{f}_1$ の項のみである．ここで，$\bar{f}_1$ はジャイロ平均された分布関数であることから $m\int d^3v\boldsymbol{v}C^{\mathrm{L}}(\bar{f}_1) = \boldsymbol{R}_{\|1}$ と，磁力線平行方向(パラレル方向)の摩擦力しか生まないことになる．従って $\bar{f}_1$ は(2.14)式第3項に寄与しない．一方，有限Larmor半径効果の最低次の項である $-F_0\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{S_0}$ を C^{L} に入れると磁力線に垂直方向の摩擦力が生じ[13]，以下の関係式を得る（簡単のため $T_{0a} = T_{0b}$ と置く）．

$$\begin{aligned}\boldsymbol{R}_{\perp 1,ab} &= -\frac{n_{0a}m_a}{\tau_{ab}}\frac{c}{eB_0}\boldsymbol{b}\\ &\quad\times\left[\frac{\nabla p_{0a}}{z_a n_{0a}} - \frac{\nabla p_{0b}}{z_b n_{0b}} - \frac{3}{2z_a}\nabla T_0\frac{1-z_a m_a/z_b m_b}{1+m_a/m_b}\right]\\ &= -\frac{n_{0a}m_a}{\tau_{ab}}\boldsymbol{b}\times\Bigg[\boldsymbol{u}_{\perp 1,a} - \boldsymbol{u}_{\perp 1,b}\\ &\qquad -\frac{3}{5}\left(\boldsymbol{q}_{\perp 1,a} - \frac{m_a}{m_b}\boldsymbol{q}_{\perp 1,b}\right)\left(\frac{m_b}{m_a+m_b}\right)\Bigg],\end{aligned} \tag{2.17a}$$

$$\boldsymbol{u}_{\perp 1,a} = \frac{\boldsymbol{b}\times(\nabla p_{0a} + e_a n_{a0}\nabla\Phi_0)}{n_{0a}m_a\Omega_a},$$
$$\boldsymbol{q}_{\perp 1,a} = \frac{5p_{0a}\boldsymbol{b}\times\nabla T_{0a}}{2m_a\Omega_a}. \tag{2.17b}$$

ここで，$\boldsymbol{u}_{\perp 1,a}$，$\boldsymbol{q}_{\perp 1,a}$ は分布関数の $-F_0\boldsymbol{\rho}\cdot\boldsymbol{S_0}$ の部分が生み出す粒子及び熱の流れで，diamagnetic（反磁性）フローと呼ばれ，温度と圧力が磁気面関数であることから磁力線に垂直かつ磁気面に沿って流れるため，径方向輸送には寄与しない．なお $\boldsymbol{u}_{\perp 1,a}$ の表式には摩擦力には寄与しない $E\times B$ フローも含めている．(2.17)式より，$\boldsymbol{R}_{\perp 1,ab}$ は反磁性フローに起因する垂直方向の摩擦力に対応していることがわかる．(2.14)式の第4項は乱流場と分布関数揺らぎの相関 $\boldsymbol{K}_1$ に駆動される，乱流輸送を表現している部分である．最後に，(2.14)式の最終項は分極ドリフトによる粒子束を表すもので，後に見るように両極性径電場の形成過程における過渡的応答を扱う際に重要となる．なお(2.17)式の反磁性フローに対し，$\nabla\cdot(\boldsymbol{u}_{\perp 1}+\boldsymbol{u}_{\|1}) = 0$，$\nabla\cdot(\boldsymbol{q}_{\perp 1}+\boldsymbol{q}_{\|1}) = 0$ を満たす1次のパラレルフローが存在する．このパラレルフローは以下のように表わすことができる．

$$u_{\|1,a} = \frac{\langle u_{\|1}B_0\rangle}{\langle B_0^2\rangle}B_0 + \frac{X_{a1}}{e_a}\widetilde{U},$$
$$q_{\|1,a} = \frac{\langle q_{\|1}B_0\rangle}{\langle B_0^2\rangle}B_0 + \frac{5p_{a0}}{2}\frac{X_{a2}}{e_a}\widetilde{U}, \tag{2.18a}$$

$$X_{a1} = -\frac{p'_{0a}}{n_{0a}} - e_a\Phi',\ \ X_{a2} = -T'_{0a}, \tag{2.18b}$$

$$\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla\left(\frac{\widetilde{U}}{B_0}\right) = \boldsymbol{B}_0\times\nabla s\cdot\nabla\left(\frac{1}{B_0^2}\right),\ \ \langle B\widetilde{U}\rangle = 0. \tag{2.18c}$$

$\widetilde{U}$ の具体的な求め方については[14]を参照せよ．また，(2.18b)式で $' = \mathrm{d}/\mathrm{d}s$ を意味する．$u_{\|1}$，$q_{\|1}$ のうち $\widetilde{U}$ に比例する部分はMHD平衡の理論にも出てくるPfirsch-Schlüterフローに相当するものであるが，これは B_0 を掛けて磁気面平均すると消える．磁気面平均部分はドリフト運動論方程式を解くことによって求まる新古典輸送の寄与であるが，これは後で考える．これまでの議論をまとめて(2.14)式を整理すると以下のようになる．

$$\begin{aligned}\Gamma^s \equiv \langle n\boldsymbol{u}\cdot\nabla s\rangle &= -\left\langle\frac{\boldsymbol{B}_0\times\nabla s\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1}{eB_0^2}\right\rangle + \left\langle\frac{\boldsymbol{R}_{1\perp}\times\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla s}{eB_0^2}\right\rangle\\ &\quad + \left\langle\frac{\boldsymbol{K}_1\times\boldsymbol{B_0}\cdot\nabla s}{eB_0^2}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}\right)\cdot\nabla s\right\rangle\\ &= \Gamma^{\mathrm{NC}} + \Gamma^{\mathrm{C}} + \Gamma^{\mathrm{g}} + \Gamma^{\mathrm{pl}}_{\perp}.\end{aligned} \tag{2.19}$$

このように，新古典，古典，乱流の粒子束をジャイロ中心のフローとして［(2.9)，(2.10)式］，及び粒子位置のフローとして［(2.14)-(2.19)式］表現することができた．3種類のフラックスはここで見たように，ドリフト運動論方程式の解 $\bar{f}_1$，背景プラズマの勾配，及びジャイロ運動論方程式の解 $\hat{F}_1$ によって定義され，それぞれ明確に分離されている．$\boldsymbol{R}_{1\perp}$ に比例する古典拡散や(2.17)式の反磁性フロー，(2.18)式の $\widetilde{U}$ に比例するPfirsch-Schlüterフローは，MHD平衡磁場と背景プラズマの勾配 X_{a1}，X_{a2} のみで決定できる．これらは2.1節の輸送現象の分類に従えば流体的な輸送現象と言える．また，(2.19)式のフラックスはいずれもドリフトオーダリングで δ^2 次の項となっているが，それを求めるのに必要なのは δ^1 次までの分布関数 $(\bar{f}_1,\hat{F}_1)$ であることは重要な点である．なお，ここでは粒子フラックスの表式にしぼって話を進めてきたが，(2.11) $\times\left(\dfrac{mv^2}{2}\right)\boldsymbol{v}$ のモーメントを取ることで径方向の熱輸送方程式も同様に導かれ，熱フラックスについても(2.19)式と同様の分解ができる．

このように，新古典輸送と乱流輸送はそれぞれを記述する運動論方程式の上からも［(2.4)，(2.7)式］，フラックスの定義からも［(2.9)，(2.19)式］明確に分類できることが示された．しかしながら，それは必ずしも2つの輸送

過程が相互に影響しないということを意味しない．これまでのほとんどの研究において両者を独立に取り扱ってきたのは，あくまでも分離できると仮定していたからであり，その理由は個々の輸送現象についての理解のためという面もあるが，実際上２つを分離しないと今までの計算機ではシミュレーションが不可能であったからという側面も大きい．２つの輸送現象の相互作用のパスとしてまず考えられるのは電場Eである．ヘリカル系の新古典輸送ではこの後で説明する両極性条件から大域的な径電場$E_0=-\nabla\Phi_0(s)$が決定されるが，この径電場分布が乱流輸送に影響を与えることが考えられる．一方，乱流の非線形発展の結果，小半径方向に強いシアーを持つゾーナルフローを生み出すポテンシャル構造$\langle\tilde{\phi}_1\rangle_{\rm ens}$が発達する場合があり，これがドリフト軌道を変化させて新古典輸送に影響を与える可能性もある．また，ジャイロ(ドリフト)運動論を解いた結果生じた磁気面上の密度や静電ポテンシャルの偏りが，ドリフト（ジャイロ）運動論を解く際に高次の修正項として効いてくる場合も考えられる．こうした相互作用の可能性を考え，(2.4)式と(2.7)式を分離せずにまとめて数値シミュレーションとして解く試みが最近になってスーパーコンピュータの発達に伴い発展してきている．その内容については4章で紹介する．

2.4　新古典輸送理論の詳細

以降，$\boldsymbol{K}_1$の項を落として新古典輸送に話を限定し，もう少し理論の詳細について見ていくことにする．まず，(2.13)式と$\boldsymbol{B}_0$の内積を取り，磁気面平均することで，δ^1次のパラレル方向のモーメンタムバランスの式が得られる．

$$\langle\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle=e\langle nE_{1\|}B_0\rangle+\langle R_{1\|}B_0\rangle-\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\,(mnu_{\|}B_0)\right\rangle. \tag{2.20}$$

なお，$E_{1\|}$は(2.13)式ではE_0として現れていたものより高次のアンサンブル平均電場で，例えばトカマクの誘導電場のような外部駆動電場を表すものとする．また，これ以降B_0の時間変化は$O(\delta^2)$以上で無視できるものと仮定する．次に，(2.13)式と$\boldsymbol{e}_\zeta=\partial\boldsymbol{x}/\partial\zeta$の内積より，以下の関係式が導かれる．

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\,\mathcal{L}_\zeta\right\rangle&\equiv\left\langle\frac{\partial}{\partial t}(mn\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{e}_\zeta)\right\rangle\\&=e\iota\,(\Gamma^{\rm NC}+\Gamma^{\rm pl}_{\perp})-\langle\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle\\&\quad+e\langle nE_{1\|\zeta}\rangle+\langle R_{1\|\zeta}\rangle.\end{aligned} \tag{2.21}$$

この式はプラズマのトロイダル回転の時間発展を表し，トカマクにおいて誤差磁場等の影響による軸対称の破れに起因する新古典トロイダル粘性$\langle\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle$がトロイダル回転に与える影響の研究[12,15]などに使われる．なお(2.21)式では古典フラックスに関係する$\Gamma^{\rm C}$と$\boldsymbol{R}_{1\perp}$の項は無視できるとして落としてある．次に，Boozer座標系で$\boldsymbol{B}_0\times\nabla s=(G\boldsymbol{B}_0-B^2\boldsymbol{e}_\zeta)/\iota$と変形できることを使うと，$\Gamma^{\rm NC}$を次のように分解できる．

$$\begin{aligned}\Gamma^{\rm NC}&=-\left\langle\frac{\boldsymbol{B}_0\times\nabla s\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1}{eB_0^2}\right\rangle\\&=-\frac{G}{e\iota}\left[\frac{\langle\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle}{\langle B_0^2\rangle}+\left\langle\frac{\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1}{e\langle B_0^2\rangle}\left(1-\frac{B_0^2}{\langle B_0^2\rangle}\right)\right\rangle\right]\\&\quad+\frac{\langle\boldsymbol{e}_\zeta\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle}{e\iota}\\&=\Gamma^{\rm BP}+\Gamma^{\rm PS}+\Gamma^{\rm na}.\end{aligned} \tag{2.22}$$

$\Gamma^{\rm BP}$，$\Gamma^{\rm PS}$はそれぞれバナナ-プラトー，Pfirsch-Schlüterフラックスと呼ばれるもので，それぞれ低衝突領域（衝突周波数$\nu<R/v_{\rm th}$）及び高衝突領域（$\nu>R/v_{\rm th}$）で主要な新古典輸送を生む．なぜなら，$\Gamma^{\rm BP}$と$\Gamma^{\rm na}$は新古典粘性の磁力線方向及びトロイダル方向成分の磁気面平均であり，そのような項が顕著になるのは圧力テンソル$\boldsymbol{P}_1$に大きな非等方性$(P_{\|1}-P_{\perp1})$が生じる場合，即ちCoulomb衝突によって速度空間における捕捉-非捕捉軌道の境界近傍での分布関数の非等方性をMaxwell分布に戻そうとする効果が弱い場合である．一方$\Gamma^{\rm PS}$は衝突頻度が高く荷電粒子が磁力線に沿ってトーラスの内側，外側を自由に往来できない場合に，磁力線方向に生じる圧力差によって駆動される．また，$\Gamma^{\rm na}$は新古典トロイダル粘性に比例する部分であり，その形から軸対称系ではゼロとなることがわかる．つまり，この項が非軸対称系の新古典輸送を特徴づける部分である．ここで$\Gamma^{\rm BP}+\Gamma^{\rm PS}$の部分に(2.20)式を使うと，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\Gamma^{\rm BP}+\Gamma^{\rm PS}&=-\frac{G}{e\iota}\left\langle\frac{enE_{1\|}+R_{1\|}}{B_0}\right\rangle+\frac{G}{e\iota}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{mnu_{\|}}{B_0}\right)\right\rangle\\&=-\frac{1}{e\iota}\langle enE_{1\|\zeta}+R_{1\|\zeta}\rangle+\frac{1}{e\iota}\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\|\zeta}\right\rangle.\end{aligned} \tag{2.23}$$

ただしここで$G/B_0=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{e}_\zeta$を使い，$\mathcal{L}_{\|\zeta}=mn\boldsymbol{u}_{\|}\cdot\boldsymbol{e}_\zeta$等とする．一般的な$\Gamma^{\rm BP}$，$\Gamma^{\rm PS}$の定義では$E_{1\|\zeta}$に関する項を分離し，また$\partial\mathcal{L}_{\|\zeta}/\partial t$の項は定常を仮定して無視することが多いが後に考え直すことにし，$\partial\mathcal{L}_{\|\zeta}/\partial t$の項を除いて各粒子種の電荷$e_a$を掛けて和を取ると，

$$\sum_a e_a(\Gamma_a^{\rm BP}+\Gamma_a^{\rm PS})=-\frac{1}{\iota}\left\langle\sum_a e_an_aE_{1\|\zeta}+R_{1\|\zeta,a}\right\rangle=0, \tag{2.24}$$

となり，磁気面を横切る電流を生まない（本質的両極性，intrinsic ambipolarity）ことがわかる．なお，ここで準中性条件$\sum_a e_an_a=0$およびCoulomb衝突項のモーメンタム保存性$\sum_a R_{1\|\zeta,a}=0$を使った．この性質は次に考える両極性条件で重要となる．

さて，(2.19)式で分極フラックス$\Gamma^{\rm pl}_{\perp}$を特に説明なく導入したが，これについて考察してみる．$\boldsymbol{b}\times$(2.13)式より垂直方向フローの式を導くと，以下のようになる．

$$n\boldsymbol{u}_\perp=\frac{n\boldsymbol{E}_0\times\boldsymbol{B}_0}{B_0^2}+\frac{\boldsymbol{B}_0\times\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1}{eB_0^2}+\frac{\boldsymbol{R}_{1\perp}\times\boldsymbol{B}_0}{eB_0^2}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}_\perp\right).$$

ここで今，輸送オーダリングより最終項の時間微分の中で速く変動するのは$E\times B$ドリフトの静電ポテンシャルの時間変化由来の寄与のみであると考える．つまり，これ

を分極フラックスとして以下のように考える．

$$n\boldsymbol{u}_{\perp}^{\rm pl}\equiv\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{n}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{u}_{\perp}\right)\simeq\frac{n}{\Omega}\boldsymbol{b}\times\left(-\frac{\partial\Phi_0'}{\partial t}\right)\frac{\nabla s\times\boldsymbol{b}}{B_0}$$
$$=-\frac{mn}{eB_0^2}\frac{\partial\Phi_0'}{\partial t}\nabla s. \tag{2.25}$$

ここで$\Phi_0'=\mathrm{d}\Phi_0/\mathrm{d}s$．これより，(2.19)式の$\Gamma_{\perp}^{\rm pl}=\langle n\boldsymbol{u}_{\perp}^{\rm pl}\cdot\nabla s\rangle$に対応していることがわかる．一方，(2.23)式で現れた$\mathcal{L}_{||\zeta}$に対応して，$\mathcal{L}_{\perp\zeta}=mn\boldsymbol{u}_{\perp}\cdot\boldsymbol{e}_{\zeta}$という量を導入すると，次のことがわかる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\perp\zeta}\simeq\frac{mn}{B_0^2}\frac{\partial\Phi_0'}{\partial t}\boldsymbol{B}_0\times\nabla s\cdot\boldsymbol{e}_{\zeta}=-\frac{\iota mn\Phi'}{B_0^2}|\nabla s|^2,$$
$$\therefore\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\perp\zeta}\right\rangle=e\iota\Gamma_{\perp}^{\rm pl}. \tag{2.26}$$

すると(2.23)式の最終項も，$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{||\zeta}\right\rangle\equiv e\iota\Gamma_{||}^{\rm pl}$と書くのが妥当であり，$\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{||\zeta}\right\rangle+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\perp\zeta}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\zeta}\right\rangle=\langle e\iota\Gamma_{||}^{\rm pl}+\Gamma_{\perp}^{\rm pl}\rangle$ $=e\iota\Gamma^{\rm pl}$と書けることがわかる．つまり，径方向の分極フラックスは磁気面平均したトロイダル方向の運動量の変化に比例して生じるものと解釈できる．これまでの結果を踏まえて，磁気面を横切る電流を求めてみると，以下のように書ける

$$J_{\rm s}\equiv\sum_a e_a\Gamma_a^s=\sum_a e_a(\Gamma_a^{\rm NC}+\Gamma_{\perp a}^{\rm pl})=\sum_a e_a(\Gamma_a^{\rm na}+\Gamma_a^{\rm pl})$$
$$=\frac{1}{\iota}\sum_a\left[\langle\boldsymbol{e}_{\zeta}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle_a+\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{\zeta}\right\rangle\right]. \tag{2.27}$$

ここで，左から3番目の表現において(2.19)式にもともとあった古典拡散と乱流輸送$\Gamma^{\rm C}+\Gamma^{\rm g}$の寄与が現れていないが，これは新古典輸送だけ考えて無視しているわけではなく，この2つの項はそれぞれ，衝突項のモーメンタムバランスおよび準中性条件[16]から径方向電流を生まないため実際に寄与しない．同様に，(2.24)式でも見たように(2.27)式の左から3番目から4番目の表現に移る際，$\Gamma^{\rm NC}$に含まれていた$\Gamma^{\rm BP}+\Gamma^{\rm PS}$の項は本質的両極性のため消えている．このように，$J_s$による両極性径電場の形成は新古典輸送現象による，しかも非軸対称系に特徴的な現象であることがわかる．

それでは，$J_{\rm s}$から径電場$E_{\rm s}=-\Phi_0'$の時間発展の式を導く．この際，確かに径方向電流に実質的に寄与するのは$\Gamma^{\rm na}$と$\Gamma_a^{\rm pl}$であるが，時間発展型のドリフト運動論方程式コードにおいて，$\Gamma_{||}^{\rm pl}=\left\langle\frac{\partial}{\partial t}\mathcal{L}_{||\zeta}\right\rangle/e\iota$を高精度に評価するのは難しい．一方，$\Gamma_{\perp a}^{\rm pl}$はそれ自体が$\frac{\partial\Phi_0'}{\partial t}$に比例する項として定義されているので，磁気座標系におけるPoisson方程式から，以下のようにして径電場の時間発展を求めるのが一般的である．

$$\epsilon_0\langle|\nabla s|^2\rangle\frac{\partial E_s}{\partial t}=-\sum_a e_a(\Gamma_a^{\rm NC}+\Gamma_{\perp a}^{\rm pl})$$
$$=-\sum_a\left[e_a\Gamma_a^{\rm NC}+\left\langle\frac{m_an_a}{B_0^2}|\nabla s|^2\right\rangle\frac{\partial E_s}{\partial t}\right], \tag{2.28a}$$
$$\therefore\epsilon_0\left\langle|\nabla s|^2+\frac{c^2}{v_{\rm A}^2}|\nabla s|^2\right\rangle\frac{\partial E_s}{\partial t}=-\sum_a e_a\Gamma_a^{\rm NC},$$
$$v_{\rm A}^2=\sum_a\frac{\epsilon_0c^2B_0^2}{m_an_a}. \tag{2.28b}$$

なお通常$c^2/v_{\rm A}^2\gg1$であり，分極電流の効果により径電場の振幅は単純に$e_a\Gamma_a^{\rm NC}$だけを考慮した場合よりかなり抑制される．(2.28a) = 0を満たす径電場を両極性径電場と呼ぶ．非軸対称系プラズマでは両極性条件$J_{\rm s}=0$を満たす径電場の解が，1つだけでなく複数個現れる場合がある．この問題については3章でその例が示される．一方，定常状態を仮定してドリフト運動論方程式を解く手法の場合は$\Gamma_{\perp a}^{\rm pl}=0$であるから，$E_{\rm s}$の値を入力パラメータとして適当に振りながら$\Gamma_a^{\rm NC}$（もしくは$\Gamma_a^{\rm na}$）を求め，$J_{\rm s}=0$を満たす条件を探索するのが一般的な方法となる．トカマクなど本質的両極性が成り立つ配位では径電場は(2.28)式のように決めることはできず，径方向力学平衡（Radial force balance）と呼ばれれるプラズマのトロイダル回転，圧力勾配と径電場の関係式から決定される[17]．実際には外部からのモーメンタムソース・シンクの情報が必要となる他，微視的乱流による粘性やモーメンタム輸送など複合的な要素によって決まると考えられる（自発回転，intrinsic rotation[18]）．

さて，ここまで径方向のフラックスにのみ注目してきたが，新古典輸送理論のもう一つの重要な応用は温度密度勾配に駆動されるパラレルフロー，すなわちブートストラップ電流の評価である．その関係を含めた新古典輸送の表式を導くために，今一度(2.20)式のパラレル方向のモーメンタムバランスの式に戻ることにする．これ以降，$\frac{\partial}{\partial t}$の項は無視できると仮定する．また，(2.20)式は(2.13)・$mv_{||}\boldsymbol{b}_0$より得られたが，同様に$mv_{||}\left(\frac{mv^2}{2T_0}-\frac{5}{2}\right)\boldsymbol{b}_0$を内積して得られるモーメント量も合わせて考えると，次のような関係式が得られる[19]．

$$\begin{bmatrix}\langle\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle-e\langle nE_{1||}B_0\rangle\\ \langle\boldsymbol{B}_0\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{\Theta}_1\rangle\end{bmatrix}_a=\begin{bmatrix}\langle R_{1||}B_0\rangle\\ \langle R_{2||}B_0\rangle\end{bmatrix}_a$$
$$=\sum_b\begin{bmatrix}l_{11}^{ab} & -l_{12}^{ab}\\ -l_{21}^{ab} & l_{22}^{ab}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\langle Bu_{||b}\rangle\\ \frac{2}{5p_{0b}}\langle Bq_{||b}\rangle\end{bmatrix}, \tag{2.29}$$

$$R_{1||a}=m_a\sum_b\int d^3v v_{||}\,C_{ab}^{\rm L}(\bar{f}_{1a}),$$
$$R_{2||a}=m_a\sum_b\int d^3v v_{||}\left(x_a^2-\frac{5}{2}\right)C_{ab}^{\rm L}(\bar{f}_{1a}), \tag{2.30}$$

$$x_a^2=\frac{m_av^2}{2T_{0a}},\quad \boldsymbol{P}_{1a}=(2.16),$$
$$\boldsymbol{\Theta}_{1a}=m_a\int d^3v\left(v_{||}^2-\frac{v_{\perp}^2}{2}\right)\left(x_a^2-\frac{5}{2}\right)\left(\boldsymbol{b}_0\boldsymbol{b}_0-\frac{1}{3}\boldsymbol{I}\right)\bar{f}_{1a}. \tag{2.31}$$

なお(2.29)式はジャイロ中心分布関数$\bar{f}_{1a}$をLegendre及びLaguerre多項式で展開したうちの低次の項のみで近似し

て線形化衝突項に入れた場合に得られる関係（13モーメント近似[20]）である．(2.29)式は磁気面平均した磁力線方向の粘性と摩擦力，フローの関係を結び付ける関係式となっている．さて，(2.22)式から$\langle \boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{P}_1 \rangle \propto \Gamma^{\mathrm{BP}}$が示されており，径方向の新古典熱フラックスを$q^{\mathrm{NC}} \equiv T\left\langle \int d^3 v_{\mathrm{gc}} \left(x^2 - \frac{5}{2}\right) \bar{f}_1 \boldsymbol{v}_{\mathrm{d}} \cdot \nabla s \right\rangle$と定義すると，(2.21)式−(2.23)式と同様の計算から$q^{\mathrm{NC}} = q^{\mathrm{BP}} + q^{\mathrm{na}} + q^{\mathrm{PS}}$, $q^{\mathrm{BP}} \propto \langle \boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 \rangle$も示すことができる．さらにここで径方向フラックスについて，バナナ−プラトーと非軸対称成分の和と，Pfirsch-Schlüterの2つに分離することを考える．すなわち，$\Gamma^{\mathrm{NC}} = (\Gamma^{\mathrm{BP}} + \Gamma^{\mathrm{na}}) + \Gamma^{\mathrm{PS}} = \Gamma^{\mathrm{bn}} + \Gamma^{\mathrm{PS}}$, $q^{\mathrm{NC}} = (q^{\mathrm{BP}} + q^{\mathrm{na}}) + q^{\mathrm{PS}} = q^{\mathrm{bn}} + q^{\mathrm{PS}}$．説明は省くが，$\Gamma^{\mathrm{PS}}$, q^{PS}は$\Gamma^{\mathrm{PS}} = -\frac{\langle \widetilde{U} R_{1\|} \rangle}{e}$, $q^{\mathrm{PS}} = -\frac{\langle \widetilde{U} R_{2\|} \rangle}{e}$と表せるため[19]，これも(2.29)式同様にパラレルフローと関係づけることができる．そうすると，(2.29)式の関係式を使って粘性，フロー，径方向輸送と駆動力（(2.18b)式のX_{a1}，X_{a2}および$X_{\mathrm{E}} \equiv \langle E_\| B \rangle / \langle B^2 \rangle$）を結びつける式を導けそうである．ここでは，モーメント法と呼ばれる手法の概略だけを示す．まず，出発点はドリフト運動論方程式(2.4)式を独立変数を（$\boldsymbol{x}, v, \xi = v/v_\|$）として書き直した以下の式である[19].

$$(V_\| - C_a^{\mathrm{PAS}}) \hat{g}_a = \boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a} \cdot \nabla s \left\{ X_{a1} + \left(x_a^2 - \frac{5}{2} \right) X_{a2} \right\} + \frac{e_a}{T_a} X_{\mathrm{E}} B v \xi - (V_\| - C_a^{\mathrm{L}}) g^{(l=1)}, \quad (2.32a)$$

$$V_\| = v\xi \boldsymbol{b} \cdot \nabla - \frac{v(1-\xi^2)}{2} \boldsymbol{b} \cdot \nabla \ln \xi \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad (2.32b)$$

$$g_a \equiv \frac{\bar{f}_{1a}}{F_{a0}} - \frac{e_a}{T_a} \int^l \frac{\mathrm{d}l}{B} (E_\| B - B^2 X_{\mathrm{E}}), \quad (2.32c)$$

$$\hat{g}_a = g - g^{(l=1)}. \quad (2.32d)$$

ここで，(2.32c)式の積分は磁力線に沿った積分であり，$g^{(l)}$はgをLegendre多項式$P_l(\xi)$[$P_0 = 1$，$P_1 = \xi$, $P_2 = (3\xi^2 - 1)/2, \cdots$]で展開ししたときの$l$次の成分を意味する．また，左辺では衝突項をピッチ角散乱オペレーター$C_a^{\mathrm{PAS}} = \frac{\nu_{\mathrm{D}}^a}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi}$で近似している（$\nu_{\mathrm{D}}^a$は90°散乱衝突周波数）．衝突項に関するこの近似は一見大胆に見えるが，$\int d^3 v \, m v_\| C^{\mathrm{L}}(\hat{g}_a) = \int d^3 v \, m v_\| C^{\mathrm{PAS}}(\hat{g}_a) = 0$というモーメンタム保存性を数学的に満たすことが知られている．また，(2.29)式において左辺のテンソル量$\boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{\Theta}_1$は$g^{(l=2)}$成分で決まる一方，右辺のパラレルフロー$u_\|$，$q_\|$は$g^{(l=1)}$成分のみで決まるという関係になっている．このような関係を使ってg_aの解を求めると，パラレル粘性，フロー，径方向輸送，勾配X_{a1}，X_{a2}を結び付ける線形の関係式が得られる[19].

$$\begin{bmatrix} \langle \boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{P}_1 \rangle \\ \langle \boldsymbol{B}_0 \cdot \nabla \cdot \boldsymbol{\Theta}_1 \rangle \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} M_{a1} & M_{a2} \\ M_{a2} & M_{a3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle B u_{\|a} \rangle / \langle B^2 \rangle \\ \frac{2}{5 p_{0a}} \langle B q_{\|a} \rangle \langle B^2 \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{a1} & N_{a2} \\ N_{a2} & N_{a3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{a1} \\ X_{a2} \end{bmatrix}. \quad (2.33a)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma^{\mathrm{bn}} = \Gamma^{\mathrm{BP}} + \Gamma^{\mathrm{na}} \\ q^{\mathrm{bn}} = q^{\mathrm{BP}} + q^{\mathrm{na}} \end{bmatrix}_a = \begin{bmatrix} N_{a1} & N_{a2} \\ N_{a2} & N_{a3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \langle B u_{\|a} \rangle / \langle B^2 \rangle \\ \frac{2}{5 p_{0a}} \langle B q_{\|a} \rangle \langle B^2 \rangle \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_{a1} & L_{a2} \\ L_{a2} & L_{a3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{a1} \\ X_{a2} \end{bmatrix}. \quad (2.33b)$$

ここで係数行列(M_{ai}, N_{ai}, L_{ai})は$\hat{g}_a$の解（より正確には$\hat{g}_a$をX_{a1}，X_{a2}，$\langle B u_{\|a} \rangle$，$\langle B q_{\|a} \rangle$の線形和で表した時に(2.32$a$)式を満たすように決まる係数）に関する速度空間積分及び磁気面平均から決定される．(2.29)式と(2.33)式を結び付け，Γ^{bn}，q^{bn}，$J_{\mathrm{BS}} \equiv \langle J_\| B \rangle / \langle B^2 \rangle = \langle (e_i n_i u_{\|i} - e n_e u_{\|e}) B \rangle / \langle B^2 \rangle$に対する式として整理すると，以下のような方程式が得られる．（簡単のためここではイオン種は1種類としたが，複数イオン種の場合も同様の表式が得られる）

$$\begin{bmatrix} \Gamma_e^{bn} \\ q_e^{bn} \\ \Gamma_i^{bn} \\ q_i^{bn} \\ J_{BS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11}^{ee} & L_{12}^{ee} & L_{11}^{ei} & L_{12}^{ei} & L_{1\mathrm{E}}^{e} \\ L_{21}^{ee} & L_{22}^{ee} & L_{21}^{ei} & L_{22}^{ei} & L_{2\mathrm{E}}^{e} \\ L_{11}^{ie} & L_{12}^{ie} & L_{11}^{ii} & L_{12}^{ii} & L_{1\mathrm{E}}^{i} \\ L_{21}^{ie} & L_{22}^{ie} & L_{21}^{ii} & L_{22}^{ii} & L_{2\mathrm{E}}^{i} \\ L_{\mathrm{E}1}^{e} & L_{\mathrm{E}2}^{e} & L_{\mathrm{E}1}^{i} & L_{\mathrm{E}2}^{i} & L_{\mathrm{EE}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{e1} \\ X_{e2} \\ X_{i1} \\ X_{i2} \\ X_{\mathrm{E}} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$

係数$(M_{ai}, N_{ai}, L_{ij}^{ab})$を具体的に求める方法としては主に変分法を使う方法[21-23]とMonte-Carlo法を使う方法[24]が知られているが，ここではその詳細には触れない．(2.34)式のように表現すると，新古典輸送（径方向粒子，熱フラックス，ブートストラップ電流）が$(X_{a1}, X_{a2}, X_{\mathrm{E}})$を駆動力として引き起こされる輸送過程であることがよくわかる．特に，粒子フラックスがΓ^{bn}が圧力勾配と径電場X_{a1}だけでなく温度勾配X_{a2}や誘導電場X_{E}に駆動されたり，熱フラックスq^{bn}がX_{a1}にも駆動されるといった輸送行列L_{ij}^{ab}に非対角成分があること，また電子（イオン）が自身の勾配だけでなく摩擦力を介してイオン（電子）の勾配にも駆動されることなど，新古典輸送の重要な性質がこの1つの式にまとめられている．一方で(2.22)式，(2.23)式のように表現した場合，新古典輸送は圧力の非等方性（＝粘性），あるいはパラレル方向の摩擦力の結果生じると見ることもできる．いずれの見方においても，(2.20)式と(2.29)式に現れるようにCoulomb衝突によるパラレル方向の摩擦力，モーメンタムバランスが新古典輸送の評価に重要である．なお，Pfirsch-Schlüterフラックスについても同様に表せ[25, 26]，以下の形となる．

$$\begin{bmatrix} \Gamma_a^{\mathrm{PS}} \\ q_a^{\mathrm{PS}} \end{bmatrix} = -\langle \widetilde{U}^2 \rangle \sum_b \frac{1}{e_a e_b} \begin{bmatrix} l_{11}^{ab} & -l_{12}^{ab} \\ -l_{21}^{ab} & l_{22}^{ab} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{b1} \\ X_{b2} \end{bmatrix}. \quad (2.35)$$

$\langle \widetilde{U}^2 \rangle$はMHD平衡磁場から決まり，摩擦係数$l_{\mathrm{jk}}^{ab}$も線形化衝突項の性質のみから決定されるため，(2.35)式はドリフト運動論方程式を解かずとも決定できる．そのような意味において，Pfirsch-Schlüterフラックスは2.1節の分類上流体的な輸送過程と見ることができる．Pfirsch-

Schlüterフラックスは磁気面上のパラレルフローの変動部分（$\propto \widetilde{U}$）によるパラレル方向の摩擦力の変動（＝パラレル粘性の変動，(2.22)式の$1-\frac{B_0^2}{\langle B_0^2\rangle}$に比例する項）に起因する径方向輸送であるため，Pfirsch-Schlüterフローと同様に流体的な輸送過程になっているのはつじつまが合うし，Pfirsch-Schlüterフラックスは衝突周波数が高い場合に顕著になるから，その観点からも流体的な描像と合う．もちろん$\langle \widetilde{U}^2\rangle$は磁場のトーラス性を表す因子になっており，故に$\Gamma_a^{\mathrm{PS}}$と$q_a^{\mathrm{PS}}$は新古典輸送の一部である．

最後に，トカマクや新古典最適化配位の一種である準対称配位において重要な性質である本質的両極性（intrinsic ambipolarity）の概念について説明する．既に(2.24)式で見たように，衝突項のモーメンタム保存性および準中性条件より，径方向の新古典粒子フラックスのうち，パラレル粘性に関係するΓ^{BP}とΓ^{PS}については径方向の電流を生まない．よってトロイダル粘性由来のフラックス$\Gamma^{\mathrm{na}}\propto\langle \boldsymbol{e}_\zeta\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle$及び分極フラックス$\Gamma^{\mathrm{pl}}$だけが径電場の時間発展に関与することが(2.27)式で示された．ここでは$\boldsymbol{e}_\zeta$としてBoozer座標系における任意のトロイダル角を取っているが，新古典粘性をパラレル方向ともう１つの方向に分離する方法は１つではなく，ポロイダル成分，あるいは任意の成分を取ることも可能である[12,27]．もし，磁場が準軸対称，準ポロイダル対称，あるいは準ヘリカル対称などの準対称配位であれば，磁場に平行な方向と対称性の方向（＝$\boldsymbol{Q}$とする）の２成分に新古典粘性を分離した場合，$\langle \boldsymbol{Q}\cdot\nabla\cdot\boldsymbol{P}_1\rangle=0$となるのでトカマクと同様に新古典輸送は本質的両極性を満たす．一方，Γ^{BP}とΓ^{PS}（さらにΓ^{C}も）の磁場配位に依らない本質的両極性は，Coulomb衝突項のモーメンタム保存性から導かれた．ここで線形化Coulomb衝突項，特にLandauのFokker-Planckオペレータ[28,29]の持つ重要な性質を述べておこう．(2.5)式の$C_{ab}^{\mathrm{L}}(\bar{f}_{1a})$は，

$$
\begin{aligned}
C_{ab}^{\mathrm{L}}(\bar{f}_{a1}) &= C_{ab}(\bar{f}_{a1}, F_{b0}) + C_{ab}(F_{a0}, \bar{f}_{b1})\\
&= C_{ab}^{\mathrm{T}}(\bar{f}_{a1}) + C_{ab}^{\mathrm{F}}(\bar{f}_{b1})
\end{aligned}
$$

のようにテスト粒子衝突項C_{ab}^{T}とフィールド粒子衝突項C_{ab}^{F}に分けられる．これらは以下のような関係式を満たす．

・粒子数保存則：

$$\int \mathrm{d}^3v\, C_{ab}^{\mathrm{T}}(\bar{f}_{a1}) = \int \mathrm{d}^3v\, C_{ab}^{\mathrm{F}}(\bar{f}_{b1}) = 0, \tag{2.36a}$$

・モーメンタム及びエネルギー保存則：

$$m_a\int \mathrm{d}^3v\{\boldsymbol{v}, v^2\}C_{ab}^{\mathrm{T}}(\bar{f}_{a1}) + m_b\int \mathrm{d}^3v\{\boldsymbol{v}, v^2\}C_{ba}^{\mathrm{F}}(\bar{f}_{a1}) = 0, \tag{2.36b}$$

・自己随伴性（Self-adjointness）：

$$
\begin{aligned}
&\int \mathrm{d}^3v\frac{\bar{g}_1}{F_{a0}}C_{ab}^{\mathrm{T}}(\bar{f}_1) = \int \mathrm{d}^3v\frac{\bar{f}_1}{F_{a0}}C_{ab}^{\mathrm{T}}(\bar{g}_1),\\
&T_a\int \mathrm{d}^3v\frac{\bar{f}_{a1}}{F_{a0}}C_{ab}^{\mathrm{F}}(\bar{f}_{b1}) = T_b\int \mathrm{d}^3v\frac{\bar{f}_{b1}}{F_{a0}}C_{ba}^{\mathrm{F}}(\bar{f}_{a1}).
\end{aligned}
\tag{2.36c}
$$

なおここで$\{\boldsymbol{v}, v^2\}$は$\boldsymbol{v}$またはv^2のいずれかを意味する。モーメント法の説明の中で衝突項の性質については特に触れなかったが，(2.29)式，(2.35)式において摩擦係数l_{jk}^{ab}は自己随伴性から$l_{jk}^{ab}=l_{kj}^{ba}$，またモーメンタム保存性から$\sum_a l_{1k}^{ab}=0$を満たす．後者の性質がΓ^{BP}とΓ^{PS}の本質的両極性を保証するが，自己随伴性はここでは特に必要とはされない．しかし，新古典輸送におけるOnsager対称性というもう一つの重要な性質は，この自己随伴性から導かれる．Onsager対称性は(2.34)式において，

$$L_{jk}^{ab}=L_{kj}^{ba},\quad L_{j3}^{ab}=-L_{3j}^{ba},\quad L_{j\mathrm{E}}^{a}=L_{\mathrm{E}j}^{a}\,(j,k=\{1,2\}) \tag{2.37}$$

の形で現れる．この性質は新古典輸送がエントロピーを増大させる方向にのみ起こる散逸過程である事（BoltzmannのH-定理）とも関係しており，文献[25]によくまとめられている．重要な補足として，古典輸送と乱流輸送も同様にOnsager対称性を満たす輸送行列によってフラックスと駆動力が結び付けられる[30]．なお，トカマクにおいては新古典フラックスが本質的両極性を満たすだけでなく，径電場$-\Phi_0'$に依存しなくなることも重要な性質であるが，最近の論文[31]において，この性質を計算で再現するには衝突項のモーメンタム保存性だけでなく自己随伴性も必要であることがわかりやすく示されている．

以上，本章ではドリフト運動論方程式とジャイロ運動論方程式の導出から始めて，新古典輸送理論の基礎について概観してきた．次章では，具体的に新古典輸送の計算を行う上でどのような仮定や近似が使われているのか，それが時代とともにどう進化してきたかについて見ていくことにする．

参 考 文 献

[1] ITER Physics Basis Chap. 2, Nucl. Fusion **39**, 2175 (1999).
[2] Y. Yamada *et al.*, Nucl. Fusion **45**, 1684 (2005).
[3] A. Ishizawa *et al.*, Nucl. Fusion **57**, 066010 (2017).
[4] F. Warmer *et al.*, Phys. Rev. Lett. **127**, 225001 (2021).
[5] R. Sakai *et al.*, Fus. Eng. and Des. **149**, 111322 (2019).
[6] A.J. Brizard and T. S. Hahm, Rev. Mod. Phys. **79**, 421 (2007).
[7] H. Sugama, Phys. Plasmas **7**, 466 (2000).
[8] プラズマ・核融合学会 編：プラズマシミュレーション（京都大学学術出版会，2018）第２章.
[9] A.H. Boozer, Phys. Fluids **24**, 1999 (1981).
[10] H. Sugama, Rev. Mod. Plasma Phys. **1**, 9 (2017).
[11] H. Sugama and W. Horton, Phys. Plasmas **2**, 2989 (1995).
[12] S. Satake *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion. **53**, 054018 (2011).
[13] F.L. Hinton, *Basic Plasma Physics* 2 (edited by A.A. Galeev *et al.*, Handbook of Plasma Physics) (North-Holland Publishing Company 1984) Chap. 1.5.
[14] D.A. Spong, Phys. Plasmas **12**, 056114 (2005).

[15] M. Honda *et al.*, Nucl. Fusion **54**, 114005 (2014).
[16] Sugama *et al.*, Phys. Plasmas **3**, 2379 (1996).
[17] J.D. Callen *et al.*, Phys. Plasmas **17**, 056113 (2010).
[18] J.E. Rice, Plasma Phys. Control. Fusion **58**, 083001 (2016).
[19] H. Sugama and S. Nishimura, Phys. Plasmas **9**, 4637 (2002).
[20] R. Balescu, *Transport Processes in Plasmas* Vol. 2 (North-Holland, Amsterdam, The Netherland, 1988).
[21] S.P. Hirshman *et al.*, Phys. Fluids **29**, 2951 (1986).
[22] W.I. van Rij and S. P. Hirshman, Phys. Fluids B **1**, 563 (1989).
[23] H. Sugama and S. Nishimura, Phys. Plasmas **15**, 042502 (2008).
[24] A. Matsuyama *et al.*, Phys. Plasmas **16**, 052501 (2009).
[25] H. Sugama and W. Horton, Phys. Plasmas **3**, 304 (1996).
[26] J.D. Lore, *Measurement and Transport Modeling with Momentum Conservation of an Electron Internal Transport Barrier in HSX* (Doctor thesis, Univ. Wisconsin-Madison, 2010) Chap. 3.
[27] K.C. Shaing *et al.*, Nucl. Fusion **50**, 125012 (2010).
[28] L. Landau, Phys. Z. Sowjetunion (USSR) **10**, 154 (1936).
[29] M.N. Rosenbluth *et al.*, Phys. Rev. **107**, 1 (1957).
[30] H. Sugama and W. Horton, Phys. Plasmas **4**, 405 (1997).
[31] M. Honda, Phys. Plasmas **30**, 092305 (2023).

J. Plasma Fusion Res. Vol.100, No.7 (2024) 314-320

小特集 古くて新しい新古典輸送理論の新展開

3．新古典輸送計算の実際 ～近似モデルと新展開～

3. Neoclassical Transport Calculations in Practice: Approximate Models and New Developments

3.1　ドリフト運動論方程式の数値的解法と種々の近似

3.1 Numerical Schemes for Drift-Kinetic Equation and Several Approximations in them

佐竹真介
SATAKE Shinsuke
核融合科学研究所　構造形成・持続性ユニット

（原稿受付：2024年２月21日）

２章で導出したドリフト運動論方程式を実際に数値的に解いて新古典輸送を評価する際には，計算量を減らすために様々な近似や仮定が使われることが多い．ここでは，代表的な新古典輸送シミュレーションコードにおいて使われている衝突項やドリフト軌道などに関する近似について説明し，それらが計算結果にどのような影響を与えるかを説明する．

Keywords:
neoclassical transport theory, drift-kinetic equation, gyrokinetic theory, numerical simulation

3.1　ドリフト運動論方程式の数値的解法と種々の近似

２章で見てきたように，新古典輸送ではドリフト運動論方程式を解くことでガイディングセンター分布関数の局所Maxwell分布からのずれを求め，それを用いて新古典粘性や新古典熱・粒子フラックス，ブートストラップ電流などを評価する．しかし，その計算を具体的にシミュレーションコードに実装する上では様々な近似や仮定が用いられる．本章では過去から現在まで使われている様々な新古典輸送計算法において，どのような近似が用いられているかを解説し，それがどのような影響として計算結果に現れるのかについて見ていく．

ドリフト運動論方程式(2.4)式において，2.3節では落としていた高次の項も含めて改めて書いてみる[1,2]．

$$\frac{\partial \bar{f}_{a1}}{\partial t}+\left[U\boldsymbol{b}\cdot\nabla-\frac{1}{m_a}\boldsymbol{b}\cdot(\mu\nabla B_0+e\nabla\Phi_1)\frac{\partial}{\partial U}+\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}\cdot\nabla\right]\bar{f}_{a1}$$
$$=-\left(\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}\cdot\nabla-\frac{e_aE_{\|}U}{T_{0a}}\right)F_{a0}+\sum_b C^{\mathrm{L}}_{ab}(\bar{f}_{a1})+C_{ab}(\bar{f}_{a1},\bar{f}_{b1}), \tag{3.1.1a}$$

$$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}=\frac{1}{e_aB_0}\boldsymbol{b}\times[m_aU^2\boldsymbol{b}\cdot\nabla\boldsymbol{b}+\mu\nabla B_0+e_a\nabla(\Phi_0+\Phi_1)], \tag{3.1.1b}$$

$$F_{a0}=n_{0a}\left(\frac{m_a}{2\pi T_{0a}}\right)^{3/2}\exp\left[-\frac{1}{T_{0a}}\left(\frac{m_aU^2}{2}+\mu\mathrm{B}_0\right)\right]\cdot\exp\left[-\frac{e_a\Phi_1}{T_{0a}}\right]. \tag{3.1.1c}$$

ここで新たに入ったのは時間微分の項$\partial\bar{f}_{a1}/\partial t$と磁気面上のポテンシャル変位$\Phi_1(s,\theta,\zeta)$，衝突項の非線形項$C_{ab}$ $(\bar{f}_{a1},\bar{f}_{b1})$，そして$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}\cdot\nabla\bar{f}_{a1}$の項である．これらはドリフトオーダリングでは$\delta^2$次の項という扱いになるが，ある条件下では無視しえない影響を与えることもあるため残してある．また，(2.4)式では$\nabla\Phi_1$の項は$E_{\|}$の中に含まれていたが，ここではF_{a0}を(3.1.1c)式のように置くことで$E_{\|}$からは分離されていることに注意．以下，それぞれの項の扱いについて順にみていこう．

1）$\partial\bar{f}_{a1}/\partial t$の扱い：この項を含めて解くか，解かないかはドリフト運動論方程式(3.1.1a)式を定常解に向かう時間発展の問題として解くか，定常解を満たす$\bar{f}_{a1}$を探索する問題として解くか，という数値解法の設定の違いに対応する．時間発展を解く場合，(2.28)式を用いて径電場の時間発展も同時に解くことが多い．また従って本質的両極性（intrinsic ambipolarity）の成り立たない非軸対称系においてよくその立場が取られる．計算手法としては，時間発展を解くコードでは分布関数を多数個の仮想粒子（マーカー）をガイディングセンター運動方程式$(\dot{\boldsymbol{X}},\dot{U})$に

National Institute for Fusion Science, Toki, GIFU 509-5292, Japan
author's e-mail: satake.shinsuke@nifs.ac.jp

従って動かし，そのマーカーの分布と重みから$\bar{f}_{a1}$を表現する粒子コードとして実装されることが多い．一方，定常解を探索するコードでは径電場は入力値として与えられ，それを満たす解$\bar{f}_{a1}$を何らかの多項式展開，例えば2.4節で出てきたLegendreとLaguerre多項式（速度空間）及びFourier多項式（配位空間）などで展開し，それらの係数が満たす関係を(3.1.1)式から導き，反復法や変分法などで答えを求める，というものである．粒子法は3次元配位への適用も容易で，数値アルゴリズムもドリフト運動論方程式の形から直接的に決まる一方，有限のマーカーで分布関数を表現することの不連続性や後に述べる衝突項をモンテカルロ法で実装することにより，数値ノイズが乗りやすくその抑制に数値計算上のテクニックが要求される（例えば重み平均（weight-averaging）法[3],制御変量（control-variate）法[4]など）．多項式展開の場合，計算コードは一般に巨大な係数行列を扱う形になり，その解法の収束性や安定性を得るための技法が必要となる．

2）磁気面上のポテンシャル変位$\Phi_1(s,\theta,\zeta)$：この効果は従来の径電場しか考えない新古典輸送理論では無視されていたが，近年高Zイオンの不純物輸送を考える上で重要視されてきた効果である．なお，ここで考えるΦ_1は微視的乱流輸送を引き起こす$\langle\hat{\phi}_a\rangle_\xi$（(2.7)式）とは異なり，時間的にゆっくり（捕捉軌道のイオンのバウンス周期より十分遅く）変化する準定常的な成分で，イオンと電子のドリフト運動論方程式を解くことで現れる磁気面上の僅かな電荷の偏り$\sum_{a=i,e}e_a n_{1a}$によって生じる磁気面上の静電ポテンシャルである．ただしこの場合も準中性条件$\sum_{a=i,e}\langle e_a n_{1a}\rangle=0$が課される．$\Phi_1$は$e\Phi_1/T\sim O(\delta)$の微小量と想定され，実際の計算でも高々$e\Phi_1/T\sim0.1$程度である．これが不純物イオンに対して重要視されるのは，ガイディングセンターの運動方程式において

$$\frac{v_{E_1\times B}}{v_{B\times\nabla B}}\sim\frac{Ze\Phi_1}{T}\frac{R}{a},\quad\frac{Ze\nabla_{\|}\Phi_1}{\mu\nabla_{\|}B}\sim\frac{Ze\Phi_1}{T\Delta B}$$

と見積もられ（ΔBは磁力線に沿った磁場の強弱の振幅，R及びaはプラズマの大半径，小半径），電荷Zが大きいほど無視できなくなるためである[1]．Φ_1ポテンシャルを含めた計算をする場合，ジャイロ運動論でもよく使われるように断熱応答を仮定し，0次分布関数F_{a0}分布を(3.1c)式と置いた場合の$\bar{f}_{a1}$に対するドリフト運動論方程式を解く．その代表的な計算コードとしてはEUTERPE[1]，FORTEC-3D[2]，SFINCS[5]，などが知られており，いずれも3次元配位に適用可能である．また，NBI加熱による高速イオンが作るΦ_1ポテンシャルに着目したシミュレーションもある（GNET[6]）．3.3節ではΦ_1ポテンシャルの不純物の新古典輸送への影響を調べた研究例を紹介する．

3）非局所効果　$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}\cdot\nabla\bar{f}_{a1}$：この項を含めた計算は，ガイディングセンター軌道の磁力線を横切るドリフトの有限性を考慮して解くことになるため，非局所効果とか，有限軌道幅効果などと呼ばれることがある．一方，この項を無視したドリフト運動論方程式は磁気面ごとに独立しており，径方向のドリフトは無限小の仮想変位として扱われることになる．このようなモデルを局所近似（local approximation）とも呼ぶ．コンピュータ資源が乏しかった時代に作られた新古典輸送計算法が基本的に局所近似モデルであったのは，単一磁気面の計算に問題を落とし込めるという大きな利点があったからである．しかしながら，実際の閉じ込め磁場中の荷電粒子のドリフト幅は背景温度密度勾配と比べて無視できるほど狭いとは言えない状況がよくあり（例えばトカマクのペデスタルやヘリカルリップルに捕捉されたイオンの軌道など），この効果を取り入れた計算が重要となる．有限軌道幅効果を含めた大域的新古典シミュレーションはスーパーコンピュータの発達とともにこの15年ほどでようやく発展してきた．径方向ドリフトを含めた複雑な軌道を取り扱うために基本的に粒子ベースのモンテカルロコードであることが多いが，最近ではジャイロ運動論シミュレーションコードが大域的シミュレーションとして発展する中で新古典輸送計算も含めて計算できるようになってきたため，ジャイロ運動論コードで使われる有限要素法など，分布関数を5次元位相空間内のメッシュ点での値を解く手法に基づいた大域的新古典輸送計算コードも増えてきている．

また，$\boldsymbol{v}_\mathrm{d}\cdot\nabla$の中には径方向成分$(\boldsymbol{v}_\mathrm{d}\cdot\nabla s)$だけでなく磁気面上のトロイダル，ポロイダル方向成分も含まれる．ヘリカル系の局所近似新古典輸送コードの中では，この磁気面接線成分（$\tilde{\boldsymbol{v}}_\mathrm{d}\equiv\boldsymbol{v}_\mathrm{d}-(\boldsymbol{v}_\mathrm{d}\cdot\nabla s)\boldsymbol{e}_s$）だけを残す近似を用いるものが主流である．こうしたモデルは径方向ドリフトの有限性だけを無視しているので，径方向局所（radially-local）モデルと呼ばれることもある．$\tilde{\boldsymbol{v}}_\mathrm{d}$の中には磁気ドリフト（grad-Bと曲率ドリフト）による捕捉粒子の歳差（precession）ドリフトや，$E\times B$ドリフトの効果が入る．特に本質的両極性が成り立たないヘリカル系に特徴的な，径電場に対する新古典輸送の強い依存性を調べるために，$E\times B$ドリフト項のみ残した径方向局所モデルが存在し，代表的なものとしてはDKES-PENTA[7-9]，GSRAKE[10]などが知られる．磁気ドリフトの磁気面接線成分も含めた径方向局所モデルは比較的最近考案され，局所近似版FORTEC-3D[11,12]，SFINCS，KNOSOS[13]などが該当する．また，軸対称系に限定されるが局所近似で(2.33)式の関係式に対する数値解法の計算コード（逆行列法，Matrix Inversion[14]）などもこの類の計算法の一つである．磁気ドリフト項を含めた計算法（ただし下で述べるバウンス平均近似を用いない場合）ではドリフト運動論方程式における位相空間の保体積性（Liouvilleの定理）やエネルギー保存則が成り立たないため人為的なソース・シンク項が必要になるという問題点があるが[11]，径電場ゼロ近くでの新古典輸送の径電場依存性がより正しく表される．なお，上記の問題を解消できる新しい径方向局所モデルも提案されているが[15]，複雑な計算が必要となるためまだコードとして実装されたものはない．また，ある限定的な状況にのみ妥当な近似を採用はしているが，局所近似モデルに有限軌道幅効果を含めた計算モデルを構築する試みも近年なされている[16,17]．

一方$E\times B$ドリフト項のみを扱う場合，$\boldsymbol{v}_{E\times B}=E\times B/B^2\rightarrow E\times B/\langle B^2\rangle$という近似をすることで位相空間の保体積性が保たれるため[11]，この近似は非軸対称系の局所近似新古典計算法として従来からよく採用されている．しかし，この近似は本来圧縮性流れである$E\times B$フローに対する非圧縮近似に相当するため，$E\times B$フローが大きい場合（ポロイダルマッハ数$M_{\rm p}=E/(B_{\rm p}v_{\rm th})$が1以上）に起こる新古典粘性，新古典輸送の径電場に対する非線形依存性[18, 19]を正しく扱えないことに注意が必要である．また，局所近似のドリフト運動論方程式の解法に関しては，(θ,ζ)平面でのドリフト軌道をそのまま扱うものと，磁場の弱い領域に捕捉された粒子軌道についてそのバウンス平均したドリフト運動を扱うモデルがある．前者はDKES，後者はGSRAKEやKNOSOS，PENT[20]などが代表的である．バウンス平均コードは他の計算法に比べて高速に新古典輸送計算を解くことができるが，磁力線に平行方向の物理が入らないためブートストラップ電流の計算はできない．また，捕捉軌道が衝突散乱される前に十分にバウンス運動できることが定式化の前提となっているので，Pfirsch-Schlüter領域の計算は別途行う必要がある．なお，数値シミュレーションによる新古典計算が発展する以前からヘリカル系の新古典輸送を衝突周波数，径電場の大きさ毎に区切って解析的に扱う計算式が多く考案されたが[21]，こうした解析モデルは基本的に局所近似であり，捕捉粒子のバウンス平均した径方向ドリフト速度と，衝突や$E\times B$ドリフトによる捕捉‒非捕捉軌道の遷移の時間スケールから粒子拡散係数を評価するモデルになっている．

4）衝突項に対する近似：(3.1.1a)式右辺に現れるCoulomb衝突項の扱いも，新古典輸送シミュレーション法によって大きく扱いが分かれる部分である．まず，最も単純化されたモデルとして，衝突項を速度のピッチ角変数$\xi=v_{\|}/v$に対する散乱オペレーター，$C_a^{\rm PAS}=\dfrac{\nu_{\rm D}^a}{2}\dfrac{\partial}{\partial\xi}(1-\xi^2)\dfrac{\partial}{\partial\xi}$で近似する方法がある．これは(2.32)式でも述べた方法である．一般に本質的両極性が成り立たないヘリカル系では，衝突項のモーメンタム保存性は小半径方向の輸送を計算する上では重要ではなく，磁場リップルに捕捉された軌道と非捕捉軌道のピッチ角散乱による遷移が表現できれば十分な精度で径方向輸送を計算することができる．また，衝突によるエネルギーの変化を無視することで，計算をより単純化できる．すなわち，径方向局所モデルでポテンシャルとして$\Phi_0(s)$のみ考えれば，ある磁気面に束縛されて運動するガイディングセンターに沿っての運動エネルギーはCoulomb衝突以外では変化しないため，ピッチ角散乱近似を用いることで，速度vを変数ではなくパラメータとして扱うことができる．すると分布関数$\bar{f}_{1a}$の変数としては(ζ,θ,ξ)の3変数に落とすことができるため，ヘリカル系でも必要な計算量を大きく減らすことができる．こうした近似は単一エネルギー（mono-energy）近似と呼ばれる．

一方，トカマクのような本質的両極性が重要な場合や，磁場配位に依らずブートストラップ電流を計算したい場合には，衝突項のモーメンタム保存性が必須である．ピッチ角散乱オペレータでは磁力線に平行方向のモーメンタムが保存しないため，補正を考える必要がある．一つの方法としては，テスト粒子衝突項$C_{ab}^{\rm T}$とフィールド粒子衝突項$C_{ab}^{\rm F}$という分離において，$C_{ab}^{\rm T}$をピッチ角散乱で近似し，$C_{ab}^{\rm F}$として$C_{ab}^{\rm T}$で生じた変化をキャンセルする項を導入するというやり方がある．これは初期の単一エネルギー近似の計算法でよく採られた方法である．また，3）で名前を挙げたDKESコードは，ピッチ角散乱オペレータを使って(2.32a)式のような形式の，非圧縮$E\times B$フローを入れた単一エネルギーのドリフト運動論方程式を解く．この際，(2.32a)式右辺の$(V_{\|}-C_a^{\rm L})g^{(l=1)}$は無視されているため，DKESが求める新古典拡散係数（エネルギーモーメントを取ると(2.34)式のL_{ij}^{ab}になる）はこのままでは軸対称系において本質的両極性を満たさない．しかし，(2.33)式に現れる係数（M_{ai}, N_{ai}, L_{ai}）は，DKESの計算結果を基にモーメンタムバランスを満たす形に修正して求めることができ，その関係を利用してピッチ角散乱近似を使った計算から軸対称系にも適用できる新古典輸送拡散係数を評価できる[22, 23]．この関係を利用した新古典輸送コードが，PENTAコード[9]である．

衝突項の保存則を満たすより厳密なオペレータの実装法として，テスト粒子項として，(2.36)式に挙げたLandauオペレータのピッチ角散乱とエネルギー散乱を数値的に模擬するものを用意する．$C_{ab}^{\rm T}$は速度空間における2階の偏微分方程式の形をしているので，数値的には多項式展開で表現された分布関数の微分系，差分，あるいは粒子シミュレーションでは$C_{ab}^{\rm T}$のFokker-Planck的な性質を利用した乱数による速度空間でのランダムウォークとして実装する[24]こともできる．これに対し，フィールド粒子衝突項は微積分方程式[25]の形をとり，数値的な扱いが複雑になる．そこで，(2.36)式の保存則や自己随伴性を満たすように，数値計算された$C_{ab}^{\rm T}$の結果に対してアドホックに$C_{ab}^{\rm F}$を決定するという方法が新古典シミュレーション，乱流シミュレーションの両方でよく採用される[26, 27]．特に最近では，多粒子種プラズマに対応して$T_a\neq T_b$の時に(2.36c)式の自己随伴性が満たされないという従来のアドホックな$C_{ab}^{\rm F}$の問題を解決したモデル[28, 29]が多くのドリフト運動論コードとジャイロ運動論コードに実装されている．2.4節で説明したとおり，線形化衝突項の自己随伴性はBoltzmannのH-定理や，トカマクにおいて新古典フラックスが径電場に依存しなくなる性質を数値的に再現する上で重要な要素である．しかしながら，このようなアドホックなフィールド粒子衝突項にはやはり近似が入ってしまう．特に問題になるのは衝突周波数が高くPfirsch-Schlüterフラックスが重要になる場合で，アドホックな$C_{ab}^{\rm F}$では新古典シミュレーションの定量的正確性が落ちることが指摘されている[30]．そこで，計算のコストはかかるが数値的に$C_{ab}^{\rm F}$を元の定義式に従って計算する，完全線形（full-linearized）オペレータを用いた計算法も発達している[30, 31]．フィールド粒子衝突

項の正確な扱いは，今後核融合炉内のタングステンの輸送問題など，Pfirsch-Schlüter領域の衝突周波数を持つと想定される高Zイオンを扱う計算において重要となる点である．アドホックなC_{ab}^{F}オペレータに対しても高衝突領域での修正項が考案されており[32]，ジャイロ運動論コードへの実装も進められている[33]．さらに，トカマクのペデスタル部など急峻な背景の温度勾配がある状況では，線形化衝突項の近似では不十分と考えられる．そのような状況に対応すべく，(2. 37a)式の右辺最終項に現れる衝突項の非線形項$C_{ab}(\bar{f}_{a1}, \bar{f}_{b1})$についても考慮したドリフト運動論方程式ソルバーも開発されており[34]，これは新古典輸送シミュレーションとしては最も複雑かつ大規模なコードの部類に入る．

ここまで，線形化衝突項の扱いについていくつかのタイプを見てきたが，他にもまだ衝突項の拡張が必要となる場合がある．それはプラズマが外部からNBIなどによって強く加熱されている場合や，将来の核融合炉のDT反応によって生じる高速α粒子によるバルクプラズマの自己加熱を扱う場合である．このような場合，加熱を引き起こす高速粒子の分布はMaxwell分布をゼロ次としてそこからのずれを１次とする，という線形化衝突項での扱いにそぐわない状態になっている．こうした場合にどのように衝突項を扱うかについては，3. 2節で具体的な事例を紹介したい．

5）速い平均流の存在下でのドリフト運動論方程式：本節ではこれまで，(3. 1. 1)式をベースに新古典輸送計算における様々なレベルの近似について述べてきた．今後核融合炉の運転予測に新古典輸送計算を利用するにあたって，もう１つドリフト運動論方程式の拡張が必要になる点がある．ここまでのドリフト運動論方程式では，ドリフトオーダリングにおける暗黙の仮定としてプラズマの平均流は$\bar{u}_a \sim O(\delta v_{\mathrm{th},a})$程度と仮定されていた．しかし例えば軸対称トカマクにおいては，トロイダル回転を減衰させる機構は$O(\delta^1)$次までのモーメンタムバランスの(2. 21)式には存在しないため，接線NBI等外部からのトルク入射があると容易にトロイダル方向に回転する．今，準対称系配位まで話を拡張し，$\boldsymbol{e}_\zeta$–方向に磁気座標系で見た磁場の対称性があると仮定しよう．今まで$O(\delta^0)$次と仮定していたポテンシャルΦ_0が$e_a\Phi_0/T_0 \sim O(\delta^{-1})$の大きさを持つとする．この場合，平均流として$\boldsymbol{E}_0 + \boldsymbol{u}_0 \times \boldsymbol{B} = 0$を満たす$E\times B$トロイダルフロー$\boldsymbol{u}_0 = u_0^\zeta \boldsymbol{e}_\zeta$，$u_0^\zeta = -\Phi_0'/\iota$が存在する．この平均流を含めたMHD平衡のforce balanceの式は以下のようになる[35].

$$\left(\sum_a m_a n_a\right)\boldsymbol{u}_0\cdot\nabla\boldsymbol{u}_0 = \boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B} - \nabla p_0,$$

$$(\text{上式}\cdot\boldsymbol{e}_\zeta) \to \frac{1}{2}\left(\sum_a m_a n_a\right)(u_0^\zeta)^2\frac{\partial g_{\zeta\zeta}}{\partial\zeta} = \iota J^s. \qquad (3.1.2)$$

ここで$g_{\zeta\zeta} = \boldsymbol{e}_\zeta\cdot\boldsymbol{e}_\zeta$．軸対称トカマクの場合，$\partial g_{\zeta\zeta}/\partial\zeta = 0$である．一方，準対称配位では一般的に$\partial g_{\zeta\zeta}/\partial\zeta \neq 0$であるから，(3. 1. 2)式からMHD平衡を支えるのに有限の径方向電流J^sが必要となる．しかし，磁気座標系を構築するには$J^s = 0$が必要であるから，準対称配位では$O(\delta^0)$の速いフローを考えると矛盾が生じる．したがって，速いフローが起き得るのは軸対称トカマクの場合に限られると予想される．さて，このような速い流れがある場合，ドリフト運動論方程式は$\boldsymbol{u}_0$に乗った座標系で記述される[36]．この時の顕著な効果の一つとして，重イオン種の密度がトロイダル回転による遠心力によって磁気面の外側に偏ることが知られている．即ち，ゼロ次の密度分布が磁気面関数ではなくなる．この偏りの影響を含めた計算は炉心プラズマに入ったタングステンの輸送を研究する上で重要と考えられ，近年盛んに研究されている[37, 38].

さて，(3. 1. 2)式では平衡との観点から速いオーダリングのフローは軸対称系においてのみ考えられるとしたが，ここで考えている速い平均流$\boldsymbol{u}_0$は径電場による$E\times B$フロー由来であり，粒子種に依らず共通である．一方，熱速度$v_{\mathrm{th},a} \propto \sqrt{T_a/m_a}$は粒子種に依存し，熱核融合炉ではイオン–イオン間衝突による温度緩和によりどのイオン種もほぼ等温であると考えられるから，トカマク以外の非軸対称系でも，特に両極性条件を満たす径電場が大きい場合には，バルクの水素や電子に対しては$u_0/v_{\mathrm{th}} < \delta^1$であっても，タングステンのような重イオンに対しては$u_{0,I}/v_{\mathrm{th},I} \sim \delta^0$という状態に容易になると想定できる．したがって，速いフローのオーダリングを用いた新古典輸送計算法は，ヘリカル型核融合炉の不純物輸送問題を扱う上でも重要である．しかしながら，速いフローのオーダリングのドリフト運動論方程式はこれまで軸対称系に対してのみ定式化とコード開発が進められてきており，非軸対称系への拡張は今後の課題である．

本節の最後に，新古典輸送計算法の計算モデルの差によってどのように計算結果が変わるか，いくつか事例を紹介する．一つ目は，ヘリカルプラズマにおける両極性径電場の計算における径方向局所近似と有限軌道幅効果を含めた大域的計算の比較である．**図１**は，W7-XのECH加熱放電において，観測された温度密度分布から新古典輸送計算を行い，両極性条件$\Gamma_i^{\mathrm{NC}} = \Gamma_e^{\mathrm{NC}}$を満たす径電場$E_{\mathrm{r}}$の予測をいくつかのシミュレーションで行い比較したものである[39]．この中で，DKESとSFINCSは$E\times B$ドリフトのみを入れた径方向局所近似，FORTEC-3Dは磁気ドリフトの磁気面接線，垂直の両成分を入れた有限

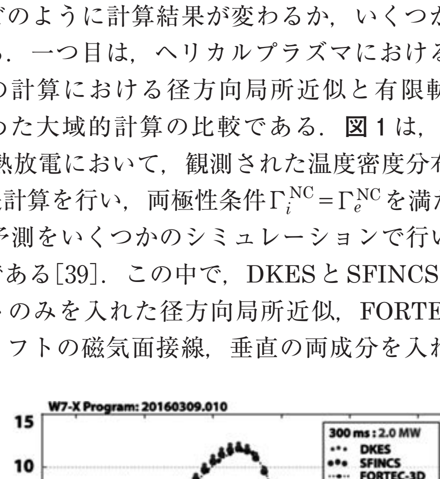

図１　W7-XのECH加熱放電における，両極性径電場の予測計算の計算モデル間の比較[39].

軌道幅効果を含む大域的計算となっている．このプラズマでは，実験観測でも磁気軸側が正，周辺部で負の径電場が観測されているが，3つのシミュレーションともほぼ同じ傾向を示しており，この図には示されていないものの，値としても観測値に近いものとなっている．局所近似と大域的計算の差は，正負の電場の切り替わる磁気面近くに現れている．2.4節と本節の1）で説明したように，FORTEC-3Dではプラズマ全域で径電場の時間発展込みでドリフト運動論方程式を解いている．その結果，正負の径電場の入れ替わる付近でも連続的な径電場の遷移が自然に求められる．一方，局所近似計算では磁気面毎に独立した計算となっており，径電場をパラメータとして振りながら両極性条件を満たすE_{r}を探索する．この図でも一部，正負2通りの解が存在している領域があるが，そのどちらが実際の解として選ばれるか，どこでどのように電場が遷移するかは，局所近似計算だけで決定することはできない．新古典輸送と乱流輸送の相関を考える場合，例えば径電場シアーによる乱流の抑制効果を考える上では，この径電場のつなぎ変わり面でどの程度の幅で正負の径電場が遷移しているかが重要となると考えられる．一方，それ以外の位置では3者の計算結果がよく一致している．これは，W7-Xが新古典輸送を抑えるために磁気ドリフトによるドリフト軌道の磁気面からのずれを抑制するような磁場配位を持つように設計されているため，有限軌道幅効果があまり径方向輸送に影響しないためであると考えられる．このような観点から，準対称配位などのいわゆる新古典最適化配位に近い場合，径方向局所モデルは定量的にも十分な精度の計算が可能であると言える．なお，大域的計算法による時間発展計算においては，複数の両極性解が存在している場合も一方の解に自然に径電場が収束していくが，この場合もなぜ一方の解が選ばれたのかについては説明することがまだできていない．従来の理論では，ある磁気面sにおいて，正負2つの両極性条件を満たす径電場の根$E_{\mathrm{r}}(s)=E_{+}(s)$，$E_{-}(s)$がある場合に，Maxwell構成則（Maxwell's construction）という考え方に従って，

$$\Delta\Phi(s)\equiv\int_{E_-}^{E_+}\mathrm{d}E_{\mathrm{r}}(\Gamma_i^{\mathrm{NC}}-\Gamma_e^{\mathrm{NC}})=0, \tag{3.1.3}$$

すなわち電場が二つの根の間でつなぎ変わっても径方向に電流が流れないところで遷移が起こる，というモデルが提案されている[40]．ただしこのモデルでは，$\Gamma_{i,e}^{\mathrm{NC}}$として局所近似の解析解を使い，また(2.34)式のように駆動力$X_{a1}=-\dfrac{p_a'}{n_a}-e_a\Phi'$，$X_{a2}=-T_a'$を与えて，$X_{a1}$の中の$\Phi'\propto-E_{\mathrm{r}}$を変化させるのではなく，乱流輸送など新古典輸送以外のプロセス（ただし両極性な）を含めたトータルフラックス$\Gamma_{\mathrm{t}}=\Gamma^{\mathrm{NC}}+\Gamma^{\mathrm{anom}}$，$\Gamma^{\mathrm{anom}}\propto n'$を想定し，(3.1.3)式の積分中で$E_{\mathrm{r}}$を変化させる際に$\Gamma_{\mathrm{t}}$を保存するように$n'$を変化させるという考え方をする．このモデルでは，$\Gamma^{\mathrm{anom}}=0$としてしまうとそもそも電場のつなぎ変えが起こらない，という結果になってしまう．これは局所近似の新古典理論ではつなぎ変えの起こる磁気面を決定できないことと矛盾しないが，大域的新古典シミュレーションでΓ^{anom}を入れなくても滑らかに正負の電場をつなぐ解が得られることとは一致しない．また，Maxwell構成則では電場の遷移はある磁気面で不連続に起こることになるが，実験観測から径電場はある径方向の幅で連続的に変化していると見られている．局所近似の新古典フラックスに，有限軌道幅効果の一端として電場のシアー$\propto\Phi''$に比例する項をモデル的に入れることで[41]ある程度径方向に幅のある遷移領域を持った両極性径電場分布の予測がされているが[42]，径電場シアー効果のモデルは多分に定性的であり，定量的な正確さには疑問が持たれるが，理論的進展がほとんどされていない．大域的シミュレーションでの径電場の遷移面付近では，この径電場シアーの効果の他，解析的モデルでは入っていない径方向のモーメンタム輸送などの効果も影響していると考えられる．また，2）で取り上げた磁気面上のポテンシャル変位Φ_1は，径電場の正負で位相が逆転するため，これも間接的に径電場遷移の位置決定に関係している可能性がある．径電場分岐の問題は今後のより一層の研究の発展が待たれる．

2つ目は，3）で取り上げたいくつかの径方向局所近似の比較研究である．[12]では，局所近似版のFORTEC-3Dにおいていくつかの異なる径方向局所近似の計算を比較している．1つ目は径電場による$E\times B$ドリフトのみ残し，磁気ドリフト項を完全に落としたモデル（Zero-Magnetic-Drift, ZMD），2つ目はZMDから更に$\boldsymbol{v}_{\mathrm{E\times B}}=E\times B/B^2\rightarrow E\times B/\langle B^2\rangle$と$E\times B$ドリフトの非圧縮近似を行ったもの（DKES-like），3つ目はZMDに磁気ドリフトの磁気面接線成分を足したモデル（Zero-Orbit-Width, ZOW）である．**図2**にLHD磁場配位で径電場を振った場合のそれらのモデルでの新古典粒子イオンフラックスの依存性の比較を行っている．また，バウンス平均計算コードのGSRAKEと，近似のない大域的なドリフト軌道を解くGlobal版FORTEC-3Dの計算結果とも比較している．径電場ゼロ近くで磁気ドリフト項が入っていないモデル（ZMD, DKES-like, GSRAKE）のΓ_iが発散傾向にあるのに比較し，ZOWではピークが負電場側にシフトし，またそのピークも大幅に下がっている．ZOWの計算は有限軌道幅効果の入ったglobal計算の結果を完全には再現しないもののその傾向をよく捉えており，磁気ドリフト項の接線成分が径電場ゼロ付近でのヘリカル系の新古典輸送を正しく評価する上で重要となることを示した結果となっている．また，**図2**では径電場が大きい領域での比較も示されており，$E\times B$ドリフトの非圧縮近似を使っているDKES-likeモデルでは，理論的に予測されている$M_{\mathrm{p}}\simeq1$付近に現れるΓ_iのピークが再現できないことが確認できる．このように，局所近似計算におけるドリフト軌道に対する近似は新古典輸送の評価に大きく影響を与えることが発見された．なおこのような磁気ドリフト項の接線成分の効果はSFINCS，KNOSOSコードでも確認されている．なお[12]では電子フラックスについても

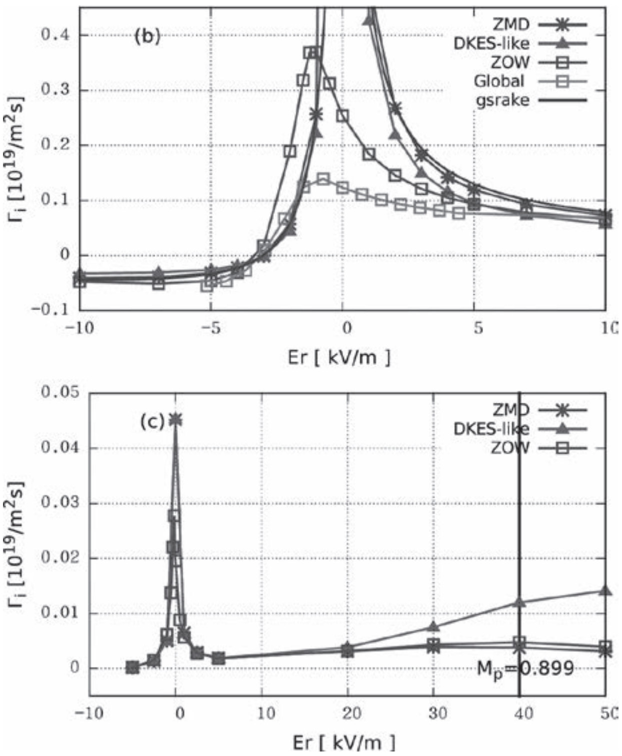

図２ 様々な径方向局所近似モデルと大域的モデルによる，LHD磁場配位での新古典イオンフラックスの径電場依存性の比較[12]．上図が径電場ゼロ付近，下図が径電場の大きい領域の比較.

同様の比較を行っているが，磁気ドリフト項を無視した影響はイオンにのみ顕著に表れ，電子に対してはZMD, DKES-likeモデルでも大域的計算と遜色ない計算ができることがわかった．径電場ゼロ付近で磁気ドリフト項を無視するとΓ_iが過大に評価されてしまうことは，いわゆる$1/\nu$領域の新古典輸送の解析解に相当するものをシミュレーションで見ていることに相当する．この径電場ゼロ付近の偽のピークによって，場合によっては存在しない両極性条件$\Gamma_i = \Gamma_e$を拾ってしまうことになるので注意が必要である．また[12]では，衝突項のモーメンタム保存性の有無による新古典輸送計算の結果の違いを準ヘリカル対称配位HSXで比較もしているので，興味のある方は読んでみてほしい.

以上の例に示したように，新古典輸送計算は採用する近似によって計算結果が異なる場合があるので利用するにあたってそのコードの特性を理解することが重要である．本稿が核融合研究者の間でそのような意識づけのきっかけになれば幸いである.

謝　辞

本章にまとめた内容は筆者が総合研究大学院大学で博士課程の指導教員を務めた松岡清吉氏，Huang Botsz氏，藤田慶二氏の学位論文における研究成果によるところが大きい．この場をお借りして改めて御三名の新古典輸送理論研究への貢献に感謝を申し上げます．本章の執筆は科学研究費［基盤研究(C)21K03517］の援助を得て行われました.

参 考 文 献

[1] J.M. Garca-Regaa *et al.*, Nucl. Fusion **57**, 056004 (2017).
[2] K. Fujita *et al.*, J. Plasma Phys. **86**, 905860319 (2020).
[3] S. Satake *et al.*, Plasma Fusion Res **1**, 002 (2006).
[4] R. Kleiber *et al.*, Comput. Phys. Commun. **182**, 1005 (2011).
[5] A. Molln *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **60**, 084001 (2018).
[6] H. Yamaguchi and S. Murakami, Nucl. Fusion **58**, 016029 (2018).
[7] S.P. Hirshman *et al.*, Phys. Fluids **29**, 2951 (1986).
[8] W.I. van Rij and S. P. Hirshman, Phys. Fluids B **1**, 563 (1989)
[9] D.A. Spong, Phys. Plasmas **12**, 056114 (2005).
[10] C.D. Beidler and H. Maaßberg, Plasma Phys. Control. Fusion **43**, 1131 (2001).
[11] S. Matsuoka *et al.*, Phys. Plasmas **22**, 072511 (2015).
[12] B. Huang *et al.*, Phys. Plasmas **24**, 022503 (2017).
[13] J.L. Velasco *et al.*, J. Comput. Phys. **418**, 109512 (2020).
[14] M. Honda *et al.*, Nucl. Fusion **52**, 023021 (2012).
[15] H. Sugama *et al.*, Phys. Plasmas **23**, 042502 (2016).
[16] M. Landreman *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **56**, 045005 (2014).
[17] V. d'Herbemont *et al.*, J. Plasma Phys. **88**, 905880507 (2022).
[18] S. Kitajima *et al.*, Nucl. Fusion **53**, 073014 (2013).
[19] K.C. Shaing, Phys. Fluids B **5**, 3841 (1993).
[20] N.C. Logan *et al.*, Phys. Plasmas **20**, 122507 (2013).
[21] K.C. Shaing *et al.*, Nucl. Fusion **50**, 025022 (2010).
[22] H. Sugama and S. Nishimura, Phys. Plasmas **9**, 4637 (2002).
[23] H. Sugama and S. Nishimura, Phys. Plasmas **15**, 042502 (2008).
[24] A.H. Boozer and G. K. Petravic, Phys. Fluids **24**, 851 (1981).
[25] M.N. Rosenbluth *et al.*, Phys. Rev. **107**, 1 (1957).
[26] S. Satake *et al.*, Comput. Phys. Commun. **181**, 1069 (2010).
[27] R. Kleiber *et al.*, Comput. Phys. Commun **295**, 109013 (2024).
[28] H. Sugama *et al.*, Phys. Plasmas **16**, 112503 (2009).
[29] S. Satake *et al.*, Comput. Phys. Commun **255**, 107249 (2020).
[30] E.A. Belli and J. Candy, Plasma Phys. Control. Fusion **54**, 015015 (2012).
[31] M. Landreman and D. R. Ernst, J. Comput. Phys. **243**, 130 (2013).
[32] H. Sugama *et al.*, Phys. Plasmas **26**, 102108 (2019).
[33] S. Matsuoka *et al.*, Phys. Plasmas **28**, 064501 (2021).
[34] R. Hager *et al.*, J. Comput. Phys. **315**, 644 (2016).
[35] H. Sugama *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **53**, 024004 (2011).
[36] F.L. Hinton and S. K. Wong, Phys. Fluids **28**, 3082 (1985).
[37] C. Angioni and P. Helander, Plasma Phys. Control. Fusion **56**, 124001 (2014).

[38] D. Fajardo *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **65**, 035021 (2023).
[39] N.A. Pablant *et al.*, Phys. Plasmas **25**, 022508 (2018).
[40] K. Itoh *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **70**, 1575 (2001).
[41] D.E. Hastings, Phys. Fluids **28**, 334 (1985).
[42] S. Toda and K. Itoh, Plasma Phys. Control. Fusion **53**, 11501 (2011).

J. Plasma Fusion Res. Vol.100, No.7 (2024) 321-327

小特集 古くて新しい新古典輸送理論の新展開

3．新古典輸送計算の実際　～近似モデルと新展開～

3. Neoclassical Transport Calculations in Practice: Approximate Models and New Developments

3.2　高エネルギー粒子を含む問題におけるCoulomb衝突項

3.2 The Coulomb Collision Operator for Problems Including Energetic Particles

西村　伸，奴賀秀男
NISHIMURA Shin and NUGA Hideo
核融合科学研究所　構造形成・持続性ユニット

（原稿受付：2024年4月25日）

加熱されたプラズマにおける熱化粒子挙動を考える時のために，Maxwell分布から著しくかけ離れた高エネルギー粒子速度分布も場の粒子種として扱うRosenbluthポテンシャルの取り扱い方法を示す．また非線形衝突効果の一例として，過去の高エネルギー粒子関係理論でしばしば無視されがちであった高エネルギー粒子どうしの衝突による速度分布変化を示唆する中性粒子ビーム入射（NBI）加熱実験を紹介する．

Keywords:
Coulomb collision, NBI-heated and/or burning plasmas, energetic particles, Rosenbluth potentials, nonlinear collision operator

3.2.1　はじめに

衝突項の取り扱いについて様々な工夫がなされてきた歴史経緯は前章3.1に述べられた通りであるが，これらは基本的に熱化粒子どうしの衝突の話である．今回担当編集委員と企画取りまとめ責任者より，加熱や核融合反応で生じた高エネルギー粒子を含む状態における衝突項に関する解説を依頼された．高エネルギー粒子が関わる問題と言っても，テスト粒子をそれら高エネルギー粒子とし，場の粒子としてMaxwell分布となっている熱化粒子を想定する線形化衝突項に基づいて高エネルギー粒子速度分布を決定する理論やシミュレーション技法については過去より多数の論文が出版されている．この章ではそれらであまり論じられなかった二つの問題を取り上げる．一つはそのような高エネルギー粒子の存在下での熱化粒子挙動を考える熱化粒子運動論的方程式側における衝突項である．もう一つは高速エネルギー粒子どうしの衝突である非線形衝突効果である．テスト粒子種と場の粒子種の速度分布両方が著しくMaxwell分布からかけ離れている衝突項は非線形衝突項とも呼ばれ，3.1章で説明されたように熱化粒子どうしの衝突ではそのような非線形項を落とす線形化近似を用いるのが通常である．高エネルギー粒子関係理論でも，そのような高エネルギー成分$f_{\rm f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v})$が粒子数としては熱化粒子より少ない状態を想定して非線形項$C_{\rm ff}(f_{\rm f}, f_{\rm f})$を落とすことがしばしばであった．しかし今後のITERでは中性粒子ビーム入射（NBI）による高速イオンにより核融合生成高速イオンの速度分布が非等方になる可能性が指摘されている．そのような高速イオンどうしの衝突による速度分布変化を示唆する実験結果が複数NBを用いた既存装置実験でも得られつつある事を紹介する．

3.2.2　加熱されたプラズマにおける熱化粒子衝突項

これは「古くて新しい」というこの小特集タイトルの「古い」話である．NBI加熱プラズマや燃焼プラズマのような高速イオンが存在する状態における熱化粒子の挙動を考えるには，高速イオン減速速度分布関数のようにMaxwell分布から著しくかけ離れた速度分布を場の粒子として取り扱うRosenbluthポテンシャルの計算方法が必要である．そのような計算式はジャイロ位相平均速度分布については論文[1]にRosenbluth, MacDonald, Judd（以下ではRMJという）が既に示していたのである．しかしこの式は，Review of Plasma Physicsなどを始めとするその後のCoulomb衝突項に関する解説書籍や新古典理論レビュー論文などに取り上げられる事がほとんど無く，非線形衝突項を考える研究者や，熱化粒子同士を扱う線形化衝突項でも場の粒子の速度分布として任意Legendre展開項数を取り入れようとする研究者（論文[2]

National Institute for Fusion Science, Toki, GIFU 509-5292, Japan

corresponding author's e-mail: nishimura.shin@nifs.ac.jp

など）にしか知られていなかった．こうなったのは古典及び新古典輸送理論の歴史が関係しており，場の粒子項 $C_{ab}(f_{a\mathrm{M}}, f_b)$ を含む問題の取り扱い手法としてBraginskiiの行列表現[3]が普及したからである．Braginskiiがこの行列要素を求める方法として示したのはLandau型表現にSonine多項式（一般化Laguerre多項式）$L_j^{(\alpha)}(K) \equiv (e^K K^{-\alpha}/j!)\,\mathrm{d}^j(e^{-K}K^{j+\alpha})/\mathrm{d}K^j$ の母関数を代入する方法であり，Rosenbluthポテンシャルという概念を経ずに行列要素 $\int v^l P_l(\xi) L_j^{(l+1/2)}(x_a^2)\, C_{ab}(v^l P_l(\xi) L_k^{(l+1/2)}(x_a^2) f_{a\mathrm{M}}, f_{b\mathrm{M}})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}$, $\int v^l P_l(\xi) L_j^{(l+1/2)}(x_a^2)\, C_{ab}(f_{a\mathrm{M}}, v^l P_l(\xi) L_k^{(l+1/2)}(x_b^2) f_{b\mathrm{M}})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}$ ［$P_l(\xi) \equiv (2^l l!)^{-1}\mathrm{d}^l(\xi^2-1)^l/\mathrm{d}\xi^l$：Legendre多項式，$\xi \equiv v_{\|}/v$, ${x_a}^2 \equiv m_a v^2/2T_a \equiv v^2/v_{\mathrm{T}a}^2$，$f_{a\mathrm{M}} \equiv n_a \pi^{-3/2} v_{\mathrm{T}a}^{-3} \exp(-x_a^2)$：Maxwell速度分布］が得られる．これを用いて運動論的問題を代数方程式に変換しようという考えは「新古典」以前の「古典」の時代に現れたが，「新古典」の時代になってからの1970年台にHirshmanとSigmarが複数イオン種状態の取り扱いのためにこれを積極的に応用し始め，その集大成が有名な論文[4]である．この代数的取り扱いはあくまでもテスト粒子種と場の粒子種がMaxwell分布に近づきそれぞれのエネルギー空間構造が有限項数Laguerre展開で近似できる場合の手法である．ビーム駆動電流[4]，燃焼炉心のブートストラップ電流[5]など，高速イオン存在下でのプラズマフローを考える時には場の粒子としてMaxwell分布から著しくかけ離れた高速イオン減速速度分布を扱うことになるので本来は使えない．しかしここでも論文[1]のようなポテンシャル計算式が必要であると広く認識されるには至らなかった．それは高速イオン駆動の電流を目的とする場合，熱化イオンフローを無視して電子フローだけ計算することでも一応用が足りて，その目的に電子－イオン衝突に関する小質量比（small-mass-ratio）近似が使えてしまったからである．1970～1990年台に高速イオンに関わる解析的理論を示した諸論文に $v_\mathrm{b}^2 \ll 2T_\mathrm{e}/m_\mathrm{e}$ の仮定がしばしば登場する一つの理由はこれである．しかしその後荷電交換分光がビーム駆動のイオンフローを調べる目的に使われるようになると[6]これだけでは済まないこととなった．更に将来の準対称配位実験ではこのフロー発生のみならずそれに伴うビーム駆動の径方向輸送[7, 8]も調べられることになろう．ここでは論文[1]の式をジャイロ位相平均に限らない一般的速度分布に拡張する形で球座標計算式を示すとともに，その幾つかの応用を示す．なお，本3.2節はCGS-Gauss系で記述する．

3.2.2.1　一般的速度分布に対するRosenbluthポテンシャル

次のRosenbluthポテンシャル定義式から出発する．

$$\mathcal{H}(f_b) \equiv \int \frac{f_b(\boldsymbol{v}')}{|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|}\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}', \quad \mathcal{G}(f_b) \equiv \int f_b(\boldsymbol{v}')\,|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}' \tag{3.2.1}$$

速度分布関数は球座標形式の速度空間座標(v, θ, ϕ)における次の球面調和関数による展開形で与えられると想定する．

$$\begin{aligned} f_b(\boldsymbol{v}) &= \sum_{l=0}^{\infty}\left[a_l^0(v) P_l(\cos\theta) + \sum_{m=1}^{l} P_l^m(\cos\theta)\{a_l^m(v)\cos(m\phi) + b_l^m(v)\sin(m\phi)\}\right] \\ &\equiv \sum_{l=0}^{\infty} f_b^{(l)}(v, \theta, \phi) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

［${P_l}^m(\xi) \equiv (1-\xi^2)^{m/2}\,\mathrm{d}^m P_l(\xi)\,\mathrm{d}\xi^m$：Legendre陪関数］次に$\boldsymbol{v}$，$\boldsymbol{v}'$の間のコサインを$z$とした時の

$$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|^{\pm 1} = (v^2 - 2vv'z + v'^2)^{\pm 1/2}, \quad z = \cos\theta\cos\theta' + \sin\theta\sin\theta'\cos(\phi-\phi')$$

には文献[9]のアイデアを応用し，Gegenbauer関数$C_n^{\nu}(z)$（$\nu = 1/2$の時に$C_n^{1/2}(z) = P_n(z)$）の母関数$(1-2hz+h^2)^{-\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{\nu}(z) h^n$（$|h| < 1$）を使ってLegendre多項式$P_n(z)$による展開表現とする．$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|^{-1}$はこの母関数その物であって，

$$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|^{-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{v}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\left(\frac{v'}{v}\right)^n & \text{for } \dfrac{v'}{v} < 1 \\ \dfrac{1}{v'}\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\left(\frac{v}{v'}\right)^n & \text{for } \dfrac{v'}{v} > 1 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

である．次に$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'|$はやや複雑な導出手順をとるが，その結論を示すと

$$|\boldsymbol{v}-\boldsymbol{v}'| = \begin{cases} v\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\left(\frac{v'}{v}\right)^n\left\{\frac{1}{2n+3}\left(\frac{v'}{v}\right)^2 - \frac{1}{2n-1}\right\} & \text{for } \dfrac{v'}{v} < 1 \\ v'\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} P_n(z)\left(\frac{v}{v'}\right)^n\left\{\frac{1}{2n+3}\left(\frac{v}{v'}\right)^2 - \frac{1}{2n-1}\right\} & \text{for } \dfrac{v'}{v} > 1 \end{cases} \tag{3.2.4}$$

となる．ここで

$$P_n(z)=P_n(\cos\theta)P_n(\cos\theta')+2\sum_{m=1}^{n}\frac{(n-m)!}{(n+m)!}P_n^m(\cos\theta)P_n^m(\cos\theta')\{\cos(m\phi)\cos(m\phi')+\sin(m\phi)\sin(m\phi')\} \tag{3.2.5}$$

であること[10]に注意する．式(3.2.2–5)を式(3.2.1)に代入し，球面調和関数の直交関係を利用した$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{v}'$積分を遂行すると以下の諸式が得られる．

$$\mathcal{H}(f_b)=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left\{\frac{1}{v^{l+1}}\int_0^v(v')^{l+2}f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)\mathrm{d}v'+v^l\int_v^{\infty}\frac{f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)}{(v')^{l-1}}\mathrm{d}v'\right\} \tag{3.2.6}$$

$$\frac{\partial\mathcal{H}(f_b)}{\partial v}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\left\{-\frac{1}{v^{l+2}}\int_0^v(v')^{l+2}f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)\mathrm{d}v'+lv^{l-1}\int_v^{\infty}\frac{f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)}{(v')^{l-1}}\mathrm{d}v'\right\} \tag{3.2.7}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathcal{G}(f_b)}{\partial v}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\Bigg\{&-\frac{l+1}{2l+3}\frac{1}{v^{l+2}}\int_0^v(v')^{l+4}f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)\mathrm{d}v'+\frac{l-1}{2l-1}\frac{1}{v^l}\int_0^v(v')^{l+2}f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)\mathrm{d}v'\\&+\frac{l+2}{2l+3}v^{l+1}\int_v^{\infty}\frac{f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)}{(v')^{l-1}}\mathrm{d}v'-\frac{1}{2l-1}v^{l-1}\int_v^{\infty}\frac{f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)}{(v')^{l-3}}\mathrm{d}v'\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.2.8}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\mathcal{G}(f_b)}{\partial v^2}=4\pi\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2l+1}\Bigg\{&\frac{(l+1)(l+2)}{2l+3}\frac{1}{v^{l+3}}\int_0^v(v')^{l+4}f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)\mathrm{d}v'-\frac{(l-1)l}{2l-1}\frac{1}{v^{l+1}}\int_0^v(v')^{l+2}f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)\mathrm{d}v'\\&+\frac{(l+1)(l+2)}{2l+3}v^l\int_v^{\infty}\frac{f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)}{(v')^{l-1}}\mathrm{d}v'-\frac{(l-1)l}{2l-1}v^{l-2}\int_v^{\infty}\frac{f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)}{(v')^{l-3}}\mathrm{d}v'\Bigg\}\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

これは論文[1]の積分公式を任意の球面調和関数(l,m)を含められるように拡張した物となっている．

3.2.2.2　応用例1: 線形化衝突項の場の粒子項の計算

この一つの応用先は線形化衝突項の内の，場の粒子項

$$C_{ab}(f_{a\mathrm{M}},f_b)=4\pi\left(\frac{e_ae_b}{m_a}\right)^2\ln\Lambda_{ab}f_{a\mathrm{M}}\frac{m_a}{T_a}\left\{\frac{4\pi T_a}{m_b}f_b-\mathcal{H}(f_b)+\left(\frac{m_a}{m_b}-1\right)v\frac{\partial\mathcal{H}(f_b)}{\partial v}+\frac{m_av^2}{2T_a}\frac{\partial^2\mathcal{G}(f_b)}{\partial v^2}\right\} \tag{3.2.10}$$

である．この表式はRMJ表現にMaxwell分布$f_a=f_{a\mathrm{M}}$を代入した上でPoisson方程式$\nabla_v^2\mathcal{H}(f_b)=-4\pi f_b$, $\nabla_v^2\,\mathcal{G}(f_b)=2\mathcal{H}(f_b)$, $\nabla_v^2\equiv\sum_\alpha\partial^2/\partial v_\alpha^2$を用いて得られる．高速イオン速度分布$f_{\mathrm{f}}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{v})$の存在下で$C_{a\mathrm{f}}(f_{a\mathrm{M}},f_{\mathrm{f}})$を含めた熱化粒子のドリフト運動論方程式（DKE）の解を求めるには，上記に述べたように当初Hirshman-Sigmarに提唱されその後一般的非対称トーラスにも拡張された，ピッチ角空間構造Legendre展開成分（特にその一次）のエネルギー空間構造に関するLaguerre展開係数の従う連立代数方程式を導く手順（本章論文[7]及び3.1章の論文[9, 22–23]）を取る．このためにDKE項のLaguerre展開係数が必要である．$C_{ab}(f_{a\mathrm{M}},f_b)$にそれを行う時は，不定積分公式

$$\int x^{2n+1}\exp(-a^2x^2)\mathrm{d}x=-\frac{\exp(-a^2x^2)}{2a^2}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!\,a^{2k}}x^{2(n-k)} \tag{3.2.11}$$

$$\begin{aligned}\int x^{2n}\exp(-a^2x^2)\mathrm{d}x&=-\frac{(2n-1)!!}{2a^2}\exp(-a^2x^2)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^{2n-2k-1}}{2^ka^{2k}(2n-2k-1)!!}+\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^{n+1}a^{2n+1}}\Phi(ax)\\&=-\frac{(2n-1)!!}{2a^2}\exp(-a^2x^2)\sum_{k=0}^{n-2}\frac{x^{2n-2k-1}}{2^ka^{2k}(2n-2k-1)!!}+\frac{(2n-1)!!\sqrt{\pi}}{2^na^{2n-1}}x^2G(ax).\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

を用いて$\int\mathrm{d}v$の部分積分を行う．ここで

$$\Phi(x)\equiv\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^xe^{-y^2}\mathrm{d}y=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)n!}x^{2n+1}$$

$$G(x)\equiv\frac{\Phi(x)-x\Phi'(x)}{2x^2}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+3)n!}x^{2n+1}$$

はそれぞれ誤差関数とChandrasekhar関数である．紙面の都合であまり広範囲のLegendre展開次数，Laguerre展開次数について$C_{ab}(f_{a\mathrm{M}},f_b)$展開係数を示す事はできないが，三例だけ示しておこう．より詳しくは論文[11]を参照されたい．

$$\begin{aligned}m_a\int v^2C_{ab}(f_{a\mathrm{M}},f_b)\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}&=-m_b\int v^2C_{ba}(f_b,f_{a\mathrm{M}})\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}\\&=32\pi^2\frac{n_a(e_ae_b)^2\ln\Lambda_{ab}}{m_a}\left(\frac{m_a}{2T_a}\right)^{1/2}\int_0^{\infty}\left\{x_aG(x_a)-\frac{m_a}{m_b}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp(-x_a^2)\right\}\left(\int_{-1}^{1}\overline{f}_b\mathrm{d}\xi\right)v^2\mathrm{d}v\end{aligned} \tag{3.2.13}$$

$$m_a\int v\xi C_{ab}(f_{a\mathrm{M}},f_b)\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}=-m_b\int v\xi C_{ba}(f_b,f_{a\mathrm{M}})\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}=8\pi^2\frac{n_a(e_ae_b)^2\ln\Lambda_{ab}}{T_a}\left(\frac{m_a}{m_b}+1\right)\int_0^\infty G(x_a)\left(\int_{-1}^1\xi\bar{f}_b\mathrm{d}\xi\right)v^2\mathrm{d}v \tag{3.2.14}$$

$$m_a\int v\xi L_1^{(3/2)}(x_a^2)\,C_{ab}(f_{a\mathrm{M}},f_b)\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}=24\pi^2\frac{n_a(e_ae_b)^2\ln\Lambda_{ab}}{T_a}\int_0^\infty\left\{\left(\frac{m_a}{m_b}+1\right)\frac{x_a}{\sqrt{\pi}}\exp(-x_a^2)-G(x_a)\right\}\left(\int_{-1}^1\xi\bar{f}_b\mathrm{d}\xi\right)v^2\mathrm{d}v \tag{3.2.15}$$

$[\bar{f}_b\equiv\int_{-\pi}^{\pi}f_b\mathrm{d}\phi/(2\pi)]$　式(3.2.13–14)においてはエネルギー・運動量保存のために場の粒子項$C_{ab}(f_{a\mathrm{M}},f_b)$とテスト粒子項$C_{ba}(f_b,f_{a\mathrm{M}})$の積分が一致しているが，テスト粒子項のこの種の積分手順については論文[12]を参照されたい．このような積分公式に$f_b=v^lP_l(\xi)L_j^{(l+1/2)}(x_b^2)f_{b\mathrm{M}}$を代入すると論文[3, 4]などに示されてきたBraginskii行列要素も再現する．これには部分積分で得られる漸化式

$$\int_0^\infty x_a^{2n+1}\Phi(x_b)\exp(-x_a^2)\,\mathrm{d}x_a=n\int_0^\infty x_a^{2n-1}\Phi(x_b)\exp(-x_a^2)\,\mathrm{d}x_a+\frac{v_{\mathrm{T}a}}{v_{\mathrm{T}b}}\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}\left(1+\frac{v_{\mathrm{T}a}^2}{v_{\mathrm{T}b}^2}\right)^{-(2n+1)/2} \tag{3.2.16}$$

と$\int_0^\infty x_a\Phi(x_b)\exp(-x_a^2)\,\mathrm{d}x_a=\frac{1}{2}\{1+(v_{\mathrm{T}b}/v_{\mathrm{T}a})^2\}^{-1/2}$を使う．また式(3.2.6–12)は，場の粒子種$b$が熱化粒子である場合には$C_{ab}(f_{a\mathrm{M}},v^lP_l(\xi)L_j^{(l+1/2)}(x_b^2)f_{b\mathrm{M}})$を知る目的にも使え，これもBraginskii[3]が示した行列要素導出手順では得られない事である．

3.2.2.3　応用例２：非線形衝突項による粒子種間エネルギー交換

もう一つの応用は非線形衝突項による粒子種間エネルギー交換である．非線形衝突項それ自体は複雑だが（線形化衝突項はLandauもしくはRMJのデカルト座標表現を球座標にする速度空間変数の変換で取り扱いやすくなるが，非線形のままでは座標の工夫をしても簡単にならない），そのエネルギー交換積分は簡単な式に帰着する．デカルト座標での部分積分を行い，Poisson方程式$\nabla_v^2\mathcal{G}(f_b)=2\mathcal{H}(f_b)$を使うと

$$\begin{aligned}
&\int v^2C_{ab}(f_a,f_b)\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}=-4\pi\left(\frac{e_ae_b}{m_a}\right)^2\ln\Lambda_{ab}\int v^2\frac{\partial}{\partial v_\alpha}\left(\frac{m_a}{m_b}f_a\frac{\partial\mathcal{H}(f_b)}{\partial v_\alpha}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{G}(f_b)}{\partial v_\alpha\partial v_\beta}\frac{\partial f_a}{\partial v_\beta}\right)\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}\\
&=8\pi\left(\frac{e_ae_b}{m_a}\right)^2\ln\Lambda_{ab}\int f_a\left\{\mathcal{H}(f_b)+\left(1+\frac{m_a}{m_b}\right)v\frac{\partial\mathcal{H}(f_b)}{\partial v}\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}\\
&=2\left(4\pi\frac{e_ae_b}{m_a}\right)^2\ln\Lambda_{ab}\sum_{l=0}^\infty\frac{1}{2l+1}\\
&\quad\times\int f_a\left\{-\left(\frac{m_a}{m_b}(l+1)+l\right)\frac{1}{v^{l+1}}\int_0^v(v')^{l+2}f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)\,\mathrm{d}v'+\left(\frac{m_a}{m_b}l+l+1\right)v^l\int_v^\infty\frac{f_b^{(l)}(v',\theta,\phi)}{(v')^{l-1}}\,\mathrm{d}v'\right\}\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}
\end{aligned} \tag{3.2.17}$$

が得られる．球面調和関数の直交性を使い$\int_0^\infty\mathrm{d}v$に関する部分積分を行うとこの式は

$$\begin{aligned}
&\int v^2C_{ab}(f_a,f_b)\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}=2\left(4\pi\frac{e_ae_b}{m_a}\right)^2\ln\Lambda_{ab}\sum_{l=0}^\infty\frac{1}{2l+1}\\
&\times\int\left\{\left(\frac{m_a}{m_b}l+l+1\right)\frac{1}{v^{l+1}}\int_0^v(v')^{l+2}f_a^{(l)}(v',\theta,\phi)\,\mathrm{d}v'-\left(\frac{m_a}{m_b}(l+1)+l\right)v^l\int_v^\infty\frac{f_a^{(l)}(v',\theta,\phi)}{(v')^{l-1}}\,\mathrm{d}v'\right\}f_b^{(l)}\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

とも書き換えられる．この事はエネルギー保存$\int v^2[m_aC_{ab}(f_a,f_b)+m_bC_{ba}(f_b,f_a)]\,\mathrm{d}^3\boldsymbol{v}=0$に対応している．$f_a=f_{a\mathrm{M}}$もしくは$f_b=f_{b\mathrm{M}}$を代入すれば線形化衝突項のエネルギー交換式(3.2.13)になることは言うまでもない．このf_a，f_bの片方が熱化粒子速度分布であってLegendre-Laguerre展開形で与えられているなら，それを含む$\int_0^v\mathrm{d}v'$，$\int_v^\infty\mathrm{d}v'$の不定積分には式(3.2.11–12)を用いる．更にもう片方も熱化粒子であるなら式(3.2.16)を用いてBraginskii行列要素と同様に熱速度比$v_{\mathrm{T}a}/v_{\mathrm{T}b}$の関数としての定積分値を得る．

3.2.3　非線形Coulomb衝突項

3.2.3.1　Coulomb衝突の非線形性

Coulomb衝突の非線形性とは，速度分布関数の非Maxwell成分同士のCoulomb衝突のことであり，速度分布関数の非Maxwell成分が大きい場合に顕著に現れる．このような状況は，外部加熱などによって，大量の高エネルギー粒子が供給される場合に生じるため，主に高エネルギー粒子の速度分布関数を評価する場合において，Coulomb衝突の非線形性が考慮される．加熱以外では，トカマクにおけるディスラプション時の逃走電子生成過程が例として挙げられる[13]．

例えば，中性粒子ビーム（NBI）によって生成されるNB高速イオンの速度分布関数について考える．このとき，ビームのガス種と，プラズマのイオン種は同じもので

あるとする．NB高速イオンは背景プラズマとのCoulomb衝突によって，減速・ピッチ角散乱される．通常，この過程は背景プラズマを構成する電子・イオンの速度分布をMaxwell分布であると仮定してFokker-Planck方程式を用いて計算される．しかし実際には，NB高速イオン自身によって，イオンの速度分布関数は非Maxwellな分布へと変形している．NB高速イオン同士のCoulomb衝突によって，NB高速イオンの速度分布関数はMaxwell分布を仮定した計算に比べて，速度方向・ピッチ角方向に広がった分布を形成する（5次元ドリフト運動論コードGNETによる計算例は文献[14]参照）．

高速イオンの速度・ピッチ角が変われば粒子軌道も変わり，結果として高速イオンの輸送も変わるため，高速イオン閉じ込めの正確な評価のためにはCoulomb衝突の非線形性を考慮することが必要である．しかし，既存の磁場閉じ込め装置では，背景プラズマの密度が高速イオン密度に比べて十分に高い場合が多く，この非線形性が重大な影響を及ぼす場面は限られている．

しかし，将来的に実現されるであろう核燃焼プラズマでは，Coulomb衝突の非線形性がプラズマに重大な影響を及ぼす可能性が考えられる．例えば，ITERのDT実験では，DT核融合反応生成物である3.5 MeVのα粒子と，加熱・電流駆動目的で用いられる1 MeVの重水素NBI由来の高速重水素イオンが数十keVの高温プラズマ中に共存することになる．Coulomb衝突の非線形性を考慮しない場合，熱イオン同士の核融合反応で生じるα粒子の速度分布関数はほぼ等方的な速度分布となる（**図1**(a) 粒子軌道による損失等を考慮しない場合）．しかしながら，3.5 MeVのα粒子と1 MeVの重水素NBIの速度比は$v_{\mathrm{He}}/v_{\mathrm{D}}\sim1.3$程度であるため，ビーム方向のピッチ角においては相対速度が非常に小さくなる．このため，ビーム方向のピッチ角において，重水素ビームイオンと高エネルギーα粒子とのCoulomb衝突が無視できなくなり，結果として，α粒子の速度分布関数が非等方なものへと変形される可能性がある．**図1**(b)は非線形Coulomb衝突によるα粒子速度分布関数の変形を示したものである．このような速度分布関数の非等方性や速度方向への正の勾配は，プラズマの不安定性を駆動することが知られており（高エネルギー粒子駆動不安定性に関してはレビュー論文[15, 16]や本誌小特集[17]参照），Coulomb衝突の非線形性がプラズマのエネルギー閉じ込め性能に影響を及ぼす可能性がある．

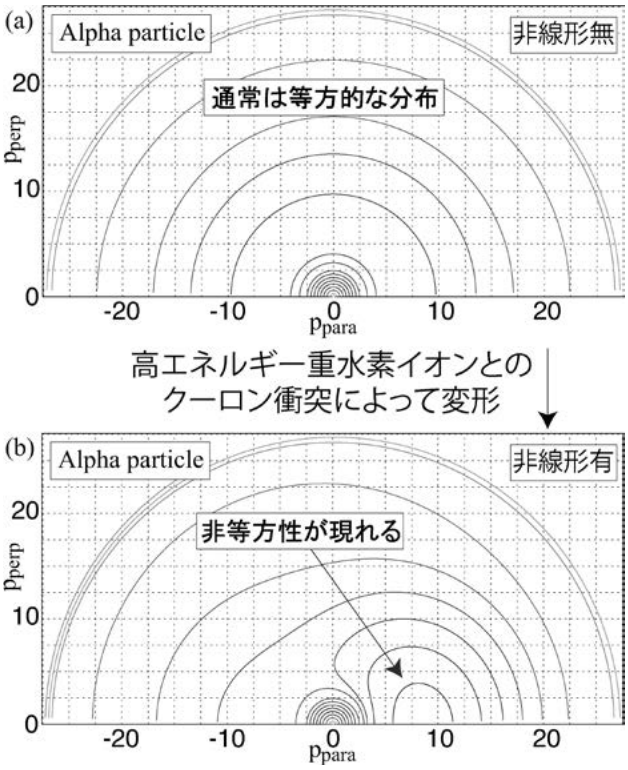

図1　TASK/FPを用いたモデル計算によって得られたα粒子の速度分布関数[18]．横軸は磁力線方向の運動量，縦軸は磁力線に垂直方向の運動量．簡単のため，磁場の不均一性による影響は考慮していない．

3.2.3.2　中性子減衰時間に対する非線形Coulomb衝突の影響

このようなCoulomb衝突の非線形性は大型ヘリカル装置（LHD）でも実験的に観測された．ここでは，LHDの重水素放電で行った実験を紹介する[18]．LHDの重水素放電では，ビームイオン--熱イオン間の核融合反応による中性子発生率（$S_{\mathrm{n}}\sim10^{14}-10^{15}\,\mathrm{s}^{-1}$）が熱イオン同士の核融合反応による中性子発生率（$S_{\mathrm{n}}\sim10^{11}-10^{12}\,\mathrm{s}^{-1}$）に比べて十分に大きい．また，ビームの入射エネルギーの範囲（$E_{\mathrm{inj}}\lesssim180$ keV）において，DD核融合反応の反応断面積は単調増加である．このことから，中性子発生率から高速重水素イオンの速度分布関数をある程度推定可能である．

LHDには3本の接線NBIが設置されている（**図2**）．この内，NB#1とNB#3が反時計回り方向，NB#2が時計回り方向である．この実験ではNB#1とNB#2は軽水素NB，NB#3が重水素NB, プラズマの主ガス種は重水素である．**図3**に示すように，重水素NBの入射によって，中性子発生率が増加し，定常状態に達する．重水素NBが切れると，それに伴い中性子発生率が減衰する．この中性

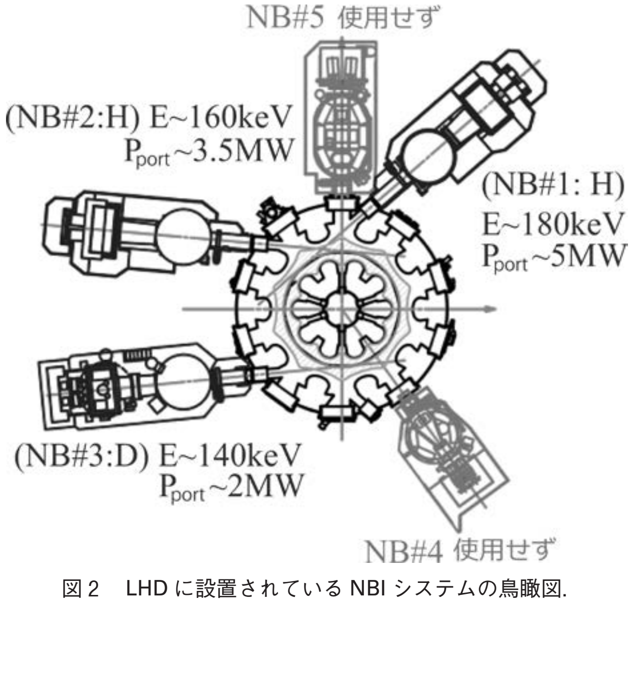

図2　LHDに設置されているNBIシステムの鳥瞰図．

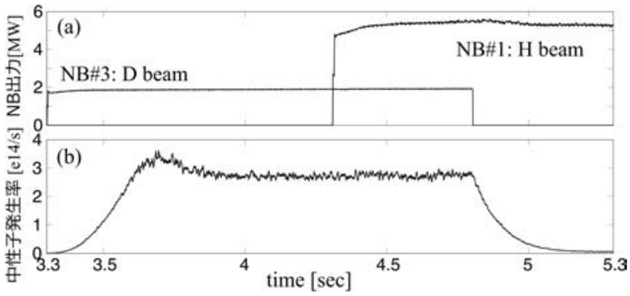

図3　典型的な放電波形．(a)は NB のポート出力，(b)は中性子発生率．この放電は重水素 NB と同方向の軽水素 NB を重畳した例．

子発生率の減衰は主に二つの要因に分けられる．

一つは重水素NB高速イオンの減速による核融合反応断面積の低下，もう一つは何らかの要因によるNB高速イオンの損失である．ビームの減速に起因する中性子発生率の減衰には解析的な時定数が与えられている[19, 20]．この時定数$\tau_{\mathrm{n}}^{\mathrm{cl}}$は以下の式で表される．

$$\tau_{\mathrm{n}}^{\mathrm{cl}}=\frac{\tau_{\mathrm{se}}}{3}\ln\left(\frac{E_0^{3/2}+E_{\mathrm{C}}^{3/2}}{E_1^{3/2}+E_{\mathrm{C}}^{3/2}}\right), \quad (3.2.19)$$

$$\tau_{\mathrm{se}}\equiv\frac{3m_{\mathrm{fast}}T_{\mathrm{e}}^{3/2}}{4\sqrt{2\pi}\,n_{\mathrm{e}}e^4m_{\mathrm{e}}^{1/2}\ln\Lambda} \quad (3.2.20)$$

ここで，τ_{se}は高速イオンの電子衝突による減速時間，E_0はNBの入射エネルギー，E_1はDD核融合反応断面積がE_0に対して$1/e$になるエネルギー，E_{C}は高速イオンの減速が電子衝突による寄与とイオン衝突による寄与が等しくなるエネルギー（いわゆる臨界エネルギー），$\ln\Lambda$は電子-イオン間のCoulomb対数である．ここでは純重水素プラズマを仮定し，$E_{\mathrm{C}}=18.6T_{\mathrm{e}}$とする．温度・密度の値には規格化小半径$\rho=0.3$での値を代表値として用いる．これは，中性子発生率の空間分布のピークが大体このあたりであるからである．

重水素NBに対し，同方向の軽水素NBを重畳した放電，逆方向の軽水素NBを重畳した放電，軽水素NBを重畳しない放電を行い，それぞれに対して密度スキャンを行った．解析解$\tau_{\mathrm{n}}^{\mathrm{cl}}$に対して中性子減衰時間の計測値$\tau_{\mathrm{n}}^{\mathrm{exp}}$を表示したものが**図4**である．まず，軽水素NBに依らず，全ての放電で$\tau_{\mathrm{n}}^{\mathrm{exp}}=\tau_{\mathrm{n}}^{\mathrm{cl}}$とはならない．これは重水素NB高速イオンに有限の損失時間があるためである（LHDにおけるこの損失時間については文献[21, 22]参照）．次に，重水素NBと同方向の軽水素NBを重畳した放電（丸）と逆方向の軽水素NBを重畳した放電（四角），軽水素NBを入射しない放電（ひし形）を比較すると，軽水素NBを重畳した放電では，他の2パターンに比べて計測値$\tau_{\mathrm{n}}^{\mathrm{exp}}$が伸びる傾向が現れている．軽水素NBの入射による重水素高速イオンの閉じ込め時間への影響は無いと考えると，中性子減衰時間の差は軽水素高速イオンと重水素高速イオン間のCoulomb衝突によって，重水素イオン速度分布関数が速度方向へ拡散するためであると考えられる．**図5**は3次元ドリフト運動論コードTASK/FPによる計算結果で，重水素NB方向のピッチ角($\theta\sim0.17$ radian)に対して，高速重水素イオンの速度分布関数を表示したものである．軽水素NB高速イオンとの非線形Coulomb衝突によって，重水素NB高速イオンの速度分布関数が，より高エネルギー側にテイルを伸ばしていることがわかる．この結果，TASK/FPによるシミュレーション上でも，中性子減衰時間に有意な差が現れる．

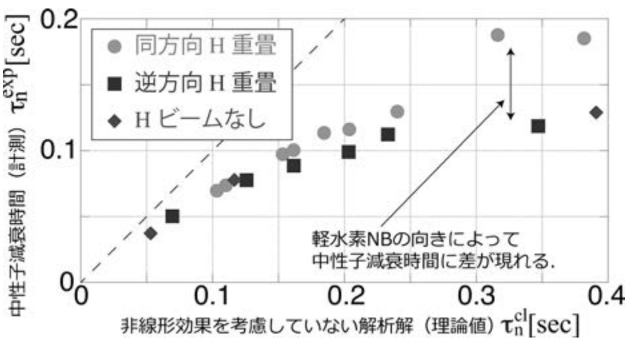

図4　中性子減衰時間の計測値（縦軸）と解析解（横軸）を重畳する軽水素 NB ごとに表示したもの．$\tau_{\mathrm{n}}^{\mathrm{cl}}$が長い放電ほどプラズマの密度は低い．

謝　辞

本章執筆には科学研究費助成事業18K03587の助成も受けました．

参 考 文 献

［1］M.N. Rosenbluth *et al.*, Phys. Rev. **107**, 1 (1957).
［2］A. Mollén *et al.*, Phys. Plasmas **22**, 112508 (2015).
［3］S.I. Braginskii, Sov. Phys. JETP **6**, 358 (1958).
［4］S.P. Hirshman and D.J. Sigmar, Nucl. Fusion **21**, 1079 (1981).
［5］C.T. Hsu *et al.*, Phys. Fluids B **4**, 4023 (1992).
［6］K. Ida, Plasma Phys. Control. Fusion **40**, 1429 (1998).
［7］K. Nishioka *et al.*, Phys. Plasmas **23**, 032511 (2016).
［8］M. Nunami *et al.*, Plasma Fusion Res. **12**, 1203039 (2017).

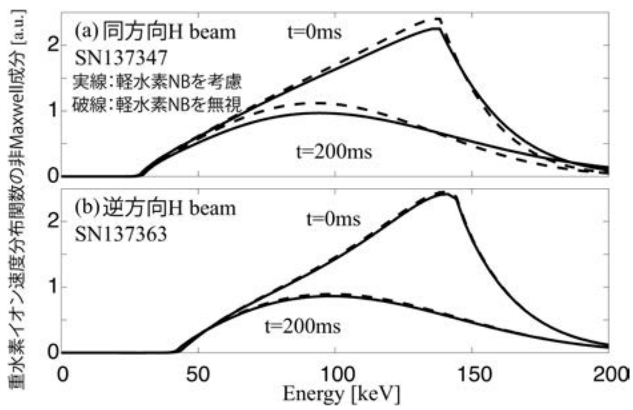

図5　TASK/FP によって計算された重水素イオンのエネルギーに対する高速重水素イオン速度分布関数．(a)は重水素 NB と同方向の軽水素 NB を重畳した放電，(b)は逆方向の放電．実線は軽水素 NB 高速イオンとの非線形衝突を考慮した場合，破線は軽水素 NB 高速イオンとの非線形衝突を考慮しない場合．時刻 $t=0$は重水素 NB を切った時刻を意味する．

[9] I.P. Shkarofsky *et al.*, *The Particle Kinetics of Plasmas* (Addison-Wesley, Massachusetts, 1966), Chap.7.
[10] 例えばA. Erdélyi *et al.*, *Higher Transcendental Functions* Vol.1 (McGraw-Hill Book, New York, 1953), Chap.3.
[11] S. Nishimura, Phys. Plasmas **22**, 122503 (2015), **23**, 029901 (2016).
[12] S. Nishimura *et al.*, Phys. Plasmas **22**, 092505 (2015).
[13] A. Stahl *et al.*, Comput. Phys. Commun. **212**, 269 (2017).
[14] K. Tahara *et al.*, Phys. Plasmas **30**, 082505 (2023).
[15] W.W. Heidbrink *et al.*, Nucl. Fusion **34**, 535 (1994).
[16] N.N. Gorelenkov *et al.*, Nucl. Fusion **54**, 125001 (2014).
[17] 永岡賢一：プラズマ・核融合学会誌 **97**, 281-285 (2021).
[18] H. Nuga *et al.*, Nucl. Fusion **59**, 016007 (2019).
[19] J. Strachan *et al.*, Nucl. Fusion **21**, 67 (1981).
[20] W. Heidbrink *et al.*, Nucl. Fusion **28**, 1897 (1988).
[21] H. Nuga *et al.*, J. Plasma Phys. **86**, 815860306 (2020).
[22] H. Nuga *et al.*, Plasma Fusion Res. **16**, 2402052 (2021).

J. Plasma Fusion Res. Vol.100, No.7 (2024) 328-333

小特集 古くて新しい新古典輸送理論の新展開

3．新古典輸送計算の実際　～近似モデルと新展開～

3. Neoclassical Transport Calculations in Practice: Approximate Models and New Developments

3.3　大域的新古典計算の多粒子種プラズマへの適用

3.3 Application of Global Neoclassical Calculation to Multi-Species Plasma

藤田慶二
FUJITA Keiji
名古屋大学大学院 理学研究科

（原稿受付：2024年２月21日）

電子やバルクのイオンとは大きく異なる物理パラメータを持つ不純物イオンの輸送に関しては，従来の新古典輸送モデルで一般的に用いられてきた近似の妥当性が破れる場合があり，大型ヘリカル装置（LHD）で観測されている未解明現象である不純物ホールの形成は，その顕著な一例であると考えられている．本節では，この現象のメカニズム解明を1つの目標として行われている，大域的効果や磁気面上のポテンシャル構造の組み込みといった，多粒子種プラズマの新古典輸送モデルおよび計算手法の拡張に関する近年の研究について紹介する．

Keywords:
impurity transport, impurity hole, stellarator, LHD, ambipolar radial electric field

3.3.1　不純物輸送

核融合プラズマには，重水素イオンや三重水素イオンといった核融合反応に直接寄与する燃料粒子（あるいはそれを模擬した水素イオン）の他に，装置の素材に由来する炭素原子や金属原子などがプラズマに混入し，イオン化する．こうしたイオン種は，不純物イオンと総称される．

その呼び名の通り，不純物イオンは核融合炉の運転にとって不要なばかりか，核融合プラズマの維持や核融合反応の効率に対して深刻な悪影響も及ぼす．最も深刻な例が，制動放射によって，プラズマのエネルギーを吐き捨ててしまうことである．その放射エネルギーは電荷数Zとともに大きくなるため，高Zの金属イオンが混入すると，著しいエネルギー損失が起こり，プラズマが一気に冷えてしまう．一方で，そうした性質を逆手に取り，不純物イオンのガスをプラズマの周辺部に吹き込むことで，装置壁をプラズマの熱から守るといった活用のされ方も研究されている．しかし，このように負の側面を防ぎつつ，不純物イオンを有益な形で利用するには，不純物イオンの振る舞いを理解し，制御できなくてはならない．ところが，不純物イオンの振る舞いは，メインのイオンと比べても理解が浅く，未だ理論的に捉えられていない側面も多い．そのことを示す顕著な例が，LHDで観測されている不純物ホール現象である[1, 2]．

3.3.1.1　不純物の新古典輸送と不純物ホール現象の観測

不純物ホールとは，プラズマ小半径方向の座標rに沿った電場（径電場E_r）が内側（小半径中心側）を向いている状況下で，不純物イオンがプラズマ中心部で形成する，窪んだ（ホローな）分布形状を指している．この特徴的な分布は，電荷数Zの大きな不純物ほど効果的に形成されることがわかっている[3]．シンク項に対応するような不純物の排出機構がない中で，中心部の分布がホローになっていくということは，不純物イオンが外側方向，つまり径電場とは逆方向に輸送されていることを示しているが，これは従来の素朴な理論予測に真っ向から反しており，研究者の注意をひくこととなった．

新古典輸送流束は，その駆動力を用いて

$$\Gamma_a = -\sum_b \left[D_{11}^{ab} \left(\frac{n_b'}{n_b} - \frac{Z_b e E_\mathrm{r}}{T_b} \right) + D_{12}^{ab} \frac{T_b'}{T_b} \right] \qquad (3.3.1)$$

と表すこともできる．ここでa，bは粒子種のラベル，n_bおよびT_bは密度と温度で，プライム（$'$）はそのr微分を示している．駆動力の選択には任意性があるため，本節では第２章での定義(2.18b)とは異なる駆動力の定義を採用しており，それに対応する輸送係数をD_{ij}^{ab}で表している．

粒子種間の相互作用を考慮に入れるため，式(3.3.1)の和はすべての粒子種にわたって取るが，粒子種a自身の電荷数Z_aが大きければ，Z_aに比例する径電場の項が支配的

Nagoya University, Nagoya, AICHI 464-8601, Japan

author's e-mail: fujita.keiji.x6@f.mail.nagoya-u.ac.jp

となり，極端な場合は

$$\Gamma_a \simeq D_{11}^{aa} \frac{Z_a e E_{\mathrm{r}}}{T_a} \tag{3.3.2}$$

と，電荷と径電場の積に比例する形に近似できる．D_{11}^{aa}は拡散係数で，常に正の値を取る．するとイオンの場合，右辺のうちE_{r}を除く量はすべて正の値しか取らないため，粒子束の向きは径電場E_{r}の向きによって決定される．これが，不純物イオンの新古典輸送に関する素朴な予測である．それゆえ，径電場が内向き（$E_{\mathrm{r}}<0$）でありながら，電荷の大きな不純物イオンほど外向きに輸送されることを示す不純物ホールの観測は驚きであったのである．

3.3.1.2　乱流による輸送の可能性

新古典輸送の予測が大きく破られたことに対する1つの自然な反応は，新古典輸送以外の輸送を疑うことである．2章で述べられている通り，核融合プラズマ中では，新古典輸送に加え，乱流に起因する輸送も生じる．そして，正味の流束は，新古典輸送による流束Γ^{NC}と乱流に起因する流束Γ^{turb}の和として

$$\Gamma_a = \Gamma_a^{\mathrm{NC}} + \Gamma_a^{\mathrm{turb}} \tag{3.3.3}$$

と表される（改めて，これら2つの流束の独立性については次章で議論されるが，当面これらの寄与を独立に計算することが妥当であると仮定して話を進める）．そのため，仮に新古典流束Γ_a^{NC}が負であっても，乱流流束Γ_a^{turb}がそれを凌ぐ大きさで正の値を取れば，正味の流束は正の値になる．こうしたことから，文献[4]では，炭素イオンの不純物ホールが観測されたプラズマパラメータに対し，線形計算の値に基づく準線形の炭素C^{6+}乱流流束を計算したが，その値は負であった．その後，文献[5]では，観測値を中心に，温度や密度の勾配を広範に変更し，それぞれの場合について非線形のシミュレーションを行い流束の値を調べた．しかしこの研究の結果も，不純物ホールが観測されるような典型的な条件下では，乱流輸送によるC^{6+}粒子束は内向きになることを示していた．

3.3.1.3　径電場分布

文献[5]では，不安定化するのはイオン温度勾配（ion temperature gradient, ITG）モードで，装置半径aで規格化した径座標$\rho=r/a\in[0,1]$を用いると，$0.4<\rho<0.7$辺りであれば十分不安定になりうるという結果を得ているが，この研究で対象としている放電で不純物ホールが最も深くなるのは$\rho<0.4$の領域である．この研究がもう1つ示唆するのは，少なくともそれよりも外側の領域では，径電場は負ではなく正なのではないか，ということである．輸送のスケールから見て背景分布の時間変化が無視できるような準定常な状態では，新古典流束と乱流流束を合わせた正味の流束が$\Gamma_a=\Gamma_a^{\mathrm{NC}}+\Gamma_a^{\mathrm{turb}}\simeq 0$となる必要があるが，この研究の計算結果によれば径電場が負であると，このバランスが成り立たないためである．

径電場が正であるというのは観測と矛盾するのではなかろうか？実はそうでもない．ある観測[6]では，不純物ホールが形成される領域（$\rho<0.5$）での径電場の値は確かに負であるものの，それよりも外側では正に遷移していることが示されている．一方で，背景パラメータの観測値から新古典輸送シミュレーションによって得られた径電場の分布は，プラズマ中心から端まで一貫して負の値を取るものだった．つまり，この新古典輸送シミュレーションの結果は，プラズマ中心部では確かに妥当なものの，それよりも外側の値は実験値と大きく異なっている．

小半径の中心よりも外側の正電場の直接的影響で，径電場の値が負の内側領域にある不純物が外向きに駆動されるということは考え難い．しかしこの電場分布のずれは，少なくとも計算に用いた新古典モデルにはまだ不完全な部分が残っており，3.1節で言及されたような近似や仮定の再検討が必要であることを示唆している．

3.3.2　不純物輸送解析に向けた新古典モデルの再考

3.3.2.1　局所近似とΦ_0近似の再検討

3.1節で言及された近似のうち，ここでは局所近似と，磁気面上で静電ポテンシャルが一様であるという近似について検討する．

典型的な不純物ホールプラズマは高温で低密度であるが，そのようなプラズマでは，径方向ドリフトによる大域的効果が重要になり，局所近似が破綻する傾向にある[7]．そして，バルクイオンの振る舞いの違いは，径電場の分布の違いとして現れ，不純物の輸送にも著しい影響を与えうる．上述の，観測と局所近似モデルによる数値計算とで径電場分布が大きく異なるという事実は，大域的効果の必要性を強く示唆している．

静電ポテンシャルの一様性に関する仮定についても，磁気面上の非一様ポテンシャル，Φ_1，は値としては小さくとも，高Zの不純物イオンにとっては無視できない量になりうるため，再検討が必要である．すでにΦ_1の効果を含めた新古典輸送計算が行われており[8-12]，その結果，確かにΦ_1の有無により，不純物イオンの輸送にはっきりとした違いが出ることが確認された．ただその効果は，元々内向きであった不純物の流束をさらに内向きに駆動するもので，不純物ホール現象を説明するような兆候は見られなかった．

とはいえ，これらの計算はすべて局所近似モデルを用いて行われたものである．Φ_1の構造を決めるのは磁気面上の電子とイオンの分布の偏りであり，主な寄与をするのはバルクイオンである．そして上述のように，不純物ホールプラズマ中ではバルクイオンの振る舞いに大域的効果が大く影響していることが推測される．そのため，Φ_1の効果を適切に評価するためにも大域的効果を含んだ計算が必要であることが示唆される[13]．

3.3.2.2　Φ_1を含めた大域的モデル

こうした背景から，我々は大域的ドリフト運動論コードであるFORTEC-3D[14]を拡張し，Φ_1の効果を含んだ多イオン種プラズマの大域的計算を可能にした[15,16]．そして，局所近似モデルを用いたいくつかの先行研究同様，炭素C^{6+}の不純物ホールが観測されている水素プラズ

マを模擬し，計算を行った．それによって得られた第一の成果は，局所モデルによる計算と同じ背景分布を用いた計算の結果，領域全体で負の値を取る径電場ではなく，実験的に観測されているように，小半径に沿って負から正に遷移する径電場分布が得られたことである．さらに，径電場は負の領域でも，炭素の粒子束は外向きになることも確認された[16]．

これらは，Φ_1の効果を含めていない場合でも得られた結果であるが，Φ_1を入れた場合，外向きの炭素の粒子束はより強く駆動されることがわかった．一方，背景パラメータをいくつか人為的に変更し，炭素の粒子束が内向きになった場合を調べると，Φ_1は炭素流束をより内向きに駆動することが確かめられた[17]．

また，この大域的新古典計算の結果は，先述した乱流輸送計算の結果[5]と比較しても，妥当性の高いものであることが示された．つまり，水素や炭素イオンの新古典流束と乱流流束が同オーダーかつ逆負号であることにより，背景密度分布の変化が，計算対象としている現象よりも十分ゆっくりであるという仮定に整合する．

Φ_1が不純物イオンを駆動する方向は，主に水素の密度分布の磁気面上での偏りで決まるΦ_1の位相と，炭素密度の磁気面上の分布の重なり合いによって決まる．そのため，Φ_1が不純物流束の方向を変えず，大きさを増やすという性質は，この計算結果に限らない一般的なものといえる[17, 18]．よって，Φ_1それ自体では，不純物ホールの形成を説明できそうにはない．しかし，Φ_1を含めた計算の方が，乱流による流束との釣り合いの精度が高く，粒子束の定量的な見積もりの精度を上げるには，Φ_1を含める必要があることが計算により示唆された（**図1**）．また，電荷が大きいほどΦ_1の影響を受けやすいため，高Zの不純物ほど効果的に不純物ホールを形成するという性質には，このΦ_1による影響が関与している可能性もある．

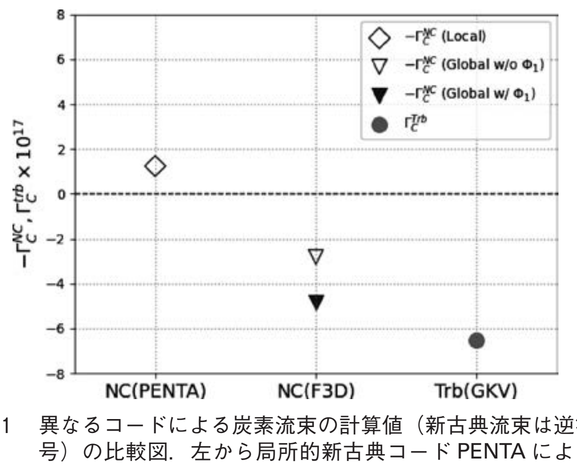

図1　異なるコードによる炭素流束の計算値（新古典流束は逆符号）の比較図．左から局所的新古典コード PENTA による新古典流束，大域的新古典コード FORTEC-3D（F3D）による新古典流束（白抜きが Φ_1を含めない場合，塗りつぶしが Φ_1を含めた場合の値），そしてジャイロ運動論的コード GKV による，乱流流束である．なお，乱流流束の値は[5]の結果に，フラックスマッチングと呼ばれる補正を施した値である．

3.3.3　結果の分析

3.3.3.1　物理的解釈

大域的コードによる計算の結果，径電場が負でも，不純物ホール領域内で炭素イオンが外向きになりうることが確認できた．式(3.3.1)の右辺を見ると，径電場以外に流束を駆動するのは，密度勾配と温度勾配である．不純物ホール領域では，炭素自身の密度勾配は負であるから，径電場同様に流束を内向きに駆動する．また，他のイオン種の密度はほぼ平坦であるため，不純物の流束にはほとんど寄与しない．すると，径電場（および炭素の密度勾配）の駆動に逆らって，外向きに炭素を駆動しうるのは，温度勾配しかない．実際に，不純物ホールプラズマは中心部での大きな温度勾配に特徴づけられるもので，この計算結果は，その駆動力としての影響が，径電場の影響に匹敵することを示している．そして，わずかでも外向きの流束を実現できれば，静電ポテンシャルの磁気面上での非一様性が流束をより強く外側に駆動する．これにより，不純物ホールの形成は，新古典輸送理論の枠組み内で説明できる見込みが高まってきた．

しかし，上記の結果は，$Z=6$の炭素イオンについて得られた結果であることに注意しないといけない．核融合プラズマ中には，鉄やタングステンといった，電荷がより大きな不純物イオンが含まれる．そして，実験的には電荷の大きな不純物イオンほど，不純物ホールを効果的に形成すること，すなわちより強く外側に駆動されることが確認されている．ところが，径電場の影響は電荷Zに比例することは先述べたとおりである．対して，温度勾配の影響が電荷に比例して大きくなるという一般的な性質はない．したがって，拡張したシミュレーションモデルによる計算で，炭素イオンでは径電場の影響と温度勾配の影響が同程度になったとしても，電荷がより大きな不純物イオンでは結局径電場の影響が勝ってしまい，実験とは矛盾する結果が得られるように思える．

3.3.3.2　高衝突領域の不純物輸送

そこで考えられるのが，衝突頻度の影響である．新古典輸送を流体的なレベルで分解した式(2.22）を思い出すと，径電場の影響は，装置の大円方向の対称性の欠如（非軸対称性）を反映する粘性項に由来するのであった．しかし，衝突頻度が増してくると，衝突による摩擦項の影響が支配的になって，軸対称な装置における状況に近づく．そして，いくつかの条件が満たされる理想的な場合には，径電場の影響が完全に消失する．これは，式(3.3.1)において，径電場の係数がゼロになること，すなわち

$$\sum_b \frac{Z_b}{T_b} D_{11}^{ab} = 0 \tag{3.3.4}$$

となることに対応する．これは通常，電子の影響が無視できる場合に起こりうる．また，イオン種はすべて同じ温度を持つと想定できるため，ある不純物イオン種zに対して，径電場の係数が消失する条件は

$$\sum_I Z_I D_{11}^{zI} = 0 \tag{3.3.5}$$

となる．添え字Iはイオン種を意味している．加えて，上に述べた理想的な状況とは，バルクイオンが$1/\nu$領域にあり，かつ装置が最適化配位と呼ばれる新古典輸送を抑制するよう設計された装置であるか，磁気ドリフトに比べて$E\times B$ドリフトが十分大きいこと，そしてまた，Φ_1の振幅が非常に小さいといった条件が満たされる状況である[19-23].

文献[22]は，問題の条件下における不純物輸送の解析的な表現を導き，Φ_1の存在（に対する不純物イオン密度の応答）が，径電場の係数のキャンセルにどう影響を与えるか調べている．その結果，わずか（$e\Phi_1/T_I\sim5\times10^{-3}$）でも$\Phi_1$が含められることで係数のキャンセルは阻まれ，負の径電場により高Zなイオンほど内向きに強く駆動されてしまうというものであった．ただし，この計算ではΦ_1がなく，径電場の係数が完全にキャンセルする場合でも，不純物の流束が内向きになるパラメータ領域の計算であったことや，Φ_1を含めた場合でも$Z=24$のケースで，わずかながら外向きになるパラメータの組み合わせがあったこともあり，この結果からは，Φ_1が含まれれば径電場の係数はキャンセルせず，必ず不純物流束は内向きになる，といった単純な結論は得られない（先述の通り，Φ_1は流束の向きを変えず大きさを強める傾向にある）．また解析的な表現を導く際に不純物の自己衝突の影響を無視していたり，Φ_1を局所コードで求めていることなど，大域的コードで自己無撞着に計算を行った場合に結果が変わってくる見込みは多分に残されている．

いずれにしても，現実のプラズマでは，これらの条件がすべて完全には満たされることはないから式(3.3.4)の右辺が厳密に0にはなることはほぼないであろう．しかしそれでも，部分的なキャンセルであれば期待はできる．通常であれば径電場の影響がより大きくなると考えられる高Zの不純物ほど，その係数が小さくなりうるというこの効果が不純物ホールプラズマ中で働いているならば，不純物ホール現象の電荷依存性を説明する助けになるかもしれない．

3.3.4 電荷依存性の分析

3.3.4.1 輸送係数の評価

上で述べた，高衝突領域にある不純物イオンに対して，径電場の正味の係数が小さくなるという性質が不純物ホール現象に関与しているのか．この可能性を検証するためには，輸送係数を評価する必要がある．しかし，FORTEC-3Dは，式(3.3.1)の右辺のように，駆動力の線形和の形ではなく，左辺の流束の値を

$$\Gamma_a=\left\langle\int \mathrm{d}^3v\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}\cdot\nabla r\delta f_a\right\rangle \tag{3.3.6}$$

のように分布関数を積分して求める手法に基づいている．ここで，$\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}$は式(2.6)で定義されるドリフト速度である．

そのため，それぞれの駆動力がどのように流束に寄与しているのかを直接評価して確かめることができない．

同じ数値手法でも，局所近似モデルであれば，この点は容易に克服できた．というのも，径電場さえ与えれば，輸送係数が依存するのは温度や密度といった背景パラメータそのものの値であって，それらの勾配には依存しない．そのため，温度や密度などのパラメータの値をそのままに，特定のパラメータの勾配を0に設定して計算すれば，その勾配に対応する駆動力を除いた場合の流束が計算できる．これを繰り返すことで，任意の輸送係数を求めることができる．しかし，プラズマ領域全体を同時に計算する大域的モデルでは，このようなパラメータの操作は許されない．それに，局所近似モデルと比べ大きな計算コストを要求する大域的モデルでは，1ケース毎に複数回の計算が必要となる手法は効率の観点から見ても採用しづらい．

そこで我々は，大域的モデルにも適用できる計算法を新たに考案してコードに組み込んだ[24,25]．その方法は，流束の2つの表現式(3.3.1)と式(3.3.6)を解析的につなぐ表現を採用することだ．新古典輸送は，時間変化の意味でも，空間的非一様性の度合いの意味でも，比較的穏やか背景パラメータの勾配に駆動される輸送を扱う．これはミクロな観点から見ると，分布関数の局所平衡からのわずかなずれが

$$\delta f_a=\sum_b\sum_j \delta g_{ab,j}\,X_{b,j} \tag{3.3.7}$$

のように書けることを示唆している．ここで

$$X_{b,1}=\frac{n_b'}{n_b}-\frac{Z_beE_\mathrm{r}}{T_b},\quad X_{b,2}=\frac{T_b'}{T_b}$$

は駆動力で，$\delta g_{ab,j}$はそれらに対する応答を表している．

展開式(3.3.7)を式(3.3.6)に入れれば，式(3.3.1)が得られる．このとき輸送係数は

$$D_{jk}^{ab}=-\left\langle\int \mathrm{d}^3vx_a^{j-1}\boldsymbol{v}_{\mathrm{d}a}\cdot\nabla r\delta g_{ab,k}\right\rangle$$

によって計算される．ここで$x_a=m_av^2/(2T_a)$.

従来の計算手法では，式(3.3.7)の左辺に対応する量を計算していたが，右辺の各成分$\delta g_{ab,j}\,X_{b,j}$を計算するようにすることで，大域的コードであるFORTEC-3Dでも，輸送係数が評価できるようになった．

ただし，$\delta g_{ab,j}$もE_r依存するため，式(3.3.7)は見かけ通り駆動力に対する厳密に線形な応答とはなっていないことには注意しないといけない．また，大域的モデルは磁気面と垂直な方向への粒子移動を考慮に入れているため，厳密にいえば，ドリフト運動論方程式にはそれに対応する項が含まれ，その結果プラズマの密度や温度の径方向の分布に変化が起こりうる．しかし，通常の古典輸送計算の対象は，背景分布の勾配が緩やかなプラズマにおける，背景パラメータの変化よりも十分速いスケールでの現象である．大域的効果はむしろ，粒子の捕捉，非捕捉の振る舞いを正しく評価するための役割が大きい．そのため，背景パラメータの勾配が十分緩やかであれば，局所近似と同様に，式(3.3.7)のような展開が成立する．

3.3.4.2 衝突演算子の改良

これにより，大域的効果を含んだ輸送係数の計算が可能になった．しかし，それだけではまだ十分ではない．高衝突領域の輸送を正しく取り扱うには，衝突項の改良も必要である．現在FORTEC-3Dで採用されている衝突演算子は，高Z不純物が属するような高衝衝突領域の計算に適していないためである[26]．この点を克服し，電荷数Zや衝突領域に対する径電場係数の分布のようなものが計算できるようになれば，不純物ホール現象の電荷依存性に関する上述の仮説がようやく検証可能になる．

その結果，実際に径電場の係数のキャンセルにより，高Zの不純物イオンの方が効果的な掃き出しが起こること（少なくとも[3]によって実験的に示されたように，炭素C^{6+}よりもネオンNe^{10+}の方が効果的に掃き出されること）が大域的数値計算で再現できれば，不純物ホール現象のメカニズムの大部分を説明できたといえるようになるかもしれない．

しかし，最後に簡単に触れるように，不純物イオンの輸送に潜在的な影響を与える効果を持つ因子は他にも存在しており，高衝突領域における輸送係数の評価が，別のシナリオを模索する必要性を示す可能性も，まだ十分残っている．

3.3.5 本小節のまとめ

複数イオン種計算用に拡張された大域的モデルの応用例として，LHDで観測されている不純物ホールプラズマの解析を行った．その結果，実験と質的に一致する小半径に沿って負から正に径電場分布と，不純物ホールが形成される領域で外向きであり，かつ乱流計算とも整合するオーダーの炭素流束が得られた．また，静電ポテンシャルの磁気面上の非一様成分Φ_1は乱流流束との粒子バランスを向上させた．これらは局所近似モデルでは得られなかった成果であり，ある条件下では，新古典輸送において大域的効果が決定的に重要になるということを，実験結果や異なる輸送過程との比較を以て明確に示すものとなった．

これらの結果のみでは不純物ホール現象のメカニズムを完全に明かしたとは言えないが，今後の研究の指針を与えるものとして，次のようなシナリオが浮かび上がってきた．径電場による駆動力は，ある程度の大きさの電荷を持つ不純物イオンには超えられるはずのない障壁であるというのが，従来の新古典モデルから得られる素朴な印象であった．しかし，衝突頻度の十分高い不純物にとってその寄与は，衝突の効果によって径電場の係数が小さくなることにより，条件によっては無視できるほど小さなものになりうる．そして，ひとたび大きな温度勾配による駆動が，正味の径電場の駆動を凌げば，磁気面上の非一様ポテンシャルΦ_1の効果で，電荷の大きな不純物イオンほど強く外向きに吐き出され，深い不純物ホールが形成される．中心部を離れれば電場は正であるから，その領域で径電場の係数がわずかでも残れば（完全にキャンセルすることは考え難い），それ以上内側に侵入してくる不純物はなく，ホローな分布が維持されやすくなる．

しかし，これまで大域的モデルで計算できた不純物イオンは（バルクイオンに近い振る舞いをする$Z=2$のヘリウムを除けば）$Z=6$の炭素イオンのみである．それ以上Zが大きく高衝突領域に属する高Zイオンを含めた計算を行いこのシナリオを検証するためには，衝突項の改良が必要である．また，次章で議論されるような乱流との相互作用が不純物ホール形成に関与している可能性も排除できていない．他にも，中性ビーム入射（NBI）が誘導するポテンシャルの非一様性[27]や，NBIによるトルクの効果[28, 29]，慣性力など，不純物イオンの輸送に無視できない影響を与える可能性はあるが，十分検証されていない要因はいくつも残されている．

参 考 文 献

[1] K. Ida *et al.*, Phys. Plasmas **16**, 056111 (2009).
[2] M. Yoshinuma *et al.*, Nucl. Fusion **49**, 062002 (2009).
[3] M. Yoshinuma *et al.*, NIFS Report NIFS-965, National Inst. for Fusion Science (2010).
[4] D.R. Mikkelsen *et al.*, Phys. Plasmas **21**, 082302 (2014).
[5] M. Nunami *et al.*, Phys. Plasmas **27**, 052501 (2020).
[6] T. Ido *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **52**, 124025 (2010).
[7] B. Huang *et al.*, Phys. Plasmas **24**, 022503 (2017).
[8] J.M. García-Regaña *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **55**, 074008 (2013).
[9] J.M. García-Regaña *et al.*, Nucl. Fusion **57**, 056004 (2017).
[10] J.M. García-Regaña *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **60**, 104002 (2018).
[11] A. Mollén *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **60**, 084001 (2018).
[12] J.L. Velasco *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **60**, 074004 (2018).
[13] K. Fujita *et al.*, Plasma Fusion Res. **14**, 3403102 (2019).
[14] S. Satake *et al.*, Nucl. Fusion, **45**, 1362. (2005).
[15] S. Satake *et al.*, Comput. Phys. Commun. **255**, 107249 (2020).
[16] K. Fujita *et al.*, Nucl. Fusion **61**, 086025 (2021).
[17] K. Fujita *et al.*, J. Plasma Phys. **86**, 905860319 (2020).
[18] I. Calvo *et al.*, J. Plasma Phys. **84**, 905840407 (2018).
[19] P. Helander *et al.*, Phys. Rev. Lett. **118**, 155002 (2017).
[20] S.L. Newton *et al.*, J. Plasma Phys. **83**, 905830505 (2017).
[21] S. Buller *et al.*, J. Plasma Phys. **84**, 905840409 (2018).
[22] I. Calvo *et al.*, Nucl. Fusion **58**, 124005 (2018).
[23] M.F. Martin and M. Landreman. J. Plasma Phys. **86**, 905860317 (2020).
[24] K. Fujita and S. Satake. Plasma Fusion Res. **17**, 1403065 (2022).
[25] K. Fujita and S. Satake. Phys. Plasmas **29**, 123903 (2022).

[26] H. Sugama *et al.*, Phys. Plasmas **26**, 102108 (2019).
[27] H. Yamaguchi and S. Murakami. Nucl. Fusion **58**, 016029 (2017).
[28] Y. Nakamura *et al.*, Nucl. Fusion **57**, 056003 (2017).
[29] M. Nunami *et al.*, Plasma Fusion Res. **12**, 1203039 (2017).

J. Plasma Fusion Res. Vol.100, No.7 (2024) 334-338

小特集 古くて新しい新古典輸送理論の新展開

4. 新古典輸送と乱流輸送の相互作用

4. Interaction between Neoclassical and Turbulent Transport

今寺賢志
IMADERA Kenji
京都大学大学院 エネルギー科学研究科

（原稿受付：2023年12月7日）

これまで新古典輸送と乱流輸送はスケール分離を仮定してそれぞれ個別に取り扱うことが多かったが，Larmor 半径程度のミクロスケールから小半径程度のマクロスケールまでを第一原理的に取り扱える大域的ジャイロ運動論モデルが進展するとともに，両者の相互作用が明らかとなってきている．本章ではそのような新古典輸送と乱流輸送の相互作用について，現在進行形で進められている研究の最前線の話題についていくつか紹介する．

Keywords:
neoclassical transport, turbulent transport, global gyrokinetic simulation, particle transport, momentum transport

4.1 緒言

磁場核融合プラズマの閉じ込め性能は，本小特集の本題である新古典輸送に加え，微視的不安定性に由来した乱流輸送（異常輸送）によっても大きく左右される．一般に両者は，ジャイロ運動に伴う平均化効果（有限Larmor半径効果）を保持しつつ，その旋回中心座標における速度分布関数の時間発展を，実空間で大域的に追跡するいわゆる「大域ジャイロ運動論モデル」[1]によって統一的に記述できる．しかしながら，乱流輸送現象の時空間スケールは新古典輸送現象に比べて短いため，両現象を直接同時に取り扱うシミュレーションを実行するためには膨大な計算資源が必要となる[2]．そこでこれまでは，$\delta=\rho_{\rm i}/L$（$\rho_{\rm i}$：イオンジャイロ半径，L：背景分布の径方向の特性長）に関して1次のオーダーの粒子種sの分布関数f_{s1}を，ランダムな乱流揺動に関して統計平均（アンサンブル平均）した成分$\langle f_{s1}\rangle_{\rm ens}$とそのまわりの揺動部分$\tilde{f}_{s1}$を用いて$f_{s1}=\langle f_{s1}\rangle_{\rm ens}+f_{s1}$と分解して，それぞれの時間発展を追跡することで，新古典輸送と乱流輸送を個別に評価してきた[3]．結果として前者は，電磁場の時間変化がδに関して2次の微小量として評価されていることから，磁場ドリフトに起因した定常的な新古典輸送成分を与える「ドリフト運動論モデル」に帰着される．一方後者は更に，磁力線を横切る方向の乱流揺動の相関長が巨視的なプラズマのサイズに比べて十分小さいと仮定することで，閉じ込め磁場や密度，温度などの平衡分布の値とそれらの勾配を一定とする局所近似を用いた「局所ジャイロ運動論モデル」に帰着されることが多く，この場合，磁場ドリフトによる輸送が0となり，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ドリフトによる非定常的な乱流輸送成分のみが与えられる．

これらの独立した計算によって得られた新古典輸送と乱流輸送の総和によって輸送を評価する方法は，スケール分離を利用した妥当なアプローチであると考えられてきたが，近年，両者の相互作用が重要となる物理現象がいくつか報告されている．例えばその1つが，両極性条件によって決定される径電場形成である．スケール分離した解析では，それぞれ独立した両極性条件$\sum_s q_s\Gamma_s^{\rm neo}=0$, $\sum_s q_s\Gamma_s^{\rm turb}=0$（$q_s$：粒子種$s$の電荷，$\Gamma_s^{\rm neo}$：粒子種$s$の新古典粒子束，$\Gamma_s^{\rm turb}$：粒子種$s$の乱流粒子束）を満たすが，ひとたび大域的ジャイロ運動論モデルに立ち返ると，旋回中心座標における両極性条件は

$$-\sum_s \frac{\rho_{\rm ts}^2}{\lambda_{\rm Ds}^2}\frac{\partial E_{\rm r}}{\partial t}=4\pi\sum_s q_s(\Gamma_s^{\rm neo}+\Gamma_s^{\rm turb}) \tag{4.1}$$

となり，両者は径電場$E_{\rm r}$の形成を介して相互作用する可能性がある（$\lambda_{\rm Ds}$：粒子種sのデバイ長，$\rho_{\rm ts}$：熱速度で与えられる粒子種sのジャイロ半径）．また，形成される径電場は，帯状流と同様に微視的乱流に対して作用することから，再帰的な相互作用も無視できない．

そこで近年，上述のように分布関数をスケール分離することなく，「大域的ジャイロ運動論モデル」に沿って第一原理的に解析するいわゆる全分布関数（full-f）ジャイロ運動論シミュレーションを行うことで，新古典輸送と乱流輸送を自己無撞着に取り扱う試みが行われている．本章ではそのような両者の相互作用に関して，full-fジャイロ運動論シミュレーションによって現在進行形で行われている研究の最前線についていくつか紹介する．

Graduate School of Energy Science, Kyoto University, Uji, KYOTO 611-0011, Japan
author's e-mail: imadera.kenji.7z@kyoto-u.ac.jp

4.2 不純物輸送における新古典輸送と乱流輸送の相互作用

高価数の不純物に対しては新古典粒子輸送が重要であることが知られているが，その過程において乱流輸送との相互作用が果たす役割について解析するため，フランスのCEAのグループによって開発されたfull-fジャイロ運動論コードGYSELA[4]によって，バルクイオンとして重水素，トレーサー不純物としてヘリウム，ネオン，またはタングステンを用いた断熱電子を仮定したfull-fジャイロ運動論シミュレーションが行われた[5]．特に，(A)非軸対称成分を各タイムステップで0とすることで新古典輸送のみを考慮したシミュレーション，(B)異粒子間衝突を0とすることで乱流輸送のみを考慮したシミュレーション，(C)(A)や(B)のようなフィルタリングを用いない包括的なシミュレーションを行うことで，(A)と(B)の不純物輸送の和が(C)と一致するかを解析した．その結果，半径位置によっては2倍のオーダーで不一致が見られた．これは乱流によるReynolds応力に起因した$(m, n) = (1, 0)$のモードが原因であると結論付けられており（mとnはそれぞれポロイダル，およびトロイダル方向のモード数），新古典輸送と乱流輸送の相互作用の重要性がfull-fジャイロ運動論シミュレーションで初めて報告された．

また井戸村氏によって開発されたfull-fジャイロ運動論コードGT5D[6]によって，バルクイオンとして重水素，トレーサー不純物としてヘリウム，ベリリウム，炭素，またはアルゴンを用いたハイブリッド電子[7]を仮定したfull-fジャイロ運動論シミュレーションが行われた．その結果，非両極性径電場を介した乱流輸送と新古典輸送の相互作用が明らかとなった[8]．**図1**は，乱流輸送によって新古典輸送が増幅される物理機構を示している．まずイオン温度勾配（ITG）乱流による突発的な粒子輸送がイオンと電子で異なることによって，非両極性が生じる(**図1**(a))．その結果，**図1**(b)に示すように$(m, n) = (0, 0)$の径電場E_rが形成され，ポロイダル方向に$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ドリフト$v_{E,\theta} = -E_r/B = -(1 + r\cos\theta/R_0)E_r$をもたらす．ここで，$r$と$R_0$はそれぞれプラズマの小半径と大半径を表す．この$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ドリフトがポロイダル方向に圧縮性を有していることから，**図1**(c)に示す$(m, n) = (1, 0)$の密度揺動が過渡的に励起され，その位相が磁場ドリフトと一致することで，磁場ドリフトに起因した新古典輸送が増幅されることが明らかとなった．また，その振幅は質量が大きい不純物ほど大きく，向きは乱流粒子輸送におけるイオンと電子の粒子束の違いを相殺するように決まることが示された．したがって，タングステンのような高Z不純物を取り扱う場合，このような相乗効果が本質的な役割を果たすことが予想される．

4.3 新古典輸送と乱流輸送の相互作用によるバルクイオンの粒子ピンチ

また，京都大学において開発されたfull-fジャイロ運動論コードGKNET[9]によって，前節で述べた乱流輸送と新古典輸送の相互作用と同様の物理メカニズムで，バルクイオン密度分布のピーキングが起きることが示された[10]．**図2**は，軽水素とハイブリッド電子を用いたfull-f

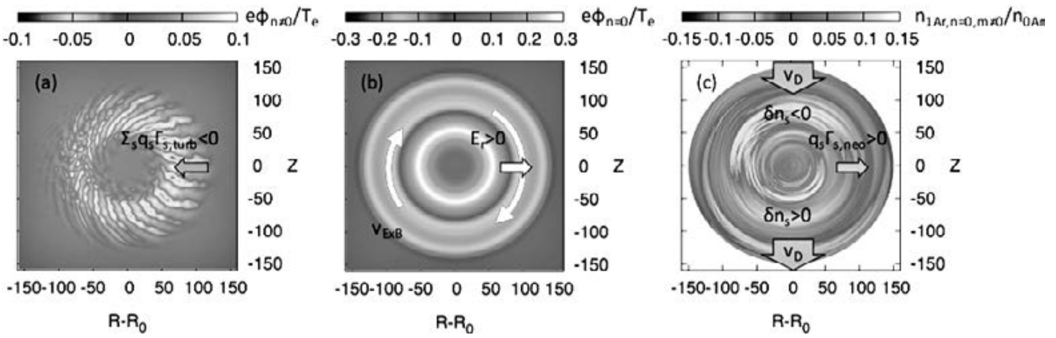

図1 乱流輸送によって新古典輸送が増幅される物理機構．(a)突発的な乱流粒子輸送が駆動された際の乱流構造，(b)その際に形成される非両極性径電場，(c)アルゴン不純物の摂動密度分布をそれぞれ示している[8]．

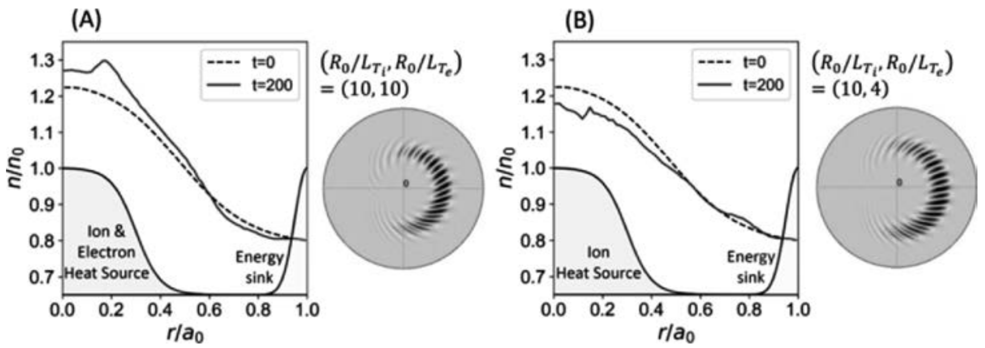

図2 軽水素とハイブリッド電子を用いたfull-fジャイロ運動論シミュレーションにおいて，初期温度勾配を(A)$(R_0/L_{T_i}, R_0/L_{T_e}) = (10, 10)$としてイオン/電子加熱を行った場合と，(B)$(R_0/L_{T_i}, R_0/L_{T_e}) = (10, 4)$としてイオン加熱のみを行った場合に得られたイオン密度分布．熱ソースとエネルギーシンクの半径分布がそれぞれの図内に，対応する線形δfジャイロ運動論シミュレーションで得られた$n = 15$の固有関数が右側に示されている．

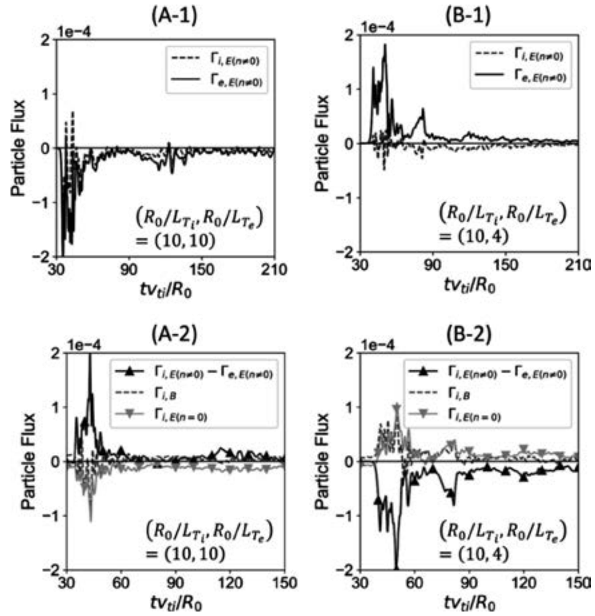

図3 (A-1)(B-1)(A)と(B)における $n\neq0$ の $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフトによるイオン / 電子乱流粒子束の時間発展と，(A-2)(B-2)(A)と(B)における $n\neq0$ の $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフトによるイオン／電子乱流粒子束の総和と，磁場ドリフトと $n=0$ の $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフトによる新古典粒子束の時間発展．

ジャイロ運動論シミュレーションにおいて，初期温度勾配を(A)$(R_0/L_{T_i}, R_0/L_{T_e})=(10,10)$としてイオン/電子加熱を行った場合と，(B)$(R_0/L_{T_i}, R_0/L_{T_e})=(10,4)$としてイオン加熱のみを行った場合に得られたイオン密度分布を示している．(B)では密度分布が外向きの粒子束によって緩和している一方，(A)では密度ピーキングが起きていることがわかる．また**図1**に示されている固有関数から，両ケースにおいて正のバルーニング角を持つITGモードが励起されており，線形成長率も同レベルであることが明らかとなった．これは，モードの種類やその不安定の強さのみで粒子輸送の向きが決定していないことを示唆している．

図3(A-1)と(B-1)は，(A)と(B)における$n\neq0$の$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ドリフトによる乱流粒子束の時間発展を，イオン成分と電子成分に分けて示している．(A)では，急峻なイオン/電子温度勾配によって負の非対角熱拡散項を介して強いイオン／電子粒子ピンチが駆動され，その後も一定のレベルで粒子ピンチが維持されていることがわかる．一方で(B)では，イオン粒子束は同様に若干負に振れているのに対して，電子粒子束は電子温度勾配が緩やかであるため正の対角拡散項が支配的となり，結果として外向きの粒子輸送になっていることがわかる．

図3(A-2)と(B-2)は，(A)と(B)における磁場ドリフトと$n=0$の$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ドリフトによる新古典粒子束の時間発展を示している．先述したGT5Dで得られた結果[8]で示されているように，乱流粒子輸送がイオンと電子で異なることによって形成された$(m,n)=(0,0)$の径電場E_rが，$(m,n)=(1,0)$の密度揺動を過渡的に励起することで，磁場ドリフトに起因した新古典輸送が増幅されていることがこの結果でも確認された．またその向きは，$\Gamma_i^{\mathrm{turb}}-\Gamma_e^{\mathrm{turb}}(\neq0)$ を相殺するように，つまり粒子束の総和が0となるように(A)では内向き，(B)では外向きになっていることがわかる．加えて，$n=0$の$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ドリフトによる粒子輸送もまた，粒子束の総和が0となるように決定されていることが新たにわかった．これは$(m,n)=(1,0)$の対流セルが主に担っており，磁場ドリフトによる粒子輸送は非線形飽和後に0に漸近するが，$n=0$の$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ドリフトによる粒子輸送は飽和後も有限のレベルを維持し，継続的な密度変化に影響を与えていると考えられる．したがって，イオン加熱によってイオンの乱流粒子ピンチを直接的に駆動することに加え，電子加熱によって電子の乱流粒子ピンチを駆動することで，両極性条件を介して間接的にイオンの新古典粒子ピンチをもたらし，相乗的な密度ピーキングが達成できることが明らかとなった．この現象もまた，まさに乱流輸送と新古典輸送の相互作用が重要な役割を果たしている一例であると言える．

4.4 新古典径電場と乱流輸送の相互作用

新古典輸送と乱流輸送が相互作用する別のメカニズムとして，径電場が乱流輸送に与える影響が挙げられる．一般に径電場は，衝突の時間スケールで力学的平衡

$$E_\mathrm{r}-v_\varphi B_\theta+v_\theta B_\varphi=\frac{1}{nq}\frac{\partial p}{\partial r} \tag{4.2}$$

を介して決定される．ここで，q，n，p，E_rはそれぞれ電荷，密度，圧力，径電場，v_θ，v_φ，B_θ，B_φはそれぞれポロイダル流速，トロイダル流速，ポロイダル磁場，トロイダル磁場である．軸対称トカマクのように新古典輸送が両極性を有する場合（2.4章），ポロイダル流速は$v_\theta=k(v_*)\partial_\mathrm{r}T$で与えられることが知られており，$k(v_*)$は新古典輸送理論によって決定されることから，本章では(4.2)式の関係を満たす長時間スケールの径電場を「新古典径電場」と呼ぶ（T:温度，v_*:規格化衝突周波数）[11]．局所ジャイロ運動論モデルでは一般にこの新古典径電場が考慮されていない一方，ドリフト運動論モデルでは乱流を取り扱っていないことから，新古典径電場と乱流の相互作用を自己無撞着に考慮するためにはfull-fジャイロ運動論シミュレーションを行う必要がある．

そのような相互作用が重要となる例として，メゾスケールの乱流輸送現象に対する新古典径電場の役割が挙げられる．GT5Dによって，外部熱源で駆動されるITG乱流に関するfull-fジャイロ運動論シミュレーション，いわゆる熱源駆動ITGシミュレーションが行われ，臨界温度勾配近傍でイオン温度分布の硬直性が発現し，熱輸送の大部分が雪崩的に径方向に伝播していることが確認された[12]．その際に形成される電場は主に力学的平衡を介して形成される新古典径電場であり，結果として，雪崩的な熱輸送の伝播に伴い，温度勾配と径電場も局所的な力学的平衡を満たしながら伝播することが明らかとなった．またその伝播方向は，径電場シアの正負によって決定されることも示されており，新古典径電場が大域的な乱流輸送に大きな影響を与えていることがわかった．そのよ

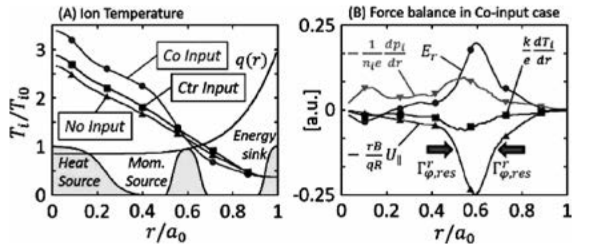

図4　(A)$r = 0.6a_0$に外部から運動量を順方向，逆方向に入射した場合と入射しなかった場合の準定常状態におけるイオン温度分布．(B)外部から運動量を順方向に入射した場合の力学的平衡に現れる各項の空間分布[9].

うな特性はGYSELAやGKNETによる熱源駆動ITGシミュレーションにおいても確認されており，特に熱輸送の雪崩的伝播の空間的な特性長を決定付ける構造として，"$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ staircase"と呼ばれる局所的な輸送障壁の存在が示されている[13, 14].

またそのような新古典径電場は，乱流による運動量フラックスの向きを変えることがGT5Dによる熱源駆動ITGシミュレーションで明らかとなっている[15]．これは乱流のポロイダル対称性が新古典径電場によって変化することで，運動量フラックスの乱流成分が変化するためである．加えて，軸対称極限では十分に小さい運動量フラックスの新古典成分が，乱流揺動によって大幅に増大し，準定常状態では乱流成分とバランスすることが明らかとなった．

またGKNETによる熱源駆動ITGシミュレーションによって，そのような新古典径電場と乱流の相互作用を介して，内部輸送障壁が形成されることが示されている[9]．**図4**(A)は，熱源駆動ITGシミュレーションにおいて$r = 0.6a_0$（a_0は最外殻磁気面の小半径）に外部から運動量をプラズマ電流の向きに対して順方向，逆方向に入射した場合と入射しなかった場合の準定常状態におけるイオン温度分布を示している．順入射の場合のみ内部輸送障壁が形成され，イオン乱流熱輸送係数が新古典輸送レベルまで低下することが明らかとなった．この傾向はHL-2A装置における弱磁気シアプラズマでの実験結果と定性的に一致している[16]．また**図4**(B)は，順方向入射した場合の力学的平衡における各項の空間分布を示している．この結果から，順方向の運動量入射によって力学的平衡を介して強い径電場シアが形成され，内部輸送障壁が形成されたものと考えられる．順入射が輸送障壁形成に有効である物理メカニズムは，文献[16]で提唱されているように，非局所バルーニング理論[17]と運動量輸送理論[18]から説明することが可能である．非局所バルーニング理論によると，磁気シアが正の場合，正（負）の径電場シアは負（正）のバルーニング角を与える．一方，運動量輸送の残留応力成分は，負（正）のバルーニング角の場合に正(負)の運動量輸送をもたらす．したがって，**図3**(B)に示す様に，順回転入射の場合，急峻な運動量分布が保持されるように運動量ピンチが発生し，結果として強い径電場シアが形成されたものと考えられる．このように，新古典径電場によって乱流輸送が抑制され，内部輸送障壁が形成される現象もまた，両者の相互作用が重要な役割を果たす一例であると言える．

4.5　結言

本章では，full-fジャイロ運動論シミュレーションで新古典輸送と乱流輸送を自己無撞着に取り扱うことによって明らかとなったいくつかの物理現象について紹介した．まず4.2節と4.3節では，乱流によるReynolds応力や，乱流粒子輸送によって上下ポロイダル非対称な構造が駆動された結果，新古典粒子輸送が増幅されるケースについて紹介した．なお，乱流によるReynolds応力は新古典熱輸送も増大させることが，GYSELAによる熱源駆動ITGシミュレーションで明らかとなっている[19]．一方4.4節では，新古典径電場が雪崩的な乱流熱輸送の伝播や，運動量輸送に影響を与えるケースについて紹介し，輸送障壁形成にも寄与することを述べた．

以上の結果は，乱流の時間スケールで新古典輸送が過渡的に増大すること，ないし乱流の時間スケールで過渡的に形成された新古典径電場が乱流輸送に影響を与えることが原因であると考えられる．つまり，衝突の時間スケールより短い乱流の時間スケールで巨視的な構造が変化する場合は，スケール分離が成立せず，両者の相互作用を無視できないことがわかる．ただしそのような場合，実験やシミュレーションにおいて輸送を新古典成分と乱流成分に切り分けることは容易ではなく，軸対称性だけでない，より精緻な定義が必要である点には，注意が必要である[20].

近年の計算機性能の大幅な向上に伴い，イオンスケールと電子スケールを同時に解くマルチスケールジャイロ運動論シミュレーションが可能となってきたが[21]，新古典輸送と乱流輸送を同時に解くという意味でのマルチスケールfull-fジャイロ運動論シミュレーションが，今後新たな物理を切り開くことを期待する．

謝　辞

本記事の執筆にあたって，有益なコメントをいただいた京都大学の石澤明宏教授，武藤幹弥氏，ならびに日本原子力研究開発機構の井戸村泰宏氏に深く感謝いたします．本稿の作成は，科学研究費［基盤研究（C）：20K03903］の援助を得て行われました．

参 考 文 献

［1］J. Brizard and T. S. Hahm, Rev. Mod. Phys. **79**, 421 (2007).
［2］X. Garbet *et al.*, Nucl. Fusion **50**, 043002 (2010).
［3］プラズマ・核融合学会編：プラズマシミュレーション（京都大学学術出版会，2018）.
［4］V. Grandgirard *et al.*, Comput. Phys. Commun. **207**, 35 (2016).
［5］D. Estève *et al.*, Nucl. Fusion **58**, 036013 (2018).
［6］Y. Idomura *et al.*, Comput. Phys. Commun. **179**, 391 (2008).
［7］Y. Idomura, J. Comput. Phys. **313**, 511 (2016).

[8] Y. Idomura *et al.*, Phys. Plasmas **28**, 012501 (2021).
[9] K. Imadera and Y. Kishimoto, Plasma Phys. Control. Fusion **65**, 024003 (2023).
[10] K. Imadera *et al.*, *29th IAEA Fusion Energy Conference, London* (2023).
[11] F.L. Hinton and R. D. Hazeltine, Rev. Mod. Phys. **48**, 239 (1976).
[12] Y. Idomura *et al.*, Nucl. Fusion **49**, 065029 (2009).
[13] G. Dif-Pradalier *et al.*, Phys. Rev. E **82**, 025401 (2010).
[14] W. Wang *et al.*, Nucl. Fusion **58**, 056005 (2018).
[15] Y. Idomura, Phys. Plasmas **21**, 022517 (2014).
[16] D.L. Yu *et al.*, Nucl. Fusion **56**, 056033 (2016).
[17] Y. Kishimoto *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **40**, A663 (1998).
[18] Y. Camenen *et al.*, Nucl. Fusion **51**, 073039 (2011).
[19] Y. Asahi *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **61**, 065015 (2019).
[20] H. Sugama *et al.*, Phys. Plasmas **29**, 052509 (2022).
[21] S. Maeyama *et al.*, Nat. Commun. **13**, 3166 (2022).

J. Plasma Fusion Res. Vol.100, No.7 (2024) 339-340

小特集 古くて新しい新古典輸送理論の新展開

5．おわりに

5. Summary

前山伸也
MAEYAMA Shinya
核融合科学研究所

（原稿受付：2024年2月21日）

本小特集では，新古典輸送理論に関する最近の研究の進展について取り上げた．本小特集を締めくくるに当たり，各章の内容を振り返ってみよう．

第2章では，新古典輸送に対する概要を振り返った．新古典輸送理論は輸送オーダリングが成立するようなゆっくりとした時間変化を持つ平衡分布関数の摂動［式(2.4)］を記述する理論であり，閉じ込め磁場のトロイダル性に起因するドリフト運動の非等方性とCoulomb衝突による摩擦のバランスとして生じる非等方圧力テンソルが引き起こす輸送現象［式(2.22)］である．標準的な新古典輸送理論で用いられる仮定として，平衡分布の空間変化は乱流揺動の波長に比べて緩やかであるとするドリフトオーダリングの下では，新古典輸送と乱流輸送は分離して記述できる［式(2.19)］．輸送だけでなく，新古典トロイダル粘性によるトロイダル回転の影響，ブートストラップ電流による自発電流なども記述する．また，線形化Coulomb衝突項の持つ保存則や自己随伴性の性質から導かれる新古典輸送の本質的両極性（intrinsic ambipolarity）とOnsager対称性についても触れた．

第3.1章では，ドリフト運動論方程式の数値解法に用いられる種々の近似について説明した．磁気面上の静電ポテンシャル変位，磁場ドリフトの有限軌道幅による非局所効果，最低次Maxwell平衡からのずれによる衝突項の非線形効果や保存則の数値的保証，速い平均流の有無といった物理モデルや近似の違いが存在し，現在も研究対象となっている．局所・非局所計算モデルの比較の例として，両極性径電場の解析結果を示し，磁気ドリフト軌道の磁気面からのずれを抑制するような新古典最適化配位に近い場合は局所近似モデルで定量的に十分な精度の計算が可能であること，ただし径電場の正負が入れ替わる近傍では局所近似モデルでは解が一意に定まらない一方，大域モデルでは自然に一方の解に収束するなどの違いがあること［図3.1.1］が示された．

第3.2章では，Maxwell平衡の仮定が成り立たない場合の例として加熱されたプラズマを取り上げた．ビームイオンなどがあり平衡速度分布がMaxwell分布からかけ離れている場合には，非Maxwell平衡分布を場の粒子として取り扱うRosenbluthポテンシャルの計算に立ち戻る必要があることが述べられた．また，非Maxwell分布効果を非線形Coulomb衝突項として数値的に扱う手法の進展についての一例として，大型ヘリカル装置（LHD）における中性粒子ビーム（NBI）入射の問題を取り上げた．高速イオンとの非線形Coulomb衝突による高エネルギー側に伸びたテイル形成によって生じると予想される中性子減衰時間の変化が実験的にも観測された．

第3.3章では，大域モデルに加えて磁気面上非一様静電ポテンシャルが重要となるLHDにおける不純物ホール形成の問題を取り上げた．局所モデルでは実験と一致しなかった径電場分布が大域モデルでは記述できること，磁気面上非一様な静電ポテンシャルが高価数不純物の新古典輸送を増大させ，乱流輸送との定量比較においては考慮する必要があることを明示した．また，さらに高価数に対する依存性を調べるには高衝突周波数領域に対する衝突演算子の改良が必要となることも課題として挙げられた．

第4章では，従来仮定される短波長・高周波の乱流輸送と長波長・低周波の新古典輸送というスケール分離が成立しない例について，大域的ジャイロ運動論シミュレーションに基づく報告がなされた．乱流揺動の持つ短い時間スケールで長波長変動が生じることで，空間スケールの分離が成り立たなくなり，両者の相互作用が無視できなくなる．4.2節では乱流から新古典への影響として，乱流揺動による密度のポロイダル方向非一様性によって新古典輸送が過渡的に増大する現象が述べられた．4.3節では，両極性拡散の乱流・新古典分離が成り立たない例が示された．また，4.4節では新古典から乱流への影響として，新古典的に形成される径電場が乱流の雪崩的伝搬や運動量輸送に与える影響が述べられた．

非専門家の一部には，「新古典輸送理論はすでに80年代には体系化され，トカマクにおける理論との良好な一致が確認されるなど，標準的な理論が完成されている」との誤解があるかもしれない．しかしながら，本小特集で取

National Institute for Fusion Science, Toki, GIFU 509-5292, Japan

author's e-mail: maeyama.shinya@nifs.ac.jp

り上げたように，長年デファクト・スタンダードとされてきた標準理論にはそこで用いた仮定による適用限界があり，非Maxwell平衡・有限軌道幅による非局所・磁気面上不均一静電ポテンシャルの寄与・乱流-新古典輸送相互作用といった，従来モデルでは説明できない現象も近年報告されている．この点で，新古典輸送理論を発展させていくことの必要性は論を待たないだろう．一方，現時点での取り組みとして，非専門家が従来モデルに基づく新古典輸送コードを解析ツールとして利用する場合を想定すると，「結局，これまでの新古典輸送解析を置き換える必要があるのか？それはどのような場合か？」ということは関心事であろう．各章の振り返りでも述べた通り，非局所性は磁場ドリフト有限軌道幅の磁気面からのずれが大きい“3次元磁場配位”において影響が出やすく，第3.1章では“両極性径電場の分岐・遷移現象”の評価に違いが出る例が示された．また，“ビーム成分を持つ加熱プラズマ”においては非Maxwell平衡によるCoulomb衝突の非線形効果を考慮すべき場合があることが第3.2章で例示された．磁気面上非一様静電ポテンシャルは“高価数不純物”に対しては輸送を増大させる傾向があり，第3.3章の例では最大2-3割の輸送増大が示された．第4章で議論された乱流が新古典的輸送に影響を与える状況の例として，“高価数不純物”や“輸送障壁”がある場合などが該当する．いずれにしても，従来モデルで用いられている仮定が成立しているか注意する必要がある．逆に言えば，標準的仮定が破れているような実験条件を精査していくことは，新古典輸送理論の研究をさらに深めていくことに貢献するものであり，読者自身の新たな気づきや研究のタネにもつながると期待される．

最後に，本小特集をまとめるにあたり，お忙しい中執筆いただいた著者の先生方に感謝し，終わりの言葉とさせていただきます．

小特集執筆者紹介

佐竹真介（さたけ しんすけ）

自然科学研究機構 核融合科学研究所 構造形成・持続性ユニット・准教授．長らく新古典輸送シミュレーション研究に携わってきましたが，この数年は機械学習を用いた最適化配位探索の研究も行っています．子どもの誕生を機に筋トレに励むようになり，筋肉もだいぶつきましたがなぜかそれ以上に脂肪もついてしまい，自身の巨大化に頭を悩ます日々です．

今寺賢志（いまでら けんじ）

京都大学大学院 エネルギー科学研究科 プラズマ・核融合基礎学分野 准教授（エネルギー博士）．専門はグローバルジャイロ運動論シミュレーション．本小特集のタイトルである「古くて新しい新古典輸送」．私が考えた訳ではないですが，良いネーミングだと思っています．私も「歳を重ねたがまだまだ若い新中堅教員」として頑張っていきたいです．

西村　伸（にしむら しん）

核融合科学研究所 構造形成・持続性ユニット助教 主な研究分野は，複数イオン種状態，高エネルギー粒子存在状態への新古典理論の拡張と応用．所内の様々な「研究系」を異動しながらそれをやっておりましたが，これもこのたびの体制変更の副産物でしょうか．今回分担させていただくこととなりましたこの小特集が皆様のお役に立てば幸いです．

前山伸也（まえやま しんや）

自然科学研究機構 核融合科学研究所 メタ階層ダイナミクスユニット 准教授．プラズマ乱流の研究に関して，シミュレーション開発から物理解析，データ分析・モデリング手法に興味を持っています．子どもの小学校PTAつながりでバレーボールを始めました．出張などで参加できないこともありますが，久しぶりに体を動かすのを楽しんでいます．

奴賀秀男（ぬが ひでお）

藤田慶二（ふじた けいじ）

名古屋大学 大学院理学研究科 研究員．昨年より核融合プラズマの新古典輸送から，粒子加速とオーロラの構造形成に主な研究対象が移り，プラズマ現象の奥深さと幅広さを改めて実感しています．火の玉やUFOとして報告される発光現象の一部などいわゆる超常現象の中にも，プラズマ物理で説明可能と議論されているものがあるようで．ゆくゆくはそうした現象の科学的解明を目指した研究もしていけたらと思っています．