J. Plasma Fusion Res. Vol.99, No.8 (2023) 385-391

講座 今更聞けない!? 磁場閉じ込めプラズマの微視的不安定性

6．微視的テアリング不安定性

6. Microtearing Mode

沼田龍介，柳生光義，前山伸也[1)]
NUMATA Ryusuke, YAGYU Mitsuyoshi and MAEYAMA Shinya[1)]
兵庫県立大学大学院情報科学研究科，[1)]名古屋大学大学院理学研究科

（原稿受付：2023年7月6日）

ジャイロ運動論モデルを出発点にして，衝突性の微視的テアリング不安定性の分散関係を導出する．電子-イオン衝突の効果と境界層問題の取り扱いに注意して説明する．電子温度勾配存在下では衝突によって実効的な力（熱力）が生じるが，熱力の時間依存する成分による電磁場のゆらぎの位相のずれが微視的テアリング不安定性を引き起こすことを示す．また，微視的テアリングモードが磁気面破壊を伴う不安定性であることを説明する．

Keywords:
time-dependent thermal force, boundary layer, parity, magnetic reconnection

6.1 はじめに

微視的テアリングモード（マイクロテアリングモード；microtearing mode）は磁場揺動を伴う電磁的不安定性であり，高ベータプラズマにおいて電子の異常輸送の原因となると考えられている．近年微視的テアリング不安定性のジャイロ運動論シミュレーションが盛んに行われており，トカマクプラズマ[1,2]や逆磁場ピンチプラズマ[3]などにおいて電子の異常輸送を担う原因になり得ることが示されている．微視的テアリング不安定性は磁場のトポロジーを変化させる（磁気面を破壊する）ため，磁気島状の磁場構造を作り出し，磁力線に沿った方向の電子輸送が増大すると考えられる．

微視的テアリングモードの線形理論は，抵抗性の電磁流体力学（Magnetohydrodynamics; MHD）的不安定性であるテアリングモードの理論[4]を，運動論モデルに基づいて拡張する形でHazeltineらによって提案された[5]．非一様なプラズマにおいて電子温度勾配が駆動する不安定性が新たに見いだされたわけだが，これは衝突性の不安定性であり，衝突周波数νが粒子の速度に依存し，電子の反磁性ドリフト周波数程度であるときにのみ不安定性が生じることが示されている．Drakeらは，その後，同モードの衝突周波数依存性について，衝突が強いパラメータ領域から無衝突領域にわたって体系的に論じている[6]．その後，Hassamは微視的テアリング不安定性の不安定化機構を流体モデルを用いて説明した[7,8]．温度勾配が存在するとき，Fokker-Planck方程式を$\omega/\nu \ll 1$の仮定（ω^{-1}は考えている現象の時間スケール）のもとでChapman-Enskog展開すると，衝突によって熱力と呼ばれる実効的な力が生じること[9]が示されるが，ω/νについて高次の，時間に依存する熱力の成分まで考慮すると不安定性が生じる．

微視的テアリング不安定性は古くから知られているものの，その線形の振る舞いについても十分に理解されているとは言えない．特に，衝突が弱い領域において不安定性が存在するかどうか（無衝突マイクロテアリングモード）については議論がある．不安定化させる機構だけではなく，反磁性ドリフト[10]やイオンの有限Larmor半径効果[11]などの安定化効果を丁寧に検討する必要がある．

本章では，Drakeら[6]にしたがって，スラブ配位におけるジャイロ運動論モデルを用いた衝突性の微視的テアリングモードの導出を行う．テアリングモードの解析では，磁場配位の特異性により境界層が生じるため，漸近接続の方法を用いて固有値問題が解かれる．はじめに6.2節で流体モデルに基づくテアリングモードの解析を振り返り，6.3節で同様の解析を運動論効果を取り入れて拡張する．ここでは衝突性の微視的テアリングモードに注目し，電子の運動論的取り扱いから熱力の効果を取り入れた電子の実効的電気伝導度の導出を行う．微視的テアリングモードの線形分散関係を導出し，不安定化描像の説明，および最近行われたジャイロ運動論シミュレーションの結果を紹介する．最後に，6.4節で微視的テアリングモードの摂動の対称性の性質（パリティ）について説明し，磁気面破壊を伴う不安定性であることを説明する．

なお，記号の定義は本講座2章にしたがう．

6.2 境界層問題としてのテアリング不安定性解析

抵抗性の2次元非圧縮簡約化MHD方程式を用いた（微視的ではない）テアリングモードの解析についておさらいしておく．z方向に一様な背景磁場$\boldsymbol{B} = B_0\hat{\boldsymbol{z}}$*1が存在するとき，簡約化MHD方程式は静電ポテンシャルϕとベク

＊1 磁気リコネクションの文脈ではガイド磁場に対応する．

Graduate School of Information Science, University of Hyogo, Kobe, HYOGO 650-0047, Japan
corresponding author's e-mail: ryusuke.numata@gmail.com

トルポテンシャルのz方向成分A_zを用いて以下のように与えられる.

$$\frac{\partial A_z}{\partial t}+\left\{\frac{c\phi}{B_0},A_z\right\}=\frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2 A_z, \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{c\nabla^2\phi}{B_0}+\left\{\frac{c\phi}{B_0},\frac{c\nabla^2\phi}{B_0}\right\}=\frac{1}{4\pi\rho}\{A_z,\nabla^2 A_z\}. \tag{2}$$

ここで,$\nabla^2=\partial^2/\partial x^2+\partial^2/\partial y^2$は2次元のラプラシアン,$\{a,b\}=(\partial a/\partial x)(\partial b/\partial y)-(\partial a/\partial y)(\partial b/\partial x)$はPoisson括弧である.また,質量密度$\rho$は非圧縮性より定数とする.(1)はOhmの法則の$z$方向成分,(2)は渦度方程式の$z$方向成分である.電気伝導度$\sigma$は$\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}/c=\boldsymbol{j}/\sigma$を満たすように取る.

平衡状態として,x方向に変化し$x=0$で向きを変える磁場$B_y^{\rm eq}(x)=-\partial A_z^{\rm eq}/\partial x$を考え,その安定性を考察する.この平衡磁場は反平行で磁気リコネクションを起こす成分であるため,リコネクション磁場と呼ぶ.$A_z=A_z^{\rm eq}(x)+\tilde{A}_z$,$\phi=\tilde{\phi}$として線形化し,時刻$t$と$y$方向にFourier変換($\tilde{\phi}=\sum_{k_y}\phi_{k_y}(x)e^{-i(\omega t-k_y y)}$など)すると以下のようになる.

$$-i\omega A_{zk_y}=-ik_yB_y^{\rm eq}\frac{c\phi_{k_y}}{B_0}+\frac{c^2}{4\pi\sigma}\left(\frac{{\rm d}^2}{{\rm d}x^2}-k_y^2\right)A_{zk_y}, \tag{3}$$

$$-i\omega\left(\frac{{\rm d}^2}{{\rm d}x^2}-k_y^2\right)\frac{c\phi_{k_y}}{B_0}=-\frac{ik_y}{4\pi\rho}\left(B_y^{\rm eq}\left(\frac{{\rm d}^2}{{\rm d}x^2}-k_y^2\right)A_{zk_y}-\frac{{\rm d}^2B_y^{\rm eq}}{{\rm d}x^2}A_{zk_y}\right). \tag{4}$$

この固有値問題を解いて,小さいが有限な電気抵抗$1/\sigma$の効果によって不安定化する抵抗性のモードの固有値を求めたい.そのため,固有値ωはAlfvén時間と抵抗時間に対して,$\tau_{\rm A}\ll\omega^{-1}\ll\tau_{\rm R}$とする.ここで,Alfvén時間と抵抗時間は,それぞれ,磁場$B_y^{\rm eq}$の典型的な大きさ(ここではB_0とする)を用いたAlfvén速度$v_{\rm A}\equiv B_0/\sqrt{4\pi\rho}$と$B_y^{\rm eq}$の変化するスケール$L_{\rm s}$によって,$\tau_{\rm A}=1/(k_y v_{\rm A})$,$\tau_{\rm R}=4\pi L_{\rm s}^2\sigma/c^2$で与えられる.電気抵抗と慣性項が無視できるとき,固有関数は(4)の右辺$=0$で与えられるが,$\boldsymbol{B}\cdot\nabla=B_y^{\rm eq}\partial/\partial y=0$となる場所(ここでは磁気中性点と呼ぶことにする.一般には面.)において特異性を持つため,固有関数はその点で急峻に変動する.そのような領域ではもはや電気抵抗や慣性項を無視することはできない.そこで,変動が緩やかで電気抵抗や慣性項が働かない領域(外部領域)と,磁気中性点近傍の急峻な構造を持つ領域(内部領域)にわけて解を求めて,それらを接続領域で接続する漸近接続の方法によって解を求める.

磁気中性点($x=0$にとる)近傍の内部領域においては,${\rm d}/{\rm d}x\gg k_y$とし,平衡磁場は近似的に$B_y^{\rm eq}=B_0(x/L_{\rm s})$と書ける.この近似のもとで(3)を内部領域幅($\delta$と書く)にわたって積分すると

$$\frac{L_{\rm s}^2}{\tau_{\rm R}}\int_0^\delta {\rm d}x\frac{{\rm d}^2A_{zk_y}}{{\rm d}x^2}=\int_0^\delta{\rm d}x(-i\omega A_{zk_y}+ik_{\|}c\phi_{k_y})\propto-i\omega A_{zk_y}(0)\delta \tag{5}$$

とできる.ここで,$k_{\|}=k_y(x/L_{\rm s})$とした.$k_{\|}$はx依存性を持つことに注意.内部領域においてA_{zk_y}が一定であるという近似(constant-A_z近似)を用いた.また,本来ならば,ϕの効果を正しく取り扱うためには(4)と連立させる必要があるが,その効果は高々定数係数程度であるということがわかっているのでここでは省略した.(厳密な取り扱いについては[5, 12]などを参照.)内部領域幅のδは(3),(4)の各項がバランスするスケールとして,$(\delta/L_{\rm s})^4=(-i\omega)\tau_{\rm A}^2/\tau_{\rm R}$と決まる.(5)左辺の積分は,内部領域と外部領域の接続性*2から

$$\frac{L_{\rm s}^2}{\tau_{\rm R}}\left[\frac{{\rm d}A_{zk_y}}{{\rm d}x}\right]_0^\delta=\frac{L_{\rm s}^2}{\tau_{\rm R}}\frac{\Delta'}{2}A_{zk_y}(0) \tag{6}$$

となる.ここでΔ'は外部領域の解$A_{zk_y}^{\rm ext}$から決まるパラメータであり,以下で定義される.

$$\Delta'=\frac{2}{A_{zk_y}^{\rm ext}(0)}\left.\frac{{\rm d}A_{zk_y}^{\rm ext}}{{\rm d}x}\right|_0. \tag{7}$$

整理すると,テアリングモードの固有値(γ_0と書く)として

$$-i\omega\tau_{\rm A}=(\Delta' L_{\rm s})^{4/5}S^{-3/5}\times{\rm const.}\equiv\gamma_0\tau_{\rm A} \tag{8}$$

が得られる.$S\equiv\tau_{\rm R}/\tau_{\rm A}$はLundquist数である.

6.3 微視的テアリングモードの線形分散関係

内部領域では抵抗以外にも運動論効果などの非理想MHD効果が働くため,内部領域の解析に対してジャイロ運動論モデルを用いて,前節と同様の固有値問題の定式化を行う.一般には,内部領域にイオンの有限Larmor半径効果が働く領域と電子の運動論効果が働く領域があらわれ,二段階の接続を行う必要があるが,ここでは簡単のためイオンの運動論効果は無視し電子の効果のみを考慮する.また,電子についても有限Larmor半径効果を無視する.電子の運動論効果は,電場と電流の関係を結ぶ電気伝導度の効果に繰り込まれる.

シアを持った磁場$\boldsymbol{B}=B_0(\hat{\boldsymbol{z}}+(x/L_{\rm s})\hat{\boldsymbol{y}})$を考える.$z$方向の変動がない2次元の場合を考えると,内部領域を考えているため$x\ll L_{\rm s}$に注意して,$\hat{\boldsymbol{b}}\cdot\nabla=(x/L_{\rm s})\partial/\partial y$となる.また$\boldsymbol{v}_{{\rm D}s}=0$.微視的テアリングモードは衝突の効果によって生じると考えられるため,衝突の項を含んだジャイロ運動論方程式

$$\frac{\partial h_{sk_y}}{\partial t}+ik_{\|}v_{\|}h_{sk_y}-\frac{\nu_s(v)}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left((1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}\right)h_{sk_y}=\frac{e_sF_{{\rm M}s}}{T_s}\left(\frac{\partial\langle\phi_{k_y}\rangle_s}{\partial t}+i\omega_{*s}^{\rm T}\langle\phi_{k_y}\rangle_s\right) \tag{9}$$

を考える.前節と同様方程式は$k_{\|}=k_yx/L_{\rm s}$を介してx依存性を持っており,y方向のみにFourier変換した.衝突モデルとして,ここでは電子のイオンからのピッチ角散乱のみを考える.密度は保存するが,運動量は保存しない.ピッチ角変数として$\xi=v_{\|}/v=\cos\Theta$を用いる(Θはピッチ角.

*2 内部領域の十分遠方におけるA_{zk_y}の傾きと,外部領域の原点におけるA_{zk_y}の傾きが一致するという条件.

２章参照）＊３．衝突周波数は$\nu_{\rm ei}(v)=(3\sqrt{\pi}/4)\nu_{\rm c}(v/v_{\rm te})^{-3}$で$\nu_{\rm c}=(16\sqrt{\pi}/3)e_{\rm i}^2e_{\rm e}^2n_{\rm i}\ln\Lambda/(m_{\rm e}^2v_{\rm te}^3)$は背景プラズマのパラメータが与えられれば決まる定数パラメータである．

ジャイロ運動論方程式の速度モーメントを取り粒子位置での密度（$\delta n_s=\int {\rm d}^3v(h_s-(e_s\phi/T_s)F_{\rm Ms})$）・磁場方向速度（$\delta u_{\|s}=(1/n_s)\int {\rm d}^3v v_{\|}(h_s-(e_s\phi/T_s)F_{\rm Ms})$）の揺動を計算すると

$$-i\omega\frac{\delta n_{s\boldsymbol{k}_\perp}}{n_s}=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{\rm d}x}{2\pi}\,ik_{\|}\delta u_{\|sk_y}e^{-ik_xx}-i\omega(\Gamma_{0s}-1)\frac{e_s\phi_{\boldsymbol{k}_\perp}}{T_s}+i\omega_{*s}(\Gamma_{0s}-\eta_sk_\perp^2\rho_{\rm ts}^2\Gamma_{1s})\frac{e_s\phi_{\boldsymbol{k}_\perp}}{T_s},\tag{10}$$

$$-i\omega\frac{m_s\delta u_{\|s\boldsymbol{k}_\perp}}{T_s}+\frac{m_s}{n_sT_s}\int{\rm d}^3v\nu_sv_{\|}h_{s\boldsymbol{k}_\perp}=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{{\rm d}x}{2\pi}\,ik_{\|}\left(\frac{\delta P_{\|sk_y}}{n_sT_s}+\frac{e_s\phi_{k_y}}{T_s}\right)e^{-ik_xx}+i\omega\Gamma_{0s}\frac{e_sA_{\|\boldsymbol{k}_\perp}}{cT_s}-i\omega_{*s}(\Gamma_{0s}+\eta_s(\Gamma_{0s}-k_\perp^2\rho_{\rm ts}^2\Gamma_{1s}))\frac{e_sA_{\|\boldsymbol{k}_\perp}}{cT_s}\tag{11}$$

が得られる＊４．ここで，$\omega_{*s}=-ck_yT_s/(e_sB_0L_{\rm ns})$，$\eta_s\omega_{*s}=-ck_yT_s/(e_sB_0L_{\rm Ts})$である．また，$\Gamma_{1s}=(I_0(k_\perp^2\rho_{\rm ts}^2)-I_1(k_\perp^2\rho_{\rm ts}^2))e^{-k_\perp^2\rho_{\rm ts}^2}$．ただし，$I_0(I_1)$は０次（１次）の変形Bessel関数．電子については$k_\perp\rho_{\rm te}\to0$とし，イオンについて$k_\perp\rho_{\rm ti}\ll1$として$\Gamma_{0{\rm i}}-1\to-k_\perp^2\rho_{\rm ti}^2$，$\Gamma_{1{\rm i}}\to1$とすれば，粒子位置での準中性条件（$\delta n_{\rm e}=\delta n_{\rm i}$）からドリフトの項を除いて（４）に内部領域の近似を施した式が得られる．一方，イオンの速度については電子との質量比から無視すると，方程式系を閉じさせるため粒子位置における電子の磁力線方向の圧力揺動（$\delta P_{\|s}=\int{\rm d}^3v(m_sv_{\|}^2/2)(h_s-(e_s\phi/T_s)F_{\rm Ms})$）が必要となる．これらの効果は電気伝導度としてまとめられ，最終的に磁力線方向の電場$E_{\|k_y}=i\omega A_{\|k_y}/c-ik_{\|}\phi_{k_y}$と電流$j_{\|k_y}=-(c/4\pi)({\rm d}^2/{\rm d}x^2-k_y^2)A_{\|k_y}$の関係として（３）と同等の関係が得られる．このとき電気伝導度σの項が，以下で計算される実効的な電気伝導度に置き換わる．

ピッチ角散乱による衝突を考慮し，衝突周波数が大きいという仮定，$k_{\|}v/\nu_{\rm ei}$，$i\omega/\nu_{\rm ei}=O(\varepsilon)$，のもとで電子の応答を計算し，電気伝導度を導出する．Legendre関数はピッチ角散乱作用素の固有関数であることから，電子の分布関数をLegendre展開し$h_{{\rm e}k_y}=\sum h_nP_n(\xi)$と書く．Legendre多項式$P_n$は

$$\frac{\partial}{\partial\xi}(1-\xi^2)\frac{\partial}{\partial\xi}P_n(\xi)=-n(n+1)P_n(\xi)\tag{12}$$

を満たし，$P_0=1$，$P_1=\xi$である．ジャイロ運動論方程式に代入し，P_nの係数について整理すると

$$i\omega h_0=\frac{ik_{\|}v}{3}h_1+i(\omega-\omega_{*{\rm e}}^{\rm T})\frac{e_{\rm e}\phi_{k_y}}{T_{\rm e}}F_{\rm Me},\tag{13}$$

$$(i\omega-\nu_{\rm ei})h_1=ik_{\|}v\left(h_0+\frac{2}{5}h_2\right)-i(\omega-\omega_{*{\rm e}}^{\rm T})\frac{e_{\rm e}A_{\|k_y}}{cT_{\rm e}}vF_{\rm Me},\tag{14}$$

$$\left(i\omega-\frac{n(n+1)}{2}\nu_{\rm ei}\right)h_n=ik_{\|}v\left(\frac{n}{2n-1}h_{n-1}+\frac{n+1}{2n+3}h_{n+1}\right)\ (n\geq2)\tag{15}$$

を得る．h_nは衝突の効果によりnとともに小さくなるため，以下では$n\geq2$の項については無視する．Legendre多項式の直交性から$n_{\rm e}\delta u_{\|{\rm e}k_y}=(4\pi/3)\int{\rm d}vv^3h_1$であり，$h_1$から速度の揺動の表式が得られる（密度の揺動は$\delta n_{{\rm e}k_y}=4\pi\int{\rm d}vv^2h_0-(e_{\rm e}\phi_{k_y}/T_{\rm e})n_{\rm e}$となり，先程計算したものと等しい）．電流を$j_{\|}=e_{\rm e}n_{\rm e}\delta u_{\|{\rm e}}$とすると$\sigma=j_{\|}/E_{\|}$から電気伝導度が得られる＊５．

$$\sigma=-\frac{8}{3\sqrt{\pi}}\frac{\omega_{\rm pe}^2}{4\pi}\int{\rm d}\hat{v}\hat{v}^4\frac{i\omega}{i\omega(i\omega-\nu_{\rm ei})+\nu_{\rm ei}k_{\|}^2D}\left(1-\frac{\omega_{*{\rm e}}^{\rm T}}{\omega}\right)e^{-\hat{v}^2}.\tag{17}$$

$\hat{v}=v/(\sqrt{2}v_{\rm te})$とした．$\omega_{\rm pe}=\sqrt{4\pi n_{\rm e}e_{\rm e}^2/m_{\rm e}}$は電子プラズマ周波数．ここで，$D\equiv v^2/(3\nu_{\rm ei})$で磁力線に沿う方向の密度・温度の拡散に対応する．衝突が強く$\omega\ll\nu_{\rm ei}$，かつDの効果が無視できるとき（$k_{\|}^2D/(i\omega)=O(\varepsilon^2)$），実効的な電気伝導度として

$$\sigma=\frac{32}{3\pi(\nu_{\rm c}/2^{3/2})}\frac{\omega_{\rm pe}^2}{4\pi}\left[1-\frac{\omega_{*{\rm e}}}{\omega}\left(1+\frac{5}{2}\eta_{\rm e}\right)+\frac{105}{16}\frac{i\omega}{(\nu_{\rm c}/2^{3/2})}\left(1-\frac{\omega_{*{\rm e}}}{\omega}(1+4\eta_{\rm e})\right)\right]=\sigma_{\rm L}X\tag{18}$$

が得られる．$\sigma_{\rm L}=(32/(3\pi))(\omega_{\rm pe}^2/(4\pi))(2^{3/2}/\nu_{\rm c})$はピッチ角散乱作用素に対する（反磁性ドリフトの効果を含まない）通常の電気伝導度で，表記を簡潔にするために反磁性ドリフト等の寄与をXで表した（Drakeら[6]と$v_{\rm te}$の定義が異なることに注意されたい．$\nu_{\rm ei}$，$\sigma_{\rm L}$は$v_{\rm te}$の定義によらないが，$\nu_{\rm c}$は$v_{\rm te}$の定義に依存する）．前節の（５）と同様に

$$\frac{{\rm d}^2A_{\|k_y}}{{\rm d}x^2}\simeq-\frac{4\pi}{c}j_{\|k_y}=-\frac{4\pi}{c}\sigma E_{\|k_y}\simeq-\frac{4\pi}{c^2}\sigma i\omega A_{\|k_y}\tag{19}$$

の近似式を内部領域幅にわたって積分し，外部領域パラメータΔ'と接続することで

＊３　速度空間座標として$v=\sqrt{2\epsilon/m_s}$，ξを用いると${\rm d}^3v=2\pi v^2{\rm d}v{\rm d}\xi$．$\xi$の範囲は$-1\leq\xi\leq1$.

＊４　この箇所でのみx方向にもFourier変換した表式を記載した．Γ_{0s}などの項が存在するため，表記の都合上の問題であり，以降の議論には影響しない．また，x依存性を持つ項が適切にFourier変換できる（収束する）ことを保証するものではない．

＊５　Drakeら[6]の結果と比較すると，被積分関数の分数部分が異なる．Drakeらは，分母を

$$(i\omega-\nu_{\rm ei})(i\omega-k_{\|}^2D)\tag{16}$$

としているが，$i\omega k_{\|}^2D$の項は他の項に比べて小さく（$i\omega k_{\|}^2D/(i\omega\nu_{\rm ei})=O(\varepsilon^2)$），$O(\varepsilon)$までは(17)と等しい．ここでは説明しなかったが，Dの効果を考慮した準衝突領域についてはDrakeらの結果に若干の修正が必要と思われる．

$$-i\omega X = \frac{1}{\tau_{\rm R}}\frac{\Delta' L_{\rm s}^2}{2\delta} \tag{20}$$

を得る．$\tau_{\rm R}$は$\sigma_{\rm L}$を用いて定義した拡散時間．内部層幅δを$(\delta/L_{\rm s})^4 = (-i\omega)\tau_{\rm A}^2/(\tau_{\rm R}X)$とすれば，

$$\left[1-\frac{\omega_{*{\rm e}}}{\omega}\left(1+\frac{5}{2}\eta_{\rm e}\right)+\frac{105}{16}\frac{i\omega}{(\nu_{\rm c}/2^{3/2})}\left(1-\frac{\omega_{*{\rm e}}}{\omega}(1+4\eta_{\rm e})\right)\right]^3 = i\left(\frac{\gamma_0}{\omega}\right)^5 \tag{21}$$

を得る．オーダリングとして

$$\frac{\omega}{\nu_{\rm c}} \sim \frac{\omega_{*{\rm e}}}{\nu_{\rm c}} \sim \frac{\eta_{\rm e}\omega_{*{\rm e}}}{\nu_{\rm c}} \sim \varepsilon \ll 1 \tag{22}$$

を満たす解を探す．右辺が$(\gamma_0/\omega)^{5/3} = O(1)$のとき，反磁性ドリフトの効果を含んだテアリングモードの分散関係が得られ，$\Delta' < 0$のとき安定である．次のオーダとして$(\gamma_0/\omega)^{5/3} = O(\varepsilon)$とする．このとき，

$$\frac{\omega}{\omega_{\rm MT}} = 1 + \alpha\frac{i\eta_{\rm e}\omega_{*{\rm e}}}{\nu_{\rm c}} + i^{1/3}\left(\frac{\gamma_0}{\omega_{\rm MT}}\right)^{5/3} \tag{23}$$

が得られる．ただし，$\alpha = (105/16)(3/2)(2^{3/2})$，$\omega_{\rm MT} = \omega_{*{\rm e}}(1+(5/2)\eta_{\rm e})$とした．$\gamma_0$の項は$\Delta' < 0$のとき安定化に効くため，不安定化に寄与するのは右辺第2項のみである＊6．実効的な電気伝導度(18)のうち$i\omega/\nu_{\rm c}$に比例する項は，温度勾配が存在するときに衝突によって生じる熱力のうち，時間に依存する成分であり，時間依存する熱力の存在が微視的テアリング不安定性の不安定化に必要であると言える．分散関係にあらわれる係数（熱力にかかる105/16など）は，衝突項を積分した結果生じたもので，衝突モデルが変わると数値が変わる．さらに，6.3.2節で説明するように，衝突が弱い領域ではαは定数でもなくなる．ここで重要なのは，不安定化に必要な時間依存する熱力項はピッチ角散乱作用素とvに依存する衝突周波数を用いたときのみ導かれるということである．

6.3.1 不安定化の描像

実は，時間依存する熱力項があると磁気シアがなくても不安定モードが存在する．これは自己フィラメント化（self-filamentation）モードと呼ばれる[7]．磁気シアがない場合，磁力線方向のベクトルポテンシャルの変動は，Faradayの法則により$\partial A_\parallel/\partial t = -E_\parallel$と書け，揺らいでいる磁力線方向に圧力・熱力とバランスする電場$E_\parallel \propto (1/e_{\rm e}n_{\rm e})\tilde{\boldsymbol{b}}\cdot\nabla(n_{\rm e}T_{\rm e})$が形成される．磁場が時間的に変動すると，それに応じて電場も変動し，電磁場の波動が生じる．さらに，時間依存する熱力の効果を考慮すると，電場の形成に遅れが生じ，磁場と電場のゆらぎの位相がずれる．このときの電磁場の位相関係を**図1**に示す．Shifted $\tilde{E}_\parallel$の実線で示すように，磁場に対して電場の位相に遅れが生じると磁場揺動が成長する．これは静電的ドリフト波が密度と静電ポテンシャルのゆらぎの位相のずれによって不安定化する描像と似ている．自己フィラメント化モードの分散関係は(23)のγ_0の項がゼロの場合と等しく，微視的テアリングモードと自己フィラメント化モードの不安定化機構の本質は同一であると考えられる．ただし，磁気シアがある場合にはテアリングモードと同様に，磁気中性点に局在化した固有関数の構造が見られる．

6.3.2 微視的テアリングモードのジャイロ運動論シミュレーション

著者らが最近実施した微視的テアリング不安定性のジャイロ運動論シミュレーションの結果[13]を紹介する．ここで用いたジャイロ運動論シミュレーションコードAstroGK[14]では，衝突演算子としてピッチ角散乱に加えてエネルギー拡散を含み，粒子数，運動量，エネルギーを保存するように構成されている．そのため，実効的電気伝導度に含まれる係数の数値が理論解析のものと異なるが，不安定化に必要な機構は備わっている．

図2にシミュレーションから得られた微視的テアリングモードの固有値（虚部（成長率）のみ）の衝突周波数依存性を示す．丸と十字の記号はエネルギー拡散項の有無による結果である．微視的テアリングモードは衝突周波数が電子の反磁性ドリフト周波数程度の時にのみ存在し，衝突の効果が強い場合，弱い場合はいずれも安定になることがわかる．これは，以前から知られているGladdら[15]による数値的な解析結果と定性的に一致する結果となっている．また，ピッチ角散乱作用素や衝突周波数のv依存性を落とすと不安定化されないことも確認してい

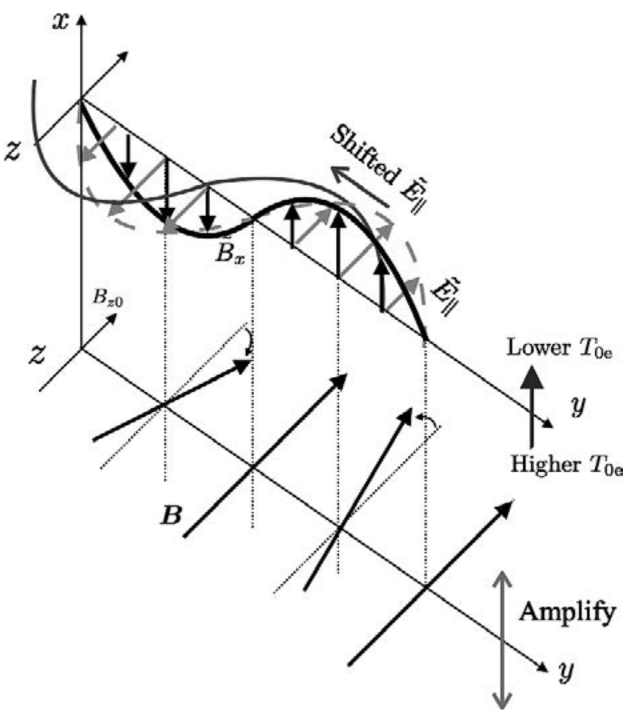

図1　微視的テアリング不安定性の不安定化描像（参考文献[13]の図1を引用）．図中上部に電磁場の位相関係を，下部に磁場の振動の様子を示す．揺動磁場方向に電場が生じ，時間依存する熱力によって磁場に対する電場の位相遅れが加わると微視的テアリング不安定性が生じる．

＊6　なお，記号の定義の都合上，温度勾配による反磁性ドリフト周波数を$\eta_{\rm e}\omega_{*{\rm e}}$と書いているが，密度勾配が存在する必要はない．ここでの主役はあくまで温度勾配である．

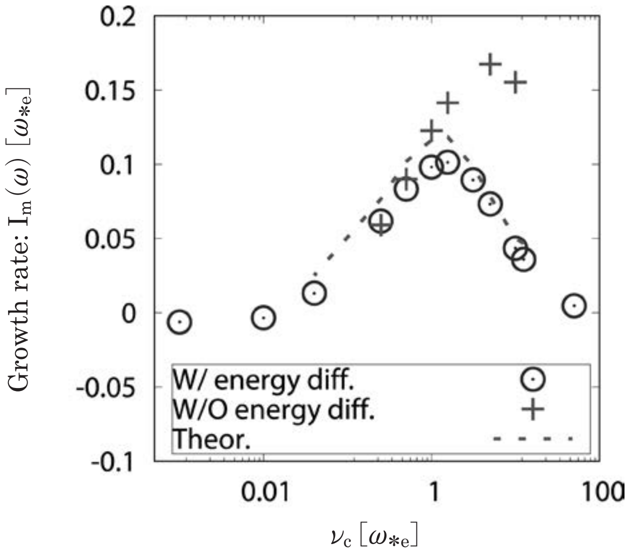

図2 微視的テアリングモード成長率の衝突周波数依存性（参考文献[13]の図5を引用）．図中の ω_{*e} は，温度・密度勾配による反磁性ドリフト周波数の和である．丸と十字の記号はエネルギー拡散項の有無であり，点線は理論解析で得られた分散関係(23)に熱力係数 α としてシミュレーションから得られた $\alpha_{\rm tt,i}(\nu_c)$ を用いた結果をあらわしている．

る．さらに，シミュレーション結果から，熱力の効果を測定すると不安定領域は熱力の効果によって説明できることが確認できる．シミュレーション結果から熱力の係数を測定した結果を**図3**に示す．詳細は割愛するが，$\alpha_{\rm tt,i}$ が(23)における $i\eta_e\omega_{*e}/\nu_c$ の係数に対応する（α_t は通常の熱力に対応する係数であり，不安定化には寄与しない）．衝突が十分大きいとき，係数は一定値に漸近するがその時は $1/\nu_c$ の効果により安定化する．一方，衝突が小さい領域では熱力の効果が働かないため不安定性は生じない．この熱力係数を用いて評価した固有値が**図2**点線で示されており，シミュレーションから得られた成長率とよく一致することが確認できる．

6.4 磁気面破壊とパリティ

前節までのスラブ配位における微視的テアリングモードの導出を振り返ると，磁気中性点 $x=0$（トーラスプラズマにおいては共鳴面）において摂動ベクトルポテンシャルは x 方向に偶関数（最低次近似としては x 方向一様）で $A_\parallel \simeq A_1\cos(k_y y)$ であり，生じる摂動磁場 $\nabla\times(A_\parallel\hat{\boldsymbol z}) = -k_y A_1 \sin(k_y y)\hat{\boldsymbol x}$ は x 成分を持つ．磁気シアを持つ平衡磁場とあわせて磁力線追跡（磁束関数 $-B_0x^2/(2L_s)+A_1\cos(k_y y)$ の等値面を振幅を適当に定めて描画してみるとよい）を行うと，摂動により磁気面が破壊され磁気島が形成されることがわかる．トーラスプラズマにおける微視的テアリングのモード構造についてもおおよそ同等の議論が成り立つ．

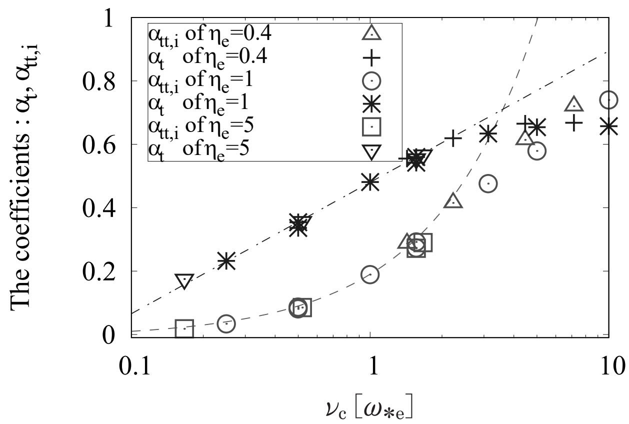

図3 熱力係数の測定結果（参考文献[13]の図9を引用）．α_t は通常の熱力の係数，$\alpha_{\rm tt,i}$ は熱力のうち時間依存する成分にかかる係数である．ここで得られた係数を用いて微視的テアリングモードの固有値を評価することができる．

微視的不安定性がテアリング，つまり磁気面を破壊するかどうかは，摂動の持つパリティに特徴づけられる．本節では概略を説明するに留め，より詳細に学びたい読者は過去の小特集「トーラスプラズマにおけるパリティ」[16]を参照されたい．平衡磁場がステラレータ対称性 $B(r,-\theta,-\zeta)=B(r,\theta,\zeta)$［トカマクのような軸対称配位の場合には上下対称性 $B(r,-\theta)=B(r,\theta)$］を持つ場合を考える．本講座第2章の線形化された局所ジャイロ運動論的方程式に対し以下のパリティ変換 $\mathcal{P}$,

$$\mathcal{P}Q(k_x,k_y,z,v_\parallel,\mu)\rightarrow Q(-k_x,k_y,-z,-v_\parallel,\mu), \qquad (24)$$

を施すと，ある揺動 $(h_{s\boldsymbol{k}_\perp},\phi_{\boldsymbol{k}_\perp},A_{\parallel\boldsymbol{k}_\perp})$ が解であるならば $(\mathcal{P}h_{s\boldsymbol{k}_\perp},\mathcal{P}\phi_{\boldsymbol{k}_\perp},-\mathcal{P}\mathrm{A}_{\parallel\boldsymbol{k}_\perp})$ も同様にVlasov-Poisson-Ampère方程式系の解となる．具体例としては，本講座第2章の大アスペクト比トーラスプラズマの場合について検算してみるとよい．このパリティ変換に対する性質から，揺動分布関数を以下の様に偶パリティ $h^+_{s\boldsymbol{k}_\perp}$ と奇パリティ $h^-_{s\boldsymbol{k}_\perp}$ に分離すると，

$$h_{s\boldsymbol{k}_\perp}=h^+_{s\boldsymbol{k}_\perp}+h^-_{s\boldsymbol{k}_\perp}, \qquad (25)$$

$$h^\pm_{s\boldsymbol{k}_\perp}=\frac{1}{2}(1\pm\mathcal{P})h_{s\boldsymbol{k}_\perp}, \qquad (26)$$

偶奇それぞれのパリティは線形化されたジャイロ運動論方程式の独立な解となることがわかる．ただし，非線形項がある場合はパリティ混合が起こる．$A_{\parallel\boldsymbol{k}_\perp}$ だけは符号を変えることに注意して，$(h^+_{s\boldsymbol{k}_\perp},\phi^+_{\boldsymbol{k}_\perp},A^-_{\parallel\boldsymbol{k}_\perp})$ の線形モードを偶パリティ（バルーニングパリティ）モードと呼び，代表的な微視的不安定性はイオン温度勾配モード，電子温度勾配モード，捕捉電子モード，運動論的バルーニングモードである．一方，$(h^-_{s\boldsymbol{k}_\perp},\phi^-_{\boldsymbol{k}_\perp},A^+_{\parallel\boldsymbol{k}_\perp})$ の線形モードを奇パリティ（テアリングパリティ）モードと呼び，代表的な微視的不安定性は微視的テアリング不安定性である．

典型的な $k_x=0$ かつ有限 k_y の揺動を考えると，摂動磁場 $\nabla\times(A_\parallel\hat{\boldsymbol b})$ は径方向 x 成分を持つ．磁力線軌道方程式 $\mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}l=[\boldsymbol{B}+\nabla\times(A_\parallel\hat{\boldsymbol b})]/B$ から，

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}\cdot\nabla x=\frac{1}{B_0}\frac{\partial A_\parallel}{\partial y}, \qquad (27)$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}l}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}l}\cdot\nabla z=\frac{B_0}{\sqrt{g}B}\simeq\frac{1}{qR_0}, \qquad (28)$$

と表せる．磁力線追跡した際の径方向変位はこの式を積分することで得られ，

$$\int \mathrm{d}x = \frac{qR_0}{B_0}\int \frac{\partial A_{\|}}{\partial y}\,\mathrm{d}z, \tag{29}$$

となる．テアリングパリティモードの$A_{\|}$は磁力線方向zに対して偶関数であるため，有限の径方向変位を持つ．つまり磁気面が破壊され，磁力線を追跡しても同じ径方向位置には戻ってこない．一方，バルーニングパリティモードの$A_{\|}$は磁力線方向zに対して奇関数であるため，磁力線を追跡すると径方向変位が打ち消し，形状が波打つのみで磁気面の破壊は起こらないことがわかる．

6.5　まとめ

本章では，高ベータプラズマにおいて電子の輸送を支配すると考えられる微視的テアリングモードの線形不安定性解析の取り扱いについて解説した．まず，テアリングモードの解析において必要となる境界層問題の漸近接続の方法について，流体モデルを用いて概観した．その後，微視的テアリングモードの導出のために，ジャイロ運動論モデルから出発して，微視的テアリングモードを支配する固有値方程式の導出を行った．微視的テアリングモードの不安定化には，温度勾配存在下で粒子間衝突によって実効的に生じる時間依存性をもった熱力が必要であることが導かれた．時間依存する熱力によって，磁場と電場の揺動の位相にずれが生じることが不安定化に重要であることがわかる．トロイダルプラズマにおいて磁場に捕捉される粒子が存在すると弱衝突プラズマにおいても微視的テアリングモードが不安定化することが知られている[17]が，衝突と同様に位相の遅れを生じさせる別の機構があれば微視的テアリングモードが不安定化されることが示唆される．

微視的テアリングモードの物理機構を最も簡単に説明するために，衝突が強いという仮定を用いた．この仮定により，衝突以外の様々な微視的効果が無視されていることに注意してほしい．衝突が弱い領域において微視的テアリングモードを議論するためには，もとの運動論方程式に立ち返り，反磁性ドリフトの効果や有限Larmor半径効果などを丁寧に取り扱う必要が出てくる．Gengらの最近の研究[18]では，無衝突スラブプラズマにおいて電子の有限Larmor半径効果による不安定化が報告されている（テアリングパリティをもった電磁的電子温度勾配不安定性と呼ばれている）．一方で，Drakeらが指摘するように，内部領域と外部領域の反磁性ドリフト速度の違いによって磁場が遮蔽される効果があるため，筆者らのシミュレーションにおいては微視的テアリングモードは無衝突領域では安定化されていると思われる．しかし，この安定化効果が働くパラメータ領域には限界があるため，無衝突の極限を考えたときに安定になるか不安定になるか結論は得られていない．考えているプラズマのパラメータをよく検討し，どの物理機構が働いているのかを見極める必要があろう．

最後に，微視的テアリングモードの非線形特性の研究について述べておく．6.1節で述べたように，微視的テアリングモード乱流による電子の輸送特性をジャイロ運動論シミュレーションによって解析し，閉じ込め特性を明らかにするために研究が盛んに行われている．一方で，筆者らの研究[19]では，イオンスケールの微視的テアリングモードが電子温度勾配駆動モードとのマルチスケール相互作用によって抑制されうることを示しており，線形不安定性が必ずしも輸送特性を決めるわけではないことを指摘しておく．また，[13]では，微視的テアリングモードの非線形過程におけるエネルギー変換についてのシミュレーションを行った．その線形不安定性の機構が示唆するように，微視的でないいわゆる磁気リコネクションをともなうテアリングモードと，非線形発展の様相が全く異なることが示された．微視的テアリングモードによるプラズマのエネルギー変換（加熱）機構も興味のある課題として残されている．

参考文献

[1] H. Doerk *et al.*, Phys. Rev. Lett. **106**, 155003 (2011).
[2] D. Applegate *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **49**, 1113 (2007).
[3] I. Predebon and F. Sattin, Phys. Plasmas **20**, 040701 (2013).
[4] H.P. Furth *et al.*, Phys. Fluids **6**, 459 (1963).
[5] R.D. Hazeltine *et al.*, Phys. Fluids **18**, 1778 (1975).
[6] J.F. Drake and Y.C. Lee, Phys. Fluids **20**, 1341 (1977).
[7] A.B. Hassam, Phys. Fluids **23**, 2493 (1980).
[8] A.B. Hassam, Phys. Fluids **23**, 38 (1980).
[9] S.I. Braginskii, "Transport Processes in a Plasma", *Reviews of Plasma Physics* Vol. 1 (Consultants Bureau, New York, 1965), pp. 205-311.
[10] J.F. Drake *et al.*, Phys. Fluids **26**, 2509 (1983).
[11] S.C. Cowley *et al.*, Phys. Fluids **29**, 3230 (1986).
[12] B. Coppi *et al.*, Sov. J. Plasma Phys. **2**, 533 (1976).
[13] M. Yagyu and R. Numata, Plasma Phys. Control. Fusion **65**, 065003 (2023).
[14] R. Numata *et al.*, J. Comput. Phys. **229**, 9347 (2010).
[15] N.T. Gladd *et al.*, Phys. Fluids **23**, 1182 (1980).
[16] 石澤明宏：プラズマ・核融合学会誌 **92**, 530 (2016).
[17] P.J. Catto and M.N. Rosenbluth, Phys. Fluids **24** 243 (1981).
[18] C. Geng *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **62**, 085009 (2020).
[19] S. Maeyama *et al.*, Phys. Rev. Lett. **119**, 195002 (2017).

ぬま た りゅう すけ
沼 田 龍 介

兵庫県立大学大学院情報科学研究科 准教授．2004年 東京大学 博士（科学）．磁気リコネクションや乱流などの非線形複雑現象のシミュレーション研究を行っています．趣味は読書．これまで二の足を踏んでいたプルーストの「失われた時を求めて」に取り掛かりました．集英社版だと全13巻中の 6 巻目で，やっと半ば頃．通勤の電車でパリ社交界のサロンにいる気分になっています．

や ぎゅう みつ よし
柳 生 光 義

兵庫県立大学情報科学研究科 非常勤研究員，シミュレーション学修士（兵庫県大）．理論・シミュレーションを用いて微視的テアリングモードの物理の理解に取り組んでいます．最近は微視的テアリング乱流における熱輸送に関する研究に携わっています．健康維持のため数年ぶりにランニングを再開して数ヶ月が経つが，距離が思うように伸びなくて少しショックを受けています．諦めずに継続し動ける身体を再び手に入れたいです．