



## 講座 今更聞けない!? 磁場閉じ込めプラズマの微視的不安定性

# 5. 電磁的イオン温度勾配不安定性と運動論的バルーニング不安定性

## 5. Electromagnetic Ion-Temperature-Gradient Mode and Kinetic Ballooning Mode

石澤明宏

ISHIZAWA Akihiro

京都大学大学院エネルギー科学研究科

(原稿受付: 2023年6月2日)

プラズマは有限な圧力を持ち、規格化圧力(ベータ,  $\beta$ )という無次元パラメータで特徴づけられる。この有限ベータプラズマで発生する微視的不安定性は磁場揺動を伴い、電磁的微視的不安定性と呼ばれる。現実のプラズマにおいてベータ値は有限であるが、前章までは静電近似を仮定し、磁場揺動を無視して微視的不安定性が説明されてきた。これは、ドリフト波が不安定になる本質的な物理機構は静電近似で十分記述できることに起因する。核融合プラズマの研究では、プラズマ閉じ込めのベータ値依存性が重要な研究課題であるため、有限ベータプラズマにおける乱流およびそれを駆動する微視的不安定性の理解が重要となる。ベータ値が有限なプラズマにおける乱流は、磁場揺動を伴うため電磁的乱流と呼ばれ、静電的な乱流とは異なる振る舞いをする。今回は、この電磁的乱流を駆動する電磁的微視的不安定性(または電磁的ドリフト波不安定性)の典型例として、電磁的イオン温度勾配不安定性(Ion temperature gradient mode, ITGモード)と運動論的バルーニングモード(Kinetic ballooning mode, KBM)の説明を、これらの不安定性の分散関係式を導きながら行う。そして、低ベータにおけるイオン温度勾配不安定性に対する磁場揺動による安定化効果および高ベータにおける運動論的バルーニングモードの不安定化を説明する。最後に、磁場揺動が本質的な役割を担う電磁流体(MHD)不安定性と電磁的微視的不安定性の関係を説明する。

Keywords:

gyrokinetics, micro-instability, drift-wave, turbulence, electromagnetic, plasma, fusion

### 5.1 はじめに

プラズマ圧力 $p$ と閉じ込め磁場 $B$ のエネルギーの比であるプラズマベータ $\beta = 8\pi p/B^2$ は、核融合プラズマを特徴づける最も大事なパラメータの一つである。なぜなら、核融合反応率は $\beta$ 値が大きいくほど大きく、また、トカマクの定常運転に欠かせない自発電流(ブートストラップ電流)生成も $\beta$ 値に比例するからである。したがって、核融合炉を実現するためには $\beta$ 値を高くする必要がある。実際、三つあるJT-60SAプロジェクトの目的の一つは「高ベータプラズマの長時間保持」である[1]。実験で観測されるプラズマ閉じ込め性能の $\beta$ 値依存性を理解するうえで、プラズマ閉じ込め悪化の主要原因である乱流輸送の $\beta$ 値依存性を理解することは重要な研究課題である。特に、高 $\beta$ 閉じ込めをめざすJT-60SA実験およびITER実験におけるプラズマ閉じ込めを予測するうえで、乱流輸送の $\beta$ 値依存性を理解することは必須である。ここで乱流輸送とは微視的不安定性によって駆動された乱流によって生じる熱・粒子の輸送のことである。乱流輸送の $\beta$ 値依存性を理解するためには、駆動源である微視的不安定性の $\beta$ 値依存性を理解する必要がある。本章は、この微視的不安定

性の $\beta$ 値依存性に最も大事な磁場揺動の不安定性への影響を解説する。磁場揺動の影響を無視( $\beta = 0$ の極限)すると、例えば電磁的イオン温度勾配不安定性(ITGモード)は本講座3章で説明された静電的ITGモードに帰着する。

有限 $\beta$ において、磁化プラズマで生じる微視的不安定性は磁場揺動を伴い、電磁的微視的不安定性と呼ばれる。これは、ジャイロ運動論で用いられる無次元化を行うと、5.2節で示されるようにAmpère則の電流項に係数として $\beta$ が現れることによる。また、 $\beta = 0$ の極限で磁場揺動を無視できることは、密度 $n$ およびイオン温度 $T_i$ で定義されるイオンベータ $\beta_i = 8\pi n T_i/B^2 = 2v_{ti}^2/v_A^2$ を考慮することにより以下のように理解できる。微視的不安定性はドリフト波不安定性とも呼ばれ、その典型的な時間スケールはドリフトオーダリング $L/(\delta v_{ti})$ ( $\delta \ll 1$ )に従う。ここで $v_{ti} = \sqrt{T_i/m_i}$ はイオン熱速度、 $L$ はプラズマの大半径など系の典型的な長さを表す。一方、磁場揺動が本質的なAlfvén波の位相速度 $v_A = B/\sqrt{4\pi m_i n}$ で特徴づけられる時間スケール $L/v_A$ は、 $\beta_i = 0$ の極限においてドリフトオーダリング時間より十分短くなる。したがって $\beta_i = 0$ における微視的不安定性は磁場揺動を無視した静電近似で記述で

Graduate School of Energy Science, Kyoto University, KYOTO 611-0011, Japan

author's e-mail: ishizawa@energy.kyoto-u.ac.jp

きる。

微視的不安定性への磁場揺動の影響は「誘導電場揺動と磁力線方向勾配のずれ」である。これらを以下に説明する。電子のジャイロ運動論方程式の1次モーメント式([2]の式(3.3.1-2)または式(3.3.4-2)を参照)において、電子の熱速度が十分大きいことを仮定すると以下の式(MHDのOhm則に対応)を得る(導出は5.2.2節)。

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial A_{\parallel}}{\partial t} - \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \phi + \frac{1}{en_0} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla p_e = 0. \quad (1)$$

ここで、 $n_0$ は密度の平衡部分、 $A_{\parallel}$ 、 $\phi$ 、 $p_e$ は、磁場揺動(ベクトルポテンシャル揺動の平衡磁場に平行な成分)、静電ポテンシャル揺動、電子圧力、をそれぞれ表す。また、 $\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{B}/B$ で $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla$ は磁力線方向勾配を表す。低 $\beta$ 極限を考え磁場揺動 $A_{\parallel}$ を無視すると(静電近似)、左辺第2項及び第3項がつり合い、断熱電子応答式が得られる。通常、この断熱電子応答式が静電的ITGモードの分散関係式を解析的に導出する場合に用いられる。一方、 $\beta$ が有限の場合、誘導電場揺動を表す左辺第1項が無視できず、電子の断熱応答が成立しなくなる。したがって、誘導電場揺動は、電子の磁力線方向の応答に影響することにより、微視的不安定性の成長に影響を与える。波に関して説明すると、左辺第2項及び第3項がつり合う場合が純粋なドリフト波、左辺第1項と第2項が釣り合う場合( $E_{\parallel} = 0$ )が、Alfvén波の伝搬を表す([2]の式(2.2.7)から式(2.2.10)を参照)。 $\beta$ 値が大きくなり、後者の波が支配的になるような $\beta$ 値の領域では運動論的バルーニングモードが不安定になり得る。磁力線方向勾配のずれは、 $(\hat{\mathbf{b}} + \tilde{\mathbf{b}}) \cdot \nabla$ のように、磁力線方向の単位ベクトル $\hat{\mathbf{b}}$ に揺動 $\tilde{\mathbf{b}}$ が加わることである。

次に、次節以降行う理論計算の理解を助けるために、有限 $\beta$ における微視的不安定性の特徴を、Cyclone base case DIII-Dパラメータ(詳細は[3]の5.2節を参照)に対するジャイロ運動論方程式の数値シミュレーション結果を用いて説明する。図1はトーラス断面における電磁的イオン温度勾配不安定性(ITGモード)のモード構造を示す。この計算はGKNETコードを用いて行った[4,5]。断面右側がトーラス外側であり、悪い曲率領域あるいは

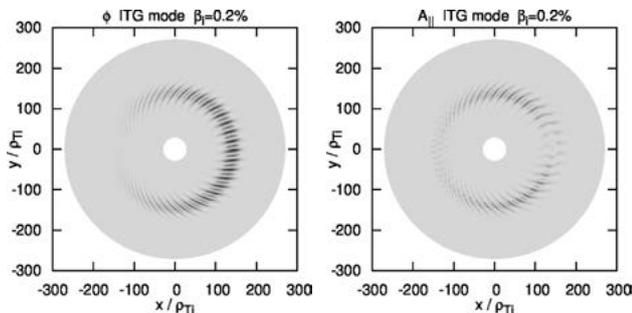


図1 トーラスプラズマにおける電磁的微視的不安定性のモード構造。電磁的ITGモードの静電ポテンシャル揺動とベクトルポテンシャル揺動の断面分布。揺動はポロイダル角方向に微視的な構造を持ち、トーラス外側に局在する。静電ポテンシャルは $\theta = 0$ に局在するが、ベクトルポテンシャルは $\theta = 0$ で小さな値になる。

弱磁場領域と呼ばれ、5.3.4節で説明するように圧力勾配 $\nabla p$ と磁場の曲率ベクトル $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}}$ または磁場強度の勾配 $\nabla B$ の方向が一致し、 $\omega_{Di} \omega_{*pi} > 0$ で特徴づけられる。この悪い曲率領域で静電ポテンシャル揺動 $\phi$ の振幅が大きいことがわかる。この構造はバルーニング構造と呼ばれ、トーラスプラズマにおいて生じる微視的不安定性が持つ典型的な空間構造である。このようなバルーニング構造の特徴を捉えるために、通常のトロイダル座標( $r$ :小半径、 $\theta$ :ポロイダル角、 $\zeta$ :トロイダル角)を用いて乱れをポロイダル方向とトロイダル方向にFourier級数展開することは有用ではない。なぜなら図1に示すようなポロイダル方向に強く局在した構造を表すためには、ポロイダル方向に非常に多くのFourierモード数を必要とするからである。したがって、バルーニング構造を表現するためには、磁場のClebsch表現

$$\mathbf{B} = \nabla \chi(r) \times \nabla (q(r)\theta - \zeta) \quad (2)$$

を用いて磁力線方向座標 $z = \theta$ を導入することが有用である(図2)。ここで、 $z = \theta$ を変化させるときには、磁力線ラベル $\alpha = q(r)\theta - \zeta$ を固定して、磁力線に沿っての移動となることに注意する。この磁力線方向座標 $z$ を用いて、図1に示された静電ポテンシャル揺動のバルーニング構造をプロットすると、図3のようになる。この計算はGKVコード[6]を用いて行った。図3においてトーラス外側である $z = 0$ においてモードの振幅が大きいことは、図1のトーラス外側で振幅が大きいことに対応する。そして、図3においてトーラス内側である $z = \pi$ においてモードの振幅が小さいことは、図1のトーラス内側で振幅が小さいことに対応する。図4はベクトルポテンシャル揺動 $A_{\parallel}$ の磁力線方向座標分布を示す。 $A_{\parallel}$ は磁力線方向の分布が奇関数になり、静電ポテンシャル $\phi$ と $z$ 方向のパリティが逆である[7,8]。これは、図1において $A_{\parallel}$ の振幅がトーラス外側で小さいことに対応する。次節以降の理論計算では、モード構造がトーラス外側( $z = 0$ 近傍)に局在するという近似を用いる。図3はこの近似が良いことを示している。図2は、微視的不安定性の空間構造に

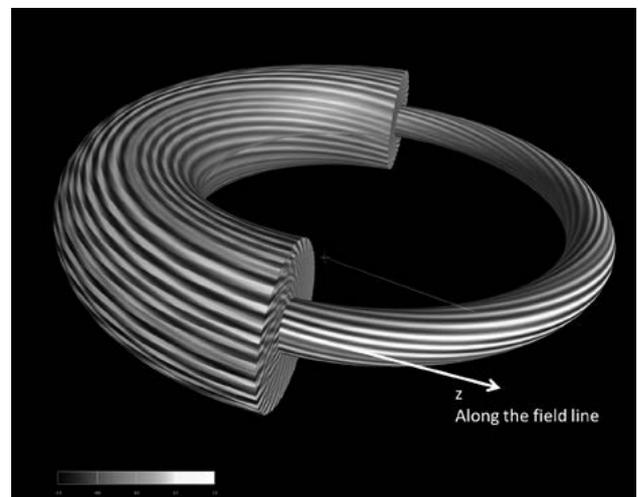


図2 ITGモードの静電ポテンシャル揺動と磁力線に沿った座標 $z$ 。

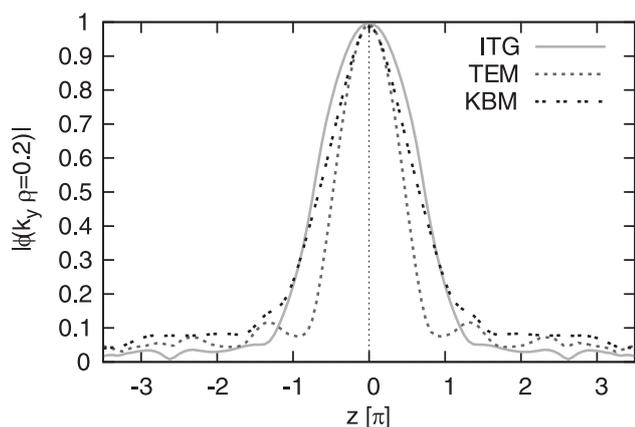


図3 静電ポテンシャル揺動  $\phi_{k_i}(z)$  の磁力線方向座標  $z$  分布. イオン温度勾配 (ITG) モード, 捕捉電子モード (TEM), 運動論的バルーニングモード (KBM) が波数  $k_y \rho_{ti} = 0.2$ , についてプロットされている. ITG モード, TEM, KBM の静電ポテンシャル揺動は, 図1に対応して, トーラス外側を表す  $z=0$  に局在する [3, 7].

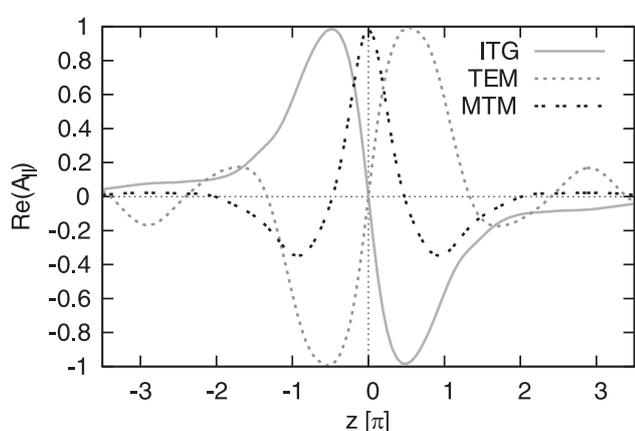


図4 ベクトルポテンシャル揺動の磁力線平行成分  $\hat{A}_{\parallel k_i}(z)$  の磁力線方向座標分布. イオン温度勾配 (ITG) モード ( $k_y \rho_{ti} = 0.2$ ), 捕捉電子モード (TEM,  $k_y \rho_{ti} = 1$ ). ITG モードと TEM は  $z$  の奇関数であり, 偶パリティモードに分類される. またベクトルポテンシャル揺動と静電ポテンシャル揺動は逆のパリティを持つ [3, 8].

ついて, もう一つ重要な性質を示している. それは, 微視的不安定性は, 磁力線に垂直な方向には微視的なスケールを持つが, 磁力線方向には緩やかに変化することである. 磁力線に垂直な方向の微視的スケールはLarmor半径  $\rho_{ti}$  で特徴づけられる. 一方, 磁力線に沿った方向の緩やかな変化は, 磁力線に沿ってのトーラス外側から内側への長さ  $qR_0$  で特徴づけられる. ここで,  $q$  は安全係数,  $R_0$  は大半径である. この構造はフルート構造と呼ばれ, 微視的不安定性などの磁場に閉じ込められたプラズマに生じる揺動が持つ基本的な空間構造である. そして, 揺動に対して, 磁力線方向波数は磁力線垂直方向波数より非常に小さい  $k_{\parallel}/k_{\perp} \ll 1$  というフルート近似が良く成立する.

ここまで, 電磁的微視的不安定性の空間構造について説明してきた. 次に, 電磁的微視的不安定性の時間変化を特徴づける線形成長率および実周波数の  $\beta$  値依存性を説明する. 図5は低  $\beta$  領域においてイオン温度勾配 (ITG) 不安定性, 高  $\beta$  領域において運動論的バルーニングモード

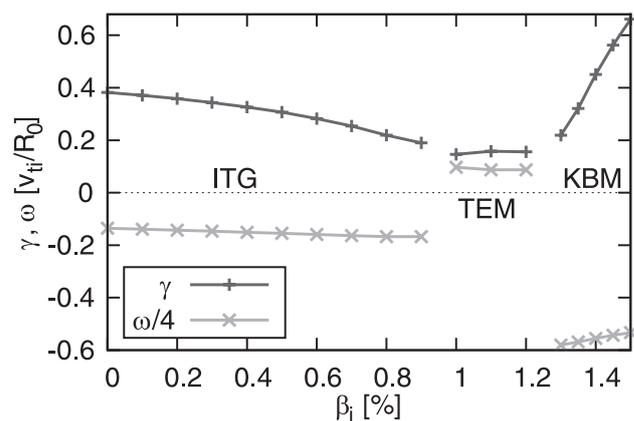


図5 微視的不安定性の線形成長率  $\gamma$  と実周波数  $\omega$  の  $\beta$  値依存性 (ポロイダル波数 (正確には磁力線ラベル方向波数)  $k_y \rho_{ti} = 0.2$ ) [3, 8].

(KBM) が不安定であることを示す. イオン温度勾配不安定性の成長率は有限  $\beta$  効果である磁場揺動の影響により抑制され,  $\beta$  値の増大とともに減少する. そして, ある  $\beta$  値の閾値 (この場合イオンベータ値  $\beta_i$  が1.3%程度) を超えると運動論的バルーニングモードが不安定になる. 図5において, イオンベータ値が1%から1.2%の範囲で, 捕捉電子モード (TEM) が現れる. これは, 捕捉電子モードの線形成長率は  $\beta$  値にほとんど依存せず, ITGモードとKBKの成長率が低い  $\beta_i$  が1%から1.2%の範囲で現れることを示す. つまり, TEMは  $\beta_i$  が0から1.3%までのすべての範囲で, 低い成長率のまま不安定である. 図6は, いくつかの  $\beta$  値に対する微視的不安定性の線形成長率と実周波数のポロイダル波数 (正確には磁力線ラベル  $y = -(\alpha - \alpha_0)r(\chi_0)/q(\chi_0)$  方向波数) 依存性を示す. 低  $\beta$  ( $\beta_i = 0.2\%$ ) では, ITGモードが不安定で, 線形成長率は  $k_y \rho_{ti} = 0.3$  程度でピークする. 一方, 高  $\beta$  ( $\beta_i = 1.4\%$ ) では, KBMが不安定で, 線形成長率は  $k_y \rho_{ti} = 0.2$  程度でピークする. 高波数領域および  $\beta_i = 1\%$  では, 捕捉電子モードが最も不安定で, その成長率は  $\beta$  値にほとんど依存しないことがわかる. ITGモードとKBKの実周波数は負であり, これはモードがイオン反磁性方向に回転することを示す. TEMの実周波数は正であり, 電子反磁性方向に回転する.

## 5.2 電磁的ジャイロ運動論方程式の特徴

この節では, 有限  $\beta$  で磁場揺動が現れること, およびその結果ジャイロ運動論方程式[9-12]にどのような項が加わるのか概観する. 磁場揺動は誘導電場揺動を生じるとともに, 磁力線方向を平衡磁場方向からずらすため, 磁力線方向微分に摂動が加わる. 前者は線形効果で, 後者は線形効果と非線形効果である.

### 5.2.1 ジャイロ運動論方程式における磁場揺動の役割

有限  $\beta$  で磁場揺動が現れることを理解するためには, ジャイロ運動論方程式を無次元化するとよい. 無次元化には, イオン熱速度  $v_{ti} = \sqrt{T_i/m_i}$ , イオン熱Larmor半径  $\rho_{ti} = v_{ti}/\Omega_i$ , 大半径  $R_0$ , 代表的な密度  $n_0$  などの定数を用いる. 分布関数は平衡部分と揺動部分に分け  $F_s = F_{Ms}(\epsilon_s) + f_{sk_{\perp}}(z, \epsilon_s, \mu_s, t)$ , 以下では  $f_{sk_{\perp}} = h_{sk_{\perp}} - e_s F_{Ms} \langle \phi_{k_{\perp}} \rangle_s / T_s$  に対

するジャイロ運動論方程式を考える（詳細は第2章参照）。また、 $\mathbf{v} = v_{\parallel} \mathbf{B}/B + \mathbf{v}_{\perp}$ 、 $\mu_s = m_s v_{\perp}^2 / (2B)$  は磁気モーメント、添え字  $s$  は粒子種を表し、速度座標は粒子種それぞれの熱速度  $v_{ts} = \sqrt{T_s/m_s}$  で無次元化する。ここで  $\varepsilon_s = m_s v_{\perp}^2 / 2 = m_s v_{\parallel}^2 / 2 + \mu_s B$ 。また揺動には添え字  $\mathbf{k}_{\perp}$  を付けた。

変数の無次元化は以下のように行う。 $\tilde{t} = tv_{ti}/R_0$ 、 $\tilde{\mathbf{k}}_{\perp} = \mathbf{k}_{\perp} \rho_{ti}$ 、 $\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/v_{ts}$ 、 $\tilde{F}_{Ms} = F_{Ms} v_{ts}^3 / n_0$ 、 $\tilde{f}_{sk_{\perp}} = f_{sk_{\perp}} R_0 v_{ts}^3 / (\rho_{ti} n_0)$ 、 $\tilde{\phi} = e \phi R_0 / (\rho_{ti} T_i)$ 、 $\tilde{A}_{\parallel} = A_{\parallel} R_0 / (\rho_{ti} B_0)$ 、 $\tilde{B} = B/B_0$ 、 $\tilde{\mu} = \mu_s B_0 / (T_i \tilde{T}_s) = \tilde{v}_{\perp}^2 / (2\tilde{B})$ 、 $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_s / (T_i \tilde{T}_s) = \tilde{v}_{\parallel}^2 / 2 + \tilde{\mu} \tilde{B}$ 。変数に加えて定数も以下のように無次元化する。 $\tilde{m}_s = m_s / m_i$ 、 $\tilde{T}_s = T_s / T_i$ 、 $\tilde{n} = n / n_0$ 、 $\tilde{e}_s = e_s / e$ 、 $\tilde{v}_{ts} = v_{ts} / v_{ti}$ 、 $\tilde{R}_0 = R_0 / R_0$ 、 $\tilde{a} = a / R_0$ 、 $\tilde{\rho}_{ts} = \rho_{ts} / \rho_{ti}$ 。例えば、無次元化された定数は  $\tilde{m}_i = 1 \gg \tilde{m}_e = m_e / m_i$ 、 $\tilde{v}_{ti} = 1 \ll \tilde{v}_{te} = \sqrt{m_i / m_e} \sqrt{T_e / T_i}$ 、 $\tilde{e}_i = 1$ 、 $\tilde{e}_e = -1$ 、 $\tilde{R}_0 = 1$ 、 $\tilde{B}_0 = 1$  であり、無次元化された平衡部分（Maxwell分布と仮定）は  $\tilde{F}_{Ms}(\tilde{\varepsilon}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \exp(-\tilde{\varepsilon})$  である。この無次元化はGKVコード[6]で通常用いられる。以下5.3.3節の最後まで、すべての量が無次元化されて…がついている。しかし表記簡略化のため無次元化を示す…を省略する。

磁場揺動は、誘導電場揺動を生じるとともに磁力線方向の微分を乱す。これらの効果が見やすい形に、また有限 $\beta$ と磁場揺動の関係がわかりやすいように、ジャイロ運動論方程式（本講座2章式(9)）をジャイロ中心分布関数で表し、Poisson方程式（2章式(15)）、Ampère則（2章式(16)）を無次元化する。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{sk_{\perp}}}{\partial \tilde{t}} + v_{ts} v_{\parallel} \tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla f_{sk_{\perp}} + v_{ts} v_{\parallel} \langle \langle \tilde{\mathbf{b}} \rangle_s \cdot \nabla f_s \rangle_{k_{\perp}} \\ & + v_{ts} v_{\parallel} \langle \tilde{\mathbf{b}}_{k_{\perp}} \rangle_s \cdot \nabla F_{Ms} \\ & + i v_{Ds} \cdot \mathbf{k}_{\perp} \left( f_{sk_{\perp}} + \frac{e_s \langle \phi_{k_{\perp}} \rangle_s}{T_s} F_{Ms} \right) \\ & + \langle \langle \tilde{\mathbf{v}}_E \rangle_s \cdot \nabla f_s \rangle_{k_{\perp}} + \langle \tilde{\mathbf{v}}_{E k_{\perp}} \rangle_s \cdot \nabla F_{Ms} \\ & + v_{ts} \frac{e_s}{T_s} \langle E_{\parallel k_{\perp}} \rangle_s \frac{\partial F_{Ms}}{\partial v_{\parallel}} = 0, \end{aligned} \quad (3)$$

$$0 = \sum_s e_s \left[ \int \langle f_{sk_{\perp}} \rangle_s d^3 v - \frac{e_s}{T_s} (1 - \Gamma_{0s}) \phi_{k_{\perp}} \right], \quad (4)$$

$$k_{\perp}^2 A_{\parallel k_{\perp}} = \frac{\beta_i}{2} \sum_s e_s \int v_{ts} v_{\parallel} \langle f_{sk_{\perp}} \rangle_s d^3 v. \quad (5)$$

ここで  $\langle g \rangle_s = g J_{0s}$ 、 $J_{0s} \equiv J_0(\rho_s k_{\perp})$  はジャイロ平均された有限Larmor半径効果を表す（導出や記号の詳細は本講座2章式(3)、(14)の説明を参照）。

Ampère則(5)を見ると、イオンベータ  $\beta_i = 8\pi n_0 T_i / B_0^2$  が右辺の電流密度項の係数になっており、 $\beta_i = 0$  で  $A_{\parallel}$  が0になり、磁場揺動が0となることがわかる。したがって  $\beta_i$  が電磁効果のパラメータであり、 $\beta_i = 0$  が静電極限となる。また電子とイオンの温度が同程度であれば  $v_{te} \gg v_{ti}$  なので、Ampère則の電流は主に電子の電流で構成される。

誘導電場は、ジャイロ運動論方程式(3)の中で磁力線方向の電場揺動

$$\langle E_{\parallel k_{\perp}} \rangle_s = -\tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla \langle \phi_{k_{\perp}} \rangle_s - \langle \langle \tilde{\mathbf{b}} \rangle_s \cdot \nabla \langle \phi \rangle_s \rangle_{k_{\perp}} - \frac{\partial \langle A_{\parallel k_{\perp}} \rangle_s}{\partial \tilde{t}}, \quad (6)$$

の中に現れる。この式の右辺第3項が磁場揺動による誘導電場である。これが磁場揺動によって現れる項の一つ目である。電子のジャイロ運動論方程式では  $v_{te} \gg 1$  なので、式(3)でこの係数を持つ項のみを残すと

$$\begin{aligned} & v_{\parallel} \tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla f_{ek_{\perp}} + v_{\parallel} \langle \langle \tilde{\mathbf{b}} \rangle_e \cdot \nabla f_e \rangle_{k_{\perp}} \\ & + v_{\parallel} \langle \tilde{\mathbf{b}}_{k_{\perp}} \rangle_e \cdot \nabla F_{Me} + \frac{e_e}{T_e} \langle E_{\parallel k_{\perp}} \rangle_e \frac{\partial F_{Me}}{\partial v_{\parallel}} = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

を得る。この式で磁場揺動を無視すると ( $A_{\parallel k_{\perp}} = 0$ )、電子の断熱応答式を得る。式(7)において、電子の有限Larmor半径効果を無視し ( $J_{0e} = 1$ )、 $v_{\parallel}$  をかけて速度空間で積分し、有次元に戻すと5.1節で議論した式(1)を得る（等方圧力を仮定し  $\int (v_{te} v_{\parallel})^2 (F_{Me} + f_e) d^3 v = P_{\parallel e} + \delta p_{\parallel e} = p_e$  を用いる。詳細は文献[2]を参照）。以上から、微視的不安定性が磁場揺動に影響される割合やその電磁流体(MHD)不安定性への相似性は、主に電子のジャイロ運動論方程式によって規定されることがわかる。

もう一つは、磁場揺動が磁力線方向の微分をずらす効果で、平衡磁力線方向の単位ベクトルを  $\tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{B}/B$  とすると、揺動磁場を含めると磁力線方向ベクトルは

$$\tilde{\mathbf{b}} + \langle \tilde{\mathbf{b}} \rangle_s \quad (8)$$

となる。その結果、ジャイロ運動論方程式(3)で磁力線方向微分は  $\tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla f_{k_{\perp}} + \langle \langle \tilde{\mathbf{b}} \rangle_s \cdot \nabla f \rangle_{k_{\perp}} = \tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla f_{k_{\perp}} - \frac{1}{B} [\langle A_{\parallel} \rangle_s, f]_{k_{\perp}}$  となる。ここで、 $\langle \tilde{\mathbf{b}} \rangle_s = -\tilde{\mathbf{b}} \times i \mathbf{k}_{\perp} \langle A_{\parallel k_{\perp}} \rangle_s$ 、 $[f, g]_{k_{\perp}} = -\sum_{k'_{\perp}, k''_{\perp}} \delta_{k_{\perp}, k'_{\perp} + k''_{\perp}} \tilde{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{k}'_{\perp} \times \mathbf{k}''_{\perp} f_{k'_{\perp}} g_{k''_{\perp}}$  はPoisson括弧である。この揺動磁場  $\tilde{\mathbf{b}}_s$  効果は、反磁性項  $v_{ts} v_{\parallel} \langle \tilde{\mathbf{b}}_{k_{\perp}} \rangle_s \cdot \nabla F_{Ms} = i v_{ts}^* \cdot \mathbf{k}_{\perp} \frac{e_s}{T_s} F_{Ms} v_{ts} v_{\parallel} \langle A_{\parallel k_{\perp}} \rangle_s$  を除いて全て非線形効果である。したがって、次節以降の線形解析で残る磁場揺動効果は誘導電場揺動項と反磁性項のみである。

ジャイロ運動論方程式(3)の中で、無次元化した磁気ドリフト（本講座2章式(10)）、反磁性ドリフト（2章式(11)）、揺動  $E \times B$  ドリフト速度はそれぞれ  $\mathbf{v}_{Ds} = \frac{T_s}{e_s B} \tilde{\mathbf{b}} \times (\mu \nabla B + v_{\parallel}^2 \tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{b}})$ 、 $\mathbf{v}_{*s} = \frac{T_s}{e_s B} \tilde{\mathbf{b}} \times \nabla \ln F_{Ms}$ 、 $\langle \tilde{\mathbf{v}}_{E k_{\perp}} \rangle_s = -\frac{1}{B} (i \mathbf{k}_{\perp} \langle \phi_{k_{\perp}} \rangle_s) \times \tilde{\mathbf{b}}$  となる。揺動  $E \times B$  対流による非線形項は  $\langle \langle \tilde{\mathbf{v}}_E \rangle_s \cdot \nabla f \rangle_{k_{\perp}} = [\langle \phi \rangle_s, f]_{k_{\perp}}$  で、2章式(9)左辺第4項静電部分に対応する。後で説明するように、 $\beta$  が小さい場合  $\tilde{\mathbf{b}} \cdot \nabla \tilde{\mathbf{b}} \approx \frac{1}{B} \nabla_{\perp} B$  なので[13]、無次元化した磁気ドリフト速度は  $\nabla B$  ドリフトのみで書く。

$$\mathbf{v}_{Ds} = \frac{T_s}{e_s B} (\mu B + v_{\parallel}^2) \tilde{\mathbf{b}} \times \frac{\nabla B}{B}. \quad (9)$$

Poisson方程式の右辺第2項は分極効果であり、 $\Gamma_{0s} = e^{-\rho_s^2 k_{\perp}^2} I_0(\rho_s^2 k_{\perp}^2)$  で  $I_0$  は0次の変形Bessel関数である。またベクトルポテンシャル揺動の平衡磁場垂直成分は  $\beta$  があまり大きくないとして、無視している[9]。

### 5.2.2 ジャイロ運動論方程式の線形化

ここで、微視的不安定性の分散関係式を求めるために、ジャイロ運動論方程式(3)の非線形項を無視して線形化する。また揺動分布関数の非断熱部分  $h_{sk_{\perp}}(z, \varepsilon, \mu, t) = f_{sk_{\perp}}(z, \varepsilon, \mu, t) + \frac{e_s}{T_s} F_{Ms}(\varepsilon) \langle \phi_{k_{\perp}}(z, t) \rangle_s$  を用いて方程式系を書き直す。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial h_{sk_{\perp}}}{\partial t} + i\mathbf{v}_{Ds} \cdot \mathbf{k}_{\perp} h_{sk_{\perp}} + v_{ts} v_{||} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla h_{sk_{\perp}} \\ &= F_{Ms} \frac{e_s}{T_s} \frac{\partial}{\partial t} (\langle \phi_{k_{\perp}} \rangle_s - v_{ts} v_{||} \langle A_{||k_{\perp}} \rangle_s) \\ &+ i\mathbf{v}_{*s}^T \cdot \mathbf{k}_{\perp} F_{Ms} \frac{e_s}{T_s} (\langle \phi_{k_{\perp}} \rangle_s - v_{ts} v_{||} \langle A_{||k_{\perp}} \rangle_s). \quad (10) \end{aligned}$$

この式は2章式(13)を無次元化したものである。Poisson方程式(4)とAmpère則(5)は

$$0 = \sum_s e_s \left( \int \langle h_{sk_{\perp}} \rangle_s d^3v - \frac{e_s}{T_s} \phi_{k_{\perp}} \right), \quad (11)$$

$$k_{\perp}^2 A_{||k_{\perp}} = \frac{\beta_i}{2} \sum_s e_s \int v_{ts} v_{||} \langle h_{sk_{\perp}} \rangle_s d^3v. \quad (12)$$

となる。式(12)より  $\beta_i = 0$  で  $A_{||} = 0$  になることが明示される。以下では揺動の下付き添え字  $\mathbf{k}_{\perp}$  を省略する。

静電的なITGモードの分散関係式を得る過程では、電子の断熱応答を仮定した([14]および本講座3章)。つまり、非断熱応答部分は0 ( $h_e = 0$ ) であるとした。前節で説明したように、電磁的ドリフト波や電磁的微視的不安定性は、磁場揺動により電子が磁力線方向に非断熱的な応答をすることが本質なので、 $h_e \neq 0$  である。

### 5.2.3 大アスペクト比トカマク

ここではアスペクト比が大きいプラズマを考える  $a/R_0 \ll 1$ 。断面が円形で入れ子状の磁気面を仮定し、 $s$ - $\alpha$  モデルで  $\alpha = -q^2 R_0 \beta \frac{1}{p} \frac{dp}{dr} = 0$  の場合を考える。まとめて述べるように  $\alpha$  は  $\beta$  に比例するので、 $\alpha = 0$  のまま微視的不安定性の  $\beta$  値依存性を調べることに問題がある[15]。しかし、ここでは簡単のために  $\alpha = 0$  とする。以上の近似により磁場強度は  $B = B_0 / (1 + \frac{\alpha}{R_0} \cos z)$  となり(無次元化により  $B_0 = 1$ ,  $R_0 = 1$  であることに注意)、無次元化した磁気ドリフト周波数  $\omega_{Ds} \equiv \mathbf{v}_{Ds} \cdot \mathbf{k}_{\perp}$  および反磁性周波数  $\omega_{*s}^T \equiv \mathbf{v}_{*s}^T \cdot \mathbf{k}_{\perp}$  は、式(9)などから

$$\omega_{Ds} = \frac{-T_s}{e_s R_0 B_0} (v_{||}^2 + \mu B) (k_x \sin z + k_y (\cos z + \hat{s} z \sin z)), \quad (13)$$

$$\omega_{*s}^T = k_y \frac{-T_s}{e_s L_n B_0} \left[ 1 + \left( \varepsilon - \frac{3}{2} \right) \eta_s \right] \quad (14)$$

となる(詳細は本講座2章4節参照)。密度勾配長、温度勾配長は  $L_n = -(d \ln n / dx)^{-1}$ ,  $L_T = -(d \ln T_s / dx)^{-1}$  のように与えられ、 $\eta_s = L_n / L_T$  である。また  $k_x$  は動径方向  $x = (\chi - \chi_0) q(\chi_0) / (B_0 r(\chi_0))$  の波数である。

### 5.3 電磁的イオン温度勾配不安定性と運動論的バルーニングモード

この節では電磁的イオン温度勾配(ITG)モードおよび運動論的バルーニングモード(KBM)の分散関係式を文献[16]に従って解説する。初めに線形化したジャイロ運動論方程式(10)を時間に関してFourier変換する。この変換により式(10)の  $\partial / \partial t$  は  $-i\omega$  に置き換えられる。ここで  $\omega = \omega_r + i\gamma$  は複素周波数で、 $\gamma$  は線形成長率、 $\omega_r$  は実周波数を表す。図5, 6ではこれらをプロットした。

電磁的ITGモードの分散関係式は、以下の仮定を行うことにより、線形化したジャイロ運動論方程式(10)、Poisson方程式(11)、Ampère則(12)から導かれる。

- 磁力線方向局所近似:  $B(z) = B(z \approx 0)$ ,  $\omega_{Ds}(z) \rightarrow \omega_{Ds}(z \approx 0)$  とこれらの仮定から  $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \rightarrow ik_{||}$ 。
- 電子の磁力線方向の速い運動:  $\omega \approx \omega_{De} \ll k_{||} v_{te}$ 。
- イオン流体近似:  $\omega_{Di} \ll \omega$ ,  $k_{||} v_{ti} \ll \omega$ ,  $k_{\perp} \rho_{ti} \ll 1$ 。

以下の小節で、これらの仮定の意味を説明しながら、一つずつ線形化したジャイロ運動論方程式(10)に適用することにより、電磁的イオン温度勾配不安定性および運動論的バルーニングモードの分散関係式を得る。

#### 5.3.1 磁力線方向局所近似

トラス外側領域は悪い曲率領域と呼ばれ、前節で示したように、この領域に不安定性が現れる(図1, 2, 3)。そして、 $\beta$  値が小さい場合、

$$\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} - \frac{\nabla_{\perp} B}{B} = \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{B^2} = \frac{\beta_i}{2} \frac{\nabla p}{B^2} \approx \beta_i \ll 1, \quad (15)$$

となり、この領域は弱磁場領域と同じである。ここで  $\nabla_{\perp} = \nabla - \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} (\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla)$ 。この式は電磁流体(MHD)平衡方程式とAmpère則から得られ、式(9)の導出で用いた。

局所近似は、揺動がトラス外側(悪い曲率領域)に局在していると仮定することである。図3に示したようにこの仮定は良く成立している。この近似を用いると、悪い曲率領域は  $z \ll 1$  で表されるので、方程式中の磁力線方向座標は、 $z \approx 0$  と近似できる。大アスペクト比近似とあわせて、 $R(z \approx 0) = R_0 + \alpha \approx R_0$ ,  $B(z \approx 0) = B_0 / (1 + \alpha / R_0) \approx B_0$ 。そして式(13), (14)は

$$\omega_{Ds}(z \approx 0) = \omega_{*s} \varepsilon_n (v_{||}^2 + v_{\perp}^2 / 2), \quad (16)$$

$$\omega_{*s}^T = \omega_{*s} \left[ 1 + \left( \frac{v_{\perp}^2}{2} - \frac{3}{2} \right) \eta_s \right], \quad (17)$$

となる。ここで  $\omega_{*s} = -T_s k_y / (e_s L_n B_0)$ ,  $\varepsilon_n = L_n / R_0$ 。これらの近似の結果、平衡磁場強度  $B$ 、磁気ドリフト周波数  $\omega_{Ds}$  は磁力線方向座標  $z$  に依存しなくなり、 $z$  方向についてジャイロ運動論方程式を容易にFourier変換できて、 $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \rightarrow ik_{||}$  と置き換えることができる。これらを線形化したジャイロ運動論方程式(10)に適用すると

$$h_{sk_{\perp}} = \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} \frac{\omega - \omega_{*s}^T}{\omega - \omega_{Ds} - v_{ts} k_{||} v_{||}} (\phi_{k_{\perp}} - v_{ts} v_{||} A_{||k_{\perp}}) J_{0s} \quad (18)$$

が得られる。この式と Poisson 方程式及び Ampère 則を連立することにより分散関係式を得る。

局所近似は、揺動の磁力線方向の波長  $1/k_{\parallel}$  が  $B$  および  $\omega_{Ds}$  が磁力線方向に変化する長さより十分短い場合に成立する。一方、5.1節で説明したように、揺動に対してはジャイロ運動論方程式の導出で用いたフルート近似が成立しているため、揺動の磁力線方向の波長は  $1/k_{\parallel} \approx qR_0$  程度に長い。したがって、局所近似で  $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \rightarrow ik_{\parallel}$  とすることの妥当性には注意が必要である。

式(18)を Poisson 方程式(11)と Ampère 則(12)に代入すると

$$0 = \sum_s P_{0s} \phi - \sum_s v_{ts} P_{1s} A_{\parallel} - \sum_s \frac{e_s^2}{T_s} \phi, \quad (19)$$

$$k_{\perp}^2 A_{\parallel} = \frac{\beta_i}{2} \left[ \sum_s v_{ts} P_{1s} \phi - \sum_s v_{ts}^2 P_{2s} A_{\parallel} \right] \quad (20)$$

が得られる。ここで、

$$P_{ms} = \int \frac{e_s^2 F_{Ms}}{T_s} \frac{(\omega - \omega_{*s}^T) v_{\parallel}^m J_{0s}^2}{\omega - \omega_{Ds} - v_{ts} k_{\parallel} v_{\parallel}} d^3 v \quad (21)$$

である。これらの式は  $\phi$  と  $A_{\parallel}$  の連立代数方程式になっており、非自明な解をもつ条件から電磁的微視的不安定性の分散関係式を得られる。

形式的には式(21)中の速度空間積分を行い  $P_{ms}$  を求めればよいが、解析的に積分を行うために文献[16]に従い、以下の節で説明する近似を用いる。

### 5.3.2 電子の磁力線方向の速い運動

電子の質量はイオンの質量より十分小さく、イオンと電子の温度が同程度であれば、電子の熱速度  $v_{te}$  で特徴付けられる電子の磁力線方向の運動がイオンより十分速いと考えられる。したがって、電子に関して  $P_{me}$  を求めるために、磁力線方向の速い運動  $\omega \approx \omega_{De} \ll k_{\parallel} v_{te}$  を仮定することができる。さらに、電子の Larmor 半径は考えている不安定性の波長より十分小さい  $k_{\perp} \rho_{te} \ll 1$  と仮定し、 $J_{0e} \approx 1$  とする。これらの仮定と  $e_e^2 = 1$  を用いると、 $P_{me}$  は以下のように単純化され、速度空間積分を解析的に行うことができる。

$$P_{me} = \int \frac{-F_{Me}}{T_e} \frac{(\omega - \omega_{*e}^T) v_{\parallel}^{m-1}}{v_{te} k_{\parallel}} d^3 v. \quad (22)$$

ここで速度空間積分は全領域に対して行う。ガウス分布  $F_{Ms}$  の速度空間積分において  $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} \exp(-ax^2) dx = \sqrt{\pi} \frac{(2n+1)!}{2^n} a^{-\frac{2n+1}{2}}$  および  $\int_0^{\infty} x^{2n+1} \exp(-ax^2) dx = \frac{n!}{2} a^{-n-1}$  を用いる。

$m = 0$  の場合、非積分関数は  $v_{\parallel}$  の奇関数なので  $P_{0e} = 0$ 。  
 $m = 1$  および  $m = 2$  の場合

$$P_{1e} = \frac{-(\omega - \omega_{*e})}{v_{te} k_{\parallel} T_e}, \quad (23)$$

$$P_{2e} = \frac{-1}{v_{te}^2 k_{\parallel}^2 T_e} (\omega(\omega - \omega_{*e}) - \hat{\omega}_{De}(\omega - \omega_{*pe})) \quad (24)$$

を得る。ここで  $P_{2e}$  の計算では  $P_{me}$  を以下のように

$1/(v_{te} k_{\parallel})$  の高次まで展開した。

$$P_{me} = \int \frac{-F_{Me}}{T_e} \frac{(\omega - \omega_{*e}^T) v_{\parallel}^{m-1}}{v_{te} k_{\parallel}} \left( 1 + \frac{\omega - \omega_{De}}{v_{te} k_{\parallel} v_{\parallel}} \right) d^3 v. \quad (25)$$

これらを用いると、Poisson 方程式(19)と Ampère 則(20)は以下のように書ける。

$$0 = \omega(1 + \tau - P_{0i}) \phi - [\tau(\omega - \omega_{*e}) - k_{\parallel} P_{1i}] \phi, \quad (26)$$

$$\frac{2k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2}{\beta_i} \phi = \omega k_{\parallel} P_{1i} \phi - \tau \omega (\omega - \omega_{*e}) (\phi - \phi) - [k_{\parallel}^2 P_{2i} + \tau \hat{\omega}_{De} (\omega - \omega_{*pe})] \phi. \quad (27)$$

ここで  $\tau = T_i/T_e$ ,  $\hat{\omega}_{Ds} = -2T_s k_y / (e_s R_0 B_0)$ ,  $\omega_{*ps} = \omega_{*s} (1 + \eta_s)$ 。さらに

$$\phi \equiv \frac{\omega}{k_{\parallel}} A_{\parallel}$$

を導入した。  $E_{\parallel} = -ik_{\parallel} \phi + i\omega A_{\parallel}$  なので、理想MHD極限が簡単な式  $\phi = \psi$  で表される。

### 5.3.3 イオン流体近似

分散関係式を得る最後のステップとして

$$P_{mi} = \int \frac{e_i^2 F_{Mi}}{T_i} \frac{(\omega - \omega_{*i}^T) v_{\parallel}^m J_{0i}^2}{\omega - \omega_{Di} - v_{ti} k_{\parallel} v_{\parallel}} d^3 v \quad (28)$$

を計算する。ここで、我々が用いている規格化では  $e_i^2 = 1$ ,  $T_i = 1$ ,  $v_{ti} = 1$  であることに注意する。この式に、静電的 ITG モードの分散関係式を求める時[15]と同様に、イオンの流体近似  $\omega_{Di} \ll \omega$ ,  $k_{\parallel} v_{\parallel} \ll \omega$ ,  $k_{\perp} \rho_{ti} \ll 1$  を適用する。この近似により

$$\frac{(\omega - \omega_{*i}^T) J_{0i}^2}{\omega - \omega_{Di} - k_{\parallel} v_{\parallel}} \approx \left( 1 - \frac{\omega_{*i}^T}{\omega} \right) J_{0i}^2 \left( 1 + \frac{\omega_{Di}}{\omega} + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2 v_{\parallel}^2}{\omega^2} \right) \quad (29)$$

を得る。ここで  $x \ll 1$  に対して  $1/(1+x) \approx 1 - x + x^2$  が成立することを用いた。次に  $k_{\perp} \rho_{ti} \ll 1$  を用いて、イオン有限 Larmor 半径効果を  $J_{0i} \approx 1 - \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{2\Omega_i} \right)^2$  と展開し、 $J_{0i}^2 \approx 1 - \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{2\Omega_i^2}$  を得る。ここで  $\Omega_i(z=0) = 1$  に注意する。したがって  $P_{mi}$  は

$$P_{mi} = \int F_{Mi} v_{\parallel}^m \left( 1 - \frac{\omega_{*i}^T}{\omega} \right) \times \left( 1 + \frac{\omega_{Di}}{\omega} + \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2 v_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2 v_{\perp}^2}{2\Omega_i^2} \right) d^3 v \quad (30)$$

と近似される。速度空間積分を行うと以下を得る。

$$P_{0i} = 1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} + \left( 1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega} \right) \left( \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2}{\Omega_i^2} \right), \quad (31)$$

$$P_{1i} = \frac{k_{\parallel}}{\omega} \left( 1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega} \right), \quad P_{2i} = 1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega}. \quad (32)$$

これらから Poisson 方程式(26)と Ampère 則(27)は

$$\left[ \tau \left( 1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) - \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} \left( 1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega} \right) \right] (\phi - \psi)$$

$$+ \left( \frac{k_{\perp}^2}{\Omega_i^2} - \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} \right) \left( 1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega} \right) \phi = 0, \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \frac{2k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2}{\beta_i} \phi = & \left[ k_{\parallel}^2 \left( 1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega} \right) - \tau \omega (\omega - \omega_{*e}) \right] \phi \\ & + \tau \omega (\omega - \omega_{*e}) \phi \\ & - \left[ k_{\parallel}^2 \left( 1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega} \right) + \tau \hat{\omega}_{De} (\omega - \omega_{*pe}) \right] \phi. \end{aligned} \quad (34)$$

となる. この Poisson 方程式(33)と Ampère 則(34)を合わせて, 磁化プラズマの流体方程式系における渦度方程式([2]の式(5.1.1))を参照)に対応する式が導かれる.

$$\begin{aligned} \omega (\omega - \omega_{*pi}) k_{\perp}^2 \phi = & \frac{2k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2}{\beta_i} \phi + \hat{\omega}_{Di} (\omega - \omega_{*pi}) \phi \\ & + \tau \hat{\omega}_{De} (\omega - \omega_{*pe}) \phi. \end{aligned} \quad (35)$$

左辺は慣性項(分極ドリフト項), 右辺第1項は磁力線折り曲げ安定化項でシア Alfvén 波の伝搬を生じる. 右辺第2項第3項は曲率ドリフト項(あるいは  $\nabla B$  ドリフト項)でプラズマのトラス性によって現れる. また, この項は MHD で圧力駆動型不安定性を生じるため, 圧力駆動項とも呼ばれる. 渦度方程式(35)は以下のように書くことができる.

$$\phi = \frac{\omega k_{\perp}^2 (\omega - \omega_{*pi}) - \hat{\omega}_{Di} (\omega - \omega_{*pi})}{2k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2 / \beta_i - \hat{\omega}_{Di} (\omega - \omega_{*pe})} \phi. \quad (36)$$

この式を Poisson 方程式(33)に代入することにより, 電磁的 ITG モードと KBM の分散関係式を得る[16].

$$\begin{aligned} \tau \left( 1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) + \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega_{*pi}}{\omega} - 1 \right) \\ + \left( \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} - \frac{k_{\perp}^2}{\Omega_i^2} \right) \left( \frac{\omega_{*pi}}{\omega} - 1 \right) \\ \times \left[ 1 - \frac{\tau \omega (\omega - \omega_{*e}) - k_{\parallel}^2 (1 - \omega_{*pi}/\omega)}{2k_{\perp}^2 k_{\parallel}^2 / \beta_i - \hat{\omega}_{Di} (\omega - \omega_{*pe})} \right] = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

### 5.3.4 電磁的イオン温度勾配不安定性と運動論的バルーニングモードの分散関係式

以上の手続きにより, 電磁的イオン温度勾配 (ITG) 不安定性と運動論的バルーニングモード (KBM) の分散関係式を得た. 無次元化した量を有次元に戻すと式(37)は以下のようになる.

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2 c_s^2}{\omega^2} \left( \frac{\omega_{*pi}}{\omega} - 1 \right) \\ + \frac{T_e}{T_i} \left( \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} - k_{\perp}^2 \rho_{ti}^2 \right) \left( \frac{\omega_{*pi}}{\omega} - 1 \right) F = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

ここで,

$$F = 1 - \frac{T_i}{T_e} \frac{\omega (\omega - \omega_{*e}) + k_{\parallel}^2 c_s^2 (\omega_{*pi}/\omega - 1)}{2k_{\perp}^2 \rho_{ti}^2 k_{\parallel}^2 / \beta_i - \hat{\omega}_{Di} (\omega - \omega_{*pe})} \quad (39)$$

の第2項がイオンベータ  $\beta_i = \beta / (1 + T_e/T_i)$  とともに増大する電磁安定化効果を表す. また有次元で各量

は  $\hat{\omega}_{Di} = -(2cT_i k_y)/(eB_0 R_0)$ ,  $\omega_{*s} = -(cT_s k_y)/(e_s B_0 L_n)$ ,  $\omega_{*ps} = \omega_{*s} (1 + \eta_s)$ ,  $c_s^2 = v_{ti}^2 T_e/T_i$ ,  $v_{ti}^2 = T_i/m_i$ ,  $\eta_s = d \ln T_s/d \ln n_0$ ,  $e_i = e$ ,  $e_e = -e$  である. 分散関係式(38)の第1, 2項, 第3項, 第4項は, それぞれドリフト波の伝搬, スラブ ITG 不安定性の駆動, トロイダル ITG 不安定性の駆動を表す. トラス外側で  $\hat{\omega}_{Di} \omega_{*pi} > 0$  なので, トロイダル ITG 不安定性の駆動項は正になり, 不安定性を駆動する. ITG モードの圧力勾配による駆動項(式(38)の  $F$  の前の係数)は  $(\hat{\omega}_{Di}/\omega - k_{\perp}^2 \rho_{ti}^2) \omega_{*pi}/\omega > 0$  程度なので,  $\hat{\omega}_{Di}$  が小さいほうが ITG モードは駆動されにくくなる. そして  $k_{\perp}^2 \rho_{ti}^2$  が1程度に大きくなると ITG モードは駆動されにくくなる(図6). また, 駆動項の係数  $T_e/T_i$  は,  $T_e/T_i$  が大きい方がトロイダル ITG モードは不安定であることを示す. 分散関係式(37)は,  $\hat{\omega}_{Di} \rightarrow 0$  の極限で, 純粋なスラブ ITG モードの分散関係式になる. 一方,  $k_{\parallel}^2 c_s^2 / \omega^2 \rightarrow 0$  の極限で, 純粋なトロイダル ITG モードの分散関係式になる.

トロイダル ITG モードは, 通常トラス外側領域で満たされる  $\hat{\omega}_{Di} \omega_{*pi} > 0$  で不安定になる. したがってトロイダル ITG 駆動項を小さくする  $F$  の第2項が ITG モードの電磁的安定化効果を表す. 電磁的安定化効果は, その名のとおり静電極限  $\beta_i = 0$  で0になり, この極限で  $F = 1$  となる. 静電極限では  $v_A = v_{ti}/\sqrt{\beta_i} \rightarrow \infty$  で Alfvén 波の位相速度が無限大となり, 磁場揺動が不安定性へ寄与しなくなることを注意する.

低  $\beta$  極限  $\beta_i \ll 1$  では, 安定化係数  $F$  は

$$F = 1 - \beta_i \frac{\hat{\omega}_{Di} \omega_{*i} + k_{\parallel}^2 v_{ti}^2 \omega_{*pi} / \hat{\omega}_{Di}}{2k_{\perp}^2 \rho_{ti}^2 k_{\parallel}^2 v_{ti}^2} + O(\beta_i^2) \quad (40)$$

となる. ここでトロイダル ITG モードに対して有効な近似  $\omega_{ITG} \approx \hat{\omega}_{Di} \ll \omega_{*pi}$  を用いた[16]. この式は,  $k_{\perp}^2$  と  $k_{\parallel}^2$  が小さい場合, 電磁安定化効果が強くなることを示す. 一方,  $\hat{\omega}_{Di}$  が小さい場合, 電磁安定化効果は弱くなる. ここで,  $k_{\parallel}^2 v_{ti}^2 \omega_{*pi}$  はスラブ ITG モードの駆動力であり, トロイダル ITG モードの場合小さいことに注意する.

$\beta$  が大きくなると,  $\hat{\omega}_{Di} \omega_{*pi}$  を含む不安定性駆動項の符号, つまり  $F$  (式(39)) の符号は, ある閾値  $\beta_i$  の前後で正から負に変わる. つまり, この閾値より大きい  $\beta$  では, 電磁的效果が ITG モードを完全に安定化する. この閾値  $\beta$  は式(39)の  $F = 0$  から求まる[16].

$$\beta_{it} = \frac{2k_{\perp}^2 \rho_{ti}^2 k_{\parallel}^2 v_{ti}^2}{\hat{\omega}_{Di} (\omega_{*i} - \omega_{*pe}) + k_{\parallel}^2 v_{ti}^2 \omega_{*pi} / \hat{\omega}_{Di}}. \quad (41)$$

ここで再びトロイダル ITG モードに対して有効な近似  $\omega_{ITG} \approx \hat{\omega}_{Di} \ll \omega_{*pi}$  を用いた. 低  $\beta$  の式(40)と有限  $\beta$  の式(41)を合わせると, 微視的不安定性の  $\beta$  値依存性の概略図は図7のようになる. 図中に示したように,  $k_{\perp}^2$  が小さいほうが電磁的安定化効果は強くなり,  $\hat{\omega}_{Di}$  が小さいほうが電磁的安定化効果は弱くなる. したがって,  $k_{\perp}^2$  と  $\hat{\omega}_{Di}$  の ITG モードへの電磁的安定化効果は, 前述の, ITG モードの圧力勾配による駆動項(式(38)の  $F$  の前の係数)によって示される「 $\hat{\omega}_{Di}$  が小さいまたは  $k_{\perp}^2$  が大きいほど ITG モードは駆動されにくくなる」ことと逆の効果である[15].

17]. さらに、 $k_{||}$ を小さくすると、電磁的安定化効果は強くなる。このことは、弱磁気シアが電磁的安定化効果を引き出すことに有効であることを示す。なぜなら、磁気シアが小さいと磁力線方向のモード構造は広がり、 $k_{||}$ が小さくなるからである。

5.3.5 運動論的バルーニングモード

最後にMHD極限（シアAlfvén極限） $\omega \approx \omega_{*pi}$ を考える。

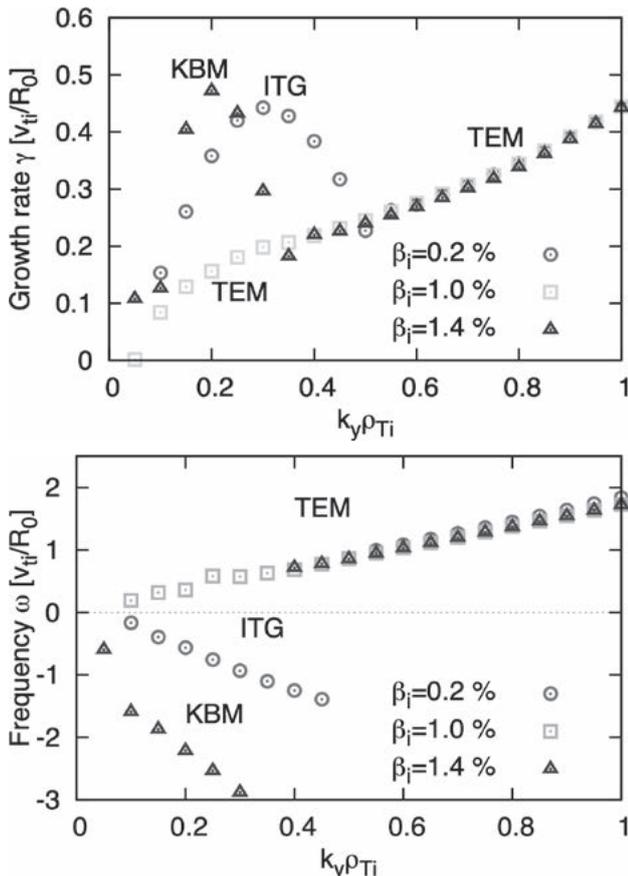


図6 いくつかの $\beta$ 値に対する微視的不安定性の線形成長率 $\gamma$ と実周波数 $\omega$ のポロイダル波数依存性[3, 8].

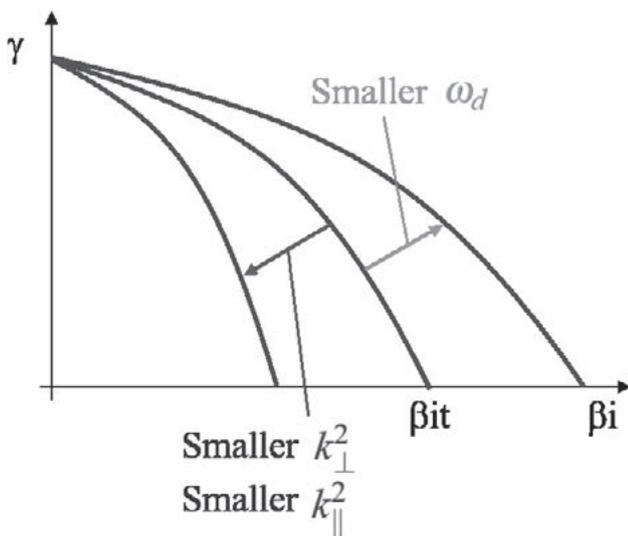


図7 分散関係式に基づくITGモードの $\beta$ 値依存性の概略図[17], ここで $\beta_i = \beta / (1 + T_e/T_i)$ はイオンベータ。また、 $\beta_{it}$ はITGモードからKBMへの遷移が起こる $\beta$ 値を表す。ITGモードへの電磁安定化効果の $k_{\perp}^2$ ,  $\omega_{Di}$ ,  $k_{||}^2$ 依存性も示す。

この極限は、特にエッジ領域（プラズマ表面近く）におけるエッジローカライズモード（ELM）の解析において有用である。なぜならHモードプラズマはエッジ領域において急峻な圧力分布を持つので、この領域において $\omega_{*pi}$ はとて大きくなり、 $\omega \approx \omega_{*pi}$ となるからである。その結果、以下に示すようにMHD極限（シアAlfvén極限） $\phi = \psi$  ( $E_{||} = 0$ ) が成立する。

$\omega \approx \omega_{*pi}$ が成立する場合、Poisson方程式(33)の最後の項は非常に小さくなる。したがって理想MHD関係式 $\phi = \psi$ , つまり $E_{||} = 0$ が成立する。ここで理想MHDでは $\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0$ が成立するので、 $E_{||} = 0$ であることに注意する。このようにして渦度方程式(35)は運動論的バルーニングモード（KBM）の分散関係式になる。

$$\omega(\omega - \omega_{*pi})k_{\perp}^2\rho_{ti}^2 = \frac{2k_{\perp}^2\rho_{ti}^2k_{||}^2v_{ti}^2}{\beta_i} - \hat{\omega}_{Di}(\omega_{*pi} - \omega_{*pe}). \tag{42}$$

これは、MHD解析におけるバルーニング方程式に対応する。つまり、左辺の $\omega_{*pi}$ 項を無視し、 $\omega_{*pi} - \omega_{*pe} = \omega_{*p}$ , また、 $k_{||}$ を $z$ 微分（磁力線方向微分）に戻すと、よく知られたMHDバルーニング方程式に対応する式を得る（文献[2]の式(5.1.1)および式(5.1.2)を参照）。左辺は慣性項、右辺第一項は磁力線折り曲げ安定項にそれぞれ対応する。そして、右辺第二項は圧力勾配による不安定性駆動項に対応し、悪い曲率領域 $\hat{\omega}_{Di}(\omega_{*pi} - \omega_{*pe}) > 0$ でバルーニングモードを不安定化させる。運動論的バルーニングモードの複素周波数は以下のようになる。

$$\omega = \frac{\omega_{*pi}}{2} \pm \left[ \left( \frac{\omega_{*pi}}{2} \right)^2 + \frac{2k_{||}^2v_{ti}^2}{\beta_i} - \frac{\hat{\omega}_{Di}(\omega_{*pi} - \omega_{*pe})}{k_{\perp}^2\rho_{ti}^2} \right]^{1/2}. \tag{43}$$

KBMの実周波数は $\omega_{*pi}/2$ であり、KBMはイオン反磁性方向に回転する（図6）。ただし、導出に用いた近似が成立しない一般的な場合は、KBMは電子反磁性方向へ回転する可能性があることに注意する。また、運動論的バルーニングモード（KBM）は以下の安定限界より高い $\beta$ 値で不安定になる。

$$\beta_{iBM} = \frac{2k_{\perp}^2\rho_{ti}^2k_{||}^2v_{ti}^2}{\hat{\omega}_{Di}(\omega_{*pi} - \omega_{*pe}) - k_{\perp}^2\rho_{ti}^2(\omega_{*pi}/2)^2}. \tag{44}$$

この運動論的バルーニングモードの不安定化ベータ値 $\beta_{iBM}$ (44)は、ITGモードの安定化ベータ値 $\beta_{it}$ (41)に近いことに注意する。数値シミュレーションによっても $\beta_{it}$ と $\beta_{iBM}$ が近いことが示されている（図5）。

5.4 まとめ

電磁的イオン温度勾配（ITG）モードおよび運動論的バルーニングモードの分散関係式を、局所近似、電子の磁力線方向の速い運動近似、イオンの流体近似、を行うことにより、ジャイロ運動論方程式、Poisson方程式、Ampère則から導いた。トロイダルITGモードの場合、最も簡単な分散関係式は低 $\beta$ で

$$\omega^2 = -\frac{T_e}{T_i} \hat{\omega}_{Di} \omega_{*i} (1 + \eta_i) \left( 1 - \beta_i \frac{\hat{\omega}_{Di} \omega_{*i}}{2k_{\perp}^2 \rho_{ti}^2 k_{\parallel}^2 v_{ti}^2} \right) \quad (45)$$

となる。この式は、 $\beta_i = 0$ で、静電近似をした場合のITGモードの分散関係式の最も簡単な場合[14]に帰着する。トラス外側では、通常 $\hat{\omega}_{Di} \omega_{*i} > 0$ であり、ITGモードが不安定である。この場合、磁場揺動による安定化項( $\beta_i$ に比例する項)は必ず負であり、必ず安定化効果がある。そして、 $\omega_{Di}$ の絶対値が大きい方が、 $k_{\perp}$ または $k_{\parallel}$ が小さい方が、磁場揺動による安定化効果は大きいことがわかる。磁力線方向波数 $k_{\parallel}$ が小さい方が磁場揺動によるITGモードの安定化効果が大きいことは、弱磁気シアプラズマにおいて有限 $\beta$ 効果によるITGモードの安定化効果が期待できることを示唆する。

最後に注意を述べる。これまでは、有限 $\beta$ 効果と磁場揺動効果は同じであるとして議論してきた。しかし、有限 $\beta$ 効果と磁場揺動効果は異なる。有限 $\beta$ は、磁場揺動のみならずプラズマの平衡状態を変化させる。つまり、有限 $\beta$ では、Pfirsch-Schlüter電流が平衡状態の磁場構造にShafranovシフトを生じさせる。この効果は、磁場揺動によるITGモードの安定化効果を相殺し、イオン温度勾配によって駆動される乱流輸送は $\beta$ 値とともに減少しないことが理解されている[15, 17]。

## 謝辞

本講座の執筆にあたって貴重な助言をいただいた前山伸也講師ならびに渡邊智彦教授に深く感謝いたします。



いし ざわ あき ひろ  
石澤 明 宏

京都大学大学院エネルギー科学研究科・教授。電磁的乱流の理論・シミュレーション。休日は、Keith Jarrett TrioのStandards Liveを聞きながら洗濯物を干し、調子よく滑り出すことが多いです。ところが先日、妻に洗濯物の配置が悪く乾きにくいと指摘されました。私は流体理論に基づき配置していると主張しましたが、「理論と実践は異なる」と受け付けてもらえませんでした。プラズマの研究ではそのようなことはないと思っていて理論・シミュレーション研究を行っております。

本章の作成は科学研究費 [基盤研究 (C) : 17K06991] の援助を得て行われました。

## 参考文献

- [1] <https://www.qst.go.jp/site/jt60/5150.html>
- [2] 石澤明宏：プラズマ・核融合学会誌 **90**, 213 (2014).
- [3] A. Ishizawa *et al.*, J. Plasma Phys. **81**, 435810203 (2015).
- [4] K. Imadera *et al.*, IAEA-FEC, TH/P5-8 (2014).
- [5] A. Ishizawa *et al.*, Phys. Plasmas **26**, 082301 (2019).
- [6] T.-H. Watanabe and H. Sugama, Nucl. Fusion **46**, 24 (2006).
- [7] 石澤明宏：プラズマ・核融合学会誌 **92**, 530 (2016).
- [8] 石澤明宏：プラズマ・核融合学会誌 **92**, 546 (2016).
- [9] T.M. Antonsen and B. Lane, Phys. Fluids **23**, 1205 (1980).
- [10] E.A. Frieman and L. Chen, Phys. Fluids **25**, 502 (1982).
- [11] T.S. Hahm *et al.*, Phys. Fluids **31**, 1940 (1988).
- [12] A.J. Brizard and T.S. Hahm, Rev. Mod. Phys. **79**, 421 (2007).
- [13] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, *Plasma Confinement* (Dover, 2003).
- [14] 洲鎌英雄, 矢木雅敏：プラズマ・核融合学会誌 **76**, 1007 (2000).
- [15] A. Ishizawa *et al.*, Phys. Rev. Lett. **123**, 025003 (2019).
- [16] J.Y. Kim *et al.*, Phys. Fluids B **5**, 4030 (1993).
- [17] M. Niuro *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **65**, 065004 (2023).