



4. 捕捉電子不安定性

4. Trapped Electron Mode

洲 鎌 英雄^{1,2)}
SUGAMA Hideo^{1,2)}

¹⁾核融合科学研究所, ²⁾東京大学大学院新領域創成科学研究科
(原稿受付: 2023年6月1日)

トロイダル磁場配位では、磁場の弱いトーラスの外側領域に捕捉された粒子がバウンス運動を行い、バナナ軌道を描く。この捕捉粒子のバウンス運動の中心は、歳差運動とよばれるドリフト運動を行い、捕捉粒子不安定性と呼ばれる微視的不安定性を引き起こす原因となる。本章では、イオン温度勾配 (ITG) 不安定性の波数に近い波数領域で不安定となり、ITG モードと同様にトロイダルプラズマの乱流輸送を引き起こす静電不安定性として関心を集める捕捉電子モード (TEM) について解説する。

Keywords:

trapped electron mode, gyrokinetic theory, precession drift, toroidal plasma, microinstability

4.1 はじめに

トーラス磁場配位では、磁場の弱いトーラスの外側領域にバナナ軌道を描く捕捉粒子が $\epsilon^{1/2}$ 程度の割合で存在し、これに起因する微視的不安定性は捕捉粒子不安定性 [1-3] と呼ばれる。ここで、 $\epsilon \equiv r/R$ はトーラスの小半径 r と大半径 R の比を表し、トーラスの逆アスペクト比と呼ばれる。ここでは、荷電粒子の質量、電荷、温度を、 m_a , e_a , T_a で表すことにする。下付き添字 a は粒子種を意味し、 $a=e, i$ により、それぞれ、電子、イオンを表す。粒子の熱速度は、 $v_{ta} = (T_a/m_a)^{1/2}$ で与えられる。 a 種粒子による捕捉粒子不安定性が生じるには、バナナ軌道に沿った捕捉粒子運動のバウンス周波数 $\omega_{ba} \sim \epsilon^{1/2} v_{ta}/Rq$ (q : 安全係数) に比べて、揺動の周波数 ω が十分に小さい必要がある。

捕捉電子のバウンス周波数 ω_{be} は、捕捉イオンのバウンス周波数 ω_{bi} に比べて、 $(m_i/m_e)^{1/2}$ 倍程度大きく、 $\omega \ll \omega_{bi}$ の低周波数帯における捕捉粒子不安定性は捕捉イオン・モード (trapped ion mode, TIM) と呼ばれる。一方、 $\omega_{bi} \ll \omega \ll \omega_{be}$ の周波数帯における捕捉粒子不安定性は捕捉電子モード (trapped electron mode, TEM) と呼ばれ、捕捉イオンは不安定化に寄与しない。衝突の影響がない場合、捕捉粒子のバナナ軌道の中心 (バウンス中心) はトロイダル方向にドリフト運動 (歳差ドリフトと呼ばれる) を行い (図1参照), 捕捉イオンと捕捉電子では歳差ドリフトの向きは逆になる。トーラス小半径方向に密度勾配 (あるいは温度勾配) がある平衡状態にフルート型 (波数ベクトルが磁力線方向と小半径方向に対して垂直) の密度揺動 (あるいは温度揺動) が生じると、捕捉粒子の歳差ドリフトにより揺動振幅の山・谷の間に荷電分離が起こり、それにより生成される静電ポテンシャル揺動が作る平衡密度勾配

(あるいは温度勾配) 方向の $E \times B$ ドリフトが密度揺動 (あるいは温度揺動) を増幅させる (図2参照)。これが無衝突捕捉粒子不安定性の発生機構である [3]。

ここで、捕捉粒子に対するクーロン衝突の効果について、触れておこう。弱磁場領域に存在する a 種の捕捉粒子の速度の方向もしくはピッチ角がクーロン衝突により散乱される過程は、ランダムウォークと同様の拡散過程と見なされ、衝突により $\epsilon^{1/2}$ 程度のピッチ角だけ散乱され、非捕捉粒子となってしまうのに要する実効的な時間 $\tau_{\text{eff},a}$ は、 $(\epsilon^{1/2})^2/\tau_{\text{eff},a} \sim 1^2/\tau_a$ の関係式から見積もられる。ここで、クーロン衝突時間 τ_a は、衝突により 90° あるいは 1 rad の程度のピッチ角散乱が起こる時間に対応する。したがって、クーロン衝突周波数を $\nu_a = 1/\tau_a$ で表すと、捕捉粒子に対する実効的な衝突周波数は、 $\nu_{\text{eff},a} = 1/\tau_{\text{eff},a} \sim \nu_a/\epsilon$ と見積もられ、 $\nu_{\text{eff},a}$ は、 $\nu_a = 1/\tau_a$ に比べて、 ϵ^{-1} の因子の分だけ大きなものとなることに注意しよう。

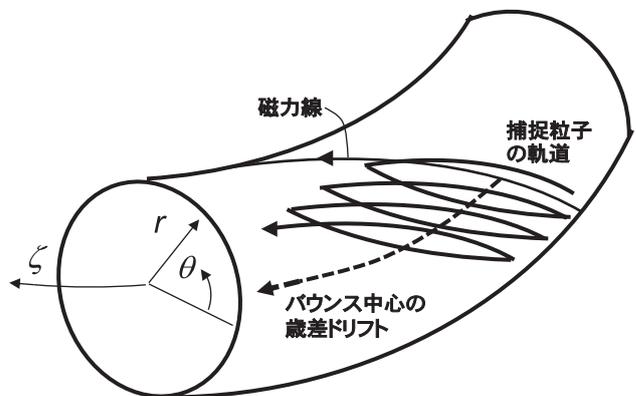


図1 捕捉粒子の歳差ドリフト。

¹⁾National Institute for Fusion Science, ²⁾Graduate School of Frontier Sciences, The University of Tokyo

author's e-mail: sugama.hideo@nifs.ac.jp

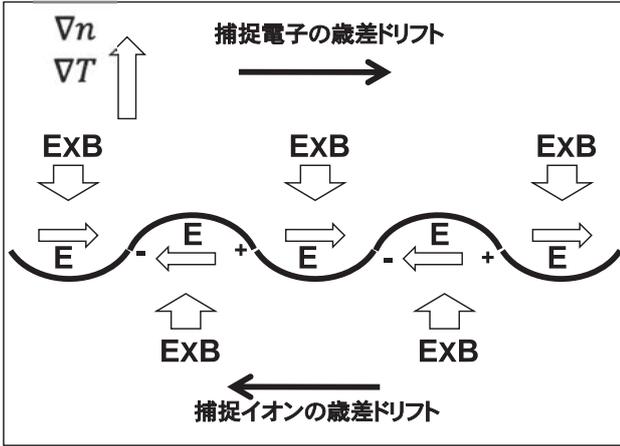


図2 捕捉粒子不安定性の物理機構。

図1において、捕捉粒子が存在するトラス外側部分の水平方向断面を上方から見た図を表す。図の縦方向はトラス小半径方向に対応し、平衡密度勾配 ∇n 、平衡温度勾配 ∇T が存在する。図の横方向はトラスのトロイダル方向に対応し、捕捉電子および捕捉イオンが、それぞれ、右向きおよび左向きに、歳差ドリフト運動を行う。

本章では、 $\omega_{bi} \ll \omega \ll \omega_{be}$ の揺動周波数領域を想定し、また、 $\nu_{\text{eff},e} \ll \omega_{be}$ が成り立ち、捕捉電子は衝突散乱される前に何周ものバナナ軌道を描くことができると仮定し、捕捉電子モード (TEM) 不安定性 [1-4] の周波数や成長率の導出について、詳しく解説する。4.2節では、捕捉粒子の歳差ドリフト運動を記述する方程式を導く。4.3節では、捕捉電子の歳差ドリフト周波数 $\bar{\omega}_{De}$ [式(68)参照] に比べて、捕捉電子の実効衝突周波数 $\nu_{\text{eff},e}$ が十分小さい場合は、衝突の効果が無視され、電子の密度・温度勾配により、無衝突 TEM が不安定化されることを示す。磁力線垂直方向に熱イオンジャイロ半径 $\rho_{ti} = v_{ti}/\Omega_i$ ($\Omega_i = e_i B/m_i c$: イオンジャイロ周波数) 程度の波長領域において乱流を生み出す静電的な不安定性として、無衝突 TEM 不安定性はイオン温度 (ITG) モード不安定性 (本講座第3章および Ref.[5]参照) とならんで注目され、多くの理論・シミュレーション研究がなされている。さらに、4.4節では、 $\bar{\omega}_{De} < \nu_{\text{eff},e} < \omega_{be}$ の場合は、電子温度勾配によって散逸性 TEM 不安定性が駆動されることが示される。最後に、4.5節で本章のまとめを述べる。

4.2 捕捉粒子の歳差ドリフトの運動方程式

非一様な磁場 \mathbf{B} の下で、質量 m_a 、電荷 e_a をもつ a 種の荷電粒子が行うジャイロ運動の中心点 (案内中心) は、磁場に対して垂直方向にドリフト速度 \mathbf{v}_{da} を持つ。ドリフト速度 \mathbf{v}_{da} は、曲率ドリフト、 ∇B ドリフトおよび $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの和からなり、次式のように表すことができる (Ref.[2] 3.4-3.5節参照)。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_{da} &= \frac{c}{e_a B} \hat{\mathbf{b}} \times (m_a v_{\parallel}^2 \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} + \mu \nabla B + e_a \nabla \Phi) \\ &= \frac{v_{\parallel}}{B} \left[\nabla \times \left(\frac{v_{\parallel}}{\Omega_a} \mathbf{B} \right) \right]_{\perp} \end{aligned} \quad (1)$$

上式において、 v_{\parallel} は磁力線方向の速度成分、

$$\mu = \frac{m_a v_{\perp}^2}{2B} \quad (2)$$

は磁気モーメント、 Φ は静電ポテンシャル (ここでは背景ポテンシャル場のみを含み、揺動成分は含まないとする)、 $\Omega_a \equiv e_a B / (m_a c)$ はジャイロ周波数を表し、 $[\dots]_{\perp}$ はベクトルの磁力線垂直方向成分を意味する。荷電粒子の持つエネルギー \mathcal{E} は、運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和で与えられ、

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} m_a v_{\parallel}^2 + \mu B + e_a \Phi \quad (3)$$

のように書かれる。上式より、

$$v_{\parallel} = \sigma \left[\frac{2}{m_a} (\mathcal{E} - e_a \Phi - \mu B) \right]^{1/2} \quad (4)$$

を得る。ここで、 $\sigma \equiv v_{\parallel} / |v_{\parallel}|$ は v_{\parallel} の符号を表す。また、式(1)の最後の行の表式を導くときに注意すべきことは、 $\nabla \times ((v_{\parallel} / \Omega_a) \mathbf{B})$ における ∇ は、式(4)を用いて、 \mathcal{E} および μ を固定しながら、空間変数に関する微分を行うことを意味することである。 \mathcal{E} および μ は、運動に沿って不変量となっている。

ここからは、次式で表されるようなトラス磁場の配位を考えよう。

$$\mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \theta + \nabla \zeta \times \nabla \chi = \nabla \alpha \times \nabla \chi \quad (5)$$

ここで、 θ および ζ は、それぞれ、トラスのポロイダル角およびトロイダル角を表す (図1参照)。トラス磁気面の内部の領域 V において、ポロイダル方向およびトロイダル方向の磁束は、それぞれ、

$$\frac{1}{2\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot \nabla \theta \, d^3x = 2\pi\chi, \quad \frac{1}{2\pi} \int_V \mathbf{B} \cdot \nabla \zeta \, d^3x = 2\pi\psi, \quad (6)$$

により与えられ、安全係数 q は、

$$q = \frac{d\psi}{d\chi} \quad (7)$$

によって表される。また、

$$\alpha \equiv \zeta - q\theta \quad (8)$$

であり、式(5)より、 $\mathbf{B} \cdot \nabla \psi = \mathbf{B} \cdot \nabla \chi = \mathbf{B} \cdot \nabla \alpha = 0$ が成り立ち、磁力線は、 $\psi = \text{const}$ (あるいは $\chi = \text{const}$) が表す磁気面と $\alpha = \text{const}$ が表す曲面の交線として与えられることがわかる。即ち、 ψ あるいは χ の磁気面ラベルともう一つのラベル α からなる2つのラベル変数により、磁力線は指定される。

さて、3次元実空間の一般座標系 (u^1, u^2, u^3) により、位置ベクトルを $\mathbf{x} = \mathbf{x}(u^1, u^2, u^3)$ のように表すと、計量テンソルの成分が、

$$g_{ij} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (9)$$

によって定義され、任意の3次元ベクトル場 \mathbf{a} は、反変ベクトル成分 $a^i = \mathbf{a} \cdot \nabla u^i$ もしくは共変ベクトル成分 $a_i = \mathbf{a} \cdot \partial \mathbf{x} / \partial u^i = \sum_j g_{ij} a^j$ により表すことができる。ここでは、以下の式で表されるように、 u^1 と u^2 として2つの磁力線ラベル変数を、また、 u^3 としてポロイダル角を採用しよう。

$$(u^1, u^2, u^3) \equiv (\alpha, \chi, \theta) \quad (10)$$

この座標系を用いると、磁場は、

$$\mathbf{B} = \nabla u^1 \times \nabla u^2 = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^3} = B^3 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^3} \quad (11)$$

のように表される。ここで、

$$\begin{aligned} \sqrt{g} &\equiv \sqrt{\det(g_{ij})} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \alpha} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \chi} \times \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \theta} \right) \\ &= \frac{1}{\nabla \alpha \cdot (\nabla \chi \times \nabla \theta)} = \frac{1}{\mathbf{B} \cdot \nabla \theta} \end{aligned} \quad (12)$$

であり、 $B^3 = \mathbf{B} \cdot \nabla u^3 = \mathbf{B} \cdot \nabla \theta = 1/\sqrt{g}$ 、 $B^1 = \mathbf{B} \cdot \nabla u^1 = 0$ 、 $B^2 = \mathbf{B} \cdot \nabla u^2 = 0$ が成り立つ。また、磁力線方向の単位ベクトル $\hat{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{B}/B$ について、 $b^i = B^i/B$ 、 $b^1 = b^2 = 0$ 、 $\sum_{i=1}^3 b_i b^i = b_3 b^3 = 1$ 、 $b_\theta = b_3 = 1/b^3 = 1/\sqrt{g}$ が得られる。ここで注意すべきことは、 $\partial \mathbf{x} / \partial u^3 = \partial \mathbf{x} / \partial \theta$ は、 u^1 と u^2 が一定となる方向、即ち、磁力線方向に平行であり、決してポロイダル方向に平行ではないということであり、この座標系では、 $\partial / \partial \theta \equiv \partial \mathbf{x} / \partial \theta \cdot \nabla$ は、ポロイダル方向ではなく磁力線方向に沿った空間微分を表す。

座標系 $(u^1, u^2, u^3) \equiv (\alpha, \chi, \theta)$ を使って、案内中心のドリフト運動の方程式を書き表していこう。まずドリフト運動に沿った $u^3 \equiv \theta$ 成分の時間変化率は、

$$\frac{du^3}{dt} = v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla u^3 = v_{\parallel} b^3 = v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \theta \quad (13)$$

のように書かれる。ここで、 $v_{\text{da}} \cdot \nabla \theta$ は厳密にはゼロではないが、 $v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \theta$ に比べて遥かに小さいとして上式では無視されている。続いて、 $u^1 \equiv \alpha$ 成分については次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{du^1}{dt} &= v_{\text{da}} \cdot \nabla u^1 = \frac{v_{\parallel}}{B} \nabla \times \left(\frac{v_{\parallel}}{\Omega_a} \mathbf{B} \right) \cdot \nabla u^1 \\ &= \frac{v_{\parallel}}{\Omega_a \sqrt{g}} \left(\frac{\partial(v_{\parallel} b_3)}{\partial u^2} - \frac{\partial(v_{\parallel} b_2)}{\partial u^3} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

(α, χ) で指定された磁力線に沿った磁場強度 $B = B(\alpha, \chi, \theta)$ の最大値を $B_{\text{max}}(\alpha, \chi) \equiv \max_{\theta} B(\alpha, \chi, \theta)$ で表すと、

$$\mathcal{E} - e_a \Phi(\chi) - \mu B_{\text{max}}(\alpha, \chi) < 0 \quad (15)$$

の条件が成り立つとき、式(4)に示された磁力線方向速度 v_{\parallel} を定義することができるような θ の領域は局在化され、 $\theta_{t1} \leq \theta \leq \theta_{t2}$ のように表される。この場合、案内中心は磁力線方向に沿って自由に動き回ることができず、磁力線方向の領域 $\theta_{t1} \leq \theta \leq \theta_{t2}$ に捕捉され、バウンス運動を行い、いわゆるバナナ軌道を描く。 $\theta = \theta_{t1}$ 、 θ_{t2} は、 $v_{\parallel} = 0$ となる軌道の端点を表し、式(4)の右辺が0となるような θ

の値として定義することができる。いわゆる磁気ミラーにより、 $\theta = \theta_{t1}$ 、 θ_{t2} において、案内中心の運動は反射され、 v_{\parallel} の符号 σ は反転する。因みに、背景静電ポテンシャルは、 $\Phi = \Phi(\chi)$ のように磁気面関数として表されるものとしている。

捕捉された案内中心のバウンス運動の1回の周期において、 $u^1 \equiv \alpha$ がどれだけ変化するかを表す量 $\Delta u^1 \equiv \Delta \alpha$ は次式のように計算される。

$$\begin{aligned} \Delta \alpha &= \Delta u^1 = \oint \frac{du^1}{dt} dt = \oint \frac{du^1/dt}{du^3/dt} du^3 \\ &= \oint \frac{du^3}{\Omega_a \sqrt{g} b^3} \left(\frac{\partial(v_{\parallel} b_3)}{\partial u^2} - \frac{\partial(v_{\parallel} b_2)}{\partial u^3} \right) \\ &= \frac{m_a c}{e_a} \frac{\partial}{\partial u^2} \left(\oint v_{\parallel} b_3 du^3 \right) = \frac{c}{e_a} \frac{\partial J}{\partial u^2} \\ &= \frac{c}{e_a} \frac{\partial J}{\partial \chi} \end{aligned} \quad (16)$$

上式(16)において、式(12)が用いられている。磁力線方向積分の線素は、 $dl = \hat{\mathbf{b}} \cdot d\mathbf{x} = b_3 du^3 = du^3/b^3 = d\theta/b^\theta$ で与えられ、捕捉粒子のバウンス運動に沿った1周期分の線積分は、

$$\oint dl \equiv \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \int_{\theta_{t1}}^{\theta_{t2}} \frac{d\theta}{b^\theta} \quad (17)$$

で表される。また、式(16)に現れる J は縦の断熱不変量と呼ばれ、

$$J \equiv \oint m_a v_{\parallel} b_3 du^3 = \oint m_a v_{\parallel} dl \quad (18)$$

により定義される。磁気モーメント μ が第1の断熱不変量と呼ばれるのに対して、 J は第2の断熱不変量とも呼ばれる。 J は4つの位相空間変数の関数 $J = J(u^1, u^2, \mathcal{E}, \mu) = J(\alpha, \chi, \mathcal{E}, \mu)$ と見做されるが、この式を \mathcal{E} について解くことにより、エネルギー関数 $\mathcal{E} = H(\alpha, \chi, \mu, J)$ を定義することができる。これにより、

$$J(\alpha, \chi, H(\alpha, \chi, \mu, J), \mu) = J \quad (19)$$

を得るが、上式(19)の両辺を (α, χ, μ, J) の関数と見做して、 α および χ に関する偏微分をとると、連鎖律により、

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha} + \frac{\partial J}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial H}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \chi} + \frac{\partial J}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial H}{\partial \chi} = 0 \quad (20)$$

が得られる。

捕捉粒子のバウンス運動の周期 τ 、即ち、1つのバナナ軌道を描くのに要する時間は、

$$\tau \equiv \oint \frac{dl}{v_{\parallel}} = \frac{\partial J}{\partial \mathcal{E}} \quad (21)$$

により与えられる。また、式(16)と同様にして、バウンス運動の1周期の間の捕捉粒子(案内中心)の座標変数 $u^2 \equiv \chi$ の変化量 $\Delta u^2 \equiv \Delta \chi$ も計算され、その結果は次式のようになる。

$$\Delta\chi \equiv \Delta u^2 = -\frac{c}{e_a} \frac{\partial J}{\partial u^1} = -\frac{c}{e_a} \frac{\partial J}{\partial \alpha} \quad (22)$$

式(16), (20), (21)および(22)より, 捕捉粒子 (の案内中心) の2つの座標変数 (α, χ) の変化率のバウンス平均が以下のように与えられる.

$$\left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle_b = \frac{\Delta\alpha}{\tau} = \frac{c}{e_a} \frac{\partial J / \partial \chi}{\partial J / \partial \mathcal{E}} = -\frac{c}{e_a} \frac{\partial H}{\partial \chi}, \quad (23)$$

$$\left\langle \frac{d\chi}{dt} \right\rangle_b = \frac{\Delta\chi}{\tau} = -\frac{c}{e_a} \frac{\partial J / \partial \alpha}{\partial J / \partial \mathcal{E}} = \frac{c}{e_a} \frac{\partial H}{\partial \alpha} \quad (24)$$

ここで, 捕捉粒子の条件式(15)を満たす位相空間領域上の任意の関数 $A=A(\alpha, \chi, \theta, \mathcal{E}, \mu)$ に対して, そのバウンス平均は

$$\langle A \rangle_b \equiv \bar{A} \equiv \frac{\oint A d\ell / v_{||}}{\oint d\ell / v_{||}} = \frac{\sum_{\sigma=\pm 1} \int_{\theta_{t1}}^{\theta_{t2}} A d\theta / (|v_{||}| b^\theta)}{2 \int_{\theta_{t1}}^{\theta_{t2}} d\theta / (|v_{||}| b^\theta)} \quad (25)$$

によって定義される. 式(23)-(24)は, エネルギー関数 $\mathcal{E}=H(\alpha, \chi, \mu, J)$ をハミルトニアンとするハミルトンの正準方程式の形をしていることに注意しよう. $A_\alpha \equiv -\chi$ とおくと, 式(5)より, $\mathbf{B} = \nabla \times (A_\alpha \nabla \alpha)$ となり, A_α は, ベクトルポテンシャルの共変ベクトルとしての α 座標成分であることがわかる. 式(23)-(24)をハミルトンの正準方程式, α を正準座標と見做すと $(e_a/c)A_\alpha = -(e_a/c)\chi$ が α に共役な正準運動量となっていることがわかる. $|A_\alpha| = |\chi|$ の大きさは, $|A_\alpha| = |\chi| \sim r R B_p$ のように見積もることができる. ここで, r および R は, それぞれ, トーラスの小半径および大半径を表し, B_p はポロイダル磁場を表す. また, 荷電粒子の位置ベクトル \mathbf{x} に共役な正準運動量に対するよく知られた表式 $\mathbf{p} = m_a \mathbf{v} + (e_a/c)\mathbf{A}$ の共変ベクトルとしての α 座標成分 $p_\alpha = m_a v_\alpha + (e_a/c)A_\alpha$ において, $|v_\alpha| = |\mathbf{v} \cdot \partial \mathbf{x} / \partial \alpha| \sim R v$ のように見積もると, $|cm_a v_\alpha / e_a A_\alpha| \sim (v/\Omega_a)(B/r B_p) \sim q(\rho_a/r)(R/r) \ll 1$ (q : 安全係数, ρ_a : ジャイロ半径)とすれば, $p_\alpha \approx (e_a/c)A_\alpha$ が得られ, 先に述べたことと一致することがわかる.

縦の断熱不変量の名のとおり, バウンス平均した J の変化率は, 式(23)-(24)より,

$$\left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle_b = \frac{\partial J}{\partial \alpha} \left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle_b + \frac{\partial J}{\partial \chi} \left\langle \frac{d\chi}{dt} \right\rangle_b = 0 \quad (26)$$

となることが確かめられる.

ところで, エネルギー変数 \mathcal{E} の代わりに,

$$w \equiv \frac{1}{2} m_a v^2 = \frac{1}{2} m_a v_{||}^2 + \mu B = \mathcal{E} - e_a \Phi \quad (27)$$

で定義される運動エネルギー w が, 独立変数としてが用いられることが多い. 荷電粒子の運動において, \mathcal{E} が厳密に保存されるのに対して, 軌道に沿って χ が変化すると, 背景静電ポテンシャルによるエネルギー $e_a \Phi(\chi)$ が変化するために, 運動エネルギーは厳密には, 保存されないことに注意しよう. しかし, $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \Phi(\chi) = 0$ であり, $|v_{||}|$ に

比べて $|v_{d\alpha}|$ が小さいことを考慮すると, 運動エネルギー w を近似的な保存量として扱われることが多い.

さて, 位相空間上の任意の物理量を位相空間変数 $(\alpha, \chi, \theta, \mathcal{E}, \mu)$ の関数と見做す代わりに, $(\alpha, \chi, \theta, w, \mu)$ の関数と見做す場合, 以下のような偏微分の置き換えを行う必要がある.

$$\begin{aligned} \partial / \partial \mathcal{E} &= \partial / \partial w, & (\partial / \partial \alpha)_\mathcal{E} &= (\partial / \partial \alpha)_w \\ (\partial / \partial \chi)_\mathcal{E} &= (\partial / \partial \chi)_w - e_a (\partial \Phi / \partial \chi) (\partial / \partial w) \end{aligned} \quad (28)$$

上式(28)を用いると, 式(23)-(24)は以下のように書き換えられる.

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle_b &= \frac{c}{e_a} \frac{\partial J / \partial \chi}{\partial J / \partial w} - c \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \\ &= -\frac{c}{e_a} \frac{\partial W}{\partial \chi} - c \frac{\partial \Phi}{\partial \chi}, \end{aligned} \quad (29)$$

$$\left\langle \frac{d\chi}{dt} \right\rangle_b = -\frac{c}{e_a} \frac{\partial J / \partial \alpha}{\partial J / \partial w} = \frac{c}{e_a} \frac{\partial W}{\partial \alpha} \quad (30)$$

ここで, 縦の断熱不変量 J および運動エネルギー w は, それぞれ, 関数 $J=J(u^1, u^2, w, \mu)=J(\alpha, \chi, w, \mu)$ および $w=W(\alpha, \chi, \mu, J)$ によって与えられている. バウンス運動する捕捉粒子が描くバナナ軌道の中心 (バウンス中心あるいはバナナ中心) が磁力線を横切るドリフト運動を行っており, 式(23)-(24)あるいは式(29)-(30)で与えられた $\langle d\alpha/dt \rangle_b$ および $\langle d\chi/dt \rangle_b$ は, それぞれ, バウンス中心のドリフト運動における α と χ の変化率を表すものと解釈される. また,

$$\mathbf{v}_E \cdot \nabla \alpha \equiv \frac{c \mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \cdot \nabla \alpha = -c \frac{\partial \Phi}{\partial \chi} \quad (31)$$

が成り立つことから, 式(29)の右辺の第2項は, $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度 \mathbf{v}_E の反変ベクトルとしての α 座標成分であることがわかる. \mathbf{v}_E は粒子種によらない共通の速度であり, 図2で示されたような荷電分離による捕捉粒子不安定性の駆動には寄与しないことを注意しておく.

磁気モーメント μ の代わりによく用いられる変数として次式で定義されるピッチ角変数 λ がある.

$$\lambda \equiv \mu / w \quad (32)$$

上式と μ および w の定義から, $\lambda B = (v_\perp / v)^2 = 1 - (v_{||} / v)^2$ となるが, これは, 磁力線と速度ベクトルのなす角 (ピッチ角) の正弦 (sine) の2乗となる. λ を用いると, 磁力線方向速度は,

$$v_{||} = \sigma v \sqrt{1 - \lambda B} \quad (33)$$

のように書け, 上式より, $\lambda \leq 1/B(\alpha, \chi, \theta)$ を満たす必要がある. 縦の断熱不変量は,

$$J = 2 \int_{\theta_{t1}}^{\theta_{t2}} m_a v \sqrt{1 - \lambda B} \frac{d\theta}{b^\theta} \quad (34)$$

のように表される. また, 非捕捉粒子および捕捉粒子に

対する条件は、それぞれ、

$$\begin{aligned} 0 \leq \lambda < 1/B_{\max}(\alpha, \chi) \quad (\text{untrapped}) \\ 1/B_{\max}(\alpha, \chi) < \lambda \leq 1/B(\alpha, \chi, \theta) \quad (\text{trapped}) \end{aligned} \quad (35)$$

のように書かれ、バナナ捕捉軌道の端点を表す θ_{t1} , θ_{t2} は、次式を満足する。

$$B(\alpha, \chi, \theta_{t1}) = B(\alpha, \chi, \theta_{t2}) = 1/\lambda \quad (36)$$

トカマクのような軸対称トーラス磁場配位では、3次元実空間座標系として、 (χ, θ, ζ) を用いた場合に、 B や $B^\theta = \mathbf{B} \cdot \nabla \theta$ 等の物理変数は、トロイダル角 ζ に依存しない。これは、座標系 (α, χ, θ) を用いた場合、 α に依存しないことに対応する。このことより、軸対称配位では、式(34)で与えられる縦の断熱不変量 J も α に依存せず、 $\partial J / \partial \alpha = 0$ となり、したがって式(29)より、 $\langle d\chi/dt \rangle_b = 0$ となる。これは、バナナ軌道の中心が同一の磁気面にとどまり続けることを意味する。一方、ヘリカル系のような非軸対称配位では、一般に、 $\langle d\chi/dt \rangle_b \neq 0$ であり、バウンズ中心のドリフト運動は磁気面垂直方向に速度成分を持ち、これにクーロン衝突を考慮した新古典拡散は、軸対称配位に比べて大きな粒子・熱輸送を引き起こす。ところが、近年、準対称性を有する磁場配位の研究が進んでおり、 B や J の磁力線ラベル α に対する依存性を 0 に近づけることにより、新古典輸送を小さい値に抑える先端的なヘリカル磁場配位が考案されるようになってきている。

ここからは、軸対称配位の場合のみを考えよう。この場合、1周期のバウンズ運動の間に、 χ および θ の値は、元の値に戻るから、 $\Delta\alpha = \Delta(\zeta - q\theta)$ は結局、1周期間のトロイダル角の変位 $\Delta\zeta$ を表すことになる。したがって、 $\langle d\alpha/dt \rangle_b = \langle d\zeta/dt \rangle_b$ と書くことができ、これは、トロイダル方向に歳差ドリフト運動を行うバウンズ中心の角速度を表している。

以下では、同心円形のポロイダル断面をもつ大アスペクト比の軸対称トーラス磁場配位の場合を取り扱う。トーラスの小半径を r 、磁気軸位置の大半径を R 、逆アスペクト比を $\epsilon = r/R \ll 1$ で表す。すると磁場強度は、

$$B = B_0(1 + \epsilon \cos \theta)^{-1} \simeq B_0(1 - \epsilon \cos \theta) \quad (37)$$

で表され、式(35)より捕捉粒子条件は

$$(1 + \epsilon)^{-1} < \lambda B_0 \leq (1 - \epsilon \cos \theta)^{-1} \quad (\text{trapped}) \quad (38)$$

となり、式(36)から

$$B_0(1 - \epsilon \cos \theta_t) = 1/\lambda \quad (39)$$

によって θ_t を定義することにより、捕捉領域は $-\theta_t < \theta < \theta_t$ で与えられることになる。式(33)と(37)および(39)より、

$$\begin{aligned} v_{||} &= \sigma v \sqrt{1 - \lambda B_0(1 - \epsilon \cos \theta)} \\ &= \sigma v \sqrt{\lambda B_0 \epsilon (\cos \theta - \cos \theta_t)} \\ &= \sigma v \sqrt{2\lambda B_0 \epsilon [\sin^2(\theta_t/2) - \sin^2(\theta/2)]} \end{aligned} \quad (40)$$

を得る。

これからは、磁気面ラベルとして χ の代わりに小半径 r を使い、安全係数 q に対する表式として、 $q = rB_0/(RB_p)$ を用いると $d\chi/dr = RB_p = rB_0/q$ および $\partial J / \partial \chi = (q/rB_0) \partial J / \partial r$ のように書ける。また、捕捉パラメータ κ を

$$\kappa \equiv \left[\frac{1 - \lambda B_0(1 - \epsilon)}{2\lambda B_0 \epsilon} \right]^{1/2} \quad (41)$$

により定義すると、捕捉粒子および非捕捉粒子の条件は

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \leq \kappa < 1 \quad (\text{trapped}), \quad \kappa > 1 \quad (\text{untrapped}) \quad (42)$$

となる。また、捕捉粒子 ($\kappa < 1$) の場合、式(39)および(41)より、

$$\kappa = \sin\left(\frac{\theta_t}{2}\right) \quad (43)$$

が得られる。 $\kappa = 0$ 即ち $\lambda B_0 = (1 - \epsilon)^{-1}$ の場合は、 $\theta_t = 0$ であり、バナナ軌道は一点に収縮する。また、 $\kappa = 1$ 即ち $\lambda B_0 = (1 + \epsilon)^{-1}$ の場合は、 $\theta_t = \pi$ であり、バナナ軌道は最大となり、 $\kappa > 1$ では非捕捉粒子へと遷移する。

式(34)、(40)および(43)より、縦の断熱不変量 J は、

$$\begin{aligned} J &= 4qRm_a v \sqrt{2\lambda B_0 \epsilon} \int_0^{\theta_t} \sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\theta/2)} d\theta \\ &= 8m_a q R v \sqrt{2\lambda B_0 \epsilon} [E(\kappa) - (1 - \kappa^2)K(\kappa)] \end{aligned} \quad (44)$$

のように表される。 $K(\kappa)$ および $E(\kappa)$ は、それぞれ、第1種および第2種の完全楕円積分であり、次式によって、定義される。

$$\begin{aligned} K(\kappa) &\equiv \int_0^{\pi/2} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi}} = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - \kappa^2 x^2)}} \\ E(\kappa) &\equiv \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \int_0^1 \sqrt{\frac{1 - \kappa^2 x^2}{1 - x^2}} dx \end{aligned} \quad (45)$$

また、以下のような公式が成り立つ (Ref.[2]3.5節参照)。

$$\begin{aligned} \frac{dE(\kappa)}{d(\kappa^2)} &= \frac{E(\kappa) - K(\kappa)}{2\kappa^2}, \\ \frac{dK(\kappa)}{d(\kappa^2)} &= \frac{1}{2\kappa^2} \left(\frac{E(\kappa)}{1 - \kappa^2} - K(\kappa) \right) \end{aligned} \quad (46)$$

式(41)からわかるように、捕捉パラメータ κ は、 $\epsilon = r/R$ および $\lambda = \mu/w$ によって定義されているが、 κ を (r, w) の関数と見做し、

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\kappa^2)}{\partial r} &= \frac{1}{r} \left(\frac{1}{2} - \kappa^2 \right), \\ \frac{\partial(\kappa^2)}{\partial w} &= \frac{1}{2\mu B_0 \epsilon} \simeq \frac{1}{2w\epsilon} \end{aligned} \quad (47)$$

が得られる。上式において、式(38)から得られる近似式 $\lambda \equiv \mu/w \simeq 1/B_0$ を用いた。

式(16)および式(44) - (47)を用いると、

$$\Delta\alpha = 4\sqrt{2} \frac{m_a c q^2 v}{e_a B_0 r \sqrt{\epsilon}} \times \left[E(\kappa) - \frac{1}{2} K(\kappa) + 2\hat{s}(E(\kappa) - (1-\kappa^2)K(\kappa)) \right]$$

for $E_r = -\partial\Phi/\partial r = 0$ (48)

が得られる。ここで、

$$\hat{s} \equiv \frac{r}{q} \frac{dq}{dr} \quad (49)$$

は、磁気シアパラメータを表す。式(48)は、バウンス運動の1周期の間の、バウンス中心のトロイダル角の変位の中で $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトによる寄与を除いたものを表す。式(21)および式(44)–(47)より、バウンス運動の周期 τ は、

$$\tau = 4\sqrt{2} \frac{qR}{v\sqrt{\epsilon}} K(\kappa) \quad (50)$$

で与えられる。式(29)、(48)および(50)を用いると、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトの寄与を含めたバウンス中心の歳差ドリフトのトロイダル角速度が次式のように表される。

$$\left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle_b = \frac{c}{e_a B_0} \frac{q}{rR} \omega G(\hat{s}, \kappa) + \frac{cq}{rB_0} E_r \quad (51)$$

ここで、 $G(\hat{s}, \kappa)$ は、

$$G(\hat{s}, \kappa) \equiv 2 \frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} - 1 + 4\hat{s} \left(\frac{E(\kappa)}{K(\kappa)} + \kappa^2 - 1 \right) \quad (52)$$

で与えられる (図3参照)。ここで、 $G(\hat{s}, \kappa)$ の定義は Ref. [4] に従っており、Ref. [1, 2] で定義された関数 G の2倍となっていることに注意しよう。

前節の図1や図2を参照すると、捕捉粒子不安定性の生ずるのは、 α 種粒子の歳差ドリフトの向きに関して、 $e_a \langle d\alpha/dt \rangle_b > 0$ が成り立つ場合であることがわかる。ただし、平衡状態の密度・温度勾配が、 $\partial n_a / \partial r < 0$ 、 $\partial T_a / \partial r < 0$ を満たすと仮定している。また、前述のように $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度は捕捉粒子不安定性に寄与しないことを思い出しておこう。そうすると、式(23)あるいは式(29)より、上述の捕捉粒子不安定性が起きるのは、 $\partial J / \partial \chi > 0$

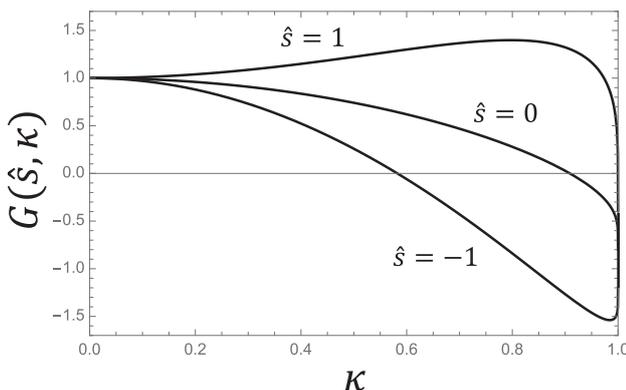


図3 磁気シアパラメータ $\hat{s} = 1, 0, -1$ の場合の関数 $G(\hat{s}, \kappa)$ 。

の場合である。逆に、 $\partial J / \partial \chi < 0$ の場合、即ち、高密度・高温部のプラズマ中心部に向かって、 J が大きくなる条件 (maximum J の条件) が成り立つ場合は、捕捉粒子モードは安定化されることになる。また、式(51)より、この安定化条件は、 $G(\hat{s}, \kappa) < 0$ に対応し、図3を見ると、負磁気シア ($\hat{s} < 0$) が安定化に寄与することがわかる。

4.3 捕捉電子モード (TEM) に対する基本方程式系

ここからは、電子(e)と水素イオン(陽子)(i)からなるトカマクプラズマを考え、いわゆる静電近似を用いて、磁場揺動は存在しないと仮定する。粒子の分布関数は、マクスウェル平衡分布 f_{Ma} と揺動成分 δf_a ($a = e, i$ は粒子種を表す) の和からなり、また、磁力線垂直方向に波数ベクトル \mathbf{k}_\perp を持つ δf_a の成分は、ジャイロ運動論に基づいて、

$$\delta f_{ak_\perp} = -\frac{e_a \phi_{k_\perp}}{T_a} f_{Ma} + h_{ak_\perp} e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_a} \quad (53)$$

のように表す。ここで、 $\boldsymbol{\rho}_a \equiv (\hat{\mathbf{b}} \times \mathbf{v}) / \Omega_a$ はジャイロ半径ベクトルを表す。本講座の第2章では、ジャイロ中心の位置ベクトルを独立変数とした分布関数を用いたのに対して、式(53)では、Refs.[6, 7] に倣って、粒子の位置ベクトルを独立変数とした分布関数を考え、磁力線垂直方向における変動を表すため、粒子の位置ベクトル変数から波数ベクトル変数への変換を行っているため、式(53)は、第2章の分布関数の表示とは異なり、 $e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_a}$ のような因子を含んでいることに注意しよう (粒子分布関数とジャイロ中心分布関数の表示の関係についての詳細は、Refs.[8, 9] を参照されたい)。バルーニング表示[10]とよばれるWKB近似の手法では、波数ベクトルは、アイコナルとよばれる関数 $S(\mathbf{x})$ を用いて、 $\mathbf{k}_\perp = \nabla S(\mathbf{x})$ のように表される。ここで、式(10)、(11)、および $\mathbf{B} \cdot \mathbf{k}_\perp = \mathbf{B} \cdot \nabla S(\mathbf{x}) = 0$ の条件を用いると、 $\partial S(\alpha, \chi, \theta) / \partial \theta = 0$ が得られ、 $S = S(\alpha, \chi)$ あるいは磁気面ラベルとして χ の代わりに $q = q(\chi)$ を用いると $S = S(\alpha, q)$ と書ける。

$\alpha = \zeta - q\theta$ であることに留意し、トロイダル角変数 ζ に関するフーリエ展開された揺動成分を考えると、トロイダルモード数を表す整数 n とある関数 $C(q)$ を用いて、 $S = -n\alpha + C(q)$ の形に書かれ、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\perp &= \nabla S = k_\alpha \nabla \alpha + k_q \nabla q \\ &= k_\alpha [\nabla \zeta - q \nabla \theta + (\theta_k - \theta) \nabla q] \end{aligned} \quad (54)$$

ここで、 $k_\alpha = \partial S / \partial \alpha = -n$ 、 $k_q = \partial S / \partial q = dC(q) / dq$ および $\theta_k = k_q / k_\alpha$ である。こうして、アイコナル S は

$$S = -n \left[\alpha + \int \theta_k(q) dq \right] \quad (55)$$

と表すことができる。

式(53)の右辺の第1項は、静電ポテンシャル揺動 ϕ_{k_\perp} に対する断熱応答を表し、第2項は、非断熱応答成分を表す。本章では、線形不安定性解析を行うため、分布関数の非

断熱成分を表す $h_{ak_{\perp}}$ に対して、以下の線形ジャイロ運動論的方程式[6, 7]を用いる。

$$[-i(\omega - \omega_E - \omega_{D\alpha}) + v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla] h_{ak_{\perp}} = -i(\omega - \omega_E - \omega_{*a}^T) f_{Ma} J_0(k_{\perp} \rho_a) \frac{e_a \phi_{k_{\perp}}}{T_a} + \sum_b C_{ab}^{(GK)} \quad (56)$$

上式において、複素周波数 ω が用いられ、時間微分が $\partial/\partial t$ が $-i\omega$ に置き換えられており、 $h_{ak_{\perp}}$ は、運動エネルギー $w \equiv m_a v^2/2$ と磁気モーメント $\mu \equiv m_a v_{\perp}^2/2B$ の関数とみなされ、 $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla$ は、 w と μ を固定して、磁力線方向の空間微分をとることを意味している。右辺に現れる ω_{*a}^T は、 $\omega_{*a}^T \equiv \omega_{*a} [1 + \eta_a (m_a v^2/2T_a - 3/2)]$ 、 $\omega_{*a} \equiv \mathbf{k}_{\perp} \cdot (cT_a \hat{\mathbf{b}}/e_a B) \times \nabla \ln n_a$ および $\eta_a \equiv d \ln T_a / d \ln n_a$ によって定義される。 J_0 は 0 次の第 1 種ベッセル関数を表す。右辺の最後の $\sum_b C_{ab}^{(GK)}$ はジャイロ運動論的衝突項[11]を表す。また、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトおよび曲率 $-\nabla B$ ドリフトに関わる周波数は、それぞれ、

$$\omega_E \equiv \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_E = -k_{\alpha c} \frac{\partial \phi}{\partial \chi} \quad (57)$$

および

$$\omega_{D\alpha} \equiv \mathbf{k}_{\perp} \cdot \left[\frac{c \hat{\mathbf{b}}}{e_a B} \times (\mu \nabla B + m_a v_{\parallel}^2 \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}}) \right] \quad (58)$$

で与えられる。式(57)では、式(31)と(54)が用いられている。式(1)と(54)を使うと、

$$\omega_E + \omega_{D\alpha} = \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{d\alpha} = k_{\alpha} v_{d\alpha} \cdot \nabla \alpha + k_q v_{d\alpha} \cdot \nabla q \quad (59)$$

であり、捕捉粒子に対する上式のバウンス平均は、

$$\langle \omega_E + \omega_{D\alpha} \rangle_b = \langle \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{d\alpha} \rangle_b = k_{\alpha} \left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle_b + k_q \left\langle \frac{dq}{dt} \right\rangle_b \quad (60)$$

と書き表される。上式(60)において、 $\langle d\alpha/dt \rangle_b$ および $\langle dq/dt \rangle_b = \langle dq/d\chi \rangle_b \langle d\chi/dt \rangle_b$ は、それぞれ、式(23)および(24)[もしくは式(29)および(30)]より求められる。

分布関数の非断熱応答成分 $h_{ak_{\perp}}$ に対する境界条件は、 $\lambda = \mu/w$ が捕捉粒子の条件[式(35)]を満たす場合 (trapped) とそうでない場合 (untrapped) の場合では異なり、

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \pm\infty} h_{ak_{\perp}}(\theta, w, \mu, \sigma) &= 0 \quad (\text{untrapped}) \\ h_{ak_{\perp}}(\theta_{ti}, w, \mu, \sigma = +1) &= h_{ak_{\perp}}(\theta_{ti}, w, \mu, \sigma = -1) \\ &\quad (i=1, 2) \quad (\text{trapped}) \end{aligned} \quad (61)$$

によって与えられる。

ここでは、Debye長より長い波長を持つ不安定性を考慮するため、電子とイオンの密度揺動 δn_a ($a=e, i$) が準中性条件 $\delta n_e = \delta n_i$ を満たすとす。これにより、次式を得る。

$$\delta n_e - \delta n_i = \sum_{a=e, i} \left(-\frac{e_a}{e} \right) \left[-n_0 \frac{e_a \phi_{k_{\perp}}}{T_a} + \int d^3v h_{ak_{\perp}} J_0(k_{\perp} \rho_a) \right] \quad (62)$$

式(56)および(62)はITGモードやETGモード等を含む静電的な線形不安定性を記述する一般的な基本方程式系を与えるが、ここでは、TEM不安定性を扱うため、式(56)をさらに近似したものを用いる。式(56)を見るとわかるように、背景電場の効果は、 $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフトによる周波数のドップラーシフト $\omega - \omega_E$ の形を通してのみ現れ、成長率には影響しないことがわかる。以下では、簡単のため、 ω_E を省略してTEMモードの分散関係を導出するが、その分散関係に現れる ω を単に $\omega - \omega_E$ に置き換えることにより、背景電場の存在する場合の分散関係が得られることを覚えておこう。

不安定性の周波数の大きさは、 $\omega_{bi} \ll |\omega| \ll \omega_{be}$ を、また磁力線垂直方向の波数は、 $k_{\perp} \rho_{te} \ll 1$ を満たすものとする。電子の磁力線方向速度 v_{\parallel} は大きく、式(56)において、 $v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla$ は、 ω 、 ω_{De} 、 ω_{*e}^T や衝突周波数に比べ、支配的な影響を持つと考えられる。したがって、 $\omega/\omega_{be} \ll 1$ を展開パラメータとした最低次の近似では、 $v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla h_{ek_{\perp}} = 0$ が得られ、 $h_{ek_{\perp}}$ は、磁力線方向に変動しないことがわかる。非捕捉粒子の場合、磁力線方向の境界条件 $h_{ek_{\perp}}(\theta = \pm\infty) = 0$ を考慮すると、結局のところ、 $h_{ek_{\perp}} = 0$ と近似される。捕捉粒子の場合、 $h_{ek_{\perp}}$ の定義域は、 $-\theta_{t1} \leq \theta \leq \theta_{t2}$ に限られる。この領域では、 $h_{ek_{\perp}}$ は一定の値をとるものとみなされるので、その値をバウンス平均の値 $\bar{h}_{ek_{\perp}} = \langle h_{ek_{\perp}} \rangle_b$ によって近似する (以下ではバウンス平均を表すため...を用いている)。この近似と境界条件(61)と考慮しつつ、ジャイロ運動論的方程式のバウンス平均を実行することにより、次式が得られる。

$$(\omega - \bar{\omega}_{De} + i\nu_{\text{eff}, e}) \bar{h}_{ek_{\perp}} = -(\omega - \omega_{*e}^T) f_{Me} \frac{e}{T_e} \bar{\phi}_{k_{\perp}} \quad (63)$$

上式(63)では、 $k_{\perp} \rho_e \ll 1$ を仮定し、電子の有限ジャイロ半径効果は無視し、 $J_0(k_{\perp} \rho_e) \simeq 1$ を用いた。また、非捕捉電子に対する衝突項は、 $-\nu_{\text{eff}, e} \bar{h}_{ek_{\perp}}$ によって近似されている。

これまで、述べてきたところにより、 $|\omega| \ll \omega_{be} \sim \sqrt{\epsilon} v_{te} / Rq \ll \nu_{\text{eff}, e}$ の条件の下で、電子の分布関数の比断熱応答部分は、以下の近似式により与えられる。

$$h_{ek_{\perp}} = \begin{cases} 0 & (\text{untrapped}) \\ -f_{Me} \frac{e \bar{\phi}_{k_{\perp}}}{T_e} \frac{\omega - \omega_{*e}^T}{\omega - \bar{\omega}_{De} + i\nu_{\text{eff}, e}} & (\text{trapped}) \end{cases} \quad (64)$$

一方、 $|\omega| \gg v_{ti} / Rq$ 、 ν_i (ν_i : イオンの衝突周波数) を仮定することにより、イオンのジャイロ運動論的方程式から次式を得る。

$$h_{ik_{\perp}} = \left(1 - \frac{\omega_{*i}^T}{\omega} \right) f_{Mi} J_0(k_{\perp} \rho_i) \frac{e \phi_{k_{\perp}}}{T_i} \quad (65)$$

式(64)と(65)を使って、準中性条件の式(62)における電子とイオンの密度揺動を静電ポテンシャルによって表すことにより、次式を得る。

$$\left[1 + \frac{T_e}{T_i} - \left(\frac{T_e}{T_i} + \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) \Gamma_0 - \eta_i \frac{\omega_{*e}}{\omega} b_i (\Gamma_1 - \Gamma_0) \right] \phi_{k_\perp} = \frac{1}{n_0} \int_{\text{tr}} d^3v f_{Me} \bar{\phi}_{k_\perp} \frac{\omega - \omega_{*e}^T}{\omega - \bar{\omega}_{De} + i\nu_{\text{eff},e}} \quad (66)$$

ここで、 $\Gamma_0 \equiv I_0(b_i) \exp(-b_i)$ および $\Gamma_1 \equiv I_1(b_i) \exp(-b_i)$ を用いている。ただし、 $b_i \equiv (k_\perp \rho_{ti})^2$ 、 $\rho_{ti} = c\sqrt{m_i T_i} / eB_0$ である。上式(66)の右辺の捕捉電子領域における速度空間積分は、

$$\int_{\text{tr}} d^3v = \pi \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^\infty v^2 dv \int_{1/B_{\text{max}}}^{1/B} \frac{B d\lambda}{\sqrt{1-\lambda B}} \simeq 2\pi \sqrt{2\epsilon} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^\infty v^2 dv \int_{\sin(\theta/2)}^1 \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \sin^2(\theta/2)}} \quad (67)$$

により定義される。上式(67)の最後の表式では、前節の式(41)で定義した捕捉パラメータ κ を用いており、ここからは、式(37)以下で説明した同心円形ポロイダル断面をもつ大アスペクト比の軸対称トーラス磁場配位の場合の結果を示す。この場合、式(54)を用い、ポロイダル波数 $k_\theta = nq/r$ および電子密度勾配長 $L_n = -d \ln n_e / dr$ を使って、電子のドリフト周波数は $\omega_{*e} \equiv -\mathbf{k}_\perp \cdot (cT_e \hat{\mathbf{b}} / eB) \times \nabla \ln n_e = k_\theta c T_e / (eBL_n)$ と書かれ、また、捕捉電子の歳差ドリフト周波数 $\omega_{De} = \langle \omega_{De} \rangle_b$ は、

$$\bar{\omega}_{De} = \omega_{*e} \frac{L_n w}{RT_e} G(\hat{s}, \kappa) \quad (68)$$

によって与えられる。上式(68)の導出には、式(51)と(60)を用い、また、軸対称配位では $\langle dq/dt \rangle_b = (dq/dr) \langle dr/dt \rangle_b = 0$ となることを使った。歳差ドリフト周波数 ω_{De} は、捕捉電子が描くバナナ軌道の中心のトロイダル方向ドリフト運動(歳差ドリフト運動)の速度とトロイダル方向波数の積を表す。

式(52)で与えられた $G(\hat{s}, \kappa)$ の κ -依存性を無視して、その平均値[12, 13]

$$G_{\text{ave}}(\hat{s}) = 0.64\hat{s} + 0.57 \quad (69)$$

に置き換え、さらに $\langle \phi \rangle_b \simeq \phi$ の近似を用いると、式(66)より、TEMの分散関係が

$$1 + \frac{T_e}{T_i} - \left(\frac{T_e}{T_i} + \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) \Gamma_0 - \eta_i \frac{\omega_{*e}}{\omega} b_i (\Gamma_1 - \Gamma_0) = \frac{4\pi}{n_0} \sqrt{2\epsilon} \int_0^\infty v^2 dv f_{Me} \frac{\omega - \omega_{*e}^T}{\omega - \bar{\omega}_{De0} + i\nu_{\text{eff},e}} \quad (70)$$

で与えられる[4]。式(70)において、 $\bar{\omega}_{De0}$ は式(68)の右辺で $G(\hat{s}, \kappa)$ を $G_{\text{ave}}(\hat{s})$ で置き換えたもの、即ち、

$$\bar{\omega}_{De0} \equiv \omega_{*e} \frac{L_n w}{RT_e} G_{\text{ave}}(\hat{s}) = \omega_{Ge} \frac{w}{T_e} \quad (71)$$

によって定義されている。また、

$$\omega_{Ge} \equiv G_{\text{ave}}(\hat{s}) \omega_{*e} \frac{L_n}{R} \quad (72)$$

とおいた。さらに、式(70)では、 $b_i \equiv (k_\theta \rho_{ti})^2$ 、 $k_\theta = nq/r$ (n : トロイダルモード数) を用いており、 k_\perp に含まれる θ 依存性を無視した。こうして導かれたTEMの分散関係式(70)は、元々のジャイロ運動論的方程式(56)と準中性条件(62)の厳密な数値解や、また θ や κ に対する依存性を残した近似式(66)を解くことに比べて、極めて簡単化され、取り扱いやすくなっており、それでも、密度・温度勾配の効果以外に、イオンの有限ジャイロ半径や歳差ドリフト運動をする捕捉電子と静電波の共鳴等の運動論的效果を含んでいるため、より厳密な数値シミュレーション結果と比較したり、プラズマ平衡パラメータに対する依存性の傾向を把握するために用いられている。

4.4 無衝突TEM

捕捉電子の有効衝突周波数が、歳差ドリフト周波数に比べて小さく、

$$\nu_{\text{eff},e} = \nu_e / \epsilon < \bar{\omega}_{De} \quad (73)$$

が成り立つ場合、式(70)において衝突の影響が無視され、次式のような無衝突TEMに対する分散関係

$$1 + \frac{T_e}{T_i} - \left(\frac{T_e}{T_i} + \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) \Gamma_0 - \eta_i \frac{\omega_{*e}}{\omega} b_i (\Gamma_1 - \Gamma_0) = \frac{4\pi}{n_0} \sqrt{2\epsilon} \int_0^\infty v^2 dv f_{Me} \frac{\omega - \omega_{*e}^T}{\omega - \bar{\omega}_{De0}} \quad (74)$$

が得られる。 $\sqrt{\epsilon} \ll 1$ として、まず、式(74)の右辺を0とおくことにより、周波数の実部 $\omega_r = \text{Re}(\omega)$ は近似的に次式で与えられる。

$$\frac{\omega_r}{\omega_{*e}} = \frac{\Gamma_0 - \eta_i b_i (\Gamma_0 - \Gamma_1)}{1 + (T_e/T_i)(1 - \Gamma_0)} \quad (75)$$

次に、捕捉粒子不安定性の成長率 $\gamma = \text{Im}(\omega)$ は $\sqrt{\epsilon}$ に比例して小さい値をとるものとして、式(74)の右辺において Plemelj の公式、

$$\lim_{\gamma \rightarrow +0} \frac{1}{\omega_r + i\gamma - \bar{\omega}_{De0}} = \text{P} \frac{1}{\omega_r - \bar{\omega}_{De0}} - i\pi \delta(\omega_r - \bar{\omega}_{De0}) \quad (76)$$

を用いた後に、式(74)の両辺の虚部が互いに等しいとおくことによって、

$$\begin{aligned} & [1 + (T_e/T_i)(1 - \Gamma_0)] \frac{\gamma}{\omega_r} \\ &= 2\sqrt{2\pi\epsilon} \left(\frac{\omega_r}{\omega_{Ge}} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\omega_r}{\omega_{Ge}}\right) \\ & \times \left[\frac{\omega_{*e}}{\omega_r} \left\{ 1 + \eta_e \left(\frac{\omega_r}{\omega_{Ge}} - \frac{3}{2} \right) \right\} - 1 \right] \end{aligned} \quad (77)$$

が導かれる。上式(77)より、TEMが不安定 ($\gamma > 0$) となる条件として、

$$\frac{\omega_{*e}}{\omega_r} \left\{ 1 + \eta_e \left(\frac{\omega_r}{\omega_{Ge}} - \frac{3}{2} \right) \right\} > 1 \quad (78)$$

が得られる。以上では、 $\gamma \ll \omega_r$ のような条件を仮定して、

式(76)を用いたが、式(75)と(77)に典型的な密度勾配、温度勾配や逆アスペクト比 ϵ を用いて、 ω_r と γ の値を見積もると、 $\gamma \ll \omega_r$ が満たされず、式(75)と(77)の妥当性が疑われることが多い[4].

上記のような仮定をしない場合、式(74)は、プラズマ分散関数 (Ref.[2]p.312参照)

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \frac{\exp(-t^2)}{t-\xi} \quad (79)$$

を用いて、次式のように書き直すことができる.

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{T_e}{T_i} - \left(\frac{T_e}{T_i} + \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) \Gamma_0 - \eta_i \frac{\omega_{*e}}{\omega} b_i (\Gamma_1 - \Gamma_0) \\ &= -\frac{2\sqrt{2}\epsilon}{\omega_{Ge}} \left[\left\{ \omega - \omega_{*e} \left(1 - \frac{3}{2} \eta_e \right) \right\} (1 + \xi Z(\xi)) \right. \\ & \quad \left. - \omega_{*e} \eta_e \left[\frac{\omega}{\omega_{Ge}} (1 + \xi Z(\xi)) + \frac{1}{2} \right] \right] \quad (80) \end{aligned}$$

ここで、 $\xi = (\omega/\omega_{Ge})^{1/2}$ であり、複素数の平方根である ξ の偏角 $\arg(\xi)$ は、次式に与えられる条件を満たすものとする.

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{4} < \arg(\xi) < \frac{3\pi}{4} & \text{ for } \omega_{Ge} > 0 \\ \frac{\pi}{4} < \arg(\xi) < \frac{5\pi}{4} & \text{ for } \omega_{Ge} < 0 \end{aligned} \quad (81)$$

複素周波数 ω の平方根 $\omega^{1/2}$ を定義する場合、複素 ω -平面にbranch cutを設ける必要があるが、ここでは、複素 ω -平面の虚軸の下半分(0から $-i\infty$ に向かう半直線)にbranch cutをとることにすると、上式(81)の条件が得られる. 因みに、捕捉粒子不安定性やITGモードのように、速度の2乗項を含む ∇B -曲率ドリフトと波動との共鳴が関わる問題をラプラス変換を使って解く場合、上述のような複素 ω -平面上にbranch cutを設ける必要性が生じることに注意しておこう[14, 15].

$|\omega| \gg |\omega_{Ge}|$ の場合、即ち、 $|\xi| \gg 1$ の場合は、漸近展開式 $1 + \xi Z(\xi) = -\frac{1}{2} \xi^{-2} - \frac{3}{4} \xi^{-4} - \frac{15}{8} \xi^{-6} - \dots$ を用い、また、 $k_{\theta} \rho_{ti} \ll 1$ を仮定すると、式(80)は、

$$\begin{aligned} & 1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \\ &= \sqrt{2\epsilon} \left[\left\{ 1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \eta_e \right) \right\} \left(1 + \frac{3}{2} \frac{\omega_{Ge}}{\omega} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{3}{2} \eta_e \frac{\omega_{*e}}{\omega} \left(1 + \frac{5}{2} \frac{\omega_{Ge}}{\omega} \right) \right] \\ &= \sqrt{2\epsilon} \left[1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \frac{\omega_{Ge}}{\omega_{*e}} \right) - \frac{3}{2} \frac{\omega_{*e} \omega_{Ge}}{\omega^2} (1 + \eta_e) \right] \quad (82) \end{aligned}$$

のように簡単化され、これにより、無衝突TEM不安定性の実周波数と成長率に対して、式(75)と(77)とは別の簡単な表式として、

$$\omega_r \simeq \frac{1}{2} \omega_{*e} \quad (83)$$

$$\gamma \simeq \omega_{*e} \left[\frac{3\sqrt{2}\epsilon}{2} \frac{\omega_{Ge}}{\omega_{*e}} (1 + \eta_e) - \frac{1}{4} \right]^{1/2} \quad (84)$$

が導かれる.

4.5 散逸性TEM

捕捉電子の歳差ドリフト周波数 $\bar{\omega}_{De}$ に比べて、有効衝突周波数 $\nu_{\text{eff},e} = \nu_e/\epsilon$ が大きい場合を考えよう. ただし、バウンス平均したジャイロ運動論方程式の解が、バウンス平均する前の元のジャイロ運動論的方程式の近似解として有効であるためには、有効衝突周波数は捕捉電子のバウンス周波数 $\omega_{be} \sim \epsilon^{1/2} \nu_{te}/Rq$ よりも小さいことが必要である.

$$\bar{\omega}_{De} < \nu_e/\epsilon < \omega_{be} \quad (85)$$

この場合、式(70)より次式のような散逸性TEM[2, 3]に対する分散関係

$$\begin{aligned} & 1 + \frac{T_e}{T_i} - \left(\frac{T_e}{T_i} + \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) \Gamma_0 - \eta_i \frac{\omega_{*e}}{\omega} b_i (\Gamma_1 - \Gamma_0) \\ &= \frac{4\pi}{n_0} \sqrt{2\epsilon} \int_0^{\infty} v^2 dv f_{Me} \frac{\omega - \omega_{*e}^T}{\omega + i\nu_{\text{eff},e}} \quad (86) \end{aligned}$$

が得られる. 上式(86)において、さらに $k_{\theta} \rho_{ti} \ll 1$ を仮定すると、

$$1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} = \frac{4\pi}{n_0} \sqrt{2\epsilon} \int_0^{\infty} v^2 dv f_{Me} \frac{\omega - \omega_{*e}^T}{\omega + i\nu_{\text{eff},e}} \quad (87)$$

が導かれる. $\sqrt{\epsilon} \ll 1$ として、捕捉電子の割合が小さいことを考慮すると、上式(87)より、散逸性TEMの周波数は、 $\omega \simeq \omega_{*e}$ であることがわかる. さらに、 $\nu_{\text{eff},e} \gg \omega \simeq \omega_{*e}$ の場合を考えると、式(87)から、散逸性TEMの周波数および成長率が

$$\omega_r = \omega_{*e} \quad (88)$$

$$\gamma = \omega_{*e} \frac{4\pi}{n_0} \sqrt{2\epsilon} \int_0^{\infty} v^2 dv f_{Me} \frac{\omega_{*e}^T - \omega_{*e}}{\nu_{\text{eff},e}} \sim \epsilon^{3/2} \frac{\omega_{*e}^2}{\nu_e} \eta_e \quad (89)$$

のように表される. 上式(89)の最右辺の導出では、 $\nu_{\text{eff},e}$ の速度 v に対する依存性(v が大きくなると、衝突によるピッチ角散乱周波数は v^{-3} に比例して小さくなる)が考慮されている.

4.6 おわりに

本章では、磁場閉じ込めプラズマの静電的な微視的不安定性を記述する基本方程式系として、電子とイオンの静電的ジャイロ運動論的方程式と準中性条件を示し、そこにバウンス平均等の近似手法を用いることにより、トロイダル磁場中の微視的不安定性の典型例である無衝突TEMおよび散逸性TEMの分散関係がどのようにして導かれるかを解説した. ここでは、特に同心円形のポロイダル断面をもつ大アスペクト比の軸対称トーラス磁場配位の場合を扱い、捕捉粒子の歳差ドリフト速度を導出し、

また、周波数や波数に対する幾つかの仮定を用いることにより、式(83) – (84)や式(88) – (89)で示されるように、密度・温度勾配や衝突周波数に対する無衝突TEMの散逸性TEMの実周波数や成長率の依存性をわかりやすく示す単純な表式を導いた。しかし、一般的なトーラス磁場配位の場合、数値計算によりジャイロ運動論に基づく基本方程式系を直接解くことによって、定量的に正確なTEMの実周波数や成長率が求められている[16]。実際、そのような数値計算によると、トロイダル磁場配位、密度・温度分布や波数に対する同一の条件下において、無衝突TEM不安定性が、トロイダルITGモード不安定性とは別個に共存したり、あるいは、ITG・TEM両者のハイブリッド型のモードとして存在することが知られており[16]、これらは、トカマクやヘリカルプラズマのイオンジャイロ半径スケールにおける乱流の主要因として多くの理論・シミュレーション研究がなされている[17-23]。

謝 辞

本講座記事の執筆にあたって、有益なコメントをいただいた名古屋大学の前山伸也講師、渡邊智彦教授、ならびに核融合科学研究所の松岡清吉助教に深く感謝いたします。本稿の作成は、科学研究費 [基盤研究 (B) : 19H01879] および核融合科学研究所共同研究 [NIFS22KIPT004, NIFS23KIPT009] の援助を得て行われました。

参 考 文 献

- [1] B.B. Kadomtsev and O. P. Pogutse, *Sov. Phys. JETP* **24**, 1172 (1967).
 [2] 宮本健郎：核融合のためのプラズマ物理 (岩波書店, 1976), 第12章。

- [3] J. Wesson, *Tokamaks* (Clarendon Press, Oxford, 1997), Chap.8.
 [4] J.C. Adam *et al.*, *Phys. Fluids* **19**, 561 (1976).
 [5] 洲鎌英雄, 矢木雅敏：プラズマ・核融合学会誌 **76**, 1007 (2000).
 [6] P.H. Rutherford and E.A. Frieman, *Phys. Fluids* **11**, 569 (1968).
 [7] J.B. Taylor and R.J. Hastie, *Plasma Phys.* **10**, 479 (1968).
 [8] 洲鎌英雄：プラズマ・核融合学会誌 **79**, 107 (2003).
 [9] 洲鎌英雄：プラズマシミュレーション—多階層複雑現象の解明へ (プラズマ・核融合学会編, 京都大学学術出版会, 2018), 2.2.3節.
 [10] R.D. Hazeltine and J. D. Meiss, *Plasma Confinement* (Addison-Wesley, Redwood City, California, 1992), Chap. 7.10.
 [11] H. Sugama *et al.*, *Phys. Plasmas* **16**, 112503 (2009).
 [12] W.M. Tang, *Theory of Fusion Plasmas*, edited by J. Vaclavik *et al.* (Editrice Compositori, Bologna 1990) p.31.
 [13] J.Li and Y. Kishimoto, *Plasma Phys. Control. Fusion* **44**, A479 (2002).
 [14] T. Kuroda *et al.*, *J. Phys. Soc. Jpn.* **67**, 3787(1998).
 [15] H. Sugama, *Phys. Plasmas* **6**, 3527 (1999).
 [16] G. Rewoldt and W.M. Tang, *Phys. Fluids B* **2**, 318 (1990).
 [17] S. Brunner *et al.*, *Phys. Plasmas* **5**, 3929 (1998).
 [18] J.H.E. Proll *et al.*, *Phys. Plasmas* **20**, 122506 (2013).
 [19] M. Nakata *et al.*, *Nucl. Fusion* **56**, 086010 (2016).
 [20] M. Nakata *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **118**, 165002 (2017).
 [21] S. Maeyama *et al.*, *Nat. Commun.* **13**, 3166 (2022).
 [22] T.-H. Watanabe *et al.*, *Nucl. Fusion* **63**, 054001 (2023).
 [23] Y. Idomura *et al.*, *Phys. Plasmas* **30**, 042508 (2023).



す が ま ひ で お
洲 鎌 英 雄

自然科学研究機構 核融合科学研究所 研究部 複合大域シミュレーションユニット教授。
 東京大学大学院 新領域創成科学研究科 先端エネルギー工学専攻 核融合エネルギー科学講座第一 (連携講座) 客員教授。京都大学工学博士。専門は、磁場閉じ込め核融合プラズマの物理。特に、ジャイロ運動論に基づくプラズマの微視的不安定性、新古典・乱流輸送の理論研究を行っている。この数年間コロナのため控えていた温泉旅行を楽しみたい。