



講座 今更聞けない!? 磁場閉じ込めプラズマの微視的不安定性

2. 微視的不安定性を記述する基礎方程式

2. Basic Equations for Micro-Instabilities

渡邊智彦, 前山伸也

WATANABE Tomo-Hiko and MAEYAMA Shinya

名古屋大学大学院理学研究科

(原稿受付: 2023年5月1日)

磁場閉じ込め核融合プラズマに発生する微視的不安定性を記述するための基本方程式であるジャイロ運動論的方程式とともに, その理解に必要な基礎的事項をまとめ, 次章以降の具体的な問題への導入準備とする。

Keywords:

gyrokinetics, micro instability, drift wave, shear Alfvén wave

2.1 はじめに

磁化プラズマ中の揺らぎ 磁化プラズマにおける微視的不安定性には様々な種類がある。本講座では, イオンのサイクロトロン周波数よりも十分低い周波数をもつ揺動が関わる不安定性を扱う。これらはドリフト波に代表されるように, プラズマ中の密度や温度の不均一性を駆動源として発達する。周波数が十分低いため, 揺らぎは磁場に沿った方向に長い波長 L_{\parallel} (トーラス形状の場合は, 大半径程度) をもつが, 磁場を横切る方向にはサイクロトロン半径 (ジャイロ半径) で特徴づけられる短波長 L_{\perp} となる。このように磁場方向に長く伸びた非等方性の強い揺らぎはフルート型と呼ばれ, 微小パラメータ $\delta \sim L_{\perp}/L_{\parallel}$ を用いて支配方程式を簡約化することができる。磁気流体 (MHD) 方程式から簡約化MHD方程式を導出する際も, フルード近似が用いられる[1]。ただし, ドリフト波などの記述においては, 一流体近似を用いるMHD方程式では不十分であり, 磁場に沿った電場揺動や荷電粒子の磁場ドリフトなどの効果を取り入れる必要がある。また, 核融合プラズマのように高温で希薄なプラズマでは, 粒子の磁場方向への平均自由行程が系の大きさをはるかに越えるため, 流体近似が成立せず, 分布関数を扱う運動論が必要となる。

ジャイロ運動論的オーダーリング プラズマの運動論を扱う基礎方程式はVlasov方程式であるが, そこにはジャイロ運動をはじめとした時間スケールの短い現象が含まれる。これを平均化して短時間スケールの現象を落とし, ドリフト波などの記述に適した方程式としてジャイロ運動論[2, 3]が考案され, 現在では乱流輸送の理論及びシミュレーション解析に幅広く用いられている。本講座では, ジャイロ運動論を用いて, 様々な微視的不安定性について解説する。

ジャイロ運動論的方程式の導出には, 上記のフルード近似に加え, 時間及び空間スケールを特徴づける以下のオーダーリングが用いられる。

$$\delta \sim \frac{L_{\perp}}{L_{\parallel}} \sim \frac{\omega}{\Omega} \sim \frac{e\delta\phi}{T} \sim \frac{\delta B}{B} \sim \frac{\delta F}{F} \sim \frac{v_g}{v_t}. \quad (1)$$

ここで, 揺らぎの角振動数 ω , サイクロトロン角周波数 Ω , 素電荷 e , 静電ポテンシャル揺動 $\delta\phi$, 温度 T , 磁場揺動 δB , 背景磁場強度 B , 分布関数揺動 δF , 全分布関数 F , ジャイロ中心のドリフト速度 v_g , 熱速度 v_t を表す。

局所近似 ジャイロ運動論のもとでは, $L_{\perp} \sim \rho_t = v_t/\Omega$ として磁場垂直方向にジャイロ半径スケールの波長の揺らぎを考える。これは密度や温度勾配, またはトーラス小半径に比べ十分小さいため, 背景分布やその勾配を一定とした局所近似がしばしば用いられる。局所近似を用いると, 背景分布のスケールと揺らぎのスケールを分離することができ, 揺動成分については磁場を横切る方向に周期境界条件を適用することでFourier変換を用いることができるという利点がある。その一方で, 背景プラズマの密度・温度勾配や磁気シアは一定として取り扱うことができ, 線形理論の見通しが非常に良くなるため, 本講座でも局所近似のもとで議論を行う。

2.2 準備

単位系 プラズマ理論の文献を読む際には, 読者はしばしばGauss単位系に遭遇するだろう。最近では, 大学での電磁気学の講義もSI単位系で行われることが多いため, これに戸惑う場合が見受けられる。ここでは, その一助となるようにGauss単位系について簡単に触れておく。相対論を用いる場合にはGauss単位系の見通しの良さがはっきりしているが, 非相対論的な場合でも, μ_0 や ϵ_0 などの

Department of Physics, Nagoya University, Nagoya, AICHI 464-8602, Japan

corresponding author's e-mail: watanabe.tomohiko@nagoya-u.jp

記号が現れない、磁場 \mathbf{B} と電場 \mathbf{E} 、静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル \mathbf{A} の次元が同じ、などの利点がある。SI 単位系と Gauss 単位系の間で式変形を行うには、以下の変数変換を行うと良い。

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \mathbf{E}', & \mathbf{B} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \mathbf{B}', \\ e &= \sqrt{4\pi\epsilon_0} e', \\ \phi &= \frac{1}{\sqrt{4\pi\epsilon_0}} \phi', & \mathbf{A} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{4\pi}} \mathbf{A}'. \end{aligned}$$

ここで'のついた量は Gauss 単位系で表した量である。記号の詳細な説明は不要であろう。ただし、 $\epsilon_0\mu_0=1/c^2$ 、 c は光速、 e は電荷である。また、電流密度や電荷密度についても電荷 e と同様に変換される。以下では'を外して、Gauss 単位系での表記を用いることにしよう。

背景分布関数と摂動分布関数 3次元空間での粒子速度を \mathbf{v} 、その大きさを $v=|\mathbf{v}|$ としよう。以下では、荷電粒子の平均密度 n_s 、電荷 e_s 、質量 m_s 、温度 T_s 、運動エネルギー $\varepsilon=m_s v^2/2$ を用いる。平衡分布関数 F_{0s} として、等方的な Maxwell 分布、

$$F_{Ms} = n_s \left(\frac{m_s}{2\pi T_s} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{\varepsilon}{T_s}\right) \quad (2)$$

を考える。ただし、密度や温度は磁場垂直方向に空間的非一様性を持ちうるが、局所近似のもとではその変化率は一定と仮定する。また、閉じ込め磁場 \mathbf{B} に対する平行および垂直方向の速度成分をそれぞれ v_{\parallel} 、 v_{\perp} とおく。磁気モーメント $\mu=m_s v_{\perp}^2/2B$ となる。これを用いると運動エネルギーは、 $\varepsilon=m_s v_{\parallel}^2/2+\mu B$ と書ける。ここで、 $\mathbf{B}=|\mathbf{B}|$ は空間座標、特に局所解析では磁力線に沿った座標(例えば、ポロイダル角 θ) への依存性を持つ点に注意しよう。多くのトカマク装置では、プラズマはトロイダル方向に回転し、それに対応した平衡スケールの静電ポテンシャルが存在する。ただし、最低次では、その効果は実周波数の Doppler シフトをもたらすが安定性には直接影響しないため、ここでは無視できるとする。^{*1}ここで、粒子位置座標 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) とジャイロ中心座標 $(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, \xi)$ は、 $\mathbf{x}=\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}_s$ の関係にあり、 $\boldsymbol{\rho}_s=\hat{\mathbf{b}}\times\mathbf{v}/\Omega_s$ は、粒子のジャイロ半径ベクトルを意味する。 $\hat{\mathbf{b}}$ と $\Omega_s=e_s B/m_s c$ は、閉じ込め磁場方向の単位ベクトルと粒子の(電荷の符号を含む)サイクロトロン角周波数である。以下では、粒子種 s のジャイロ中心に対する全分布関数を F_s 、その平衡(背景)成分を F_{0s} 、さらにそこからの摂動成分を $f_s=f_s(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t)$ として表す。すなわち、 $F_s=F_{0s}+f_s$ とおく。

ジャイロ平均と非断熱応答 次に、ジャイロ平均を導入しておこう。ジャイロ半径スケールでの空間依存性をもつ物理量 A について、粒子のジャイロ位相 ξ に対する平均操作は次式で与えられ、ジャイロ中心が実効的に感じるポテンシャルの表現や、ジャイロ中心分布関数と粒子位置の分布関数との変換に用いられる。

$$\langle A \rangle = \frac{1}{2\pi} \oint A d\xi. \quad (3)$$

したがって、ジャイロ平均された物理量は、5次元のジャイロ中心座標と時間 $(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t)$ に依存する量となる。ジャイロ運動論では、速度分布関数の非断熱応答部分 h_s がしばしば用いられる。 f_s に対する h_s は、

$$h_s(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t) = f_s(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t) + \frac{e_s \langle \phi \rangle_s}{T_s} F_{Ms} \quad (4)$$

と表される。ここで、一般化ポテンシャル ϕ は

$$\phi(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, \xi, t) = \phi(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}_s, t) - \frac{\mathbf{v}}{c} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{X}+\boldsymbol{\rho}_s, t) \quad (5)$$

であり、静電ポテンシャルとベクトルポテンシャルの揺動成分を、それぞれ、 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 、 $\mathbf{A}(\mathbf{x}, t)$ とした。一方、粒子位置座標 (\mathbf{x}, \mathbf{v}) での摂動分布関数を $f_s^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ とすると、

$$f_s^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -\frac{e_s \phi(\mathbf{x}, t)}{T_s} F_{Ms} + h_s(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t) \quad (6)$$

と表される。

磁気面平均 この節の最後に、磁気面平均の定義を与えておこう。トーラスの閉じ込め磁場に対する磁気座標として、小半径とポロイダルおよびトロイダル角が (r, θ, ζ) で表されている時、物理量 $A(\mathbf{x})$ の磁気面平均 $\langle A \rangle$ は、

$$\langle A \rangle = \frac{1}{V} \oint \sqrt{g} d\theta d\zeta A(\mathbf{x}), \quad (7)$$

$$V' = \frac{dV}{dr} = \oint \sqrt{g} d\theta d\zeta \quad (8)$$

で与えられる。ここで、 \sqrt{g} は、磁気座標 (r, θ, ζ) の Jacobian である。

2.3 支配方程式

局所ジャイロ運動論的方程式 磁場閉じ込めプラズマの微視的な局所乱流輸送を解析する非線形ジャイロ運動論的方程式は、Frieman と Chen によってまとめられた[4]。ここではその表式に基づきつつ、基本方程式系を整理する。ただし、プラズマの圧力は磁気圧に比べて小さく(低 β)、閉じ込め磁場 \mathbf{B} に平行方向の磁場変動成分は無視できるとする。摂動論的な方法を用いたジャイロ運動論的方程式の導出については、文献[4]とともに、Rutherford and Frieman[5]やAntonsen and Lane[6]の論文を参照してほしい。手近な日本語の文献としては、文献[2, 3]がある。

独立変数を $(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t)$ とした場合、ジャイロ中心に対する摂動分布関数の非断熱部分 $h_s(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t)$ に関するジャイロ運動論的方程式は以下ようになる。

*1 ただし、この $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ 流のシアが安定性に重要と考えるとその寄与を残す場合も多い。

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_s}{\partial t} + \left(v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} + \mathbf{v}_{D_s} + \frac{c}{B} \hat{\mathbf{b}} \times \nabla \langle \psi \rangle_s \right) \cdot \nabla h_s \\ = \frac{e_s F_{M_s}}{T_s} \left(\frac{\partial \langle \psi \rangle_s}{\partial t} + \mathbf{v}_{*s}^T \cdot \nabla \langle \psi \rangle_s \right) + C_s(h_s). \end{aligned} \quad (9)$$

以下では、背景磁場に平行方向の磁場揺動 B_{\parallel} 成分は無視できるとして、 $\mathbf{A} = A_{\parallel} \hat{\mathbf{b}}$ とする。磁場ドリフト \mathbf{v}_{D_s} は、

$$\mathbf{v}_{D_s} = \frac{c \hat{\mathbf{b}}}{e_s B} \times \mu \nabla B + m_s v_{\parallel}^2 \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}}, \quad (10)$$

反磁性ドリフト \mathbf{v}_{*s}^T は、

$$\mathbf{v}_{*s}^T = \frac{c \hat{\mathbf{b}}}{e_s B} \times \left[T_s \nabla \ln n_s + \left(\varepsilon - \frac{3}{2} T_s \right) \nabla \ln T_s \right] \quad (11)$$

と表される。また、式(9)の右辺にある C_s は衝突項を表す。式(9)の非線形項は左辺の括弧内第3項にまとめられており、静電ポテンシャルが与える $E \times B$ ドリフトと揺動磁場に沿った運動による移流項からなる。線形解析においてはこの項を無視することになる。上記の方程式は、一般的な磁場配位に対して適用可能である。

上記では、 ε と μ を独立変数に選んでいるため、磁場平行方向の速度成分 $v_{\parallel} = \pm \sqrt{2(\varepsilon - \mu B)/m_s}$ には、 B を通じて磁場平行方向の空間依存性が現れる。一方、ジャイロ運動論的シミュレーションでは、 (v_{\parallel}, μ) を独立変数に用いる場合も多いが、その時は座標変換に伴って

$$v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla h_s \rightarrow v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla h_s - \frac{\mu}{m_s} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla B \frac{\partial h_s}{\partial v_{\parallel}} \quad (12)$$

と変換され、いわゆるミラー力の項が現れる。

Fourier変換 局所ジャイロ運動論的解析では、磁場を横切る座標方向にFourier変換を行うことで、より簡便な表式を得ることができる。ただし、閉じ込め磁場強度 B が変化するため、磁場平行方向の座標についてはFourier変換せずにおく。トロイダル系でのより正確な取り扱い、アイコナルを用いたバルーニング表示を使ってなされる。詳しくは本講座の第4章を参照して欲しい。線形化されたジャイロ運動論的方程式をFourier変換すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{s k_{\perp}}}{\partial t} + v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla h_{s k_{\perp}} + i \omega_{D_s} h_{s k_{\perp}} \\ = \frac{e_s F_{M_s}}{T_s} \left(\frac{\partial \langle \psi_{k_{\perp}} \rangle_s}{\partial t} + i \omega_{*s}^T \langle \psi_{k_{\perp}} \rangle_s \right) + C_s(h_{s k_{\perp}}) \end{aligned} \quad (13)$$

となる。ここで $\omega_{D_s} = \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{D_s}$ 、 $\omega_{*s}^T = \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_{*s}^T$ である。また、 C_s として線形衝突演算子を仮定した。Fourier変換を適用すると、ジャイロ平均は0次Bessel関数を用いて表すことができる

$$\langle A_{k_{\perp}} \rangle_s = J_0 \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{|\Omega_s|} \right) A_{k_{\perp}}. \quad (14)$$

ここで、用いる座標系に応じて k_{\perp} の具体的表式を与える必要がある。また、時間 t についてもFourier変換を行う場合は、 $\partial/\partial t \rightarrow -i\omega$ とすれば良い。

電磁場揺動を与える方程式 摂動分布関数が得られれば、そこから準中性条件とAmpère則から、電磁場揺動を求めることができる。準中性条件は、波数空間 \mathbf{k}_{\perp} では、

$$\left[\sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} \right] \phi_{k_{\perp}} = \sum_s e_s \int d^3 v \langle h_{s k_{\perp}} \rangle_s \quad (15)$$

として表される。文献によっては、左辺に背景Maxwell分布が与える分極効果を表す係数 $(1 - \Gamma_{0s})$ が現れるものもあるので注意したい。その場合、右辺の被積分関数には、 $h_{s k_{\perp}}$ でなく、ジャイロ中心分布関数の揺動成分 $f_{s k_{\perp}}$ が用いられる。この時、 Γ_{0s} は $J_0^2 F_{M_s}$ の速度空間積分から得られ、 $\Gamma_{0s} = I_0(k_{\perp}^2 \rho_{ts}^2) e^{-k_{\perp}^2 \rho_{ts}^2}$ として定義される[第5節の式(27)参照]。ここで、 I_0 は0次の変形Bessel関数、 $\rho_{ts} = v_{ts}/|\Omega_s|$ であり、 v_{ts} は熱速度 $v_{ts} = \sqrt{T_s/m_s}$ を表す。一方、ベクトルポテンシャルは、Ampère則から、

$$k_{\perp}^2 A_{\parallel k_{\perp}} = \frac{4\pi}{c} \sum_s e_s \int d^3 v v_{\parallel} \langle h_{s k_{\perp}} \rangle_s \quad (16)$$

となる。以上で閉じた方程式系となる。ちなみに、粒子が感じる平均的な電磁場揺動は、揺動ポテンシャルを用いて、 $\delta \mathbf{E}_{k_{\perp}} = -i \mathbf{k}_{\perp} \langle \phi_{k_{\perp}} \rangle_s - (\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \langle \phi_{k_{\perp}} \rangle_s + \partial_t \langle A_{\parallel k_{\perp}} \rangle_s) \hat{\mathbf{b}}$ 、 $\delta \mathbf{B} = i \mathbf{k}_{\perp} \times \hat{\mathbf{b}} \langle A_{\parallel k_{\perp}} \rangle_s$ となる。上記の速度空間積分を行う際は、用いている速度空間座標によってJacobianが変わることになる。具体的には、

$$\begin{aligned} d^3 v &= v_{\perp} dv_{\parallel} dv_{\perp} d\xi = \frac{B}{m_s} dv_{\parallel} d\mu d\xi \\ &= \frac{B}{m_s^2 |v_{\parallel}|} d\varepsilon d\mu d\xi \\ &= \frac{\varepsilon B}{m_s^2 |v_{\parallel}|} d\varepsilon d\lambda d\xi. \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、ピッチ角変数 $\lambda = \mu/\varepsilon$ は、粒子軌道の磁場に対するピッチ角 θ と $\lambda B = \sin^2 \theta$ で関係づけられる。また、 v_{\parallel} に変えて ε を速度空間座標に使う場合は、 v_{\parallel} の符号についても和をとる必要がある。

2.4 座標系の導入

上記の方程式は、任意の磁場形状について成り立つが、具体的な計算を進めるためには磁場配位に対応した座標系を導入する必要がある。ここでは、簡単な二つの場合について見ていこう。

大アスペクト比トーラスプラズマの場合 軸対称 $\partial_{\zeta} = 0$ かつ同心円の円形磁気面を持つ大アスペクト比トーラスを考える。つまり、小半径 $r = \text{const.}$ および大半径 $R = R_0 + r \cos \theta$ に対して、逆アスペクト比 $r/R_0 \ll 1$ とする。閉じ込め磁場は安全係数 $q(r)$ を用いて $\mathbf{B} = (B_0 R_0/R) [\hat{\zeta} + (r/q R_0) \hat{\theta}]$ 、 $B = B_0 [(1 - (r/R_0) \cos \theta)] + O(\varepsilon^2)$ である。ある磁気面 $r = r_0$ 近傍の座標系として、

$$x = r - r_0, \quad y = \frac{r_0}{q_0} [q(r) \theta - \zeta], \quad z = \theta \quad (18)$$

を用いることにすると、 $r/R_0 \ll 1$ の最低次近似として

$\mathbf{B} = B_0 \nabla x \times \nabla y$ と表わされ、 x をトーラス小半径方向座標、 y を磁力線ラベル、 z を沿磁力線方向座標とみなすことができる [7]。さらに、局所近似された平衡密度・温度勾配を $\nabla \ln n_s = -\nabla x / L_{ns}$ 、 $\nabla \ln T_s = -\nabla x / L_{Ts}$ とすると、

$$\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla = \frac{1}{qR_0} \frac{\partial}{\partial z}, \quad (19)$$

$$\omega_{Ds} = -\frac{c(\mu \mathbf{B} + m_s v_{||}^2)}{e_s B_0 R_0} \times [k_x \sin z + k_y (\cos z + \hat{s} z \sin z)], \quad (20)$$

$$\omega_{*s}^T = -\frac{ck_y}{e_s B_0} \left[\frac{T_s}{L_{ns}} + \left(\varepsilon - \frac{3}{2} T_s \right) \frac{1}{L_{Ts}} \right], \quad (21)$$

$$k_{\perp}^2 = (k_x + \hat{s} z k_y)^2 + k_y^2. \quad (22)$$

ここで、 $\hat{s} = (r/q) dq/dr$ は磁気シアを表し、低ベータ極限でのMHD平衡として $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} = \nabla \ln B$ を用いた。また、磁場強度についてはミラー力を考慮するために $O(\varepsilon)$ の z 依存性を残しているが、その他のメトリックについては最低次のみを残す近似をしている。*2

一様磁場の場合 一様な直線磁場 $\mathbf{B} = B\hat{z}$ の場合、磁場の勾配および曲率による磁場ドリフト周波数 $\omega_{Ds} = 0$ となり、ミラー力も生じない。反磁性ドリフト周波数 ω_{*s}^T は式(21)と変わらず、 $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla = \partial_z$ 、 $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2$ となる。

2.5 基本となる波動

本節では、一様磁場中で、一定密度勾配長を持つ無衝突プラズマを考える。*3 ただし、簡単のため一様温度 ($L_{Ts}^{-1} = 0$) を仮定する。この場合の ω_{*s}^T を ω_{*s} で表す。局所ジャイロ運動論の方程式で扱える基本的な波動について確認しよう。線形化ジャイロ運動論の方程式(13)に対し、Fourier変換を磁場平行方向の座標 ($\partial_z \rightarrow ik_{||}$) にも施すことで、以下の摂動ジャイロ中心分布関数の線形応答を得る。

$$h_{sk_{\perp}} = \frac{e_s F_{Ms}}{Ts} \frac{\omega - \omega_{*s}}{\omega - k_{||} v_{||}} \langle \psi_{k_{\perp}} \rangle_s. \quad (23)$$

ここから密度・電流揺動を求め、準中性条件(15)、Ampère則(16)に代入して以下の分散関係式を得る。

$$\left(\frac{\omega^2}{c^2 k_{||}^2} \sum_s \frac{1 - G_s}{k_{\perp}^2 \lambda_{Ds}^2} - 1 \right) \left[\sum_s \frac{G_s}{k_{\perp}^2 \lambda_{Ds}^2} (1 + \alpha_s Z(\alpha_s)) \right] = \sum_s \frac{1 - G_s}{k_{\perp}^2 \lambda_{Ds}^2}. \quad (24)$$

ここで、

$$G_s = \Gamma_{0s} \left(1 - \frac{\omega_{*s}}{\omega} \right), \quad (25)$$

$\alpha_s = \omega / \sqrt{2} k_{||} v_{ts}$ および s 粒子の Debye 長 $\lambda_{Ds} = \sqrt{T_s / 4\pi n_{0s} e_s^2}$

とし、プラズマ分散関数

$$Z(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\nu^2}}{\nu - \alpha} d\nu, \quad (26)$$

および0次Bessel関数に対する積分公式

$$\int_0^{\infty} x J_0^2(px) e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} I_0 \left(\frac{p^2}{2a} \right) e^{-\frac{p^2}{2a}} \quad (27)$$

を用いた。

電子とイオンの二種類の粒子 ($n_e = n_i$, $-e_e = e_i = e$) から成るプラズマにおいて、垂直方向波長が熱速度に対するイオンジャイロ半径程度、すなわち $k_{\perp} < \rho_{ie}^{-1} \ll \rho_{te}^{-1}$ の波を考えると、電子について $\Gamma_{0e} = 1$ 、イオンについて $\Gamma_{0i} = 1 - k_{\perp}^2 \rho_{ii}^2$ と近似される。ここで分散関係式(24)を近似してみよう。簡単のため、電子とイオンの温度と密度勾配はそれぞれ等しいとする。すなわち、 $T_e = T_i$ 、 $\omega_{*i} = -\omega_{*e}$ (温度勾配はゼロとしている)。すると、式(24)左辺の係数は

$$\frac{\omega^2}{c^2 k_{||}^2} \sum_s \frac{1 - G_s}{k_{\perp}^2 \lambda_{Ds}^2} = \frac{\omega^2}{k_{||}^2 v_A^2} \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right) = \alpha_i^2 \beta_i \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right) \quad (28)$$

と変形できる。ここで、 v_A は Alfvén 速度 $v_A = B_0 / \sqrt{4\pi m_i n_0}$ であり、 $\rho_{ii}^2 / \lambda_{Di}^2 = c^2 / v_A^2$ および $\omega_{ps} = v_{ts} / \lambda_{Ds}$ という関係を用いた。また、 $\beta_i = n_i T_i / (B^2 / 8\pi)$ は、イオン圧力で定義した β 値を表す。さらに、電子について断熱応答を仮定し ($1 + \alpha_e Z(\alpha_e) \rightarrow 1$)、イオンの平行方向の運動を無視すれば ($1 + \alpha_i Z(\alpha_i) \rightarrow 0$)、式(24)は以下ようになる

$$\left[\frac{\omega^2}{k_{||}^2 v_A^2} \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right) - 1 \right] \left(1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \right) = k_{\perp}^2 \rho_{ii}^2 \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right). \quad (29)$$

ここで、密度一様な場合 ($\omega_{*s} = 0$) を考えると、運動論的 Alfvén 波の分散関係式 $\omega^2 = k_{||}^2 v_A^2 (1 + k_{\perp}^2 \rho_{ii}^2)$ が導かれる。一方、低 β 極限 ($\alpha_i^2 \beta_i = 0$) では、静電的な波動となり、その長波長極限 ($k_{\perp}^2 \rho_{ii}^2 \rightarrow 0$) においては、単純なドリフト波の分散関係式 $\omega = \omega_{*e}$ に帰着することがわかる。

2.6 まとめ

ここでまとめた方程式系は、次章以降でイオン及び電子温度勾配モード、捕捉電子モードなどのドリフト波や運動論的バルーニングモード、微視的テアリングモードなど様々な例に応用される。ただし、ジャイロ運動論の方程式の導出過程では、速い磁気音波は取り除かれている。またここでは、背景磁場に平行な変動磁場成分も無視したため、遅い磁気音波も含まれない。一方、シア Alfvén 波は、電子慣性や有限圧力効果を含めて分散性 Alfvén 波として扱うことができる。また、ジャイロ運動論の方程式の極限を取ることで、簡約化MHD方程式やHasegawa-


*2 これは、局所ジャイロ運動論のシミュレーションにおいて s - α モデル配位と呼ばれることもあるが、その定義は微妙な違いがあり注意が必要 [8]。

*3 これはMHD平衡条件を満たさないが、プラズマ β が十分低い場合の近似として考える。

Mima 方程式を導出することができる。(この辺りの解説は、文献[9]に詳しい。) すなわち、ジャイロ運動論はこれらの流体モデルを包含した理論体系となっている(ただし、MHDで扱う熱速度を超えた速い流れは取り扱えない)。また、本講座では取り扱わないが、高エネルギー粒子を含めることで、Alfvén固有モード励起への適用なども行われている。

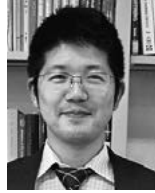
参考文献

- [1] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, *Plasma Confinement* (Redwood City: Addison-Wesley) Chap. 7 (1992).
- [2] 洲鎌英雄：プラズマ・核融合学会誌 **79**, 107 (2003).
- [3] 洲鎌英雄：プラズマシミュレーション (プラズマ・核融合学会編, 京都大学出版会, 2018) 第2章2.2節.
- [4] E.A. Frieman and L. Chen, *Phys. Fluids* **25**, 502 (1982).
- [5] P.H. Rutherford and E.A. Frieman, *Phys. Fluids* **11**, 569 (1968).
- [6] T.M. Antonsen and B. Lane, *Phys. Fluids* **23**, 1205 (1980).
- [7] M. Beer *et al.*, *Phys. Plasmas* **2**, 2687 (1995).
- [8] X. Lapillonne *et al.*, *Phys. Plasmas* **16**, 032308 (2009).
- [9] 石澤明宏：プラズマ・核融合学会誌 **90**, 213 (2014).



わた なべ とも ひこ
渡 邊 智 彦

名古屋大学大学院理学研究科 教授。磁気核融合プラズマはもとより、宇宙・天体プラズマやプラズマの基礎理論も含めて広く研究していきたいと思っています。最近はなかなか時間がとれないのが悩みですが、いろんな景色を楽しめるよう、体力づくりに励んでいます。



まえ やま しん や
前 山 伸 也

名古屋大学大学院理学研究科 講師。プラズマ乱流の研究に関して、シミュレーション開発から物理解析、データ分析・モデリング手法に興味を持っています。論文にすべき結果が数件溜まっているけれど、研究計画上進めるべき仕事に取り掛かりつつ、アイデアは面白そうな未着手のネタもごころごころ…。自分の手が届く範囲は限られているなど痛感しています。子どもたちに元気をもらって今日も地道に取り組めます。