J. Plasma Fusion Res. Vol.99, No.5 (2023) 183-186

小特集 2次元回転系上の乱流における大規模構造形成

2．プラズマ物理と地球流体力学

2. Plasma Physics and Geophysical Fluid Dynamics

佐 藤 直 木，山 田 道 夫[1)]
SATO Naoki and YAMADA Michio[1)]
東京大学大学院新領域創成科学研究科，[1)]京都大学数理解析研究所
（原稿受付：2023年1月20日）

ローレンツ力とコリオリ力の類似性から，プラズマ物理と地球流体力学は深い関係にある．本章ではのこれらの研究分野をつなぐ支配方程式（プラズマ物理の長谷川-三間方程式と地球流体力学のβ平面上2次元流体方程式）について解説する．

Keywords:
Hasegawa-Mima equation, drift wave turbulence, Rossby wave, beta plane, zonal flow

2.1　はじめに

本章ではプラズマ物理と地球流体力学をつなぐ支配方程式（プラズマ物理の長谷川-三間方程式と地球流体力学のβ平面上2次元流体方程式）について解説する．

本章の構成は次の通りである．まず長谷川-三間方程式の導出及びドリフト波について説明する．次にβ平面上2次元流体方程式の導出を行い，地球流体力学と長谷川-三間方程式の関係について説明する．そして長谷川-三間方程式のハミルトン構造と保存則について紹介する．最後に帯状流と乱流を特徴づけるカスケード現象について解説する．

2.2　長谷川－三間方程式

本章では長谷川－三間方程式[1]の導出を行う．まず，三次元空間$\mathbf{x}=(x,y,z)$におけるイオンと電子によって構成される準中性プラズマを考える．プラズマは一様磁場$\boldsymbol{B}=B_0\nabla z$，$B_0\in\mathbb{R}$，$B_0>0$，の中を運動するとし，電子が局所的熱平衡状態をなしていると仮定する．このとき，イオン密度nと電子密度n_{e}は次の関係式を満たす：

$$n_{\mathrm{e}}=Nn=A(\mathbf{x})\exp\{\lambda\varphi(\mathbf{x},t)\},\quad \lambda=\frac{e}{k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}} \tag{1}$$

ここでは$-e$を電子の電荷，Neをイオンの電荷，$A(\mathbf{x})$を正の関数，$\varphi(\mathbf{x},t)$を静電ポテンシャル，tを時間，k_{B}をボルツマン定数，T_{e}を電子温度とする．流体描像において，イオン密度nは質量保存則によりイオン速度場$\mathbf{v}=v_x(\mathbf{x},t)\nabla x+v_y(\mathbf{x},t)\nabla y+v_z(\mathbf{x},t)\nabla z$に対して連続の式$n_t=-\nabla\cdot(n\mathbf{v})$を満たす．すなわち，

$$\lambda\varphi_t=-\nabla\cdot\mathbf{v}-\lambda\mathbf{v}\cdot\nabla\varphi-\nabla\log A\cdot\mathbf{v}. \tag{2}$$

次に温度Tを持つイオンプラズマが電子プラズマに比べて冷たい$T\ll T_{\mathrm{e}}$であることを利用し，イオン圧力$P\sim 0$を仮定すると，流体描像でのイオン運動方程式は次のように表すことができる：

$$\sigma\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{v}\times\mathbf{B}-\nabla\varphi,\quad \sigma=\frac{m}{Ne}. \tag{3}$$

ここでmはイオンの質量である．方程式(3)から磁場に対して垂直な速度成分$\mathbf{v}_\perp$は$\mathbf{E}\times\mathbf{B}$ドリフト速度$\mathbf{v}_{\mathrm{E}}$と分極ドリフト速度$\mathbf{v}_{\mathrm{p}}$によって定まることがわかる：

$$\mathbf{v}_\perp=\mathbf{v}_{\mathrm{E}}+\mathbf{v}_{\mathrm{p}},\ \ \mathbf{v}_{\mathrm{E}}=\frac{\mathbf{B}\times\nabla\varphi}{\mathbf{B}^2},\ \ \mathbf{v}_{\mathrm{p}}=\sigma\frac{\mathbf{B}\times\frac{d\mathbf{v}}{dt}}{\mathbf{B}^2}. \tag{4}$$

次に，微小パラメータ$\epsilon>0$を導入し，下記オーダリングを仮定する：

$$\frac{k_\perp|\mathbf{v}_\perp|}{\omega_{\mathrm{c}}}\sim\lambda\varphi\sim\frac{\partial_{\mathrm{t}}}{\omega_{\mathrm{c}}}\sim\frac{|\nabla A|}{k_\perp A}\sim\frac{\partial_z}{k_\perp}\sim\frac{v_z}{|\mathbf{v}_\perp|}\sim\epsilon. \tag{5}$$

ここで$k_\perp$は磁場に対して垂直な平面において静電ポテンシャル乱流を特徴づける波数，$\omega_{\mathrm{c}}=NeB_0/m$はサイクロトロン周波数である．方程式(5)は速度$k_\perp\omega_{\mathrm{c}}{}^{-1}$と比べて$\mathbf{v}_\perp$が小さいこと，ポテンシャルエネルギー$-e\varphi$が電子の運動エネルギー$k_{\mathrm{B}}T_{\mathrm{e}}$より小さいこと，時間変化$\partial_{\mathrm{t}}$がサイクロトロン運動の周期$2\pi/\omega_{\mathrm{c}}$よりゆっくり進むこと，密度の変化を特徴づける空間スケール$A/|\nabla A|$が空間スケール$k_\perp^{-1}$より長いこと，z方向の変化∂_zが空間スケール$k_\perp^{-1}$より長いスケールで発生すること，z方向の速度が垂直速度$\mathbf{v}_\perp$より小さいことを意味する．オーダリング(5)を二次まで展開すると長谷川－三間方程式が得られる：

$$\begin{aligned}\lambda\varphi_{\mathrm{t}}&=-\nabla\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{p}}-\nabla\log A\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\\&=\frac{\sigma}{B_0^2}\Delta_\perp\varphi_{\mathrm{t}}+\left[\varphi,\frac{\sigma}{B_0^3}\Delta_\perp\varphi-\frac{\log A}{B_0}\right],\end{aligned} \tag{6}$$

corresponding author's e-mail: sato_naoki@edu.k.u-tokyo.ac.jp

ここでは$\Delta_\perp = \partial_x{}^2 + \partial_y{}^2$，$[f, g] = f_x g_y - f_y g_x$とする．イオン音速$c_\mathrm{s} = \sqrt{Nk_\mathrm{B}T_\mathrm{e}/m}$と空間スケール$\rho_\mathrm{L} = c_\mathrm{s}\omega_\mathrm{c}^{-1}$を導入し，規格化$t \to \omega_\mathrm{c} t$，$(x, y) \to (\rho_\mathrm{L}^{-1}x, \rho_\mathrm{L}^{-1}y)$，$\varphi \to \lambda\varphi$を利用すると，長谷川‑三間方程式(6)は次のように整理できる：

$$(1 - \Delta_\perp)\varphi_\mathrm{t} = [\varphi, \Delta_\perp \varphi - \log A], \tag{7}$$

トカマク型核融合炉では（x, y）を円柱座標の半径と高さ，及びzをトロイダル角方向の座標としてとらえる．この場合，長谷川‑三間方程式(6)は断面$z = z_0$における静電ポテンシャル乱流の時間発展を記述する（**図1**(a)参照）．この乱流は磁力線方向の運動の時間スケールより早く，サイクロトロン運動の周期より遅い．また，乱流の空間スケールは$\rho_\mathrm{L} \sim k_\perp^{-1}$である．そして，本モデルの非線形性が分極ドリフト$\mathbf{v}_\mathrm{p}$の発散によって維持されていることを強調したい．

長谷川‑三間方程式(6)の一つの特徴は，長波長極限$\mathbf{k}_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2 \ll 1$において，密度勾配が存在するときドリフト波と呼ばれる線形波$\varphi_{\mathbf{k}_\perp}\exp\{i(\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x} - \omega_\mathrm{d} t)\} + c.c.$を励起することである．事実，非線形項は$[\varphi, \Delta_\perp \varphi] \sim \mathbf{k}_\perp^4 \varphi_{\mathbf{k}_\perp}^2$であることから無視できて，長波長極限では方程式(6)において分散関係

$$\omega_\mathrm{d} = \frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_\mathrm{d}}{1 + \mathbf{k}_\perp^2} \sim \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_\mathrm{d}, \quad \mathbf{v}_\mathrm{d} = \frac{k_\mathrm{B} T_\mathrm{e}}{eB_0} \nabla \log A \times \nabla z, \tag{8}$$

が得られる．ここではω_dをドリフト周波数，$\mathbf{v}_\mathrm{d}$をドリフト速度と呼び，$\log A$はxとyの線形関数と見なしている．

長谷川‑三間方程式(6)は二次元平面における静電ポテンシャルの時間変化を表すため，プラズマ輸送や磁場の幾何学による効果を記述することはできない．そこで，長谷川‑三間方程式を一般化するモデルが複数提案されている．例えば，長谷川‑若谷方程式[2]は静電ポテンシャルと密度両方の時間変化を与える方程式系になっており，静電ポテンシャル乱流に加えて，プラズマ輸送が表現できる．また，任意のトポロジーを持つ磁場$\mathbf{B}(\mathrm{x})$に対して，方程式(6)を拡張する次の方程式が提案されている[3]：

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\lambda A\varphi - \sigma\nabla \cdot \left[\frac{A\mathbf{B} \times (\nabla\varphi \times \mathbf{B})}{\mathbf{B}^4}\right]\right\} = \nabla \cdot \left[A\left(\sigma\frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{v}_\mathrm{E}}{\mathbf{B}^2} - 1\right)\mathbf{v}_\mathrm{E}\right]. \tag{9}$$

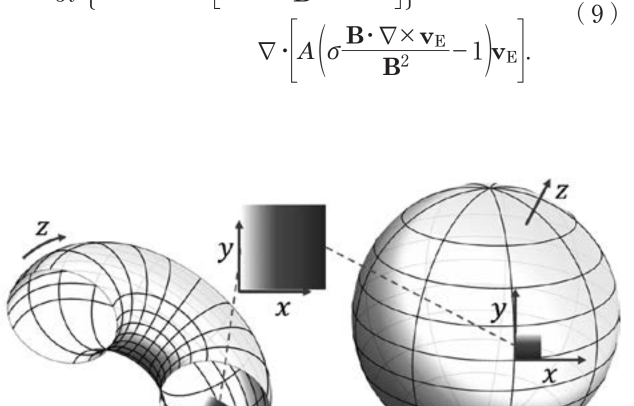

図1　トカマク型核融合炉における長谷川‑三間方程式のセッティング．(b) 地球流体力学におけるβ平面上2次元流体方程式のセッティング．

直線磁場$\mathbf{B} = B_0 \nabla z$の場合，方程式(9)は長谷川‑三間方程式になることがわかる．また，長谷川‑三間方程式と同様に質量及びエネルギーが保存する（長谷川‑三間方程式の保存量については2.4で解説する）．さらに，磁場$\mathbf{B}$と電子密度Aが$\nabla \times (A\mathbf{B}/\mathbf{B}^2) = \mathbf{0}$を満たす場合，一般化エンストロフィーも保存する．

2.3　β平面上2次元流体方程式

本章では地球流体力学におけるβ平面上2次元流体方程式の導出を行い，地球流体力学と長谷川‑三間方程式の関係について説明する．

地球流体力学では天体の表面における流体の流れを考える．天体の質量と回転により，流体運動方程式に重力とコリオリ力が含まれる，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -g\nabla H + f\mathbf{v} \times \nabla z. \tag{10}$$

ここで，(x, y)は球面の接平面（β平面）座標であり，xを東西方向の距離，yを南北方向の距離，zを半径方向の距離（**図1**(b)）に選ぶ．また，$\mathbf{v} = v_x(\mathbf{x}, t)\nabla x + v_y(\mathbf{x}, t)\nabla y + v_z(\mathbf{x}, t)\nabla z$は流体の速度場，gは天体重力による加速度，$H(x, y, t) = H_0 + h(x, y, t)$は球面上の流体の厚み，定数$H_0 > 0$は厚みの平均値，$h$は平均値からのずれ，$f(\mathbf{x})$はコリオリパラメータである．今後は球面の曲率を無視し，$\mathbf{x}$を直交座標として扱う．方程式(10)よりz軸に垂直な速度$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v} - v_z \nabla z$を次のように表すことができる：

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_\mathrm{h} + \mathbf{v}_a, \quad \mathbf{v}_\mathrm{h} = \frac{g}{f}\nabla z \times \nabla h,$$
$$\mathbf{v}_a = \frac{1}{f}\nabla z \times \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}. \tag{11}$$

次に，長谷川‑三間方程式と同様に，微小パラメータ（ロスビー数）$\epsilon > 0$を導入し，下記オーダリングを仮定する：

$$\frac{k_\perp |\mathbf{v}_\perp|}{f_0} \sim \frac{h}{H_0} \sim \frac{\partial_t}{f_0} \sim \frac{|\nabla f|}{k_\perp f_0} \sim \frac{\partial_z}{k_\perp} \sim \frac{v_z}{|\mathbf{v}_\perp|} \sim \epsilon. \tag{12}$$

ここでは，定数f_0はコリオリパラメータの平均値であり，$f - f_0 \sim \epsilon f_0$であることに注意したい．方程式(12)は長谷川‑三間方程式のオーダリング(5)に対応しており，同様に解釈できる．また，$k_\perp^{-1} \sim \rho_\mathrm{R} = \sqrt{gH_0/f}$は乱流の代表的な波長（ロスビー半径）を表している．一方で，球面上の面積Sにおける定数密度ρ_0の流体の質量$M_S = \rho_0 \int_S H \mathrm{d}S$の保存から連続の式

$$H_\mathrm{t} + \nabla \cdot (H\mathbf{v}_\perp) = 0, \tag{13}$$

が得られる．方程式(13)を代入し，オーダリング(11)の下で二次まで展開するとβ平面上2次元流体方程式[4-6]が得られる：

$$(1 - \Delta_\perp)h_t = [h, \Delta_\perp h + \log f]. \tag{14}$$

ただし，ここでは規格化$t \to ft$，$(x, y) \to (\rho_\mathrm{R}^{-1}x, \rho_\mathrm{R}^{-1}y)$，$h \to h/H_0$を利用した．特に方程式(14)においてコリオリ

パラメータの線形近似（β平面近似）$f = f_0 + \beta y$を仮定した場合をβ平面モデルと呼ぶ．長谷川–三間方程式と同様，長波長極限$\mathbf{k}_\perp^2 \ll 1$ではロスビー波と呼ばれる線形波が得られる：

$$\omega_\mathrm{R} = \frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_\mathrm{R}}{1+\mathbf{k}_\perp^2} \sim \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_\mathrm{R}, \quad \mathbf{v}_\mathrm{R} = \frac{gH_0}{f_0} \nabla z \times \nabla \log f. \tag{15}$$

上記方程式ではω_Rをロスビー周波数，$\mathbf{v}_\mathrm{R}$をロスビー速度と呼び，$\log f$をxとyの線形関数としている．

規格化した長谷川–三間方程式方程式（7）を比較すると，同じ数学的構造を持っていることがわかる．**表1**では長谷川–三間方程式とβ平面上2次元流体方程式のパラメータの対応関係を示している．

表1　長谷川–三間方程式とβ平面上2次元流体方程式のパラメータの対応関係．

長谷川–三間方程式	β平面上2次元流体方程式
静電ポテンシャル φ	流体の厚み h
サイクロトロン周波数 ω_c	コリオリパラメータ f
イオン音速 $c_\mathrm{s} = \sqrt{\dfrac{Nk_\mathrm{B}T_\mathrm{e}}{m}}$	重力波速度 $c_\mathrm{g} = \sqrt{gH_0}$
ラーモア半径 $\rho_\mathrm{L} = \dfrac{c_s}{\omega_c}$	ロスビー半径 $\rho_\mathrm{R} = \dfrac{c_\mathrm{g}}{f}$
ドリフト速度 $\mathbf{v}_\mathrm{d}$	ロスビー速度 $\mathbf{v}_\mathrm{R}$
ドリフト周波数 ω_d	ロスビー周波数 ω_R

2.4　ハミルトン構造と保存量

本章では長谷川–三間方程式（7）のハミルトン構造及び保存量について紹介する[7]．ハミルトン構造は位相空間の存在を意味し，物理法則における力と運動の関係の根幹にある数学的構造である．ハミルトン力学においては，物理量φの時間発展をハミルトニアン$\mathcal{H}$とポアソン括弧$\{\cdot,\cdot\}$によって（ポアソン括弧の定義については[8]を参照されたい）次のように与える：

$$\varphi_\mathrm{t} = \{\varphi, \mathcal{H}\}. \tag{16}$$

ハミルトニアン$\mathcal{H}$は力学系のエネルギーを表すため，長谷川–三間方程式（7）のエネルギーを見分けることができれば，方程式(16)との対応関係からポアソン括弧の公理を満たす括弧積が逆算できる．また，長谷川–三間方程式のエネルギーはもととなるイオン運動方程式の保存量をオーダリング（5）で展開したものと一致する必要がある．まず，流体描像におけるイオンプラズマの質量とエネルギーは

$$M = m\int_V n\,\mathrm{d}V, \quad E = \int_V n\left(\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2 + Ne\varphi\right)\mathrm{d}V, \tag{17}$$

である．ここでは，Vをイオンプラズマの体積とする．MとEは保存量であるため，次の物理量も保存する：

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{E}{Ne} - \frac{M}{m\lambda} = \int_V n\left(\frac{1}{2}\sigma\mathbf{v}^2 + \varphi - \frac{1}{\lambda}\right)\mathrm{d}V. \tag{18}$$

上記$\tilde{\mathcal{H}}$をオーダリング（5）を用いて展開すると

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\int_V A\left(\sigma\mathbf{v}_E{}^2 + \lambda\varphi^2 - \frac{2}{\lambda}\right)\mathrm{d}V, \tag{19}$$

が得られる．関数Aは時間に依存しないため，$\tilde{\mathcal{H}}$を次のように簡略化できる：

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2}\int_V A_0\left(\lambda\varphi^2 + \frac{\sigma}{B_0^2}|\nabla_\perp\varphi|^2\right)\mathrm{d}V. \tag{20}$$

ここでは$\nabla_\perp = (\partial_x, \partial_y)$，定数$A_0$を$A$の平均値とする．長谷川–三間方程式の規格化及び運動が(x, y)平面の領域$S = V \cap \mathbb{R}^2$に束縛されていることを利用すると

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\int_S (\varphi^2 + |\nabla_\perp\varphi|^2)\,\mathrm{d}S, \tag{21}$$

が保存量となり，上記汎関数$\mathcal{H}$がポアソン括弧

$$\{F, G\} = -\int_S (\varphi - \Delta_\perp\varphi + \log A)\left[(1-\Delta_\perp)^{-1}\frac{\delta F}{\delta\varphi}, (1-\Delta_\perp)^{-1}\frac{\delta G}{\delta\varphi}\right]\mathrm{d}S, \tag{22}$$

に対して長谷川–三間方程式（7）のハミルトニアンであることが証明される．ただし，ここではφの境界条件及び逆作用素$(1-\Delta_\perp)^{-1}$の議論を省略した．

長谷川–三間方程式の他の保存量Cはポアソン括弧のカシミール不変量として得られる．カシミール不変量とはポアソン括弧のカーネルに属する汎関数であり，下記方程式の解である：

$$C_\mathrm{t} = \{C, \mathcal{H}\} = 0 \quad \forall\mathcal{H}. \tag{23}$$

長谷川–三間方程式のカシミール不変量は

$$\mathrm{C} = \int_S f(q)\,\mathrm{d}S, \quad q = (1-\Delta_\perp)\varphi + \log A, \tag{24}$$

である．ただし，ここでfは$q = (1-\Delta_\perp)\varphi + \log A$の任意関数である．$f = q^2$の場合次の保存量が得られる：

$$\begin{aligned} C_{q^2} &= \frac{1}{2}\int_S \{[\varphi^2 + 2|\nabla\varphi|^2 + (\Delta_\perp\varphi)^2]\}\mathrm{d}S \\ &\quad + \int_S \log A(1-\Delta_\perp)\varphi\,\mathrm{d}S \\ &= \mathcal{H} + \frac{1}{2}\int_S [|\nabla\varphi|^2 + (\Delta_\perp\varphi)^2]\,\mathrm{d}S \\ &\quad + \int_S \log A(1-\Delta_\perp)\varphi\,\mathrm{d}S. \end{aligned} \tag{25}$$

$\mathbf{v}_\mathrm{E}^2 \propto |\nabla_\perp\varphi|^2$，$\nabla \times \mathbf{v}_\mathrm{E} \cdot \nabla z \propto \Delta_\perp\varphi$であることから，最後の関係式の二番目の積分

$$W = \frac{1}{2}\int_S [|\nabla\varphi|^2 + (\Delta_\perp\varphi)^2]\,\mathrm{d}S, \tag{26}$$

を一般化エンストロフィーと呼ぶ．Wが保存するためには三番目の積分も保存する必要がある．運動方程式より

三番目の積分は$\log A$がx, y, x^2+y^2の線形関数で表せるとき保存することがわかる．

2.5 帯状流とカスケード

核融合プラズマや天体表面における流体の流れは自発的に秩序を持った構造を生み出し，長い時間スケールに渡って維持される．帯状流（zonal flow）やジェット[9]はこれらの構造を代表する自己組織化現象であり，そのメカニズムはしばしば，長谷川–三間方程式とβ平面上の2次元流体方程式を用いて議論される．本章ではこの自己組織化の生成機構について触れる．

核融合プラズマでは閉じ込め性能に関わる半径方向の密度勾配が重要であり，密度を近似的にxのみの関数$\log A \sim \log A_0 + Kx$, $K \in \mathbb{R}$, と考えることができる．同様に，天体表面の流れでは，コリオリパラメータは南北方向yに変化するため，十分に小さいyに対して$\log f \sim \log(f_0+\beta y) \sim \log f_0 + \beta y/f_0$と近似することができる．この近似のもとでは，いずれの場合も流れ場はドリフト波あるいはロスビー波の集合と考えられる．またこの近似のもとで，方程式(7)と(14)の定常解は

$$[\varphi, \log A] = [h, \log f] = 0 \to K\varphi_y = \beta h_x = 0, \tag{27}$$

すなわち，核融合炉の半径方向の速度について$v_x \sim \mathbf{v}_{\mathrm{E}} \cdot \nabla x = 0$あるいは天体表面を流れる流体の南北方向の速度について$v_y \sim \mathbf{v}_{\mathrm{h}} \cdot \nabla y = 0$となり，$\varphi = \varphi(x)$及び$h = h(y)$より次の定常帯状流解が得られる．

$$\mathbf{v}_{\mathrm{E}} = \varphi_x(x)\nabla y, \quad \mathbf{v}_{\mathrm{h}} = -h_y(y)\nabla x. \tag{28}$$

しかし実際の流れ場は乱流状態であるため，このような定常解との関係は簡単ではない．これらの方程式の乱流数値計算の結果からは，φやhのエネルギーを長波長側に集中させるメカニズムが存在し，時間発展とともに流れ場は時間平均が定常帯状流に近づくことが知られている．このメカニズムは，二次元乱流におけるエネルギーの逆カスケードに関連づけて語られることが多い．以下では，エネルギー逆カスケード現象について簡単に説明する．詳細については次の論文を参照されたい[10-12]．

二次元非圧縮性ナビエ–ストークス流体の等方乱流を考える．この系では，非粘性のとき，エネルギーとエンストロフィーが共に保存量となる．$k^2 = \mathbf{k}_\perp^2$として，エネルギースペクトル$\mathcal{E}(k)$とエンストロフィースペクトル$\Omega(k)$の間には$\Omega(k) = k^2\mathcal{E}(k)$の関係があるため，エネルギーは高波数側に流れることができない（流れるとエンストロフィーが増えてしまう）．このためエンストロフィーは高波数方向に，エネルギーは低波数方向にしかそれぞれ流れることができず，特に後者をエネルギー逆カスケードとよぶ．このとき3次元乱流のエネルギーカスケードのように，低波数方向へのエネルギーのフラックスξが波数に依存しない一定値であるとして，次元解析よりエネルギースペクトル

$$\mathcal{E} = c\xi^{2/3}k^{-5/3}. \tag{29}$$

が導かれる．ここで$c>0$は無次元の定数である．この低波数へのエネルギーの流れは，長い波長（大きな構造）を持つ流れの生成に対応する．長谷川–三間方程式とβ平面上2次元流体方程式の場合でも，一般化エンストロフィーの存在によって，同様のエネルギー逆カスケード現象が生じる．しかしこれらの方程式は，二次元ナビエ–ストークス方程式とは異なり空間異方性を伴うため，逆カスケード現象は等方的でなく，最終的に特定の方向に流れる帯状流を生成すると考えられている．残念ながら，この生成機構の詳細は十分に理解されているとは言えず，相互の関連が明らかではないいくつかの考え方がある．これらの詳細については，本小特集でも議論される．

2.6 まとめ

本章ではプラズマ物理と地球流体力学をつなぐ長谷川–三間方程式とβ平面上2次元流体方程式について解説した．これらの方程式は核融合プラズマや天体表面の流れで観測される自己組織化現象をモデル化する基礎方程式であり，同様の数学的構造を示す．長谷川–三間方程式は直線磁場に対して垂直な平面における静電ポテンシャル乱流を記述し，その非線形性の要因は分極ドリフトの発散となっている．また，密度勾配が存在するとき長波長極限ではドリフト波と呼ばれる線形波が存在する．β平面上2次元流体方程式は回転する天体の表面における二次元流体の最も簡単なモデル方程式である．コリオリパラメータは南北方向に変化するため，長波長極限ではロスビー波が励起される．両方の力学系はハミルトン構造を持っており，質量，エネルギー，及び一般化エンストロフィーが保存量として存在する．また，これらの方程式を用いて帯状流の生成機構を議論することができ，二次元流体を特徴づける逆エネルギーカスケードは重要な自己組織化メカニズムとなっている．

参 考 文 献

[1] H. Hasegawa and K. Mima, Phys. Fluids **21**, 1 (1978).
[2] M. Wakatani and A. Hasegawa, Phys. Fluids **27**, 611 (1984).
[3] N. Sato and M. Yamada, J. Plasma Phys. **88**, 3 (2022).
[4] J.G. Charney, Geof. Publ. **17**, 3 (1948).
[5] G.K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics* (Cambrigde, 2nd ed. 2017).
[6] W. Horton and A. Hasegawa, CHAOS **4**, 2 (1994).
[7] A. Weinstein, Phys. Fluids **26**, 388 (1983).
[8] P.J. Morrison,Rev. Mod. Phys. **70**, 467 (1998).
[9] B. Galperin and P.L. Read, *Zonal Jets: Phenomenology, Genesis, and Physics* (Cambridge, 2019).
[10] G.K. Batchelor, Phys. Fluids **12**, 233 (1969).
[11] R.H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).
[12] A. Hasegawa Adv. Physics **34**, 1 (2004).