

小特集

2次元回転系上の乱流における大規模構造形成

Large-Scale Structure Formation in Two-Dimensional Turbulence
on a Rotating System

1. はじめに

1. Introduction

小布施 祈織

OBUSE Kiori

岡山大学学術研究院環境生命自然科学学域

(原稿受付: 2023年1月20日)

日常の流れに関連する研究は、古くから様々なものが行われてきた。しかしながら、流体運動を記述するナビエ-ストークス方程式の非線形性により、解析的手法のみに頼る研究には限界があった。近年の計算機の発達により流体力学は新たな展開を見せており、より複雑な方程式で記述される流れの研究もさかんに行われるようになった。本小特集で取り扱う回転系での流体力学も、計算機の発達や環境問題に関連して注目されるようになったものの一つである。本小特集では回転系の中でも特に2次元回転系を考える。この系は非常にシンプルであるにもかかわらず、系の回転効果により、大規模帯状流の自発的形成をはじめとする、我々の直観を超えた豊かな振る舞いを呈する。

回転系での流体力学を議論する際に多くの場合まず考えるのは、惑星大気や海洋の運動との関係であろう。そのため、回転系での流体力学では、地球流体力学としての視点をういた様々なアプローチがなされてきている。

また回転系では、その回転効果により、非一様非等方な乱流が発達することが知られている。古典的な流体力学においては一様等方な乱流の研究が盛んに行われてきたが、非一様非等方な乱流の研究は近年になってようやく進み始めたところである。このような理由から回転系での流体力学は古典的な流体力学にも多くの新しい問題を提供しており、流体力学の理論および技術を用いた研究がなされている。

言うまでもなく数学の諸分野においても、回転系での流体運動の記述方法（たとえばナビエ-ストークス方程式の粘性項の表現方法）や方程式の解の存在および振る舞いは、基本的かつ重要な問題であり、研究者の興味を集

めている。

このように、回転系での流体運動は、地球流体力学・流体力学・数学などのさまざまな視点と理論および技術を用いて研究されている。

対象を2次元回転系に絞ると、さらにもう一つ、プラズマ物理学との関わりが現れる。回転球面上での接平面の一つである β 平面 (β -plane) における流体方程式は長谷川-三間方程式と同じ数学的構造を有しており、また大規模帯状流が自発的に形成される点も一致している。長谷川-三間方程式および2次元回転系上ナビエ-ストークス方程式の解に対する理解を深めるためには、プラズマ物理学・地球流体力学・流体力学・数学の知見を合わせ、新たな理論を追求していくことが重要であると考えられる。本小特集の目的は、そのための足がかりとなり得る知見を、主に地球流体力学および流体力学の視点から紹介することである。

第2章ではまず、プラズマ物理学と地球流体力学の関係について紹介する。これら二分野では対象とする領域の幾何的形狀や座標軸のとり方などが大きく異なる。問題設定を始めとする基本事項などについては、こちらをご参照願いたい。第3章では2次元回転系上での流体力学の概論を述べる。惑星科学的な背景の解説とともに、2次元流モデルの惑星大気・海洋の研究における位置づけおよび解の振る舞いなどを説明する。最後の第4章は大規模帯構造形成に関する各論にあてる。ここでは、ロスビー波 (Rossby waves) 間の非線形相互作用、擬保存量であるゾノストロフィー (Zonostrophy), および保存量の局所フラックスなどについての研究を紹介する。

Graduate School of Environmental, Life, Natural Science and Technology, Okayama University, OKAYAMA 700-8530, Japan

author's e-mail: obuse@okayama-u.ac.jp



小特集 2次元回転系上の乱流における大規模構造形成

2. プラズマ物理と地球流体力学

2. Plasma Physics and Geophysical Fluid Dynamics

佐藤直木, 山田道夫¹⁾

SATO Naoki and YAMADA Michio¹⁾

東京大学大学院新領域創成科学研究科, ¹⁾ 京都大学数理解析研究所

(原稿受付: 2023年1月20日)

ローレンツ力とコリオリ力の類似性から, プラズマ物理と地球流体力学は深い関係にある. 本章ではこれらの研究分野をつなぐ支配方程式 (プラズマ物理の長谷川-三間方程式と地球流体力学の β 平面上2次元流体方程式) について解説する.

Keywords:

Hasegawa-Mima equation, drift wave turbulence, Rossby wave, beta plane, zonal flow

2.1 はじめに

本章ではプラズマ物理と地球流体力学をつなぐ支配方程式 (プラズマ物理の長谷川-三間方程式と地球流体力学の β 平面上2次元流体方程式) について解説する.

本章の構成は次の通りである. まず長谷川-三間方程式の導出及びドリフト波について説明する. 次に β 平面上2次元流体方程式の導出を行い, 地球流体力学と長谷川-三間方程式の関係について説明する. そして長谷川-三間方程式のハミルトン構造と保存則について紹介する. 最後に帯状流と乱流を特徴づけるカスケード現象について解説する.

2.2 長谷川-三間方程式

本章では長谷川-三間方程式[1]の導出を行う. まず, 三次元空間 $\mathbf{x} = (x, y, z)$ におけるイオンと電子によって構成される準中性プラズマを考える. プラズマは一様磁場 $\mathbf{B} = B_0 \nabla z$, $B_0 \in \mathbb{R}$, $B_0 > 0$, の中を運動するとし, 電子が局所的熱平衡状態をなしていると仮定する. このとき, イオン密度 n と電子密度 n_e は次の関係式を満たす:

$$n_e = Nn = A(\mathbf{x}) \exp\{\lambda\varphi(\mathbf{x}, t)\}, \quad \lambda = \frac{e}{k_B T_e} \quad (1)$$

ここでは $-e$ を電子の電荷, Ne をイオンの電荷, $A(\mathbf{x})$ を正の関数, $\varphi(\mathbf{x}, t)$ を静電ポテンシャル, t を時間, k_B をボルツマン定数, T_e を電子温度とする. 流体描像において, イオン密度 n は質量保存則によりイオン速度場 $\mathbf{v} = v_x(\mathbf{x}, t) \nabla x + v_y(\mathbf{x}, t) \nabla y + v_z(\mathbf{x}, t) \nabla z$ に対して連続の式 $n_t = -\nabla \cdot (n\mathbf{v})$ を満たす. すなわち,

$$\lambda\varphi_t = -\nabla \cdot \mathbf{v} - \lambda \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi - \nabla \log A \cdot \mathbf{v}. \quad (2)$$

次に温度 T を持つイオンプラズマが電子プラズマに比べて冷たい $T \ll T_e$ であることを利用し, イオン圧力 $P \sim 0$ を

仮定すると, 流体描像でのイオン運動方程式は次のように表すことができる:

$$\sigma \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} - \nabla \varphi, \quad \sigma = \frac{m}{Ne}. \quad (3)$$

ここで m はイオンの質量である. 方程式(3)から磁場に対して垂直な速度成分 $\mathbf{v}_\perp$ は $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ドリフト速度 $\mathbf{v}_E$ と分極ドリフト速度 $\mathbf{v}_p$ によって定まることがわかる:

$$\mathbf{v}_\perp = \mathbf{v}_E + \mathbf{v}_p, \quad \mathbf{v}_E = \frac{\mathbf{B} \times \nabla \varphi}{B^2}, \quad \mathbf{v}_p = \sigma \frac{\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}}{B^2}. \quad (4)$$

次に, 微小パラメータ $\epsilon > 0$ を導入し, 下記オーダリングを仮定する:

$$\frac{k_\perp |\mathbf{v}_\perp|}{\omega_c} \sim \lambda\varphi \sim \frac{\partial_t}{\omega_c} \sim \frac{|\nabla A|}{k_\perp A} \sim \frac{\partial_z}{k_\perp} \sim \frac{v_z}{|\mathbf{v}_\perp|} \sim \epsilon. \quad (5)$$

ここで $k_\perp$ は磁場に対して垂直な平面において静電ポテンシャル乱流を特徴づける波数, $\omega_c = NeB_0/m$ はサイクロトロン周波数である. 方程式(5)は速度 $k_\perp \omega_c^{-1}$ と比べて $\mathbf{v}_\perp$ が小さいこと, ポテンシャルエネルギー $-e\varphi$ が電子の運動エネルギー $k_B T_e$ より小さいこと, 時間変化 ∂_t がサイクロトロン運動の周期 $2\pi/\omega_c$ よりゆっくり進むこと, 密度の変化を特徴づける空間スケール $A/|\nabla A|$ が空間スケール $k_\perp^{-1}$ より長いこと, z 方向の変化 ∂_z が空間スケール $k_\perp^{-1}$ より長いスケールで発生すること, z 方向の速度が垂直速度 $\mathbf{v}_\perp$ より小さいことを意味する. オーダリング(5)を二次まで展開すると長谷川-三間方程式が得られる:

$$\begin{aligned} \lambda\varphi_t &= -\nabla \cdot \mathbf{v}_p - \nabla \log A \cdot \mathbf{v}_E \\ &= \frac{\sigma}{B_0^2} \Delta_\perp \varphi_t + \left[\varphi, \frac{\sigma}{B_0^2} \Delta_\perp \varphi - \frac{\log A}{B_0} \right], \end{aligned} \quad (6)$$

corresponding author's e-mail: sato_naoki@edu.k.u-tokyo.ac.jp

ここでは $\Delta_{\perp} = \partial_x^2 + \partial_y^2$, $[f, g] = f_x g_y - f_y g_x$ とする. イオン音速 $c_s = \sqrt{Nk_B T_e / m}$ と空間スケール $\rho_L = c_s \omega_c^{-1}$ を導入し, 規格化 $t \rightarrow \omega_c t$, $(x, y) \rightarrow (\rho_L^{-1} x, \rho_L^{-1} y)$, $\varphi \rightarrow \lambda \varphi$ を利用すると, 長谷川-三間方程式(6)は次のように整理できる:

$$(1 - \Delta_{\perp}) \varphi_t = [\varphi, \Delta_{\perp} \varphi - \log A], \quad (7)$$

トカマク型核融合炉では (x, y) を円柱座標の半径と高さ, 及び z をトロイダル角方向の座標としてとらえる. この場合, 長谷川-三間方程式(6)は断面 $z = z_0$ における静電ポテンシャル乱流の時間発展を記述する (図1(a)参照). この乱流は磁力線方向の運動の時間スケールより早く, サイクロトロン運動の周期より遅い. また, 乱流の空間スケールは $\rho_L \sim k_{\perp}^{-1}$ である. そして, 本モデルの非線形性が分極ドリフト $\mathbf{v}_p$ の発散によって維持されていることを強調したい.

長谷川-三間方程式(6)の一つの特徴は, 長波長極限 $k_{\perp}^2 = k_x^2 + k_y^2 \ll 1$ において, 密度勾配が存在するときドリフト波と呼ばれる線形波 $\varphi_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{x} - \omega_d t)] + c.c.$ を励起することである. 事実, 非線形項は $[\varphi, \Delta_{\perp} \varphi] \sim k_{\perp}^4 \varphi_{\mathbf{k}}^2$ であることから無視できて, 長波長極限では方程式(6)において分散関係

$$\omega_d = \frac{\mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_d}{1 + k_{\perp}^2} \sim \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_d, \quad \mathbf{v}_d = \frac{k_B T_e}{e B_0} \nabla \log A \times \nabla z, \quad (8)$$

が得られる. ここでは ω_d をドリフト周波数, $\mathbf{v}_d$ をドリフト速度と呼び, $\log A$ は x と y の線形関数と見なしている.

長谷川-三間方程式(6)は二次元平面における静電ポテンシャルの時間変化を表すため, プラズマ輸送や磁場の幾何学による効果を記述することはできない. そこで, 長谷川-三間方程式を一般化するモデルが複数提案されている. 例えば, 長谷川-若谷方程式[2]は静電ポテンシャルと密度両方の時間変化を与える方程式系になっており, 静電ポテンシャル乱流に加えて, プラズマ輸送が表現できる. また, 任意のトポロジーを持つ磁場 $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ に対して, 方程式(6)を拡張する次の方程式が提案されている[3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[\lambda A \varphi - \sigma \nabla \cdot \left[\frac{\mathbf{AB} \times (\nabla \varphi \times \mathbf{B})}{B^4} \right] \right] = \nabla \cdot \left[A \left(\sigma \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{v}_E}{B^2} - 1 \right) \mathbf{v}_E \right]. \quad (9)$$

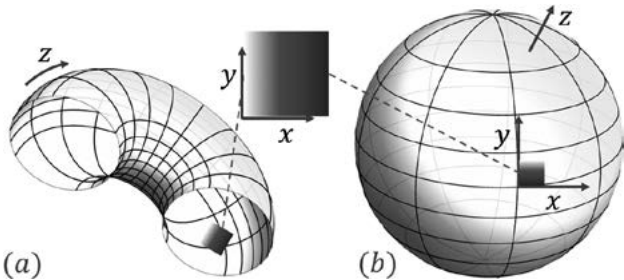


図1 トカマク型核融合炉における長谷川-三間方程式のセッティング. (b) 地球流体力学における β 平面上2次元流体方程式のセッティング.

直線磁場 $\mathbf{B} = B_0 \nabla z$ の場合, 方程式(9)は長谷川-三間方程式になることがわかる. また, 長谷川-三間方程式と同様に質量及びエネルギーが保存する (長谷川-三間方程式の保存量については2.4で解説する). さらに, 磁場 $\mathbf{B}$ と電子密度 A が $\nabla \times (\mathbf{AB}/B^2) = \mathbf{0}$ を満たす場合, 一般化エンストロフィーも保存する.

2.3 β 平面上2次元流体方程式

本章では地球流体力学における β 平面上2次元流体方程式の導出を行い, 地球流体力学と長谷川-三間方程式の関係について説明する.

地球流体力学では天体の表面における流体の流れを考える. 天体の質量と回転により, 流体運動方程式に重力とコリオリ力が含まれる,

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -g \nabla H + f \mathbf{v} \times \nabla z. \quad (10)$$

ここで, (x, y) は球面の接平面 (β 平面) 座標であり, x を東西方向の距離, y を南北方向の距離, z を半径方向の距離 (図1(b)) に選ぶ. また, $\mathbf{v} = v_x(\mathbf{x}, t) \nabla x + v_y(\mathbf{x}, t) \nabla y + v_z(\mathbf{x}, t) \nabla z$ は流体の速度場, g は天体重力による加速度, $H(x, y, t) = H_0 + h(x, y, t)$ は球面上の流体の厚み, 定数 $H_0 > 0$ は厚みの平均値, h は平均値からのずれ, $f(\mathbf{x})$ はコリオリパラメータである. 今後は球面の曲率を無視し, $\mathbf{x}$ を直交座標として扱う. 方程式(10)より z 軸に垂直な速度 $\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v} - v_z \nabla z$ を次のように表すことができる:

$$\mathbf{v}_{\perp} = \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_a, \quad \mathbf{v}_h = \frac{g}{f} \nabla z \times \nabla h, \quad \mathbf{v}_a = \frac{1}{f} \nabla z \times \frac{d\mathbf{v}}{dt}. \quad (11)$$

次に, 長谷川-三間方程式と同様に, 微小パラメータ (ロスビー数) $\epsilon > 0$ を導入し, 下記オーダリングを仮定する:

$$\frac{k_{\perp} |\mathbf{v}_{\perp}|}{f_0} \sim \frac{h}{H_0} \sim \frac{\partial_t}{f_0} \sim \frac{|\nabla f|}{k_{\perp} f_0} \sim \frac{\partial_z}{k_{\perp}} \sim \frac{v_z}{|\mathbf{v}_{\perp}|} \sim \epsilon. \quad (12)$$

ここでは, 定数 f_0 はコリオリパラメータの平均値であり, $f - f_0 \sim \epsilon f_0$ であることに注意したい. 方程式(12)は長谷川-三間方程式のオーダリング(5)に対応しており, 同様に解釈できる. また, $k_{\perp}^{-1} \sim \rho_R = \sqrt{g H_0 / f}$ は乱流の代表的な波長 (ロスビー半径) を表している. 一方で, 球面上の面積 S における定数密度 ρ_0 の流体の質量 $M_S = \rho_0 \int_S H dS$ の保存から連続の式

$$H_t + \nabla \cdot (H \mathbf{v}_{\perp}) = 0, \quad (13)$$

が得られる. 方程式(13)を代入し, オーダリング(11)の下で二次まで展開すると β 平面上2次元流体方程式[4-6]が得られる:

$$(1 - \Delta_{\perp}) h_t = [h, \Delta_{\perp} h + \log f]. \quad (14)$$

ただし, ここでは規格化 $t \rightarrow ft$, $(x, y) \rightarrow (\rho_R^{-1} x, \rho_R^{-1} y)$, $h \rightarrow h/H_0$ を利用した. 特に方程式(14)においてコリオリ

パラメータの線形近似 (β 平面近似) $f = f_0 + \beta y$ を仮定した場合を β 平面モデルと呼ぶ. 長谷川-三間方程式と同様, 長波長極限 $\mathbf{k}_\perp^2 \ll 1$ ではロスビー波と呼ばれる線形波が得られる:

$$\omega_R = \frac{\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_R}{1 + \mathbf{k}_\perp^2} \sim \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_R, \quad \mathbf{v}_R = \frac{gH_0}{f_0} \nabla z \times \nabla \log f. \quad (15)$$

上記方程式では ω_R をロスビー周波数, $\mathbf{v}_R$ をロスビー速度と呼び, $\log f$ を x と y の線形関数としている.

規格化した長谷川-三間方程式方程式 (7) を比較すると, 同じ数学的構造を持っていることがわかる. 表 1 では長谷川-三間方程式と β 平面上 2 次元流体方程式のパラメータの対応関係を示している.

表 1 長谷川-三間方程式と β 平面上 2 次元流体方程式のパラメータの対応関係.

長谷川-三間方程式	β 平面上 2 次元流体方程式
静電ポテンシャル φ	流体の厚み h
サイクロトロン周波数 ω_c	コリオリパラメータ f
イオン音速 $c_s = \sqrt{\frac{Nk_B T_e}{m}}$	重力波速度 $c_g = \sqrt{gH_0}$
ラーモア半径 $\rho_L = \frac{c_s}{\omega_c}$	ロスビー半径 $\rho_R = \frac{c_g}{f}$
ドリフト速度 $\mathbf{v}_d$	ロスビー速度 $\mathbf{v}_R$
ドリフト周波数 ω_d	ロスビー周波数 ω_R

2.4 ハミルトン構造と保存量

本章では長谷川-三間方程式 (7) のハミルトン構造及び保存量について紹介する [7]. ハミルトン構造は位相空間の存在を意味し, 物理法則における力と運動の関係の根幹にある数学的構造である. ハミルトン力学においては, 物理量 φ の時間発展をハミルトニアン $\mathcal{H}$ とポアソン括弧 $\{\cdot, \cdot\}$ によって (ポアソン括弧の定義については [8] を参照されたい) 次のように与える:

$$\varphi_t = \{\varphi, \mathcal{H}\}. \quad (16)$$

ハミルトニアン $\mathcal{H}$ は力学系のエネルギーを表すため, 長谷川-三間方程式 (7) のエネルギーを見分けることができれば, 方程式 (16) との対応関係からポアソン括弧の公理を満たす括弧積が逆算できる. また, 長谷川-三間方程式のエネルギーはもととなるイオン運動方程式の保存量をオーダリング (5) で展開したもの一致する必要がある. まず, 流体描像におけるイオンプラズマの質量とエネルギーは

$$M = m \int_V n dV, \quad E = \int_V n \left(\frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + Ne\varphi \right) dV, \quad (17)$$

である. ここでは, V をイオンプラズマの体積とする. M と E は保存量であるため, 次の物理量も保存する:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{E}{Ne} - \frac{M}{m\lambda} = \int_V n \left(\frac{1}{2} \sigma \mathbf{v}^2 + \varphi - \frac{1}{\lambda} \right) dV. \quad (18)$$

上記 $\tilde{\mathcal{H}}$ をオーダリング (5) を用いて展開すると

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int_V A \left(\sigma \mathbf{v}_E^2 + \lambda \varphi^2 - \frac{2}{\lambda} \right) dV, \quad (19)$$

が得られる. 関数 A は時間に依存しないため, $\tilde{\mathcal{H}}$ を次のように簡略化できる:

$$\tilde{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int_V A_0 \left(\lambda \varphi^2 + \frac{\sigma}{B_0^2} |\nabla_\perp \varphi|^2 \right) dV. \quad (20)$$

ここでは $\nabla_\perp = (\partial_x, \partial_y)$, 定数 A_0 を A の平均値とする. 長谷川-三間方程式の規格化及び運動が (x, y) 平面の領域 $S = V \cap \mathbb{R}^2$ に束縛されていることを利用すると

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \int_S (\varphi^2 + |\nabla_\perp \varphi|^2) dS, \quad (21)$$

が保存量となり, 上記汎関数 $\mathcal{H}$ がポアソン括弧

$$\{F, G\} = - \int_S (\varphi - \Delta_\perp \varphi + \log A) \left[(1 - \Delta_\perp)^{-1} \frac{\delta F}{\delta \varphi}, (1 - \Delta_\perp)^{-1} \frac{\delta G}{\delta \varphi} \right] dS, \quad (22)$$

に対して長谷川-三間方程式 (7) のハミルトニアンであることが証明される. ただし, ここでは φ の境界条件及び逆作用素 $(1 - \Delta_\perp)^{-1}$ の議論を省略した.

長谷川-三間方程式の他の保存量 C はポアソン括弧のカシミール不変量として得られる. カシミール不変量とはポアソン括弧のカーネルに属する汎関数であり, 下記方程式の解である:

$$C_t = \{C, \mathcal{H}\} = 0 \quad \forall \mathcal{H}. \quad (23)$$

長谷川-三間方程式のカシミール不変量は

$$C = \int_S f(q) dS, \quad q = (1 - \Delta_\perp) \varphi + \log A, \quad (24)$$

である. ただし, ここで f は $q = (1 - \Delta_\perp) \varphi + \log A$ の任意関数である. $f = q^2$ の場合次の保存量が得られる:

$$\begin{aligned} C_{q^2} &= \frac{1}{2} \int_S \{ [\varphi^2 + 2|\nabla \varphi|^2 + (\Delta_\perp \varphi)^2] \} dS \\ &\quad + \int_S \log A (1 - \Delta_\perp) \varphi dS \\ &= \mathcal{H} + \frac{1}{2} \int_S [|\nabla \varphi|^2 + (\Delta_\perp \varphi)^2] dS \\ &\quad + \int_S \log A (1 - \Delta_\perp) \varphi dS. \end{aligned} \quad (25)$$

$\mathbf{v}_E^2 \propto |\nabla_\perp \varphi|^2$, $\nabla \times \mathbf{v}_E \cdot \nabla z \propto \Delta_\perp \varphi$ であることから, 最後の関係式の二番目の積分

$$W = \frac{1}{2} \int_S [|\nabla \varphi|^2 + (\Delta_\perp \varphi)^2] dS, \quad (26)$$

を一般化エンストロフィーと呼ぶ. W が保存するためには三番目の積分も保存する必要がある. 運動方程式より

三番目の積分は $\log A$ が x, y, x^2+y^2 の線形関数で表せる
とき保存することがわかる。

2.5 帯状流とカスケード

核融合プラズマや天体表面における流体の流れは自発的に秩序を持った構造を生み出し、長い時間スケールに渡って維持される。帯状流 (zonal flow) やジェット [9] はこれらの構造を代表する自己組織化現象であり、そのメカニズムはしばしば、長谷川-三間方程式と β 平面上の 2 次元流体方程式を用いて議論される。本章ではこの自己組織化の生成機構について触れる。

核融合プラズマでは閉じ込め性能に関わる半径方向の密度勾配が重要であり、密度を近似的に x のみの関数 $\log A \sim \log A_0 + Kx$, $K \in \mathbb{R}$, と考えることができる。同様に、天体表面の流れでは、コリオリパラメータは南北方向 y に変化するため、十分に小さい y に対して $\log f \sim \log(f_0 + \beta y) \sim \log f_0 + \beta y/f_0$ と近似することができる。この近似のもとでは、いずれの場合も流れ場はドリフト波あるいはロスビー波の集合と考えられる。またこの近似のもとで、方程式 (7) と (14) の定常解は

$$[\varphi, \log A] = [h, \log f] = 0 \rightarrow K\varphi_y = \beta h_x = 0, \quad (27)$$

すなわち、核融合炉の半径方向の速度について $v_x \sim \mathbf{v}_E \cdot \nabla x = 0$ あるいは天体表面を流れる流体の南北方向の速度について $v_y \sim \mathbf{v}_h \cdot \nabla y = 0$ となり、 $\varphi = \varphi(x)$ 及び $h = h(y)$ より次の定常帯状流解が得られる。

$$\mathbf{v}_E = \varphi_x(x) \nabla y, \quad \mathbf{v}_h = -h_y(y) \nabla x. \quad (28)$$

しかし実際の流れ場は乱流状態であるため、このような定常解との関係は簡単ではない。これらの方程式の乱流数値計算の結果からは、 φ や h のエネルギーを長波長側に集中させるメカニズムが存在し、時間発展とともに流れ場は時間平均が定常帯状流に近づくことが知られている。このメカニズムは、二次元乱流におけるエネルギーの逆カスケードに関連づけて語られることが多い。以下では、エネルギー逆カスケード現象について簡単に説明する。詳細については次の論文を参照されたい [10-12]。

二次元非圧縮性ナビエ-ストークス流体の等方乱流を考える。この系では、非粘性のとき、エネルギーとエンストロフィーが共に保存量となる。 $k^2 = \mathbf{k}_\perp^2$ として、エネルギースペクトル $\mathcal{E}(k)$ とエンストロフィースペクトル $\Omega(k)$ の間には $\Omega(k) = k^2 \mathcal{E}(k)$ の関係があるため、エネルギーは高波数側に流ることができない (流れるとエンストロフィーが増えてしまう)。このためエンストロフィーは高波数方向に、エネルギーは低波数方向にしかそれぞれ流ることができず、特に後者をエネルギー逆カスケードとよぶ。このとき 3 次元乱流のエネルギーカスケードのように、低波数方向へのエネルギーのフラックス ξ が波数に依存しない一定値であるとして、次元解析よりエネルギースペクトル

$$\mathcal{E} = c \xi^{2/3} k^{-5/3}. \quad (29)$$

が導かれる。ここで $c > 0$ は無次元の定数である。この低波数へのエネルギーの流れは、長い波長 (大きな構造) を持つ流れの生成に対応する。長谷川-三間方程式と β 平面上 2 次元流体方程式の場合でも、一般化エンストロフィーの存在によって、同様のエネルギー逆カスケード現象が生じる。しかしこれらの方程式は、二次元ナビエ-ストークス方程式とは異なり空間異方性を伴うため、逆カスケード現象は等方的でなく、最終的に特定の方向に流れる帯状流を生成すると考えられている。残念ながら、この生成機構の詳細は十分に理解されているとは言えず、相互の関連が明らかではないいくつかの考え方がある。これらの詳細については、本小特集でも議論される。

2.6 まとめ

本章ではプラズマ物理と地球流体力学をつなぐ長谷川-三間方程式と β 平面上 2 次元流体方程式について解説した。これらの方程式は核融合プラズマや天体表面の流れで観測される自己組織化現象をモデル化する基礎方程式であり、同様の数学的構造を示す。長谷川-三間方程式は直線磁場に対して垂直な平面における静電ポテンシャル乱流を記述し、その非線形性の要因は分極ドリフトの発散となっている。また、密度勾配が存在するとき長波長極限ではドリフト波と呼ばれる線形波が存在する。 β 平面上 2 次元流体方程式は回転する天体の表面における二次元流体の最も簡単なモデル方程式である。コリオリパラメータは南北方向に変化するため、長波長極限ではロスビー波が励起される。両方の力学系はハミルトン構造を持っており、質量、エネルギー、及び一般化エンストロフィーが保存量として存在する。また、これらの方程式を用いて帯状流の生成機構を議論することができ、二次元流体を特徴づける逆エネルギーカスケードは重要な自己組織化メカニズムとなっている。

参考文献

- [1] H. Hasegawa and K. Mima, Phys. Fluids **21**, 1 (1978).
- [2] M. Wakatani and A. Hasegawa, Phys. Fluids **27**, 611 (1984).
- [3] N. Sato and M. Yamada, J. Plasma Phys. **88**, 3 (2022).
- [4] J.G. Charney, Geof. Publ. **17**, 3 (1948).
- [5] G.K. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics* (Cambridge, 2nd ed. 2017).
- [6] W. Horton and A. Hasegawa, CHAOS **4**, 2 (1994).
- [7] A. Weinstein, Phys. Fluids **26**, 388 (1983).
- [8] P.J. Morrison, Rev. Mod. Phys. **70**, 467 (1998).
- [9] B. Galperin and P.L. Read, *Zonal Jets: Phenomenology, Genesis, and Physics* (Cambridge, 2019).
- [10] G.K. Batchelor, Phys. Fluids **12**, 233 (1969).
- [11] R.H. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 1417 (1967).
- [12] A. Hasegawa Adv. Physics **34**, 1 (2004).

小特集 2次元回転系上の乱流における大規模構造形成

3. 回転系における大規模帯状構造形成

3. Large-Scale Band Structure Formation in Rotating Systems

竹 広 真 一

TAKEHIRO Shin-ichi

京都大学数理解析研究所

(原稿受付：2023年1月16日)

回転球面およびその接平面モデルである β 平面において強制された小規模渦が、回転の効果が卓越し始めるラインズスケールにまで等方的に逆カスケードした後、経度方向に優勢な逆カスケードによって帯状構造が出現する。この非等方的な逆カスケードは、時間がかかるものの空間最小波数に達するまで阻害されず、最終的には空間最大スケールの幅の帯状構造が出現すると考えられる。薄い回転球殻熱対流により引き起こされる中高緯度のジェット流の融合も同様のメカニズムで生じると考えられる。

Keywords:

β effect, Rhines scale, anisotropic inverse cascade, merging zonal jets

3.1 はじめに

地球をはじめとして、さまざまな惑星の天体規模の風速分布には東西方向の卓越したジェット風が観測される。このような惑星大気の流れ分布の基本的な理解をめざして回転系での帯状構造形成問題が古くから考察されてきている。特に巨大ガス惑星である木星と土星に見られる表面の帯状構造は顕著である。このパターンに伴って東西ジェット風の向きが交互に入れ替わっていることが探査機や巨大望遠鏡に撮影された画像を用いた雲追跡解析によって知られるようになった。図1はそのようにして得られた木星と土星の表面帯状風の緯度分布である。より詳細に観察すると、この分布には赤道周辺の強く幅広い順行ジェットと、中高緯度の向きが交互に入れ替わる幅狭なジェットにより特徴づけられる。このような帯状

風の幅や強度がどのような要素によって定まっているのか、といった、その成因と維持機構が地球流体力学や惑星大気科学の研究者の興味を引いてきた¹。

ガス惑星表層大気運動のエネルギー源は、太陽放射に加えて、同程度の強さの深部からの熱流が存在している。太陽放射により駆動される大気運動の研究は地球型惑星大気研究の拡張として、自転速度や惑星半径などの惑星パラメータの違いにより説明を試みるものであり、地球の3次元大気大循環モデルを変更した数値実験が行われてきているが（例えば[3]）、本解説ではこれ以上この系統の研究には立ち入らない。一方、深部からの熱流により駆動される大気運動のモデルには、表面の大気運動が、表面付近の薄い大気層に限定されたものであると考える「浅いモデル」と、より深部の大気運動に起因すると考える「深いモデル」の2種類が提案されてきている。

「浅いモデル」の最も基本的な枠組みは、回転球面上の2次元強制乱流モデルである。深部からの熱流により駆動されるであろう小規模熱対流を通じて球面上に小規模渦が強制されると考えるものである。「深いモデル」は、回転球殻内の流体が下面からの熱流あるいは内部熱源により駆動されて、表面流体運動を誘導すると考えるモデルである。

どちらのモデルでも、帯状構造の生成とその特徴を議論する上で重要な概念の一つは渦位保存 (Conservation of Potential Vorticity) とそれに伴う β 効果およびライン

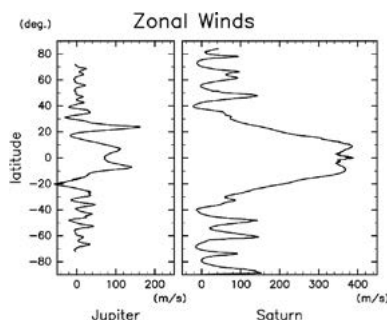


図1 木星と土星の表面帯状風分布。木星のデータ[1]および土星のデータ[2]を用いて描画。

Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, KYOTO 606-8267, Japan

author's e-mail: takepiro@gfd-dennou.org

- 赤道周辺の順行ジェットは「赤道超回転 (equatorial superrotation)」と呼ばれ、何らかの順行向きの加速の存在が示唆される (赤道加速問題, equatorial acceleration)。赤道表面は自転軸から最も離れた場所であり、単純な角運動量保存則を考えると逆行風が生成されるところであるからである。加速メカニズムもまた現在も解明されていない一つのテーマであり、未だ研究が続けられているが、本解説においてはこの問題には深く立ち入らず、帯状構造形成の問題に焦点を当てる。

ズスケールである。渦位保存は次の式で表される。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) q = 0, \quad q = \frac{f + \zeta}{H}. \quad (1)$$

q は渦位, f は惑星自転に伴う渦度, $\mathbf{u}$ は流速ベクトル, ζ は流れの渦度, H は流体層の厚さである。今, 背景渦位 $Q = f/H$ が y 方向 (典型的地球流体問題では緯度方向) に変化しているとする。

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla\right) q' + H \frac{dQ}{dy} v = 0, \quad Q(y) = \frac{f}{H}, \quad q' = \frac{\zeta}{H}. \quad (2)$$

ここで v は流れの y 方向成分である。この式は, 背景渦位の空間変化が存在すると, その方向に流体粒子が動くことで, (流れの) 渦度が引き起こされることを表している。このメカニズムは β 効果と呼ばれ, 背景渦位傾度 $\beta = HdQ/dy$ を β パラメータという。また, β 効果に起因する波動をロスビー波という。背景渦位が緯度方向に変化していると, この β 効果により東西帯状構造が生じやすくなることが期待される。渦位保存則の拘束により, 緯度方向に流体粒子が動きにくくなり, 動きやすい東西方向の流れが卓越する傾向になるからである。図2に, 例として「浅いモデル」の枠組みである回転球面上2次元流体における β 効果の模式図を示している。

以下では, 回転系でのいくつかの乱流モデルを概観し, 帯状構造の出現と消滅について見ていくことにする。

3.2 回転系2次元強制乱流による帯状構造形成

3.2.1 β 平面モデル

惑星大気の大規模帯状構造の形成の最も基本的なモデルとして考察されてきているのが β 平面モデルである。これは回転球面上でのある緯度における接平面上の2次元渦の振舞いを記述するものである。流れを支配する方程式は, 先の渦位保存則(2)において流体層の厚さ H と β パラメータを定数としたものである。流れ関数 ψ を用いた支配方程式は次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = F - D, \quad (3)$$

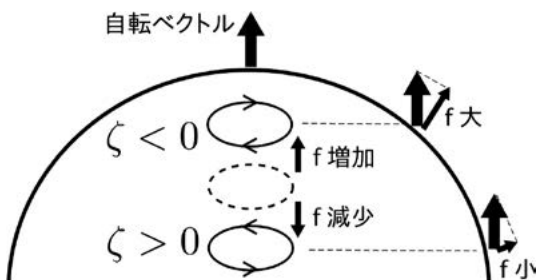


図2 回転球面上の β 効果の模式図。流体層の厚さ H が一定であり f が緯度に依存している。球面渦には自転の鉛直成分のコリオリ力しか作用しないため, 緯度方向の流体粒子の移動に伴って渦度が引き起こされる。

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4)$$

ここで, x および y が経度方向および緯度方向座標, u, v はそれぞれ流れの x, y 成分, $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ は2次元ラプラシアン, F は小スケールの強制項である。 D は散逸過程を表しており, 通常の粘性散逸では粘性係数 ν を用いて $D = -\nu \nabla^2 \nabla^2 \psi$ となる。渦度は流れ関数と $\zeta = \nabla^2 \psi$ の関係にある。この式は強制項と散逸項がない場合に, プラズマ物理に登場する長谷川-三間方程式の漸近形に相当する。

2重周期領域の β 平面モデルでの乱流の理論的な考察と数値実験の代表的な先駆的研究はRhines (1975) [4]である。彼は初期に与えた小スケールの渦が逆カスケードして大規模帯状構造を形成していく様子を見出し, 帯状構造の幅の理論の見積もりを提案した。空間的に小さいスケールでは β 項の寄与が小さく, 回転の効かない2次元乱流のように振る舞うため, 逆カスケードが生じ, 次第に流れの空間スケールが大きくなっていく。やがて β 項が働き始めて移流項と同程度になると逆カスケードが止まると考えた (図3)。そのときの空間スケールを L_R , 流れの典型的な振幅を U とすると²,

$$|J(\psi, \nabla^2 \psi)| \sim \left| \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} \right| \Rightarrow \frac{U^2}{L_R^2} \sim \beta U, \quad L_R \sim \sqrt{\frac{U}{\beta}}. \quad (5)$$

ラインズスケールと呼ばれる L_R は2次元 β 平面強制乱流で出現する帯状構造の典型的な幅のバンド構造の幅のオーダーの見積もりとして, よく用いられている。このラインズスケールは, 渦位保存則から帯状のバンド領域で渦位が一様になっていると考えることにより導くこともできる。

後にVallis and Maltrud (1993) [5]は β 平面モデルでの小スケールの渦強制による乱流数値実験を行い, 2次元波数空間(k_x, k_y)上でエネルギースペクトルと大規模帯状構造の形成の様子を観察し, より詳細な議論を行った。ここで k_x, k_y はそれぞれ x, y 方向の波数である。図4が図3に対応する2次元エネルギースペクトルである。積分開始直後は強制により生成される小規模渦のエネルギースペクトルが大きな円環状に分布している (図4左上)。この小規模渦が逆カスケードしていき, β 効果が働き出すと,

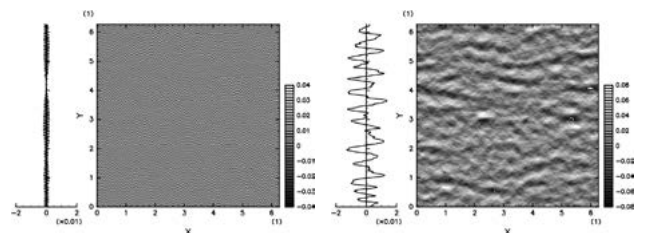


図3 β 平面2次元強制乱流の計算例。x方向平均流と速度 x 成分。明るいところが正, 暗いところが負の速度成分を表している。静止状態からの時間積分開始直後 (左) と, その後帯状構造が発達した状態 (右)。

2 Vallis (2006) [6]には U は帯状流の振幅ではない, と書いてあるが, それが帯状流に対する擾乱の速度振幅を意味するのははっきりわからない。

原点への等方的な逆カスケードが阻害され、エネルギースペクトル分布にダンベル状の空白領域が見られるようになり、(図4左下, 右下), さらに長時間後にはエネルギースペクトルはダンベル領域を避けて k_y 軸に沿った領域にエネルギーが集中していく。このようなスペクトル分布は、 x 方向の波数 k_x が0に近い状態が卓越することを意味しており、帯状構造の出現に対応している。

Vallis and Maltrud (1993) [5]は、このダンベル構造をロスビー波の振動数 ω_R と等方乱流での振動数 ω_t (乱流渦の移流時間の逆数) が同程度であることから理論的に導いた。すなわち、

$$\omega_R = -\frac{\beta k_x}{k_x^2 + k_y^2} \sim \omega_t = \varepsilon^{1/3} k^{2/3}, \quad (6)$$

より、

$$k_{\beta,x} = k_\beta \cos^{8/5}\theta, \quad k_{\beta,y} = k_\beta \sin\theta \cos^{3/5}\theta, \quad (7)$$

$$k_\beta = \left(\frac{\beta^3}{\varepsilon}\right)^{1/5}. \quad (8)$$

ここで ε は運動エネルギー注入率、 $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ は全波数、 $\theta = \arctan(k_y/k_x)$ は波数空間の極座標での方位角である。このダンベル領域の外側領域が、移流項が卓越し逆カスケードが可能であることを意味している。ここで k_β は波動の振動数が $\omega_R \sim \beta/k$ と等方的であることを仮定して得られる特徴的な波数である。

乱流の振動数の見積もり方を変えることで、形状と大きさの異なるダンベル領域を導くことができる。 $\omega_t = Uk$ と見積もれば、

$$k_{R,x} = k_R \cos^{3/2}\theta, \quad k_{R,y} = k_R \sin\theta \cos^{1/2}\theta, \quad (9)$$

$$k_R = \sqrt{\frac{\beta}{U}} = \frac{1}{L_R}. \quad (10)$$

となる。この式は線形項のと非線形項のスケールリングによっても導くことができる。(5)において非線形項を等方的な空間スケールで、 β 項を x 方向のスケールで評価すればよい。また、2乗平均渦度 Z を用いて $\omega_t = Z$ と見積もれば、

$$k_{H,x} = k_H \cos^2\theta, \quad k_{H,y} = k_H \sin\theta \cos\theta, \quad (11)$$

$$k_H = \frac{\beta}{Z} = \frac{1}{L_Z}. \quad (12)$$

が得られる。これらのダンベルの形状をプロットしたのが図4右上である。

Vallis and Maltrud (1993) [5]の解析は、乱流の逆カスケードが β 効果によって止まるのではなく、非等方的に逆カスケードしうることを示唆している。先に x 方向(渦位勾配と垂直方向)へ逆カスケードして帯状構造が出現した後に y 方向(渦位勾配の方向)へ逆カスケードがゆっくりと進みうる。したがって大規模帯状構造は領域全体にまで幅が広がる可能性がある。しかしながら、ダンベル領域を避けての k_y 軸に沿っての逆カスケードは可能であるが、波数が小さくなっていく時間はとても長いだろう、と彼らは議論している。

ラインズスケールおよびダンベル領域の大きさを表す波数 k_R , k_β , k_H を用いた議論は、帯状構造の発達の定性的な説明としては使えるが、帯状構造の幅の定量的な見積もりとしては曖昧さがあることに注意されたい。例えば図3右の帯状構造の波数は13程度であるのに対して、数値計算データを用いて U を擾乱の平均運動エネルギー、 Z を擾乱の平均エントロフィーから見積もり、(8), (10), (12)を評価すると、各波数が $k_\beta = 47$, $k_R = 12$, $k_H = 15$ と値がばらつく。また、長時間後のダンベル領域を避けての k_y 軸に沿った逆カスケードに伴い出現するであろう大規模帯状構造のスケールは、ダンベル領域で定まる空間スケールよりも大きくなるので、ラインズスケールなどの見積もりが適当でなくなることを意味する。

一方、エネルギー散逸過程が存在することによって大規模帯状構造のスケールが定まるという考え方もある。回転系における2次元渦運動に対しては、渦柱に垂直な境界面に出現するエクマン境界層による渦の散逸(エクマン摩擦)が、大規模なスケールほど通常の粘性散逸より卓越するようになる。この効果は渦度方程式(4)に対して渦度に比例する散逸項を与えることで表現される。

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + J(\psi, \nabla^2 \psi) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} = F - \gamma \nabla^2 \psi, \quad (13)$$

ここで γ はエクマン摩擦係数である。エクマン摩擦によるエネルギー散逸が平均運動エネルギー $\bar{E} = U^{2/2}$ を用いて

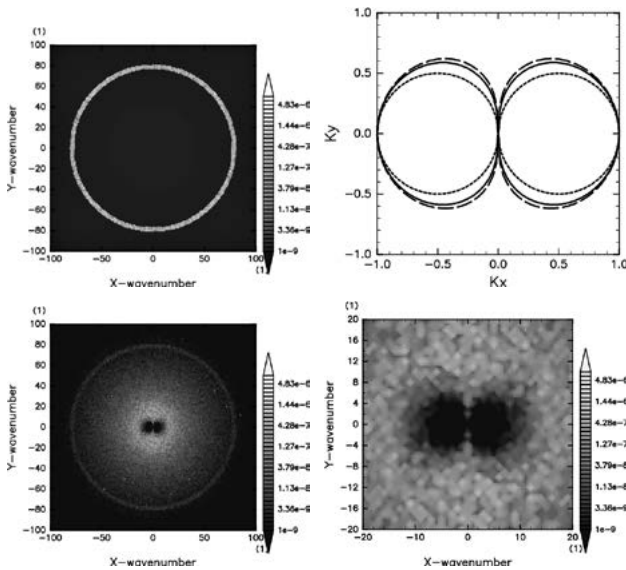


図4 β 平面2次元強制乱流の計算例における2次元エネルギースペクトル。図3に対応した、静止状態からの時間積分開始直後(左上)と、その後帯状構造が発達した状態(左下)、およびその低波数領域を拡大表示したもの(右下)。右上は2次元スペクトル空間での β 項と非線形項が同程度になる境界。実線が(8)による($k_{\beta,x}$, $k_{\beta,y}$)、破線が(10)による($k_{R,x}$, $k_{R,y}$)、点線が(12)による($k_{H,x}$, $k_{H,y}$)。

$\varepsilon = 2\gamma\bar{E} = \gamma U^2$ と見積もられるので、 L_R の U に代入することによりエクマン摩擦により定まる空間スケール L_{Ekman} が得られる[6, 7].

$$L_{\text{Ekman}} = \left(\frac{\varepsilon}{\gamma\beta^2} \right)^{1/4}. \quad (14)$$

帯状構造は無限に幅が広がることはなく、エクマン摩擦によって、この幅で逆カスケードが止まると議論されている.

3.2.2 球面モデル

β 平面モデルよりも一段現実の惑星大気に近づけた「浅いモデル」は回転球面上の2次元乱流モデルである. 流体層の厚さが球半径より十分に薄く、一定であることを仮定すると、球面上の2次元流体運動は次のような渦度方程式にしたがう.

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{1}{a^2} J(\psi, \zeta) + \frac{2\Omega}{a} \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} = F + \nu \left(\nabla^2 + \frac{2}{a^2} \right) \zeta. \quad (15)$$

$\sin$ 緯度 μ , 経度 λ , 時間 t に対して、 $\psi(\lambda, \mu, t)$ は流れ関数, $\zeta(\lambda, \mu, t) = \nabla^2 \psi$ は渦度の鉛直(球面に垂直な)成分, ∇^2 は球面上の2次元ラプラシアン, a は球半径, $F(\lambda, \mu, t)$ は渦度強制, $J(\psi, \zeta) = (\partial_\lambda \psi)(\partial_\mu \zeta) - (\partial_\mu \psi)(\partial_\lambda \zeta)$ はヤコビアン, ν は粘性係数である. 粘性項の $2/a^2$ は等方粘性の球座標系表現によって現れる項であり, これによって全角運動量が保存される.

回転系2次元強制乱流の研究はWilliams (1978) [8]から始まる. 彼は回転球面上の2次元非圧縮流体にランダムな渦度強制を与える数値実験を行い, 交互に向きの変わる東西流分布を伴う帯状構造が出現することを示した. しかしながら, 彼の計算は, 経度方向への8回対称性と赤道対称性を仮定しており, 全球の1/16の領域でしか計算していなかった. さらに用いた強制が等方的でなかったことも問題であった.

この欠点を解消するべく, 全球領域での系統的な数値実験を行ったのがNozawa and Yoden (1997a) [9]である. 彼らは自転角速度と渦度強制の水平スケールをさまざまに変えて, 帯状構造の出現の様子を調べた. その結果として, 強制の水平スケールが十分に小さい場合には生成される小規模の渦が融合し, ラインズスケール程度にまで逆カスケードが生じ, 結果として東西流が卓越する帯状構造が形成されることを見出した. (図5右), しかしながら, 強制の水平スケールが大きい場合には帯状構造

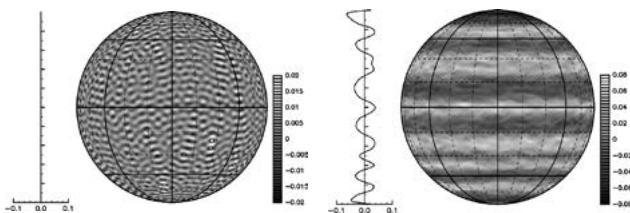


図5 回転球面状の2次元強制乱流の計算例. 経度方向平均流と速度経度方向成分. 静止状態からの時間積分開始直後(左)と, その後帯状構造が発達した状態(右). Nozawa and Yoden (1997a) [9]のCase 18に相当.

が出現せず, 極域に強い逆行ジェットだけが生成される結果となった. これはラインズスケールよりも大きなスケールの強制が与えられることで, 逆カスケードが働かず, 生成された渦が波動(ロスビー波)として伝播し, 極域に逆方向の角運動量を集積するためであると考えられる. Nozawa and Yoden (1997a) [9]は東西流が卓越する帯状構造の幅を平均的な β パラメータを用いたラインズ波数,

$$n_\beta = a \sqrt{\frac{\langle \beta \rangle}{2\bar{U}}} \quad (16)$$

と比較し, 整合的に結論づけた. ここで n_β は球面調和関数の全波数 n の見積もり, ここで $\langle \beta \rangle = \pi\Omega/2a$ は球面平均した β パラメータ, $\bar{U}$ は2乗平均速度である.

Nozawa and Yoden (1997b) [10]はさらにVallis and Maltrud (1993) [5]の解析を球面に拡張し, スペクトル空間における乱流と波動の境界を

$$m = \frac{\bar{U}}{2\Omega a} n^2(n+1) \quad (17)$$

と見積もった. ここで n, m は球面調和関数の全波数および帯状端数である. これは, ロスビー波の振動数と渦度の移流時間の逆数とが同程度になることから導かれる.

$$\omega_R = -\frac{2\Omega m}{n(n+1)} \sim \frac{\bar{U}n}{a} \quad (18)$$

そしてエネルギースペクトルの振幅が大きい領域の境界が定性的に(17)となっていると議論した. 図6には図5に対応した2次元スペクトル空間(m, n)におけるエネルギースペクトル分布を示している. 帯状構造が発達した状態(図6左下, 右下)の低波数領域に(17)で示される

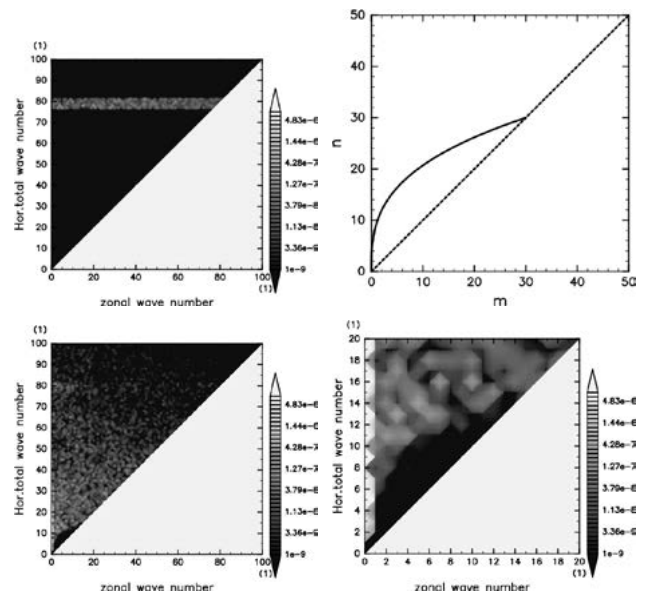


図6 回転球面2次元強制乱流の計算例における2次元エネルギースペクトル. 縦軸が球面調和関数の全波数 n , 横軸が帯状波数 m である. 右上図は実線が(17)の曲線, 点線が $n = m$ の直線を示している. 左上図は図5に対応した, 静止状態からの時間積分開始直後の2次元エネルギースペクトル. 左下および右下はその後帯状構造が発達した状態, およびその低波数領域を拡大表示したもの.

形の境界の右側がエネルギーの空白領域となっている。

Williams (1978) [8] と Nozawa and Yoden (1997a, b) [9, 10] の結果は、回転球面 2 次元乱流モデルではラインズスケール程度の帯状構造が生成されることを印象づけるものであった。これに対して Obuse *et al.* (2010) [11] は Nozawa and Yoden (1997a, b) [9, 10] の数値実験を拡張して、数 100 倍の長時間積分を行った。その結果、Nozawa and Yoden (1997a, b) [9, 10] において観察された複数の狭い東西ジェットが速やかに融合していき、結果として全球に 2 ないし 3 本のジェット流の最終状態となった (図 7)。したがって、回転球面 2 次元乱流モデルにおいては、たくさんの東西ジェットを伴う帯状構造は時間積分初期にしか観察されず、長時間後にはその帯状構造が融合していき大規模な少数のジェットしか残らないことが明らかになった。

この大規模なジェット流の幅はラインズスケールでの見積もりとは異なっている。Nozawa and Yoden (1997a) [9] と同じく、ジェット領域で平均した β パラメータの値を用いたラインズスケールの見積もりは、数値実験結果をうまく説明できない。

このジェット流の融合と大規模な帯状構造の出現は、 β 平面モデルでの 2 次元スペクトル空間で見られた空白ダンベル領域に基づいた Vallis and Maltrud (1993) [6] の議論と同じように行える [12]。球面での 2 次元スペクトル空間におけるエネルギー空白領域 (17) を避けての n 軸に沿った逆カスケードが可能であるために、大規模帯状構造が出現していると考えられることができるだろう。一方で、2.1 節の β 平面モデルにおいて紹介したように、回転球面 2 次元乱流モデルにエクマン摩擦を導入した場合には帯状ジェットの融合が抑止され、多くのジェット流を伴う帯状構造が維持されることになるだろう [12]。

3.3 高速回転球殻中の熱対流による帯状構造形成

ガス惑星大気の大規模帯状構造の形成の「深いモデル」のもっとも基本的な枠組みは、高速に回転する球殻中のブシネスク流体の熱対流である。その支配方程式は以下のようなものである。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \alpha T \mathbf{g} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}, \quad (20)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \kappa \nabla^2 T + Q. \quad (21)$$

ここで $\mathbf{u}$ は速度ベクトル、 $\boldsymbol{\Omega}$ は自転角速度ベクトル、 p ,

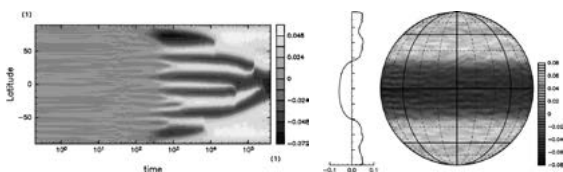


図 7 回転球面状の 2 次元強制乱流の長時間積分の計算例。経度方向平均流の時間変化 (左) と長時間積分後の速度経度方向成分分布 (右)。Obuse *et al.* (2010) [11] の Case 18 に相当。

ρ は圧力および密度 (定数)、 α は熱膨張率、 T は温度、 $\mathbf{g}$ は重力加速度ベクトル、 ν 、 κ は粘性および熱拡散係数、 Q は内部熱源である。高速に自転してコリオリ力が卓越している状況では主要な力学バランスが地衡流平衡であり、その回転から導かれるテイラー・プラウドマンの定理

$$(2\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0, \quad (22)$$

が近似的に成り立っている。したがって回転軸方向に一樣な 2 次元渦柱の形態の流体運動が卓越し、その主要な振舞いは渦位保存則が支配する。背景渦位傾度は内外球殻境界により定まる渦柱の高さの変化に起因する地形性 β 効果による (図 8)。内側境界に接する仮想的な円筒面 (tangential cylinder, 接円筒) の内側と外側で β パラメータの符号が変わるため、熱対流により引き起こされる渦の性質が異なることになる。

高速回転球殻中の熱対流による帯状構造形成は、Busse (1976, 1983) [13, 14] の理論的な予想に始まる。彼は高速に回転する球内の一様内部熱源により駆動される熱対流の臨界状態において回転軸に沿った柱状の渦が球殻の中程に局所的に発生することを漸近展開理論を用いて示した [15]。その解に基づいて、レイリー数をあげたときの有限振幅対流が円筒動径方向に渦柱が並ぶだろうと考えた [13]。さらに、外側球面境界の曲率のために渦柱が動径方向に傾き、そのレイノルズ応力により角運動量が動径方向へ輸送されることで向きが交互に変わる帯状流が生成されるだろうと予想した [14] (図 9 左)。

この予想を確かめるべく、Christensen (2002) [16] が系統的な回転球殻熱対流の数値実験を行ったところ、複数の帯状バンドが出現することなく、赤道域の順行ジェットと中高緯度の逆行ジェットが生成される結果となった (図 9 右)。出現する柱状の熱対流渦は、Busse の予想のように円筒動径方向に整列するのではなく、無秩序に連続的に発生する。それぞれの渦が角運動量輸送を外向きに輸送するため、幅広な一対の外側順行ジェットと内側の逆行ジェットとなる結果となっていた。

Busse の予想においては球領域、Christensen (2002) [16] の数値実験では内外半径比が 0.35 程度の厚い球殻領域を扱っていた。これに対して Heimpel and Aurnou

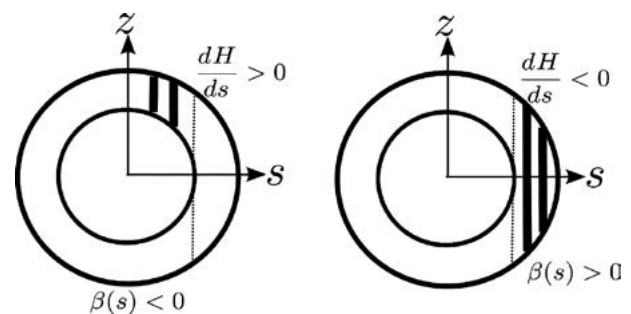


図 8 高速回転球殻中の地形性 β 効果の模式図。円筒動径座標 s を用いて渦位は $Q(s) = \frac{2\Omega}{H(s)}$ 、 β パラメータは $\beta(s) = -\frac{2\Omega}{H(s)} \frac{dH}{ds}$ と表される。渦柱の伸縮に伴い、流体の渦度が引き起こされる。接円筒内部と外部とで β パラメータの符号が変わるため、熱対流渦の性質が異なる。

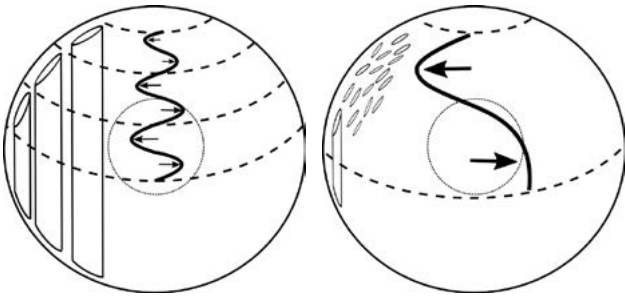


図9 高速回転球殻中の熱対流による帯状構造の生成の模式図。右図が整列した渦柱による交互の帯状流が生成されるBusseの予想[14]。しかしながら、Christensenの数値計算[16]の結果は、左図のように、細い渦柱がランダムに生成消滅し対の帯状流が形成されることを明らかにした。

(2007) [17]は内外半径比が0.85および0.9の薄い球殻領域のモデルを提案した。その結果、球殻外側境界において、赤道域の幅広い順行ジェットと中高緯度での交互に向きが変わる幅狭なジェットを伴う帯状構造が出現する解を見出した。接円筒外側ではChristensen (2002) [16]と同じく、角運動量を外側に輸送する熱対流渦により幅広い順行ジェットが生成されている。これに対して、中高緯度の帯状構造の出現を2次元 β 平面での強制乱流と同じように彼らは考えた。小規模スケールの熱対流渦柱が励起され、それらがラインズスケールにまで逆カスケードし、帯状構造が出現している、と議論し、帯状構造の幅がラインズスケールの見積もりと整合的であると結論づけた。

しかしながら、第3.2節で議論したように、 β 効果は逆カスケードを完全に阻害するのではなく、帯状構造が卓越する非等方的な逆カスケードを許容するので、長時間積分後には、Heimpel and Aurnou (2007) [17]の見出した複数ジェットが融合して大規模な帯状構造に遷移することが考えられた。さらに彼らの計算は経度方向に1/8対称性を仮定したセクター領域での計算であった。そこで竹広ら (2014) [18]はHeimpel and Aurnou (2007) [17]の設定のもとで全球領域での長時間積分を行った。図10はその計算例である。短時間積分においては中高緯度に交互に向きを変えた複数の東西ジェットが出現しており、Heimpel and Aurnou (2007)の結果と整合的である(図10左)。一方、長時間積分においてはこれらの複数の東西ジェットが融合し、中高緯度に各1本の順行ジェットとなっている(図10右)。

したがって、回転球殻対流モデルにおいても、中高緯度においてたくさんの東西ジェットを伴う帯状構造は時

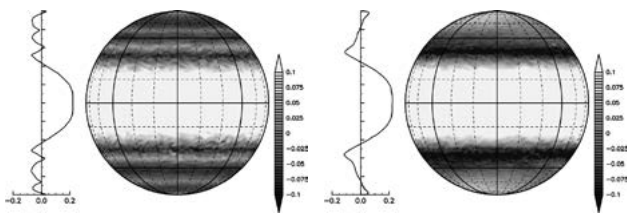


図10 Heimpel and Aurnou (2007) 設定に基づいた全球領域および長時間積分(右)の計算例。左が短時間積分後、右が長時間積分後の球殻表面での経度平均帯状流と速度経度方向成分分布。

間積分初期にしか観察されず、長時間後にはその帯状構造が融合して大規模になっていくようである。しかしながら、散逸過程や力学境界条件などの設定やパラメータに対して、ジェットの融合や大規模化がどのように変わるかはまだ明らかになっていない。

さらには、巨大惑星の状況により近づけるべく、Heimpel and Aurnou (2007) [17]のモデルをブシネスク系から非弾性系へ拡張した研究が行われており(例えば[19, 20])、中高緯度の複数ジェットが出現する状態が見出されている。これらの結果も長時間積分による大規模な帯状構造の出現を検証しなければならないだろう。

3.4 まとめ

以上、回転系での2次元的な乱流による帯状構造形成について、 β 平面モデル、球面モデルおよび回転球殻熱対流モデルでの研究を紹介した。いずれのモデルでも、初期には多数の縞状ジェットが出現するものの、長時間後にはそれらが融合して空間最大スケールの幅の帯状構造となった。そのため、これらのモデルではガス惑星表面の多数のジェットからなる帯状パターンを説明することが難しい。幅の狭い帯状構造の生成維持を回転系の2次元乱流の基本的な性質だけで説明するは難しく、エクマン摩擦といった他の制御因子を別途考えなければならぬだろう。

参考文献

- [1] J. Tollefson *et al.*, *Icarus* **296**, 163 (2017).
- [2] E. Garci-Melendo *et al.*, *Icarus* **215**, 62 (2011).
- [3] G.P. Williams, *J. Atmos. Sci.* **60**, 1270 (2003).
- [4] R.B. Rhines, *J. Fluid Mech.* **69**, 417 (1975).
- [5] G.K. Vallis and M.E. Maltrud, *J. Phys. Oceanogr.* **23**, 1346 (1993).
- [6] G.P. Vallis, *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2006) p.745.
- [7] S. Danilov and D. Gurarie, *Phys. Rev. E* **65**, 067301(2002).
- [8] G.P. Williams, *J. Atmos. Sci.* **35**, 1399 (1978).
- [9] T. Nozawa and S. Yoden, *Phys. Fluids* **9**, 2081(1997).
- [10] T. Nozawa and S. Yoden, *Phys. Fluids* **9**, 3834 (1997).
- [11] K. Obuse *et al.*, *Phys. Fluids* **22**, 056601 (2010).
- [12] H.-P. Huang *et al.*, *Phys. Fluids* **13**, 225 (2001).
- [13] F.H. Busse, *Icarus* **29**, 255 (1976).
- [14] F.H. Busse, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **23**, 153 (1983).
- [15] F.H. Busse, *J. Fluid Mech.* **44**, 441(1970).
- [16] U.R. Christensen, *J. Fluid Mech.* **470**, 115 (2002).
- [17] M. Heimpel and J. Aurnou, *Icarus* **187**, 540 (2007).
- [18] 竹広真一 他：平成26年度地球シミュレータ利用報告書 (2014).
- [19] T. Gastine *et al.*, *Phys. Earth Planet. Inter.* **232**, 36 (2014).
- [20] M. Heimpel *et al.*, *Nature Geo Sci.* **9**, 19 (2015).

小特集 2次元回転系上の乱流における大規模構造形成

4.1 回転球面上非強制 2次元流における大規模帯状流形成とロスビー波非線形相互作用

4.1 Large-Scale Zonal Flow Formation in Two-Dimensional Turbulence on a Rotating Sphere and Nonlinear Interactions of Rossby Waves

小布施 析織, 山田 道夫¹⁾
OBUSE Kiori and YAMADA Michio¹⁾

岡山大学学術研究院環境生命自然科学学域, ¹⁾ 京都大学数理解析研究所

(原稿受付: 2023年 1月20日)

回転球面上非強制 2次元流における大規模西向き周極流の形成と、その際のロスビー波非線形相互作用の役割について紹介する。非線形相互作用の種類と空間構造によってロスビー波を4つのグループに分類しグループ間のエネルギー輸送を調べると、西向き周極流形成は、ロスビー波三波非共鳴相互作用による共鳴帯状波へのエネルギー輸送が直接的原因であり、その過程には三波共鳴および三波非共鳴両方の非線形相互作用が関与するという複雑な構造を有していることがわかる。

Keywords:

two-dimensional turbulence, rotating sphere, zonal flow, Rossby wave, nonlinear interaction

4.1.1 はじめに

回転球面上 2次元乱流は、地球流体力学においては惑星大気の大規模流体運動の最も基本的な数理モデルの一つである。また流体力学においては非等方非一様乱流を実現するおそらく最も簡単な例であり、偏微分方程式論においては回転球面上での 2次元ナビエ-ストークス方程式もしくはオイラー方程式の解である。いずれの立場においても、回転球面上 2次元乱流の振る舞いについての詳細な理解は、関連する研究に重要な知見を与える。本稿では流体力学の立場に立ち、回転球面上 2次元乱流において出現する非等方非一様な大規模帯状構造の形成過程について考察する。地球流体力学の立場に立った場合には惑星の内部発熱機構などの存在により強制力の考慮が必要となるが、ここではより基本的な状況での大規模帯状流形成を考察対象とするため、非強制の場合を扱う。また、さらに問題をシンプルにするため、非粘性流れを考えることにする。地球流体力学には大規模帯状流の形成は粘性による運動量散逸の効果に起因すると考える議論も存在するが、2次元球面の場合においては、実現される流れ場は非粘性極限と非粘性の場合に一致し、そこで出現する大規模帯状構造は弱粘性を仮定したときに得られるものと同様のものである[1]。

以上より、本章では、回転球面上での無次元化された

非圧縮性非強制非粘性 2次元流の渦度方程式

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + J(\psi, \zeta) + 2\Omega \frac{\partial \psi}{\partial \phi} = 0 \quad (1)$$

を考えて^{1,2)}、この系における大規模帯状流形成について議論する。

方程式(1)は経度(ϕ) - sin緯度($\mu = \sin(\lambda)$, λ は緯度)座標系で書かれており、 t は時間、 $\psi(\phi, \mu, t)$ は流れ関数、 $\zeta(\phi, \mu, t) = \nabla^2 \psi$ は渦度、 ∇^2 は水平 2次元のラプラシアン、 Ω は球の自転角速度である。 $J(f, g)$ はヤコビアンであり、 $J(f, g) = (\partial f / \partial \phi)(\partial g / \partial \mu) - (\partial f / \partial \mu)(\partial g / \partial \phi)$ と定義される。流れ関数 ψ は速度の経度方向成分 u_ϕ および緯度方向成分 u_λ がそれぞれ $u_\phi = \sqrt{1 - \mu^2}(\partial \psi / \partial \lambda)$, $u_\lambda = -(\partial \psi / \partial \phi)$ と記述されるように定義されており、これによって非圧縮性の条件は自動的に満たされている。

方程式(1)に小規模かつ等方的なランダム初期流れ場(図1(A))を与えて時間発展させると、両極域には大規模な西向き周極流(図1(B)(C)(D))が、中低緯度領域には弱い東向き流と西向き流が交互に並ぶ縞状の構造(図1(D))が形成される[2]。回転角速度 Ω が大きくなるにつれて、西向き周極流の速さは増大し、幅は減少する[3]。強制問題では強い東向き流と西向き流が交互に並ぶ構造が球面全体に形成されることが知られており[4, 5]、

Graduate School of Environmental, Life, Natural Science and Technology, Okayama University, OKAYAMA 700-8530, Japan

corresponding author's e-mail: obuse@okayama-u.ac.jp

1 非粘性であるため、この渦度方程式はオイラー方程式を起源とする。また、この方程式に β 平面近似(β -plane approximation)を施したものは長谷川-三間方程式の特別な場合に対応する。

2 方程式(1)は、球の半径と初期運動エネルギーを用いて無次元化してある。

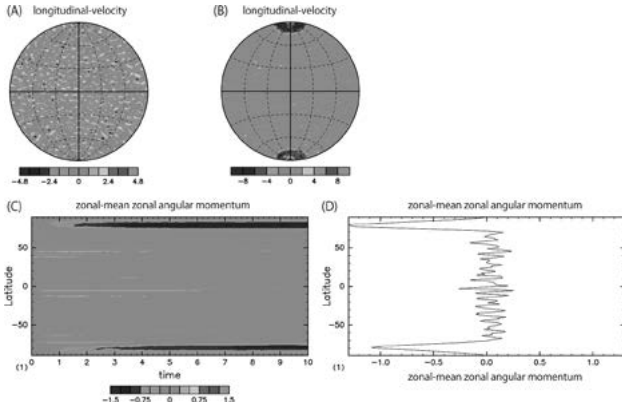


図1 回転球面上2次元乱流における大規模帯状流の形成。(A) 初期流れ場における速度の経度方向成分。ランダム様であるため、特に構造は見られない。(B) $t=10$ における速度の経度方向成分。大規模西向き周極流が見られる。(C) 速度の経度方向成分に対応する角運動量の経度方向平均の時間発展。時間の経過に伴い、両極域に強い西向き流が形成される。(D) $t=10$ における速度の経度方向成分に対応する角運動量の経度方向平均（マイナスが西向き流）。極域に西向き流、中低緯度には弱い縞状構造が見られる。

強制力の有無によって実現される流れは大きく異なる。しかし大規模帯状流の形成という点は共通であり、これは回転系での2次元乱流が持つ大きな特徴である。2次元乱流においては、3次元の場合とは異なり、エネルギーとエントロフィーが保存されるため、より大きな構造を持つ流れ場が形成されるようにエネルギーが輸送されるエネルギーの逆カスケードが起きることが知られている。回転系で見られる大規模構造形成もその結果であると考えられる。東西に伸びた構造の形成は系の回転効果に起因するが、本小特集の4章で解説される理論をはじめ様々な議論が存在するものの、決定的な説明は未だ与えられていないのが現状である。本章では、4.1.2.1で紹介するロスビー波の非線形相互作用に基づく、大規模帯状流形成メカニズム解明への試みを紹介する。ここでは筆者らの研究結果[6]を中心に述べるが、回転系2次元乱流におけるロスビー波非線形相互作用については、他にも非常に多くの研究がなされている[7-11]。

本章ではまず、4.1.2でロスビー波とその三波共鳴非線形相互作用についての定義を与えた後、全ロスビー波を4つのグループに分類する。続く4.1.3では、西向き周極流の時間発展に際する、4つのグループ間でのエネルギー輸送の詳細と、西向き周極流形成に関わるロスビー波非線形相互作用のあり方を紹介する。最後に4.1.4で、状況のまとめと今後の展望およびいくつかの注意点を述べる。

4.1.2 ロスビー波の三波非線形相互作用、共鳴波と非共鳴波

4.1.2.1 ロスビー波、三波共鳴非線形相互作用

方程式(1)にはロスビー波と呼ばれる線形解が存在する³。ロスビー波解は球面調和関数 $Y_l^m(\phi, \mu)$ を用いて $Y_l^m(\phi, \mu)\exp(-i\omega t)$ と書かれ ($l \in \mathbb{N}$, $m \in \mathbb{Z}$, $-l \leq m \leq l$)、その振動数 ω は

$$\omega(l, m) = \frac{-2m\Omega}{l(l+1)} \quad (2)$$

である。 $Y_l^m(\phi, \mu)$ の m がゼロの球面調和関数は経度方向に様な構造を持つ。式(1)で記述される系においては、流れ場の時間発展はロスビー波のダイナミクスによって支配されており、帯状流形成はロスビー波 $Y_l^0 \exp(-i\omega t)$ (ただし $m=0$ より $\omega=0$) の発達に対応する。

ロスビー波のダイナミクスを考える際にしばしば用いられる概念として、ロスビー波の三波共鳴非線形相互作用がある。 $Y_{l_1}^{m_1}$, $Y_{l_2}^{m_2}$, $Y_{l_3}^{m_3}$ に対応する3つのロスビー波が条件

$$m_1 = m_2 + m_3, \quad (3)$$

$$|l_2 - l_3| < l_1 < l_2 + l_3, \quad (4)$$

$$l_1 + l_2 + l_3 = \text{奇数}, \quad (5)$$

$$\frac{m_1}{l_1(l_1+1)} = \frac{m_2}{l_2(l_2+1)} + \frac{m_3}{l_3(l_3+1)} \quad (6)$$

を満たしているとき、これらのロスビー波は三波共鳴非線形相互作用していると言われる。条件(3)-(5)は三波非線形相互作用の必要条件であり[12]、条件(6)が共鳴相互作用のために追加されるものである[13]⁴。ロスビー波三波共鳴非線形相互作用に関して、球の回転角速度 Ω が無限大の極限においては、ある有限時間内ではロスビー波三波共鳴非線形相互作用が流れ場の時間発展を完全に決定するという Yamada and Yoneda の結果が知られている[15, 16]。

4.1.2.2 共鳴波と非共鳴波

西向き周極流の形成におけるロスビー波非線形相互作用の役割を詳細に調べるため、ここでは共鳴相互作用への関与の有無と帯状構造の有無によって、ロスビー波を次の4つのグループに分類する⁵。

共鳴非帯状ロスビー波 ($\bar{RZ}$)

$$= \{Y_l^m | m \neq 0, (3)-(6) \text{ を満たす場合が存在する} \} \quad (7)$$

共鳴帯状ロスビー波 (RZ)

$$= \{Y_l^0 | (3)-(6) \text{ を満たす場合が存在する} \} \\ = \{Y_l^0 | l = \text{奇数}\}, \quad (8)$$

非共鳴帯状ロスビー波 ($\bar{RZ}$)

$$= \{Y_l^0 | l = \text{偶数}\}, \quad (9)$$

3 この系においては非線形解でもある。

4 上記の条件に加え、三波共鳴相互作用内でのエネルギー輸送がノンゼロであるものだけを取り出すために $l_1 \neq l_2$, $l_1 \neq l_3$, $l_2 \neq l_3$ が追加されることがある。しかしながら次に紹介する結果[15, 16]を満たすためには、共鳴相互作用の条件にこの条件を追加してはならない[14]。

5 記号 $\bar{\cdot}$ は“非”に対応する。

$$\begin{aligned} & \text{非共鳴非帯状ロスビー波 } (\tilde{R}\tilde{Z}) \\ & = \{ \text{全ロスビー波} \} \setminus \{ R\tilde{Z} \} \setminus \{ RZ \} \setminus \{ \tilde{R}Z \}. \end{aligned} \quad (10)$$

ロスビー波の大部分は $\tilde{R}\tilde{Z}$ に属し、次に $R\tilde{Z}$ が多い。流れの帯状流成分に対応するロスビー波の数は非常に少ない。たとえば $0 \leq l \leq 170$ における三波共鳴可能なロスビー波グループ $R\tilde{Z} + RZ$ （この集合に属するロスビー波を、以降では共鳴波と呼ぶことにする。）は図2で示される。

4.1.3 エネルギー輸送

4.1.3.1 極域周極流と共鳴波

回転球面上2次元乱流での西向き周極流形成過程（図1(C)）における、 $R\tilde{Z}$, RZ , $\tilde{R}\tilde{Z}$, $\tilde{R}Z$ の保有エネルギーの時間変化を図3に示す。ランダムかつ一様等方な初期状態においては、非帯状ロスビー波である $\tilde{R}\tilde{Z}$ と $R\tilde{Z}$ がエネルギーのほとんどを保有しているが、時間の発展とともに共鳴帯状ロスビー波 RZ がエネルギーを獲得してゆく。一方、非共鳴帯状ロスビー波 $\tilde{R}Z$ はエネルギーの増加をほとんど見せない。 RZ は赤道対称な帯状構造を持つロスビー波の集合であるため、これは両極域における周極流形成と整合的である。

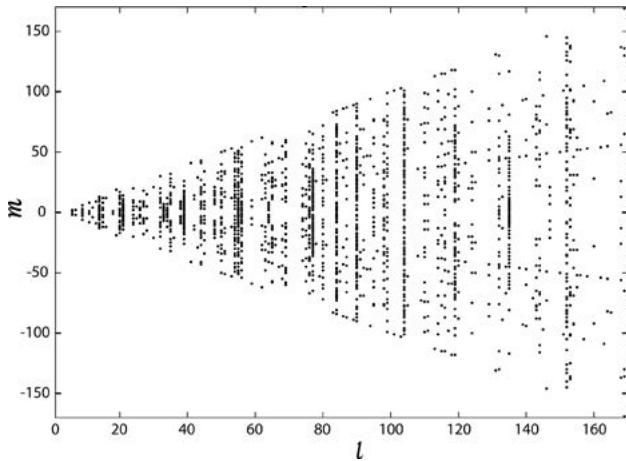


図2 $0 \leq l \leq 170$ における三波共鳴可能なロスビー波グループ($R\tilde{Z}$ と RZ)。Reprinted from [6].

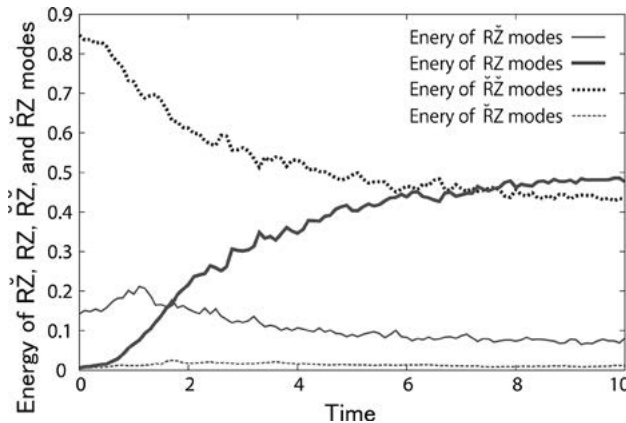


図3 4つグループのエネルギー時間変化 Reprinted from [6].

帯状流形成が球の回転効果によってもたらされていることおよびYamada and Yonedaの結果[15, 16]を考えると、図3で示されている共鳴帯状波 RZ の発達は、一見するとロスビー波三波共鳴相互作用のみで説明できるように思われるかもしれない。しかしながら、各三波共鳴相互作用におけるエネルギーの詳細釣り合いを考えると、帯状ロスビー波へのエネルギー輸送は三波共鳴相互作用では不可能であることがわかる[14]。ゆえに、西向き周極流の形成を、ロスビー波三波共鳴非線形相互作用のみを用いて簡単に説明することはできない。そこで続く4.1.3.2では、図3で示される4つのグループの保有エネルギーの時間発展に際するグループ間エネルギー輸送を詳細に調べた結果を紹介する。

4.1.3.2 ロスビー波の三波非線形相互作用によるエネルギー輸送

図3の $t = 2.0 - 2.1$ において、4つのグループ間エネルギー輸送（全部で40通り）を詳細に調べた結果を紹介する。ここでは形成された周極流が発達している時間帯の例として $t = 2.0 - 2.1$ を示すが、周極流が完成していない時間帯（たとえば $t = 0.7 - 0.8$ ）、形成された周極流の発達段階にあたる別の時間帯（たとえば $t = 3.0 - 3.1$ ）においても、同様の結果が得られている。

図4は、グループ間エネルギー輸送の時間変化の例である⁶。なお、データの標準偏差をエラーバーとして表示してある。グループ間エネルギー輸送は短時間での変動を見せるが、エネルギー輸送値がほぼゼロである場合（図4(D)）以外ではエネルギー輸送の変動幅は標準偏差を十分に上回っており、 $t = 2.0 - 2.1$ は非常に短い時間帯であるものの、エネルギー輸送の細かい変動を考慮できる時間幅であることが確認できる。

グループ間エネルギー輸送の、図3の $t = 2.0 - 2.1$ における総量を見ると（図表なし）⁷、非帯状ロスビー波から共鳴帯状ロスビー波 RZ への輸送 $\tilde{R}\tilde{Z} \times \tilde{R}\tilde{Z} \rightarrow RZ$, $R\tilde{Z} \times R\tilde{Z} \rightarrow RZ$, $\tilde{R}\tilde{Z} \times R\tilde{Z} \rightarrow RZ$ が突出した値を持つことが

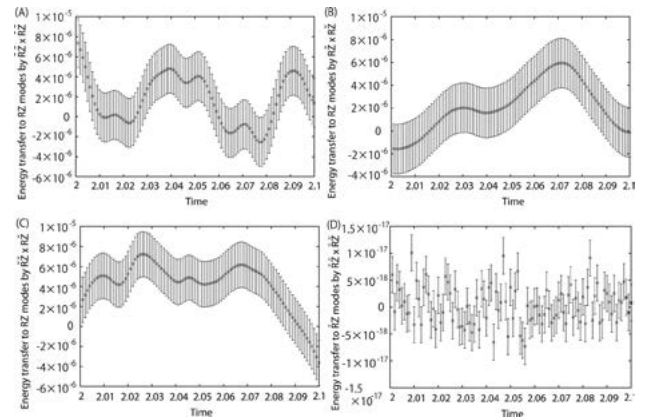


図4 $t = 2.0 - 2.1$ におけるグループ間エネルギー輸送の時間変化の例。エラーバーはデータの標準偏差。(A) $\tilde{R}\tilde{Z} \times \tilde{R}\tilde{Z} \rightarrow RZ$. (B) $R\tilde{Z} \times R\tilde{Z} \rightarrow RZ$. (C) $\tilde{R}\tilde{Z} \times R\tilde{Z} \rightarrow RZ$. (D) $\tilde{R}\tilde{Z} \times \tilde{R}\tilde{Z} \rightarrow \tilde{R}\tilde{Z}$. Reprinted from

⁶ エネルギー輸送を各時間ステップ（全部で2500ステップ）において計算し、それらを前から500ステップずつに分けて時間平均し、全部で500個のデータにしてある。ただし見やすさのために、描画はその中の100データのみを使用している。

⁷ 詳細な値の表は[6]をご参照いただきたい。

確認される。たとえば RZ へのエネルギー輸送10種類は図5に示すとおりである。このことより、図3で見られる共鳴帯状ロスビー波 RZ の卓越は、非帯状ロスビー波 ($\bar{R}\bar{Z}$ および $\bar{R}\bar{Z}$) 同士の相互作用によって RZ へとエネルギーが輸送されることによって起きていることがわかる。 $\bar{R}\bar{Z}$ が関与する相互作用は必ず非共鳴相互作用であることに加え、前述の通り帯状構造を持つロスビー波へのエネルギー輸送は共鳴相互作用では起こりえない。すなわち、ここで優勢となっている非帯状ロスビー波同士の相互作用は必ず非共鳴相互作用である。それにもかかわらず、初期に非帯状流へと配分された大部分のエネルギーは、共鳴帯状ロスビー波 RZ へと直接輸送されている。つまり、非共鳴相互作用によるエネルギー輸送の先として共鳴(帯状)波が選ばれていることになる。

4.1.4 まとめ

回転球面上非圧縮性非粘性非強制2次元流では、西向き周極流が自発的に形成される。本章では、西向き周極流形成におけるロスビー波非線形相互作用の役割について調べた研究結果[6]を紹介した。4.1.2ではロスビー波を4つのグループに分類し、4.1.3では西向き周極流が形成される際の4つのグループ間のエネルギー輸送の傾向について紹介した。西向き周極流の発達は三波共鳴相互作用可能な帯状構造を持つロスビー波グループ (RZ) にエネルギーが蓄積されることによって起きているが、その際のエネルギー輸送は三波非共鳴相互作用によるものであった。非共鳴相互作用によるエネルギー輸送の先がなぜ共鳴帯状ロスビー波であり、なぜ非共鳴帯状ロスビー波 $\bar{R}\bar{Z}$ ではないのかは、問題として残されている。4.1.3.2の結果のみを考えると、西向き周極流形成のメカニズムはロスビー波の三波非共鳴相互作用のみで説明できるかのように見える。しかしながら、共鳴帯状波 RZ の存在および卓越は三波共鳴相互作用のあり方に大きな影響を与え[14]、さらに三波共鳴相互作用による共鳴非帯状波 ($\bar{R}\bar{Z}$) の時間発展は三波非共鳴相互作用による RZ へのエネルギー輸送に大きな影響を与えるため、西向き周極流形成のメカニズム説明をロスビー波の三波非共鳴

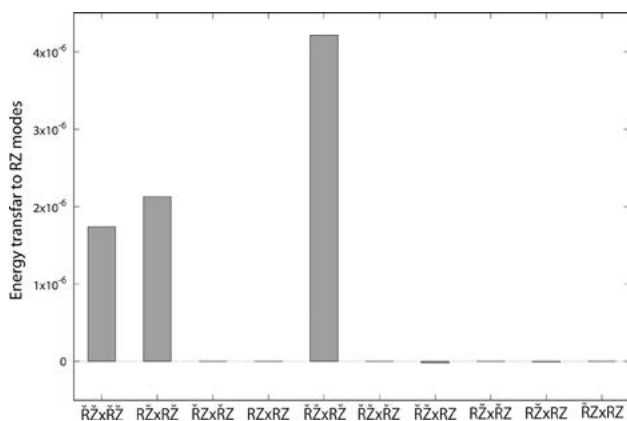


図5 $t = 2.0 - 2.1$ における、 RZ へのエネルギー輸送量。非帯状ロスビー波から共鳴帯状ロスビー波 RZ へ輸送 $\bar{R}\bar{Z} \times \bar{R}\bar{Z} \rightarrow RZ$, $\bar{R}\bar{Z} \times RZ \rightarrow RZ$, $\bar{R}\bar{Z} \times \bar{R}\bar{Z} \rightarrow RZ$ が突出した値を持つ。

相互作用のみで語ることはできない。西向き周極流形成は、三波非共鳴相互作用による共鳴帯状波へのエネルギー輸送が直接的原因であるというある意味ねじれた状況になっているだけでなく、その過程には三波共鳴および三波非共鳴両方のロスビー波非線形相互作用が関与するという複雑な構造を有しているようである。

最後に、少なくとも非強制問題において、回転球面上2次元乱流での西向き周極流形成について議論する場合には、球面と β 平面の間で必ずしも良い対応が付くわけではないことに言及しておく。球面上では4.1.1で示したように西向き周極流が形成されるが、これは十分な時間の経過後にはほぼ純粋な帯状流すなわち Y_l^0 に対応するロスビー波が強く卓越した流れになる。しかしながら、二重周期境界条件を課した β 平面上での非強制問題では、球面での経度方向に相当する x 方向にやや伸びた大規模構造が形成されるものの、純粋な帯状構造を持つ流れの卓越は起きない。つまり、流れ関数や渦度を二重フーリエ級数展開した場合に、 x 方向の波数 k_x が $k_x = 0$ ではなく $k_x = 1$ を持つロスビー波が卓越する。また、 β 平面では帯状構造を持つロスビー波は全て共鳴波 RZ となり、ロスビー波の分類は全部で3種類 (RZ , RZ , $\bar{R}\bar{Z}$) である。帯状構造を持つロスビー波へのエネルギー輸送が三波共鳴非線形相互作用では不可能である点は球面の場合と同じであるが、三波共鳴非線形相互作用による共鳴非帯状流 $\bar{R}\bar{Z}$ の時間発展に RZ が及ぼす影響は、球面の場合とは異なるようである[17]。

参考文献

- [1] K. Obuse and M. Yamada, *In preparation*.
- [2] S. Yoden and M. Yamada, *J. Atmos. Sci.* **50**, 631 (1993).
- [3] S. Takehiro *et al.*, *J. Atmos. Sci.* **64**, 4084 (2007).
- [4] T. Nozawa and S. Yoden, *Phys. Fluids* **9**, 2081 (1997).
- [5] K. Obuse *et al.*, *Phys. Fluids* **22**, 056601 (2010).
- [6] K. Obuse and M. Yamada, *J. Phys. Soc. Jpn.* **89**, 064401 (2020).
- [7] P. Lynch, *Tellus A* **61**, 438 (2009).
- [8] J. Sukhatm and L.M. Smith, *Phys. Fluids* **21**, 056603 (2009).
- [9] E. Kartashova, *Nonlinear Resonance Analysis* (Cambridge University Press, 2010).
- [10] V.E. Zakharov *et al.*, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I: Wave Turbulence* (Springer, 1992).
- [11] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer, 2011).
- [12] I. Silberman, *J. Meteor.* **11**, 27 (1954).
- [13] G.M. Reznik *et al.*, *Dyn. Atmos. Oceans* **18**, 235 (1993).
- [14] K. Obuse and M. Yamada, *Phys. Rev. Fluids* **4**, 024601 (2019).
- [15] M. Yamada and T. Yoneda, *Physica D* **245**, 1 (2013).
- [16] A. Dutrifoy and M. Yamada, *In preparation*.
- [17] K. Obuse and M. Yamada, *In preparation*.

小特集 2次元回転系上の乱流における大規模構造形成

4.2 長谷川-三間乱流における帯状流形成と保存量

4.2 Zonal Flow Formation and Invariants in Hasegawa-Mima Turbulence

齋藤 泉, 石岡 圭一¹⁾

SAITO Izumi and ISHIOKA Keiichi¹⁾

名古屋工業大学大学院工学研究科, ¹⁾ 京都大学大学院理学研究科

(原稿受付: 2022年11月22日)

長谷川-三間方程式に支配される乱流から自発的に形成される帯状流は、木星や土星において観測される帯状流の一つのモデルと考えられている。本章では近年発見され、この帯状流形成との関係が指摘されている新たな保存量「ゾノストロフィー」と関連する研究について解説する。

Keywords:

エネルギーカスケード, 保存量, ゾノストロフィー

4.2.1 はじめに

長谷川-三間 (Hasegawa-Mima (HM)) 方程式は、地球流体分野では等価順圧渦度方程式と呼ばれ、惑星の回転と密度成層の影響下にある大規模な流体運動を記述する最も基本的な方程式である。この方程式に支配される乱流 (HM 乱流) からは、帯状流 (卓越した東西ジェット流) が自発的に形成されることが知られており [1], 木星や土星において観測される帯状流の一つのモデルと考えられている。

HM 乱流における帯状流形成を説明するメカニズムはいくつか提案されており、いわゆる波動-乱流境界の議論 [2] やゾノストロフィック不安定 [3] などがある。本章で紹介するのはその一つで、ゾノストロフィー (Zonostrophy) と呼ばれる保存量の保存に基づくものである。

ゾノストロフィーを用いた説明は次の通りである。2次元乱流におけるエンストロフィーの保存によるエネルギーの逆カスケードが、HM 乱流では更にゾノストロフィーの保存によって非等方的になり、帯状流に対応する成分が卓越する。ゾノストロフィーはBalkらによる一連の研究 [4, 5] によって1991年に発見された。2005年に帯状流形成との関係が示され [6], 帯状流の形成に因んでゾノストロフィーの名前が与えられた [7]。詳細についてはレビュー論文 [8] の7節を参照頂きたい。

本章の構成は次の通りである。まず4.2.2から4.2.4ではゾノストロフィーについて、表式、保存の影響、保存量とされる理由を中心に概説する。4.2.5から4.2.7ではゾノストロフィーの保存性とその大規模構造形成への影響について、筆者らの研究を中心に紹介する。

4.2.2 支配方程式系

簡単のため幅 2π の2重周期領域とする。HM方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\nabla^2 \psi - \frac{1}{R^2} \psi \right) + \beta \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

波数空間では以下のように表される。

$$i \frac{\partial \hat{\psi}_{\mathbf{k}}}{\partial t} = \omega_{\mathbf{k}} \hat{\psi}_{\mathbf{k}} + i \sum_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}}{|\mathbf{k}|^2 + R^{-2}} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \hat{\psi}_{\mathbf{k}_1} \hat{\psi}_{\mathbf{k}_2} \quad (2)$$

ここで δ はクロネッカーのデルタ、 $\mathbf{k} = (k, l)$ は2次元波数ベクトルで $\mathbf{x} = (x, y)$ に対応し、 $\mathbf{k}_1 = (k_1, l_1)$, $\mathbf{k}_2 = (k_2, l_2)$, $\hat{\psi}_{\mathbf{k}}$ は ψ のフーリエ係数である。

$$\hat{\psi}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{2\pi} \iint \psi(\mathbf{x}, t) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d\mathbf{x}, \quad (\hat{\psi}_{\mathbf{k}}^* = \hat{\psi}_{-\mathbf{k}}) \quad (3)$$

$\omega_{\mathbf{k}}$ はロスビー波の分散関係式、

$$\omega_{\mathbf{k}} = -\beta k (|\mathbf{k}|^2 + R^{-2})^{-1} \quad (4)$$

相互作用の係数 $W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ は以下で表される。

$$W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = (4\pi)^{-1} (k_1 l_2 - k_2 l_1) (|\mathbf{k}_2|^2 - |\mathbf{k}_1|^2) \quad (5)$$

4.2.3 保存量とゾノストロフィー

HM方程式 (1) は二つの厳密な保存量、エネルギー (E) とエンストロフィー (Ω) を持つ。波数空間ではそれぞれ以下のように表される。

$$E = \sum_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}, \quad \text{and} \quad \Omega = \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{k}|^2 \varepsilon_{\mathbf{k}} \quad (6)$$

ここで $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ は、2次元波数空間において各波数成分が持つ

エネルギーに相当し、以下で定義される。

$$\varepsilon_k = \frac{1}{2} (|\mathbf{k}|^2 + R^{-2}) |\hat{\phi}_k|^2 \quad (7)$$

$|\mathbf{k}|^2$ 及び R^{-2} に比例する部分は、それぞれ運動エネルギー及びポテンシャルエネルギーに相当する。エンストロフィーの保存によりエネルギーの逆カスケードが起こり、大規模運動が卓越する[9]。

ゾノストロフィー (Z) は上記(6)と同様に、 ε_k に重み係数をかけた総和で表される。

$$Z = \sum_k \zeta_k \varepsilon_k \quad (8)$$

ここで係数 ζ_k は以下のように複雑な式である。

$$\zeta_k = \frac{1}{\omega_k} \left\{ \tan^{-1} \left[\frac{(1+k\sqrt{3})}{R|\mathbf{k}|^2} \right] - \tan^{-1} \left[\frac{(1+k\sqrt{3})}{R|\mathbf{k}|^2} \right] \right\} \quad (9)$$

ゾノストロフィーの保存がエネルギーの逆カスケードに及ぼす影響は、係数 ζ_k の分布を見ることで定性的に理解できる。 ζ_k の等値線は図1のように垂鈴の形になっており、 l 軸上 ($k=0$) では成分によらず一定値にとどまる一方で、 k 軸上 ($l=0$) では原点に近づくにつれて急激に大きくなる。逆カスケードによってエネルギーが低波数へと輸送されるにあたり、図1のような係数を持つ量 Z が保存するためには、より多くのエネルギーが ζ_k の値の小さい l 軸周辺に輸送される必要がある。これにより逆カスケードは非等方的になり、 x 方向波数 k の小さい、東西方向に引き伸ばされた構造を持つ帯状流が卓越する。 Z の保存による帯状流形成の詳細な説明は文献[6, 7]を参照いただきたい。

4.2.4 保存量が満たすべき条件

エネルギーとエンストロフィーはHM方程式(1)の厳密な保存量であるのに対して、ゾノストロフィーは弱非線形の極限においてのみ保存量となる。式(9)の複雑な形はこの条件に由来している。今、系の代表長さを $\mathcal{L}$ 、代表速度を $\mathcal{U}$ とすると、 $\phi \sim \mathcal{U}\mathcal{L}$ とスケールされるため、

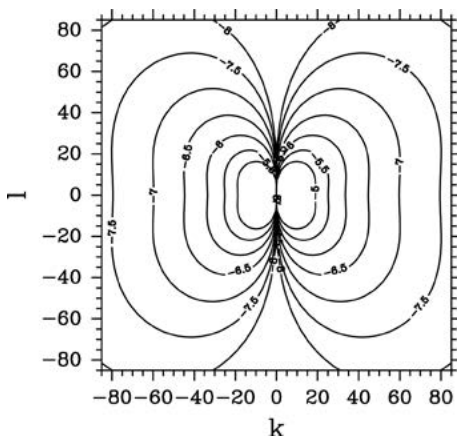


図1 ゾノストロフィーの係数 ζ_k の分布 (数字は 10^x を表す)。等値線の値は k 軸に沿って原点に近づくにつれて大きい。(文献[12]の Fig.1 を引用)

HM方程式(1)における非線形項の線形項に対する相対的な大きさは、以下のラインズ数で特徴付けられる。

$$Rh = \mathcal{U}/(\beta\mathcal{L}) \quad (10)$$

弱非線形の極限は $Rh \ll 1$ の場合に対応する。

保存量が満たすべき条件を考えるために、ある重み係数 f_k を持つ量 Φ を考える。

$$\Phi = \sum_k f_k \varepsilon_k \quad (11)$$

Φ の時間微分をとり、 $\hat{\phi}_k$ の時間微分に式(2)を代入し、対称性を考慮して整理すると以下を得る。

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} P_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \delta_{-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \hat{\phi}_k \hat{\phi}_{\mathbf{k}_1} \hat{\phi}_{\mathbf{k}_2} \quad (12)$$

ただし $P_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ は以下で定義される。

$$P_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} = f_k W_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} + f_{\mathbf{k}_1} W_{\mathbf{k}_2, \mathbf{k}} + f_{\mathbf{k}_2} W_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1} \quad (13)$$

式(12)は、 Φ の時間変化が非線形三波相互作用 ($\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}$ を満たす波数成分 $\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2$) の寄与の足し合わせとして表されることを意味する。

次に、 $Rh \ll 1$ で弱非線形の極限の場合を考える。この極限においては、非線形三波相互作用が以下の三波共鳴の関係式を満たすものに限定される[10]。

$$\mathbf{k} + \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{0}, \quad \omega_k + \omega_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} = 0 \quad (14)$$

この場合、式(13)の $P_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$ を更に整理して、 $(\omega_k f_k + \omega_{\mathbf{k}_1} f_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} f_{\mathbf{k}_2})$ の因子をくり出すことができる。つまり、三波共鳴の関係式(14)に加えて以下が成立すれば、弱非線形の極限において Φ は保存量である[11]。

$$\omega_k f_k + \omega_{\mathbf{k}_1} f_{\mathbf{k}_1} + \omega_{\mathbf{k}_2} f_{\mathbf{k}_2} = 0 \quad (15)$$

条件式(15)を満たし、かつ有限になる f_k として、 $f_k = 1$ と $f_k = |\mathbf{k}|^2$ がある。これらはそれぞれ式(6)のエネルギーとエンストロフィーの係数に対応する。条件式を満たす f_k として新しく Balk に発見されたのが、式(9)のゾノストロフィーの係数 ζ_k である[4, 5]。

4.2.5 数値シミュレーションによる検証

数値シミュレーションによってゾノストロフィーの保存を検証した結果について、文献[12]より紹介する。支配方程式はHM方程式(1)とし、切断波数付近におけるエンストロフィーの非物理的な蓄積を防ぐために、高波数域で選択的に作用する高階粘性項を導入している。幅 2π の二重周期領域を考え、切断波数を85 (対応する格子点数 256^2 、非線形項の計算に2/3ルールを適用)とし、空間方向はスペクトル法、時間方向は4次ルンゲ・クッタ法を用いて数値積分した。流線関数 ϕ の初期値は、1次元エネルギースペクトルが波数15にピークを持つ等方ランダムなものとし、初期のラインズ数を1程度に設定した。

図2は最終状態における流線関数 ϕ の分布 (左パネル)

と2次元波数空間上のエネルギー分布（右パネル）を示している。物理空間では東西方向（ x 方向）に引き伸ばされた帯状の流れ場が形成され、波数空間ではエネルギーは l 軸の周辺に集まり、原点付近には良く知られた垂鈴形のエネルギー低密度領域が形成されている。

図3は保存量の時間発展を調べたものである。エネルギー（実線）はほぼ変化せず良く保存されている一方で、エントロフィー（破線）は高階粘性のために急激に減少している。ゾノストロフィー（丸付きの破線、パネル中央）は時間発展と共に増加し、最終状態では初期値の2倍弱までになる。保存量ではない無関係の量（三角付きの実線、パネル上部）が3倍以上に増加しているのに比べると、ゾノストロフィーは比較的良く保存している。

4.2.6 離散系への拡張

ゾノストロフィーの保存量としての理解を困難にしているのは、それが三波共鳴の相互作用の間でしか厳密に保存されないことである。第一に、私達が興味を持つ地球・惑星流体等の実際の現象や数値シミュレーションでは領域長さは有限である。有限領域では波数空間が離散的であるため、共鳴の関係式(14)を満たす波数成分の数は少なく、それに伴い三波共鳴の相互作用の役割も限定されてしまう[8, 12]。第二に、多くのシミュレーションでは $Rh < 1$ の条件は成立しても、極限の近似が成立するほど Rh は小さくないために、非共鳴の相互作用も時間発展において役割を果たす。

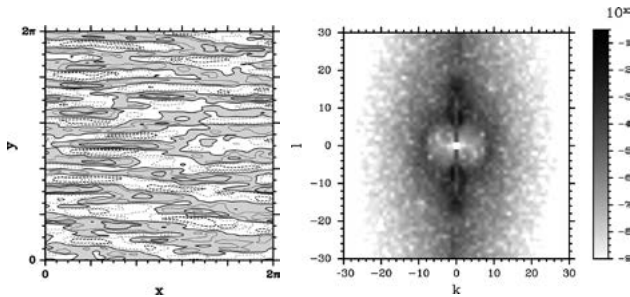


図2 (左) 流線関数 ψ の等値線図。灰色の領域は正の値を表す。(右) 2次元波数空間におけるエネルギー ε_k の分布（文献[12]のFig. 5, Fig. 7を引用）。

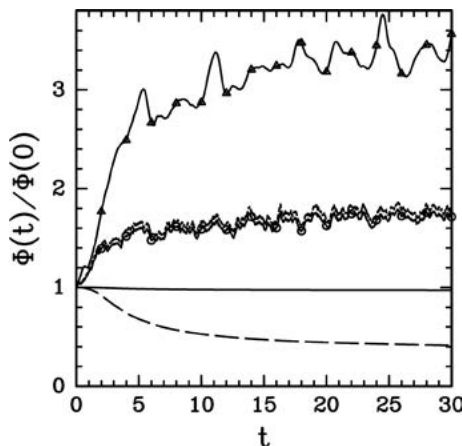


図3 各量の時間発展をそれぞれの初期値で規格化したもの（文献[12]のFig. 8を引用）。

Rh がある程度小さい場合には、関係式(14)を近似的に満足する「共鳴に近い相互作用」[13, 14]が帯状流形成において重要であることが指摘されている。共鳴に近いならば、同様に式(15)も近似的に満足されることで、ゾノストロフィーは近似的に保存されることが期待される。

非共鳴の三波相互作用に対してもゾノストロフィーの重要性を示すことができれば、有益であろう。以下では、この動機に基づく文献[12]の取り組みについて紹介する。

弱非線形の場合、非共鳴の三波相互作用に対して以下の近似が成り立つ。

$$i \frac{d}{dt} (\hat{\phi}_k \hat{\phi}_{k_1} \hat{\phi}_{k_2}) = (\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}) \hat{\phi}_k \hat{\phi}_{k_1} \hat{\phi}_{k_2} + O(\hat{\phi}^4) \quad (16)$$

この近似式を用いて式(12)の右辺を更に変形すると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{3} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{P_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}}{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}} \delta_{-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} \hat{\phi}_k \hat{\phi}_{k_1} \hat{\phi}_{k_2} \right) + O(\hat{\phi}^4) \quad (17)$$

この式が Φ の変動に対する非共鳴相互作用からの寄与を表している。そこで、時間微分の中の項を全ての波数成分について2乗和を取ったものを以下のように I と定義し、

$$I = \left[\sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \frac{P_{\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}}{\omega_k + \omega_{k_1} + \omega_{k_2}} \delta_{-\mathbf{k}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2} |\hat{\phi}_k| |\hat{\phi}_{k_1}| |\hat{\phi}_{k_2}| \right]^2 \quad (18)$$

I を保存性の指標として考える。 I が小さくなるように係数 f_k を選ぶことができれば、 Φ はよく保存されるだろう。

係数 f_k を成分に持つような縦ベクトルを F と定義すると、式(18)の指標 I は以下のように表すことができる。

$$I = \mathbf{F}^T \mathbf{S} \mathbf{F} \quad (19)$$

ここで S は対称行列である。即ち、 I をベクトル F の半正定値対称二次形式で表すことにより、固有値解析が可能になる。

流線関数に適当な分布を仮定し、指標 I を最小化するような係数 f_k を固有値解析および最小化問題を解くことで数値的に求める。ただし、自明な解としてエネルギーとエントロフィーに対応する係数（ $f_k = 1$ および $f_k = |\mathbf{k}|^2$ ）が得られるので、拘束条件を課すことによりこれらの自明解を除外する。

図4(a)の点線は、切断波数 $K_T = 20$ の場合について、最小化問題の解に対応する係数 f_k の等値線を示している。 f_k の等値線は垂鈴形になっており、波数10より小さい領域ではゾノストロフィーの係数 ζ_k （実線）とおおむね一致している。一方で、高波数側では切断波数の影響により f_k はノイズ的な分布になっている。図4(b)は切断波数を $K_T = 85$ に増やした結果を示している。点線と実線の一致は良くなっており、最小化問題の解 f_k はゾノストロフィーの係数 ζ_k に収束しているように見える。

この結果は、非共鳴の三波相互作用に対してもゾノストロフィーと似た係数を持つ量がよく保存されることを示している。上記の手法で求めた係数 f_k を持つ量 Φ は、領域が有限で波数空間が離散的になる場合に、ゾノスト

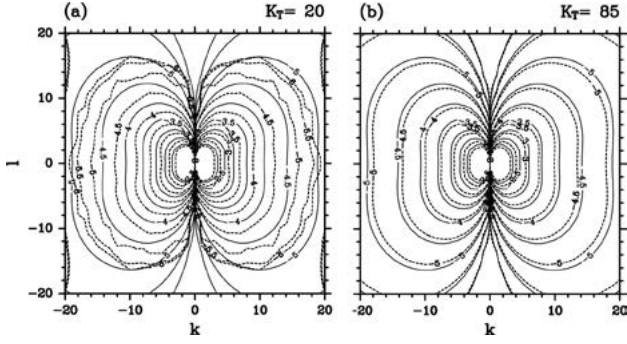


図4 条件付き最小化問題の解として得られた係数 ξ_k (点線). (a) 切断波数 $K_T = 20$, (b) $K_T = 85$. 実線はゾノストロフィーの係数 ζ_k .

ロフィーを拡張したものと考えることができる.

本節の手法は最小化問題を解くことにより保存量を数値的に探索するものであり, 支配方程式が変わっても応用できるのが一つの利点である. 文献[15]では, HM方程式と同様に乱流からの帯状流形成が知られている回転球面上の順圧渦度方程式[16, 17]についても, 本節の手法を応用することにより, 保存量を数値的に求めている.

4.2.7 長波極限のHM乱流

最後に, HM乱流における大規模構造形成と保存量の関係を明瞭に確認できる興味深いパラメータ領域として, 長波極限の場合を文献[18]の結果から紹介する. 長波極限とは, 着目する運動のスケール L に対して $L/R \gg 1$ が成立する場合を指す. HM方程式(1)に漸近展開および適当な座標変換を行うことで, 長波極限における漸近形を以下のように導出できる.

$$-\frac{1}{R^2} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \beta R^2 \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} = 0 \quad (20)$$

この式において非線形項の線形項に対する比を評価すると, 代表速度 U として, 以下の無次元数が得られる.

$$\gamma = \frac{\beta R^2}{U} \quad (21)$$

またロスビー波の分散関係式として以下が得られる.

$$\omega_k = \gamma |\mathbf{k}|^2 k \quad (22)$$

長波極限において, 式(9)のゾノストロフィーの係数 ζ_k を漸近展開すると, 最低次と次の次数の項の両方が保存量の条件を満たすことが示されている. まず最低次の項に対応する量を Z とすると,

$$Z = \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \quad (23)$$

$$\xi_{\mathbf{k}} = \begin{cases} 1/|\mathbf{k}| & (|\mathbf{l}| < \sqrt{3}|\mathbf{k}|) \\ 0 & (|\mathbf{l}| > \sqrt{3}|\mathbf{k}| \text{ or } |\mathbf{k}| = 0) \\ 1/(2|\mathbf{k}|) & (|\mathbf{l}| = \sqrt{3}|\mathbf{k}| \text{ and } |\mathbf{k}| \neq 0) \end{cases} \quad (24)$$

であり, 次の次数の項に対応する量を S とすると,

$$S = \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \quad (25)$$

$$\eta_{\mathbf{k}} = \begin{cases} k^2/(3k^2 - l^2) & (|\mathbf{l}| \neq \sqrt{3}|\mathbf{k}|) \\ 1/3 & (|\mathbf{l}| = \sqrt{3}|\mathbf{k}| \text{ and } |\mathbf{k}| \neq 0) \\ 0 & (|\mathbf{k}| = 0) \end{cases} \quad (26)$$

である. 量 S は文献[4]に発見されたもので, ゾノストロフィーと呼ばれる. 一方で量 Z は後に文献[18]に発見されたもので, セミアクションと名付けられた[8].

式(26)の係数 $\eta_{\mathbf{k}}$ は符号が一定ではないために, 4.2.3の図1で行ったような, エネルギーのカスケードに対する影響を議論するのは難しい. 一方でセミアクションの係数 $\xi_{\mathbf{k}}$ はゼロ以上なので, その分布からエネルギーのカスケードに対する影響を調べることができる.

図5は係数 $\xi_{\mathbf{k}}$ の分布を示している. 原点で交差する2本の直線は $l = \pm\sqrt{3}k$ を表している. 二直線より k 軸側では $\xi_{\mathbf{k}} = 1/|\mathbf{k}|$ で原点に近づくほど大きくなり, 一方で l 軸側では $\xi_{\mathbf{k}} = 0$ (白色の領域)である. このような係数を持つ量が保存する場合, 図1と同じ議論を適用すると, エネルギーは図5の白い領域に集まることが予測される.

4.2.4と同様の数値シミュレーションを行うことで上記の予想を確かめた結果が, 図6から8に示されている. 2次元エネルギースペクトルが波数20にピークを持つ等方ランダムな初期場 [図6(a)] から時間発展し, 逆カスケードによってエネルギーは徐々に小さい波数の方へと輸送される. $\gamma = 0$ の場合には, 最終状態も等方的である [図6(b)] が, $\gamma = 5$ の場合には, 多くのエネルギーが二直線よりも l 軸側に集まっているのがわかる [図6(c)]. 更に, $\gamma = 20$ の場合には l 軸側に集まるだけでなく, 二直線の周囲に集まっている [図6(d)].

図7は, 角度 θ を $\tan \theta = |l|/|k|$ と定義し, 2次元波数空間におけるエネルギーの角度分布を示している. $\gamma = 0$ の場合には等方的なエネルギー分布になっているが, $\gamma = 5$, 20の場合には多くのエネルギーが $60^\circ < \theta < 90^\circ$ に集まり, $\gamma = 20$ では更に $\theta = 60^\circ$ に集中しているのがわかる.

図8は, セミアクション Z の時間発展を示している. $\gamma = 0$ の場合, Z は時間と共に急激に増加してしまい全く

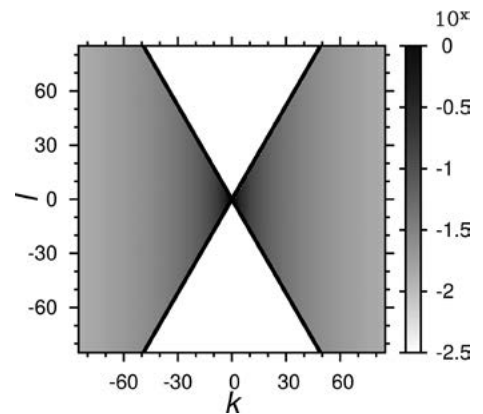


図5 セミアクションの係数 ξ_k の分布. 黒色実線の2本の直線は $l = \pm\sqrt{3}k$. l 軸を含む白色の領域は $\xi_k = 0$ を表す. k 軸を含む灰色の領域では $\xi_k = 1/|\mathbf{k}|$.

保存していない。一方で $\gamma = 5, 20$ の場合は Z は良く保存している。このような Z の保存が、図6, 7で見られた非等方的なエネルギーカスケードに対応している。

4.2.8 まとめ

ここまで、長谷川-三間方程式に支配される乱流（HM乱流）における帯状流形成を含む大規模構造形成について、ゾノストロフィーと呼ばれる保存量の保存と、その影響によるエネルギーカスケードの非等方化という観点から筆者らの研究を中心に紹介してきた。ゾノストロフィーは弱非線形の場合にのみ良く保存される近似的な保存量であるため、乱流のシミュレーションからその重要性を直接確かめるのは簡単ではない。また、ゾノストロフィーの保存においては（厳密または近似的に）共鳴関係にある三波相互作用が重要な役割を果たすが、これらの相互作用は他の帯状流形成メカニズム（波動-乱流境界の議論やゾノストロフィック不安定など）においても役割を果たし得るため、異なるメカニズム間の重要性の切り分けも難しい。

しかしながら、本章4.2.6のように少し注意深い解析をすることによって、また本章4.2.7の長波極限のような特別な場合を考えることによって、ゾノストロフィーの保存性および大規模構造形成に及ぼす重要性を確かめることができる。

参考文献

- [1] P.B. Rhines, J. Fluid Mech. **69**, 417 (1975).
- [2] G. K. Vallis and M. E. Maltrud, J. Phys. Oceanogr. **23**, 1346 (1993).
- [3] K. Srinivasan and W. R. Young, J. Atmos. Sci. **69**, 1633 (2012).
- [4] A.M. Balk, S. V. Nazarenko and V. E. Zakharov, Phys. Lett. A **152**, 276 (1991).
- [5] A.M. Balk, Phys. Lett. A **155**, 20 (1991).
- [6] A.M. Balk, Phys. Lett. A **345**, 154 (2005).
- [7] S. Nazarenko and B. Quinn, Phys. Rev. Lett. **103**, 118501 (2009).
- [8] C. Connaughton, S. Nazarenko and B. Quinn, Phys. Reports **604**, 1 (2015).
- [9] R. Fjørtoft, Tellus **5**, 225 (1953).
- [10] M. Yamada and T. Yoneda, Physica D **245**, 1 (2013).
- [11] V.E. Zakharov and E.I. Schulman, Physica D **1**, 192 (1980).
- [12] I. Saito and K. Ishioka, Theoretical and applied mechanics Japan **62**, 13 (2013).
- [13] Y. Lee and L.M. Smith, J. Fluid Mech. **576**, 405 (2007).
- [14] E. Kartashova, Physica D **54**, 125 (1991).
- [15] I. Saito and K. Ishioka, J. Meteor. Soc. Japan **94**, 26 (2016).
- [16] G.P. Williams, J. Atmos. Sci. **35**, 1399 (1978).
- [17] S. Yoden and M. Yamada, J. Atmos. Sci. **50**, 631 (1993).
- [18] I. Saito and K. Ishioka, Phys. Fluids **25**, 076602 (2013).

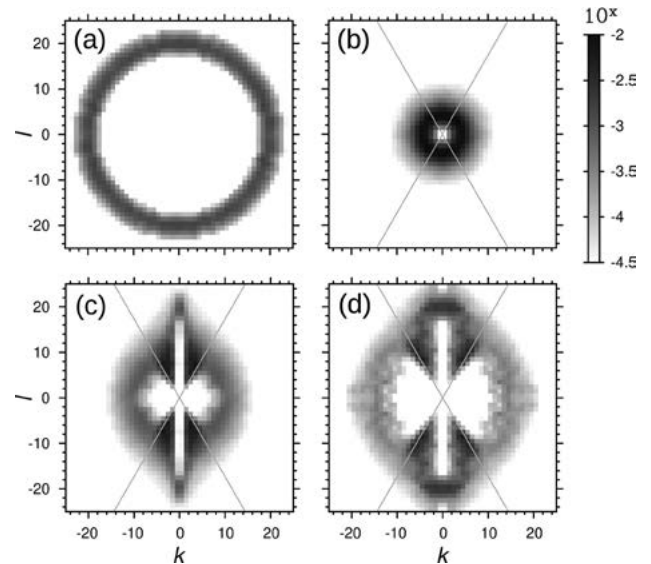


図6 2次元波数空間におけるエネルギー分布。(a)初期状態。波数20にピークを持つ。(b)最終状態($\gamma = 0$)。(c)最終状態($\gamma = 5$)。(d)最終状態($\gamma = 20$)。パネル(b)-(d)内の灰色の2直線は $l = \pm\sqrt{3}k$ を表す。

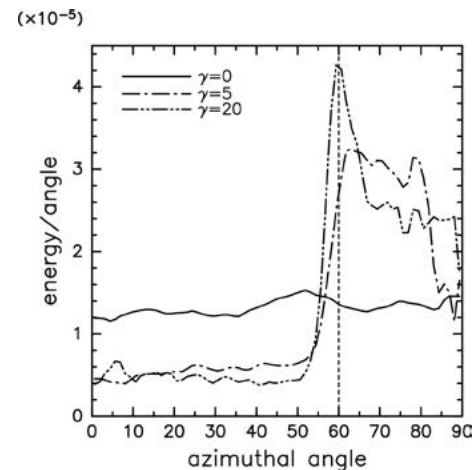


図7 最終状態での、2次元波数空間におけるエネルギーの角度分布。 $\gamma = 0$ (実線), $\gamma = 5$ (1点鎖線), $\gamma = 20$ (2点鎖線) の場合の結果。横軸は角度 $\theta = \tan^{-1}(|l|/|k|)$ で、 $\theta = 60^\circ$ は $l = \pm\sqrt{3}k$ の二直線に対応する。

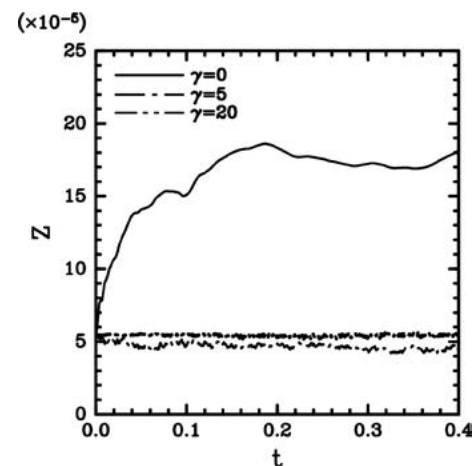


図8 セミアクションの時間発展。 $\gamma = 0$ (実線), $\gamma = 5$ (1点鎖線), $\gamma = 20$ (2点鎖線)。

小特集 2次元回転系上の乱流における大規模構造形成

4.3 β 平面乱流における大規模構造と局所フラックスベクトル

4.3 Large-Scale Structures and Local-Flux Vectors in β -Plane Turbulence

高岡正憲, 横山直人¹⁾, 佐々木英一²⁾

TAKAOKA Masanori, YOKOYAMA Naoto¹⁾ and SASAKI Eiichi²⁾

同志社大学機械理工学科, ¹⁾ 東京電機大学機械工学科, ²⁾ 秋田大学システムデザイン工学科

(原稿受付: 2023年1月20日)

β 平面乱流中に現れる大規模構造の生成維持機構とエネルギー輸送の関係を, 波数平面での局所フラックスベクトルを用いて調べた。 β -平面乱流は大規模な帯状流と低波数側に非等方の波動乱流と高波数側に等方の渦乱流を含む異種共存乱流である。エネルギーやゾノストロフィの局所フラックスベクトル場は, 逆カスケードしてラインズ波数付近で向きを変え, 臨界平衡からの期待と矛盾しない結果となった。最終的に流れ込む波数と帯状流やダンベルスペクトルとの関係を議論した。最後に異種共存乱流を示す類似の系への適用性や力学系の視点も含めて小考を記した。

Keywords:

local-flux vectors, conserved quantity, heterogeneous coexistence turbulence, β -plane.

4.3.1 はじめに

地球を含むほとんど全ての惑星の大気において帯状流という大規模構造が観測され, 古くから多くの人々を魅了してきた。他方, 磁場に閉じ込められたプラズマにおいても帯状流が現れることが知られている。外力や磁場によって非等方性を持つ乱流系では, 大規模構造と波動と渦とが共存する状態 (異種共存乱流と呼ぶ) がテーパートップサイズから宇宙規模まで数多く存在する。

渦と渦の相互作用に基づくコルモゴロフ理論[1]に対し, 波と波の相互作用に基づくのが弱乱流理論である。弱乱流理論は, 波の非線形相互作用が一般的に弱く, 非線形相互作用の中でも共鳴関係を満足する波数間でのみエネルギー輸送が生じることを示す[2, 3, など]。弱乱流理論に従って, プラズマ乱流の帯状流は, 非線形相互作用によるドリフト波からのエネルギー輸送によって生成されると考えられているが[4], 時間スケールの全く異なる帯状流とドリフト波のような異種乱流間相互作用に弱乱流理論を適用することの是非は自明ではない。Galtierら[5-8]は, 回転や磁場が極端に強い場合に上記の回転系とプラズマ系にアナロジーが見られることを, 弱乱流理論の枠組みの中で示している。また, エネルギー輸送は, 一般には共鳴による非局所的相互作用が支配的と言われているが, 波数空間で局所的な流れで表現できる状態があり, その時の非線形の拡散方程式も導出している。

線形の時間スケールが非線形の時間スケールより十分小さいとする弱非線形性の仮定は, ほぼすべての波動乱流系において, 小波数または大波数の少なくとも一方で破綻する[9-11]。このとき, 波数領域ごとに支配的な乱流の種類が異なる異種乱流が共存することになる[12-14]。

線形と非線形の時間スケールが同程度の各波数で系が平衡状態にあるという臨界平衡の考えは, 非等方乱流のスケージング則やスペクトルの予測に使われてきた。ここからの自然な帰結として, 弱乱流と等方的なコルモゴロフ乱流の間のバッファ領域に沿ってエネルギーが輸送されると予想されている[3, 15, 16]。

異種共存乱流の生成維持機構の全貌を明らかにするためには, 外力による注入から粘性による散逸までの波数間非線形エネルギー輸送を, 波数空間で局所的なフラックスとして同定する必要がある。近年, 非線形相互作用による波数間のエネルギー輸送の不定性を非線形相互作用の分解によって除去し, 波数間エネルギー輸送を一意に決定する方法が提案されているが[17, 18], コンセンサスが得られているとは言い難い[19, 20]。波数空間の局所的なエネルギーフラックスに関して, [21]では, エネルギーフラックスベクトルのユークリッドノルムを作用とする最小作用の原理に基づいて, 非等方乱流の最小ノルムエネルギーフラックスが提案されている。

2次元乱流では, 複数の非粘性保存量が同時に存在する[22, 23] (本小特集の2章も参照)。2次元一様等方乱流では, エンストロフィの順カスケードとエネルギーの逆カスケードの2重カスケードが, 両物理量の保存則に基づいて予測されているが[24, 25], その検証は未完了である (例えば[26, 27])。他方, 本小特集で繰り返し紹介されている長谷川-三間 (HM) 方程式の乱流は, 非等方な帯状流を持つ異種共存乱流であり, 上記の議論はそのままでは適用できない。我々の論文[28] (以下TYS2022) では, 一般の保存量に対するフラックスベクトルの定量化法を提案し, HM方程式の異種共存乱流を例として, 臨界平衡

corresponding author's e-mail: mtakaoka@mail.doshisha.ac.jp

および2重カスケードとの整合性を検証した。

本章では、TYS2022をベースに、 β 平面乱流に現れる帯状流の生成維持機構を、局所フラックスベクトルを用いて調べた結果を報告する。最後に、同手法を類似の系への適用性や力学的視点も含めた少考を記した。

4.3.2 定式化

4.3.2.1 基礎方程式と保存量

波数空間での β 平面流の基礎方程式は

$$\frac{\partial \xi}{\partial t}(\mathbf{k}) = \sum_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2} (\mathbf{k}_1 \times \mathbf{k}_2)_z \xi(\mathbf{k}_1) \hat{\phi}(\mathbf{k}_2) - i k_x \beta \hat{\phi}(\mathbf{k}), \quad (1)$$

と書ける。ここで、 ξ と $\hat{\phi}$ はそれぞれ渦度と流れ関数 ϕ のフーリエ係数であり、[29]と同様にロスビー半径（ラーモア半径に対応）を無限大にとると、これらは $\xi = (k_x^2 + k_y^2) \hat{\phi}$ の関係を満たす。

式(1)はエネルギーとエンストロフィの2つの2次の保存量を持ち、波数領域ごとに、帯状流、ラインズスケール[30]より大きいスケールの波動乱流、小スケールの2次元ナビエ-ストークス乱流と言った複数の流れの状態を有する。これらは、低波数領域のダンベルスペクトル[31]や、高波数領域の等方的エネルギー-エンストロフィ2重カスケード[24, 25]に対応する。エネルギーフラックスの臨界平衡に基づく予想[3]はあるものの、これまで定量的には評価されていない。

β 平面の波動乱流では、弱非線形性を仮定した弱乱流理論の枠組みの中で、ゾノストロフィも保存量となる[32]（本小特集の4.2章も参照）。[33]では、共鳴相互作用のみに対する保存量であるゾノストロフィを非共鳴相互作用に拡張した準保存量も提案されている。この保存量を含めてフィヨルトフトの議論を一般化することでゾノストロフィを含む3重カスケードの向きを絞り込むことができ、波数空間で局在した初期条件の非定常乱流に対して、波数空間での（準）保存量の重心座標の軌跡との比較が行われている[29]。このアイデアは直感的で受け入れやすいが波数空間の局在領域のみで有効である。次小節で提案する局所フラックスベクトルは波数空間の全領域でのフラックスの定量化を行うものである。

4.3.2.2 局所フラックスベクトル

2次元等方乱流では、波数空間での保存量の輸送量は波数のノルム $k=|\mathbf{k}|$ のスカラ値関数として、支配方程式中の非線形相互作用項から導出されるスペクトル方程式を用いて与えられる。時刻 t に $k=|\mathbf{k}|=\text{const.}$ の円周を通過する、ある保存量 $I(k, t)$ に対応するフラックス $P_I(k, t)$ は、非線形輸送量 $T_I(k, t)$ と次の関係にある：

$$T_I(k, t) + \frac{\partial P_I(k, t)}{\partial k} = 0. \quad (2)$$

一方、非等方乱流のフラックスは、波数空間の保存量の流れの向きを持った、波数ベクトル $\mathbf{k}$ のベクトル値関数となる。ベクトル場のフラックスを描くことは、カス

ケード理論や拡散モデル[34, 35]のように、保存量の波数空間での正味の輸送では局所相互作用が支配的であることを暗黙的に仮定することを意味する。等方乱流においては、非局所相互作用が支配的ではないことが知られている[19, 20]。同様に、非等方乱流で保存量 $I(\mathbf{k}, t)$ に対応する非線形輸送量 $T_I(\mathbf{k}, t)$ を用いて、フラックスベクトル $\mathbf{P}_I(\mathbf{k}, t)$ を定義することを考える。 $I(\mathbf{k}, t)$ は波数空間の保存量なので $T_I(\mathbf{k}, t)$ と $\mathbf{P}_I(\mathbf{k}, t)$ の間には連続の式

$$T_I(\mathbf{k}, t) + \text{div}_{\mathbf{k}} \mathbf{P}_I(\mathbf{k}, t) = 0, \quad (3)$$

が成り立つとする。ここで、 $\text{div}_{\mathbf{k}}$ は波数空間での発散演算子を表す。しかし、このスカラ方程式(3)のみではベクトル $\mathbf{P}_I(\mathbf{k}, t)$ は一意に定まらない。

式(1)より、波数 $\mathbf{k}$ は、 $\mathbf{k}=\mathbf{k}_1+\mathbf{k}_2$ を満たす3波相互作用によって $\mathbf{k}_1$ と $\mathbf{k}_2$ から2次の保存量 I の輸送を受ける。このとき、 $\mathbf{k}$ がこの3波相互作用を介して受け取る I の総量はスペクトル方程式によって得られるが、 $\mathbf{k}_1$ あるいは $\mathbf{k}_2$ から $\mathbf{k}$ に輸送される I は個別には得られない。すなわち、波数モード間の1対1の輸送量は、スペクトル方程式からは一意には定まらない[28]。

[21]では、エネルギーに対する式(3)の差分表現より、エネルギーフラックスベクトルのユークリッドノルムを作用とする最小作用の原理に基づいて、最小ノルムエネルギーフラックスベクトルを得た。TYS2022では、スカラポテンシャル $\Phi(\mathbf{k}, t)$ の波数空間での勾配によって与えられる渦なしベクトルを局所フラックスベクトル $\mathbf{P}(\mathbf{k}, t)$ とした（両者の関係はTYS2022参照）。導出過程からわかるように、この局所フラックスベクトルは既知の1次元フラックスの自然な拡張になっている。

4.3.2.3 遷移波数の見積もり

β 平面乱流においては、逆カスケードは、等方乱流とロスビー波乱流の遷移域で向きが変更されて、帯状流のモード（有限波数を持つ k_y 軸上のモード）へと向かうことになる。式(1)の線形項と非線形項とをバランスさせると、 $|\beta k_x \Psi| \sim |k_x k_y Z \Psi|$ であり、 $\beta \sim |k_y Z| = |k_y k^2 \phi| \sim k^2 U$ となり、ラインズ波数 k_R [30]が導かれる。ここで、 Ψ , Z , U はそれぞれ $\hat{\phi}$, ξ , $\hat{u}=ik_y \hat{\phi}$ の特徴的な大きさを表す。他方、臨界平衡の考えに沿って、線形の特異時間と非線形の特異時間とをバランスさせると、ダンベルスペクトルが得られる。線形の特異時間としてロスビー波の周期 $k^2/(\beta|k_x|)$ を、非線形の特異時間としてコルモゴロフに倣って渦回転時間 $(\epsilon k^2)^{-1/3}$ をとりバランスさせると、ダンベルスペクトル $k^8 = k_\beta^5 |k_x|^3$ を得る。ここで、 $k_\beta = (\beta^3/\epsilon)^{1/5}$ で ϵ はエネルギー輸送率である。[31]で示されているように、別の非線形の特異時間を採用するとダンベルスペクトルのトポロジーは保たれるが別の関数形となる。

4.3.3 数値シミュレーション

4.3.3.1 数値計算法

乱流中での帯状流の生成維持機構を調べるために、標準的な2/3-則でエイリアジングを除去するスペクトル法

を用いて、直接数値シミュレーション (DNS) を行った。時間発展の計算には線形項を繰り込んだ4次のルンゲ-クッタ法を用い、2重周期領域 $[0, 2\pi]^2$ で格子点数2048²で計算した結果について報告する。ここでは逆カスケードの非等方化に焦点を当てるために、全エネルギーの大きさが1程度になるように $|\mathbf{k}| \approx 256$ ($=: k_f$) の円周上に等方的な外力を加え、低波数側に亜抵抗の形で項 $\mu_m |\mathbf{k}|^{-2m}$ を高波数側に超粘性の形で項 $\nu_n |\mathbf{k}|^{2n}$ を $m=0.3$, $n=8$, $\mu_m=0.1$, $\nu_n=1.0 \times 10^{-40}$ として統計的定常状態を作った。TYS2022では、ニュートン粘性と超粘性とのハイブリッド型の粘性項を採用したが、本計算では高波数側のフラックスも確保するために、粘性の影響が高波数域により局在するように超粘性のみとした。

4.3.3.2 数値計算結果

ここでは代表例として $\beta=10^3$ とした場合の結果を報告する。4.3.2.3節の見積もりによると、 $k_R \approx 22$ と $k_\beta \approx 1.0 \times 10^2$ となる。図1には、統計的定常状態におけるある時刻の流れ関数場 $\psi(x, y)$ を示してある。x方向に揺らいているが、y方向におよそ10周期を持つ帯状流の構造が見てとれる。

図2は、統計的定常状態にあるデータを平均した2次元エネルギースペクトルである。スペクトルの複素共役性を鑑み波数空間の右半面のみ描いてある。左図に見え

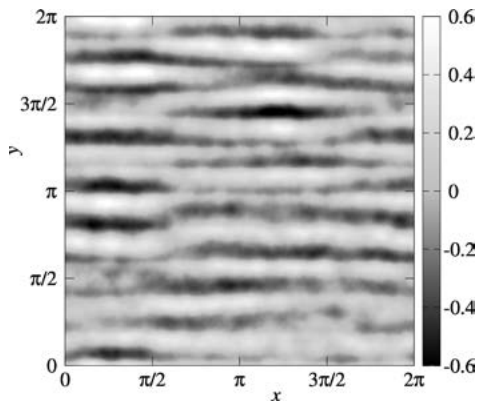


図1 流れ関数場 $\psi(x, y)$ における帯状流の構造。

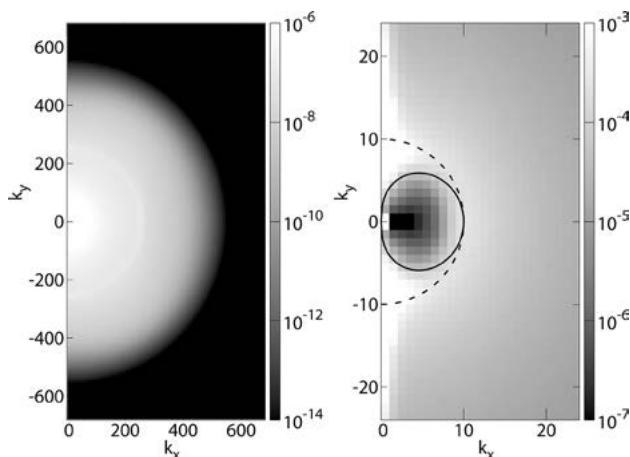


図2 2次元エネルギースペクトル。図示された領域は波数空間の右半面のみで、右図は左図の低波数領域の拡大図。実線および破線はそれぞれ $k_\beta^* = k_\beta^* = 10$ としたときの $|\mathbf{k}| = k_\beta^*$ と $k^3 = (k_\beta^*)^5 |k_x|^3$ である。

る $|\mathbf{k}| \approx 256$ の白色の半円は、外力によるエネルギー注入域である。図2右より大きさ10程度のダンベルスペクトルが見てとれる。 k_y 軸上の $(k_x, k_y) = (0, \pm 10)$ の近傍のエネルギースペクトルのピークが実空間における帯状流の出現に対応している。エネルギースペクトルは図2右の実線と破線で囲まれた領域および k_y 軸上で大きな値をとっている。

図3には従来から使われているフラックスを描いてある (TYS2022参照)。 $P(k)$ と $Q(k)$ はそれぞれエネルギーとエンストロフィの無指向性フラックスで、 $P^1(k_x)$ ($P^1(k_y)$)と $Q^1(k_x)$ ($Q^1(k_y)$)とはそれぞれエネルギーとエンストロフィの k_y (k_x) 方向に積分して1次元化された1方向縮約フラックスである。図3から全体的にはどのグラフも、エネルギーが逆カスケードしエンストロフィが順カスケードするというクライチナンの描像[25]と矛盾しない結果となっている。詳しく見ると、ダンベルスペクトルに対応して、 $P^1(k_x)$ がほぼ負で一定であるのに対し、 $P(k)$ と $P^1(k_y)$ はそれぞれ $k=10$ と $k_y=10$ 付近でプラスに符号を変えている。対して、エンストロフィフラックスは、そのサポートが高波数帯にあり回転の影響をほとんど受けていない。また、外力波数付近では無指向性フラックスは鋭く立ち上がっているが、1方向縮約フラックスは鈍った立ち上がりとなっている。これは、図2からもわかるように、この波数帯でのほぼ等方的分布と無指向性フラックスとは適合しているが、 $k_x(k_y) < k_f$ の1方向縮約スペクトルでは $|\mathbf{k}| > k_f$ の情報も含まれているからである。このような異種共存乱流では局所フラックスベクトルが必要となる。

図4には、エネルギーの局所フラックスベクトル場を図2に対応した領域で描いてある。これらのベクトルは、向きがわかるように同じ長さのベクトルをもちいて、大きさの対数で濃淡付けして、視認性を上げるために飛び飛びの格子点で描いてある。図4左より、外力の波数を示す半円を分水嶺として高波数側と低波数側にほぼ等方的にエネルギーが流出している。

最も注目すべきことは、図4の $|\mathbf{k}| \approx 10$ の半円付近に現れる非等方な構造である。等方的に逆カスケードしてきたエネルギーが、その半円を回り込むように向きを変えて $(k_x, k_y) = (0, \pm 10)$ 付近に流れ込み、図1の帯状流に

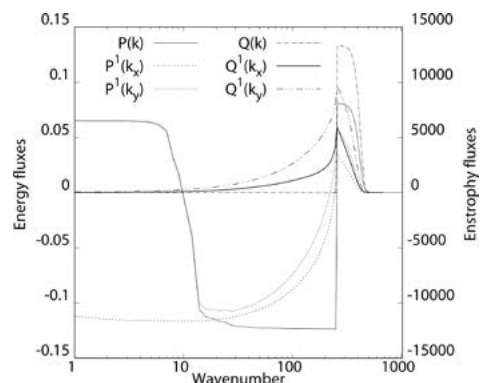


図3 従来型のエネルギーとエンストロフィの無指向性フラックス (P と Q) と1方向縮約フラックス (P^1 と Q^1)。

対応している。加えて、 k_y 軸上では非線形性が効かなくなることから、この $(k_x, k_y) = (0, \pm 10)$ を中心にエネルギーが貯まることで、図2に現れているダンベルスペクトルが生成されているというシナリオも見えてくる。

図5にゾノストロフィの局所フラックスベクトル場を描いてある。図5左を見ると、全領域でゾノストロフィがほぼ等方的に逆カスケードしている。高波数域では値が小さいので物理的には大事ではないと思われる。図5右に示された構造はエネルギーの局所フラックスベクトル場のそれとほぼ同じで、 $|k| \approx 10$ 付近から非等方な流れとなっている。両者の局所フラックスベクトルが同様の構造を持つことは興味深い。

4.3.4 まとめと今後

保存量の波数空間での流れに着目して、 β 平面乱流における帯状流の生成維持機構を調べた。カスケード理論と臨界平衡を支持する波数モード間の局所フラックスベクトルを得た。これらの結果は、帯状流の生成維持機構について、高波数から低波数へのエネルギー輸送はラインズ波数程度で等方性を失い、エネルギーはラインズ波数に沿って輸送され帯状流成分に与えられることを示す。さらに、ラインズ波数よりも小さく、ロスビー波の周期

より遅い特性時間を持つ渦構造はエネルギーを保持することができず、帯状流成分へエネルギー注入がおきることが示唆される。なお、ゾノストロフィの局所フラックスベクトルは高波数域で等方な逆カスケードをしており、低波数域ではエネルギーの局所フラックスベクトルとほぼ同じ構造を持っている。

本章で扱った β 平面上の流れは回転球面上の流れの接平面近似であり、回転球面上の2次元乱流でも帯状流が発現する[36, 37]。波数間の等方フラックスを記述する式(2)は、球面の場合、球面調和関数の全波数に関する方程式で与えられるが[38]、非等方性流れに対して素朴な拡張は難しい。Nozawa & Yoden[39]は球面から接平面への射影を考え、接平面群で球面を覆うことで波数空間におけるダンベルスペクトルの出現を示した。このように接平面で球面を覆うことで、我々の提案手法が直接適用可能となる。回転球面上の流れにおける帯状流とエネルギー輸送に関する知見が得られると考えている。

回転や成層の効果による非等方性を含む周期箱流について、本章と同様に我々の提案手法がそのまま適用できる[21]。このとき回転軸や成層の向きを円筒軸とする円筒座標系で、方位角方向に平均を行った2次元面で波数空間を考えればよい。また、惑星大気や地球外殻などと同様にして、3次元球殻内流れについては、球面と同様に接平面を底面とする直方体群で球殻領域を覆うことで、提案手法が適用できると期待している。

本小特集の2章で紹介されているように、 β 平面上の流れはプラズマ物理学におけるHM方程式に対応する。プラズマ物理学の多くの系で非等方の大規模構造が乱流中に自発的に生成される。本章では[29]と同様にラーモア半径（ロスビー半径に対応）を無限大に取ったが、有限の場合にも同様の解析が可能である。このとき、ラーモア半径に相当する波数の付近でエネルギー逆カスケードが等方的にブロックされる。したがってラーモア半径とラインズスケールの大小関係で、エネルギー輸送の非等方性に差異が現れるだろう。拡張長谷川-三間方程式はHM方程式にボルツマン応答を取り込んだモデルであり[40, 41]、ラーモア半径を無限大に取る極限においてHM方程式に帰着される。さらに、長谷川-若谷(HW)方程式は密度とポテンシャルとの連立系で与えられ[42]、断熱度ともいえる結合パラメータの一方の極限ではHM方程式、他方の極限で非圧縮の中性流体の2次元Euler方程式となる。HW方程式には乱流を自発的に維持するのに必要なドリフト波不安定性が含まれている。拡張HM方程式と同様にHW方程式にも拡張版がいくつか存在していて帯状流の生成維持機構が調べられている[41, 43]。これらのモデル式に対して本章で扱った解析手法がそのまま適用できる。しかし、プラズマをエッジとコアに分けるような非一様性を考量する場合、球面のときと同様に局所解析の組み合わせとするなどの工夫が不可欠となる。

カオス力学系的視点から、数値的に求めた定常解や周期解による乱流に潜む本質的な運動が調べられてきた[44]。近年、非回転2次元トーラス上の流れで、広いクラスの

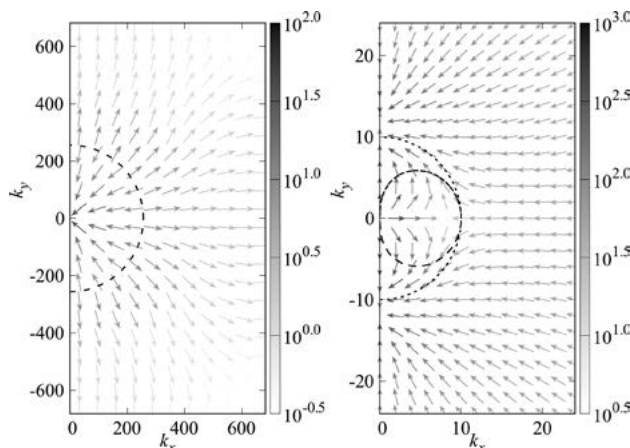


図4 図2に対応した領域のエネルギーの局所フラックスベクトル。左図中の破線の半円は外力の波数 $|k| = k_0$ 、右図中の点線の半円と実線の円は図2のキャプション参照。

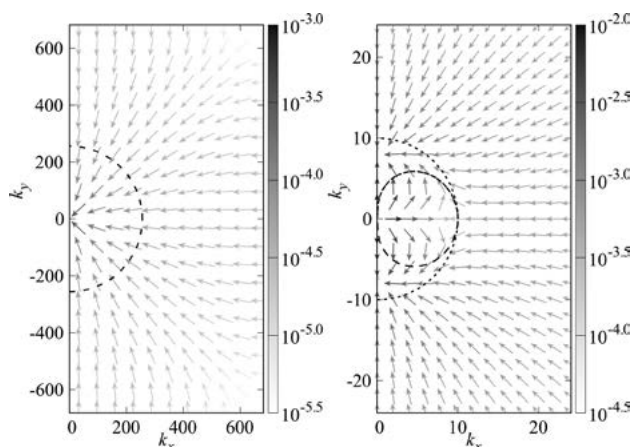


図5 ゾノストロフィの局所フラックスベクトル。図4のキャプション参照。

外力について高レイノルズ数で正と負の1対の渦からなる定常解と周期解が数値的に見つけられた[45]. さらに, 非回転球面上では正と負の2対の渦からなる定常解と周期解が報告されている[46]. これらの解は非自明な解の内で最低波数を持ち分岐解として現れることから, 外力や周期領域のトポロジーによらず, 2次元乱流には低調波不安定が存在することが示唆される. 回転効果を加えたとき, トーラスと球面のどちらでも2次元乱流の長時間積分の漸近状態で帯状流が発現する. この場合でも低調波不安定に起因する帯状流解は存在するかという問題が提起される. なお, 本章で帯状流と逆カスケードの非等方化の関係をみたが, 低調波不安定と逆カスケード理論との関係も明らかではない. 乱流運動を記述する非線形解に本研究で扱った局所フラックスベクトルを適用するところで, 解の力学的性質と保存量輸送の関係を明らかにできると期待している.

謝 辞

本研究は部分的にJSPS科研費JP19K03677, JP21K03883, JP22K03460の助成を受けたものです.

参考文献

- [1] A. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **30**, 301 (1941).
- [2] V.E. Zakharov *et al.*, *Kolmogorov Spectra of Turbulence I* (Springer, Heidelberg, 1992).
- [3] S. Nazarenko, *Wave Turbulence* (Springer, Heidelberg, 2011).
- [4] P.H. Diamond *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **47**, R35 (2005).
- [5] S. Galtier, Phys. Rev. E **68**, 015301 (2003).
- [6] R. Meyrand and S. Galtier, Phys. Rev. Lett. **111**, 264501 (2013).
- [7] S. Galtier *et al.*, Physica D: Nonlinear Phenomena **390**, 84 (2019).
- [8] L. Smith *et al.*, Phys. Rev. Lett. **77**, 2467 (1996).
- [9] L. Biven *et al.*, Phys. Lett. A **280**, 28 (2001).
- [10] A.C. Newell *et al.*, Physica D **152–153**, 520 (2001).
- [11] L.J. Biven *et al.*, Physica D **184**, 98 (2003).
- [12] W.F. Vinen and J.J. Niemela, J. Low Temp. Phys. **128**, 167 (2002).
- [13] N. Yokoyama and M. Takaoka, Phys. Rev. E **89**, 012909 (2014).
- [14] R. Meyrand *et al.*, Phys. Rev. X **8**, 031066 (2018).
- [15] P. Goldreich and S. Sridhar, Astrophys. J. **438**, 763 (1995).
- [16] S.V. Nazarenko and A.A. Schekochihin, J. Fluid Mech. **677**, 134 (2011).
- [17] G. Dar, M. Verma, and V. Eswaran, Physica D **157**, 207 (2001).
- [18] S. Maeyama *et al.*, New J. Phys. **23**, 043049 (2021).
- [19] F. Waleffe, Phys. Fluids A **4**, 350 (1992).
- [20] K. Ohkitani and S. Kida, Phys. Fluids A **4**, 794 (1992).
- [21] N. Yokoyama and M. Takaoka, J. Fluid Mech. **908**, A17 (2021).
- [22] R.T. Pierrehumbert *et al.*, Chaos Solitons Fractals **4**, 1111 (1994).
- [23] T. Watanabe and T. Iwayama, J. Phys. Soc. Jpn **73**, 3319 (2004).
- [24] R. Fjørtoft, Tellus **5**, 225 (1953).
- [25] R. Kraichnan, Phys. Fluids **10**, 2080 (1967).
- [26] G. Boffetta and R.E. Ecke, Annu. Rev. Fluid Mech. **44**, 427 (2012).
- [27] B. Burgess *et al.*, J. Fluid Mech. **767**, 467 (2015).
- [28] M. Takaoka *et al.*, Phys. Rev. Fluids **7**, L012601 (2022).
- [29] S. Nazarenko and B. Quinn, Phys. Rev. Lett. **103**, 118501 (2009).
- [30] P.B. Rhines, J. Fluid Mech. **69**, 417 (1975).
- [31] G.K. Vallis and M.E. Maltrud, J. Phys. Oceanogr. **23**, 1346 (1993).
- [32] A.M. Balk, Phys. Lett. A **155**, 20 (1991).
- [33] I. Saito and K. Ishioka, Theoretical and Applied Mechanics Japan **62**, 13 (2014).
- [34] W.H. Matthaeus *et al.*, Phys. Rev. E **79**, 035401(R) (2009).
- [35] S. Galtier and É. Buchlin, Astrophys. J. **722**, 1977 (2010).
- [36] Y. Hayashi *et al.*, J. Atmospheric Sci. **64**, 4246 (2007).
- [37] K. Obuse *et al.*, Phys. Fluids **22**, 056601 (2010).
- [38] G.J. Boer, J. Atmospheric Sci. **40**, 154 (1983).
- [39] T. Nozawa and S. Yoden, Phys. Fluid **9**, 3834 (1997).
- [40] W. Dorland and G.W. Hammett, Phys. Fluids B **5**, 812 (1993).
- [41] A.J. Majda *et al.*, Phys. Plasmas **25**, 102307 (2018).
- [42] A. Hasegawa and M. Wakatani, Phys. Rev. Lett. **50**, 682 (1983).
- [43] R. Numata *et al.*, Phys. Plasmas **14**, 102312 (2007).
- [44] G. Kawahara *et al.*, Ann. Rev. Fluid Mech. **44**, 203 (2012).
- [45] S.-C. Kim and H. Okamoto, Nonlinearity **28**, 3219 (2015).
- [46] E. Sasaki *et al.*, Physica D: Nonlinear Phenomena **406**, 132438 (2020).

小特集執筆者紹介



お ぶ せ き おり
小 布 施 祈 織

岡山大学学術研究院環境生命自然科学学域准教授。京都大学博士（理学）。専門は主に流体力学・非線形力学。回転球上での帯状構造形成や生物体内での特殊な構造形成など、自然界における構造形成の数理科学的メカニズムの研究を行っています。最近は趣味として生物情報学も始めました。知りたいことや調べたいことはたくさんあるものの、1日のおよそ半分以上を睡眠に費やすため、なかなか進みません。連続睡眠時間の最長記録は約36時間です。



さ とう なお き
佐 藤 直 木

東京大学大学院新領域創成科学研究科複雑理工学専攻助教。東京大学博士（科学）。専門分野は理論プラズマ物理・流体力学・数理物理。プラズマ現象を出発点とする物理と数学を跨ぐ未解決数理課題に関する理論研究を行っている。



や ま だ み ち お
山 田 道 夫

京都大学数理解析研究所特任教授。京都大学名誉教授。東京大学名誉教授。理学博士（京都大学）。専門は流体力学・非線形力学。地球流体などの流れの安定性や乱流などの非線形現象とそれらを調べるためのデータ解析手法を研究しています。プラズマやMHDは複雑で遠くから望む感じだったのですが、定年退職後、アマチュア無線（JA3UJB）を再開し、E層やF層の電離圏プラズマを身近に感じるようになりました。



た け ひろ しん いち
竹 広 真 一

京都大学 数理解析研究所 准教授。博士（理学）（東京大学大学院理学系研究科）。専門は地球流体力学。主に惑星や恒星の大気や内部の流体運動について、数値実験と理論を駆使して研究しています。計算結果を物理的に理解しスッキリと説明することを求めて日々試行錯誤しています。



さい とう いずみ
齋 藤 泉

名古屋工業大学大学院工学研究科 准教授。2016年 京都大学博士（理学）。博士課程在学中は地球・惑星流体におけるパターン形成の問題、名古屋工業大学に移ってからは乱流中の微小粒子群の挙動の問題を中心に研究してきた。



い し おか けい いち
石 岡 圭 一

京都大学大学院理学研究科 教授。京都大学博士（理学）。主に地球や惑星の大気を念頭において波動・乱流に関する研究を行っており、また、それに必要となる数値計算ライブラリを開発・公開している（球面調和関数変換ライブラリとして世界最速であることが自慢）。自分でも多趣味な人間だと思っているが、一番時間を費しているのはプロテニスの観戦。

た か おか まさ のり
高 岡 正 憲

同志社大学理工学部博士後期課程教授。京都大学大学院理学研究科 理学博士（京都大学）。主な研究分野は流体物理学、巨視的乱雑系の統計法則と自己組織構造です。

よ こ やま なお と
横 山 直 人

東京電機大学工学部 教授。京都大学大学院理学研究科 博士（理学）。波動や渦などからなる強弱乱流の共存機構を中心に研究を行っている。

さ さ き えい いち
佐 々 木 英 一

秋田大学システムデザイン工学科 助教。2013年京都大学大学院 博士（理学）取得。回転球面上の乱流の帯状流形成、壁面近傍の乱流について力学系理論を用いた研究を行っています。