



解説

高温超伝導体の数値電磁界解析

—高性能解析技術の開発と応用—

Computational Electromagnetics of High-Temperature Superconductors
-Development and Application of Techniques for High-Performance Analysis-

高山 彰優

TAKAYAMA Teruou

山形大学大学院理工学研究科

(原稿受付：2021年5月23日)

超伝導体は、電力、医療、交通、エレクトロニクスなどの広い分野に応用され、高磁場が生成可能な超伝導電磁石は医療装置や核融合装置などに用いられている。超伝導体は磁場を排除する性質をもつため、超伝導体に磁石を近づけると、非常に強い反発力が発生する。これは、外部磁場を打ち消す遮蔽電流が超伝導体表面で流れていることを意味する。このような遮蔽電流の振る舞いはMaxwell方程式から導出される非線形微分方程式の初期値・境界値問題で書き表される。同問題の離散化によって得られた近似方程式は、計算機と様々な数値計算法を用いて解かれてきた。本稿では高温超伝導薄膜内を流れる遮蔽電流の高性能解析技術を述べる。また、遮蔽電流密度解析の工学的応用として、臨界電流密度の非接触測定法と磁場閉じ込め核融合炉のペレット射出による燃料供給法の数値シミュレーション結果を紹介する。さらに、磁力線の振る舞いや遮蔽電流密度の空間分布を可視化した結果を示す。

Keywords:

finite element method, high-performance analysis, high-temperature superconductors, shielding current density, thin film

1. はじめに

よく知られているように、超伝導体はそのままでなく、線材、バルクや薄膜に形を変えて利用される。例えば、超伝導線材は超伝導電磁石や送電線などに応用されている。超伝導機器やデバイスを開発・実用化するには、臨界温度、上部臨界磁界及び臨界電流密度などの特性値を評価する必要がある。これらの値は、高温超伝導体 (High-Temperature Superconductor: HTS) を特徴付ける重要なパラメータであり、一般に、四端子法で測定されてきた [1]。しかしながら、電圧端子の接触抵抗が大きい場合、超伝導特性の測定精度がノイズの影響を受けて劣化する場合がある。また、ノイズを抑制するためには、金または銀で HTS 試料をコーティングした後、熱処理を施して接触抵抗を低減しなければならない。この処理は、超伝導特性の劣化や HTS 表面の破壊につながる。この理由から、特性値を測定した HTS 試料を実用化するため、試料を破壊しない測定技術が望まれてきた。臨界電流密度を非接触で測定する方法は、誘導法 [2-5]、永久磁石法 [6-9] 及び低温走査レーザー顕微鏡 [10, 11] などがある。

超伝導の実用化で注目されているのは超伝導リニア技術を用いた中央新幹線計画である [12]。1962年からこの計画がスタートし、東京と名古屋の間を2027年に開通すること

Faculty of Science, Yamagata University, YAMAGATA 992-8510, Japan

が決定している。また、近年、この超伝導リニア技術を用いた磁気閉じ込め核融合への燃料供給法が提案されている。これは核融合炉の炉心に燃料ペレットを高速で入射するための新たな手法である。

超伝導現象は偏微分方程式の初期値・境界値問題で表され、様々な超伝導現象が数理モデル化されてきた。一般に、モデル化で得られた方程式を離散化によって近似方程式に帰着させて、コンピュータと数値計算法で近似方程式を解く。これが数値シミュレーションのアプローチであり、この過程によって得られる数値解は、超伝導現象の定量的な理解や予測に役立つ。数値シミュレーションを用いると、入力パラメータの与え方で試験的な実験が可能となるため、実験装置の設計にかかるコストや時間が削減できる。さらに、計算結果を用いることによって、本質的に不可視な物理現象が可視化できるため、その現象を視覚的に捉えることが可能となる。

超伝導内を流れる遮蔽電流の巨視的振る舞いは、Maxwell の方程式から導出される非線形微積分方程式の初期値・境界値問題によって書き表される。また、注意しなければならないのは、遮蔽電流密度解析には超伝導の電流電圧特性を表す方程式も必要になることである。同解析には、これまで、磁気ベクトルポテンシャル法 [13] と電流ベ

authors's e-mail : takayama@yz.yamagata-u.ac.jp

クトルポテンシャル (T 法) [13] が用いられているが、本稿では、 T 法を採用する。

遮蔽電流密度解析のため、Maxwell 方程式と Biot-Savart の法則から導かれる支配方程式を空間と時間に関して離散化すると、連立非線形方程式に帰着される。同非線形方程式を解く目的で仮想伝導率法と呼ばれる逐次代入法が開発された [14, 15]。結果として、同法を用いて超伝導磁気浮上システムの動的電磁力を解析し、計算結果が実験結果と極めて良く一致することが示された [14, 15]。また、高温超伝導体に関連した T 法の遮蔽電流密度解析では、厚みが数ミリオードの超伝導厚膜に対する遮蔽電流密度解析は他の研究者によって考察されている。一方、厚みがナノオードの超伝導厚膜に対する数値シミュレーションは、ほとんど行われなかった。これは、支配方程式の初期値・境界値問題の離散化で現れる係数行列の決定に特異積分の高精度評価を要するためである。

本稿では、HTS 薄膜を流れる遮蔽電流密度の高性能解析のために必須である様々な数値解析技術を解説する。具体的には、支配方程式の離散化手法、クラックを含む超伝導シミュレーションで現れる連立 1 次方程式の高速解法などである。また、数値計算技術の工学的応用も説明する。

2. 遮蔽電流密度方程式

2.1 支配方程式

本章では、HTS 薄膜に低周波磁場を印加した場合の遮蔽電流密度解析を解説する。この仮定のもとでは、Maxwell 方程式の変位電流と比べて、遮蔽電流密度の大きさが支配的になる。この事実を考慮して、薄膜内では変位電流を無視できると仮定する。換言すれば、準定常電流の理論を採用している。

遮蔽電流密度 \mathbf{j} の振る舞いは、次の Maxwell 方程式：

$$\nabla \times \mathbf{B}_S = \mu_0 \mathbf{j}, \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_S = 0, \quad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\left(\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}_S}{\partial t}\right), \quad (3)$$

で表される。但し、 \mathbf{B} 及び \mathbf{E} はそれぞれ外部磁束密度及び電界である。また、 t は時間を表し、 \mathbf{B}_S は遮蔽電流密度 \mathbf{j} が生成する磁束密度である。式 (1) の両辺の発散をとると、 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を得る。この式は $\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{T}$ を満たす電流ベクトルポテンシャル \mathbf{T} が存在することを意味する。

本稿では、イットリウム系銅酸化物の HTS 薄膜が時間変化する磁束密度におかれているとする。また、HTS 薄膜は単層構造であり、HTS 薄膜の厚み方向に同じ断面形状をもつと仮定する。さらに、厚み方向を z 軸としたカーテシアン座標を採用し、 x 、 y 、 z 方向の単位ベクトルをそれぞれ \mathbf{e}_x 、 \mathbf{e}_y 、 \mathbf{e}_z で表す。

よく知られているように、イットリウム系銅酸化物 HTS は強い異方性をもつため、HTS の厚みに垂直方向と平行方向において、超伝導特性が大きく異なる。具体的には、HTS は厚み方向に遮蔽電流密度がほとんど流れない。本稿

では、この事実を考慮した薄板近似 [16] を用いる。具体的には、以下の 2 つを仮定する。

① HTS 薄膜は十分に薄いため、遮蔽電流密度 \mathbf{j} と電界 \mathbf{E} は厚み方向に変化しない。

② 遮蔽電流密度 \mathbf{j} と \mathbf{E} は厚み方向の成分をもたない。

また、HTS 内の遮蔽電流密度の時間発展を得るためには、超伝導特性を考慮した電界 \mathbf{E} を与える必要がある (2.2 節参照)。

以下では、薄板近似を用いて、遮蔽電流密度方程式を導出する。なお、薄板近似を導入することによって、遮蔽電流密度が厚み方向に並進対称性をもつと仮定すれば、前述の電流ベクトルポテンシャル T は 1 成分のみをもつことになり、遮蔽電流密度は 1 つのスカラ関数によって表せる。

まず、薄板近似により、HTS 内の遮蔽電流密度は $\mathbf{j} = (2b)(\nabla T \times \mathbf{e}_z)$ で書き表せる。但し、 $T(x, t)$ はスカラ関数であり、 \mathbf{x} は $\mathbf{x} = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y$ の 2 成分で定義される。また、 b は HTS の膜厚を表す。

次に、Faraday の法則 (3) に薄板近似を適用すると、次式を得る。

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\hat{W}T) + (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot \mathbf{e}_z = \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{e}_z). \quad (4)$$

但し、 \hat{W} は磁束密度 \mathbf{B}_S に対応する演算子であり [17]、この \mathbf{B}_S は (1) 及び (2) から導かれる Biot-Savart の法則から決定できる。また、 $\langle \rangle$ は HTS の厚み方向の平均化演算子を表し、 $\langle f \rangle \equiv b^{-1} \int_{-b/2}^{b/2} f(z) dz$ で定義される。言い換えれば、この平均化によって、(4) の導出過程に現れる z 依存性が取り除かれることになる。スカラ関数 $T(x, t)$ の時間発展は遮蔽電流密度方程式 (4) に支配され、(4) の初期条件、境界条件はそれぞれ以下のように与えられる： $T = 0$ at $t = 0$ 、 $T = 0$ on $\partial\Omega$ 。但し、 $\partial\Omega$ は HTS の境界を表す。以上より、遮蔽電流密度方程式 (4) の初期値・境界値問題が得られたことになる。

2.2 \mathbf{J} - \mathbf{E} 構成方程式

遮蔽電流密度 \mathbf{j} と電界 \mathbf{E} には、1 対 1 の密接な関係があり、その関係は \mathbf{J} - \mathbf{E} 構成方程式 $\mathbf{E} = E(|\mathbf{j}|)[\mathbf{j}/|\mathbf{j}|]$ で書き表せる。すなわち、この方程式は電流と電界の向きが等しいことを意味する。これまで、遮蔽電流密度解析の際、関数 $E(j)$ には超伝導特性を表すための臨界状態モデル [17-19]、磁束フロー・磁束クリープモデル [20]、べき乗モデル [21] が与えられてきた。

本稿では、実験で得られるイットリウム系の電流電圧特性が近似可能なべき乗モデル： $E(j) = E_c [j/j_c]^N$ を採用する。但し、 E_c と j_c はそれぞれ臨界電界と臨界電流密度である。また、 N は非負の整数であり、 $N = 1$ の場合、べき乗モデルはオームの法則と一致する。一方、 $N = \infty$ の場合は、臨界電流モデルを表す。

遮蔽電流密度方程式 (4) の初期値・境界値問題と \mathbf{J} - \mathbf{E} 構成方程式を連立して解くことによって、HTS 内を流れる遮蔽電流密度の時間発展を決定できる。次章では、同問題の数値解法について解説する。

3. 遮蔽電流密度解析の高速化

本章では、まず、遮蔽電流密度方程式の初期値・境界値問題に対する空間と時間の離散化法について説明する。なお、空間と時間の離散化の順番によって帰着する方程式が異なる点に注意を要する。次に、特異積分の高精度評価方法及びクラックを含む遮蔽電流密度解析も述べる。

3.1 空間先行型離散化法

遮蔽電流密度方程式(4)の初期値・境界値問題を空間に関して離散化すると、同問題は連立常微分方程式の初期値問題に帰着する。本研究では、空間の離散化に有限要素法を採用した。

連立常微分方程式の解法には陰解法及び陽解法が存在する。陰解法は陽解法と比べて、安定に数値解を得ることができるが、連立非線形方程式の係数から Jacobi 行列を求める必要があり、同行列を係数にもつ連立1次方程式の計算に時間がかかる。これに対して、陽解法では、スキームの安定性を保証する時間刻み幅の上限が存在する。この上限をこえる時間刻み幅を用いると、連立常微分方程式の解が得られない。しかしながら、陽解法は計算スピードの向上が期待できる手法である。本研究では、遮蔽電流密度解析の高速化と数値的安定性を回避するため、連立常微分方程式の解法として時間刻み幅の自動調節付きアルゴリズム付きの6段5次 Runge-Kutta 法[22]を採用した。

時間刻み幅の自動調節付き Runge-Kutta 法を用いて遮蔽電流密度解析を実行した場合、ある時間ステップでオーバーフローが発生することがわかった[23]。特に、べき乗則の指数 N が大きい場合に顕著な事象であり、この問題は、Runge-Kutta 法の時間刻み幅を細かくしても解決しない。これは、指数 N と共に $J-E$ 構成方程式に含まれる関数 $E(j)$ の非線形性が增大するためである。この問題を解決するため、 $J-E$ 構成方程式の不足緩和法が提案された[23]。同法は関数 $E(j)$ を減衰させて、オーバーフローを防止する手法である。同法を適用した結果、すべての時間ステップに対して連立常微分方程式の解を得ることに成功した。この結果から、 $J-E$ 構成方程式の不足緩和法は遮蔽電流密度解析におけるオーバーフローの発生を防ぐ有効な手法であるといえる。

3.2 時間先行型離散化法

空間より先に時間を離散化すると、遮蔽電流密度方程式の初期値・境界値問題は非線形境界値問題に帰着する。非線形境界値問題を空間に関して離散化すれば、各時間ステップにおける連立非線形方程式を解く問題に帰着する。

連立非線形方程式の解法には、Newton 法[24-26]を採用する。同法では、数回の反復によって連立非線形方程式の解を求めている。次の2つの計算は、各反復において、停止条件を満たすまで繰り返される。

- ① Jacobi 行列を係数にもつ連立1次方程式を解いて、修正ベクトルを求める。
- ② 修正ベクトルで連立非線形方程式の解を補正することによって、解を得る。

連立1次方程式の係数は対称密行列であるが、正定値性を示さないため、この方程式の解法には、Cholesky 分解

[27]を適用できない。それ故、直接法である Gauss の消去法では演算量が膨大になる。この問題を解決するため、Bunchの方法[28, 29]を採用して、Gauss の消去法の演算量を $1/3$ まで減少させることが可能となった[30]。

3.3 特異積分の高精度評価

離散化の順序に関わらず、遮蔽電流密度解析には、特異積分の評価が必要不可欠である。被積分関数の特異性は積分区間の端で顕著となり、HTSの厚みが薄くなるほど強くなる。それ故、数値積分法として一般に使われている Gauss 型積分公式をそのまま適用するのは現実的でない。高精度な積分値を得るには、特異性を除去する必要がある。

特異積分の評価法には二重指数関数型積分 (Double Exponential: DE) 公式[22, 31]を用いた。DE 公式は積分区間の端点に特異性をもつ被積分関数に対して非常に有効な数値積分法である。DE 公式を被積分関数に適用すると、積分区間が無制限区間に変換される。その結果、被積分関数が有限区間で急激に減衰するため、積分区間は無限区間から有限区間に置き換えることができる。結果として、被積分関数の特異性が取り除かれて、高精度な積分が可能となった。この特異積分の精度は前述した Newton 法の収束特性に大きな影響を及ぼすことが知られている。すなわち、Newton 法が収束するためには、十分な積分精度が必要となる。

3.4 クラックを含む遮蔽電流密度解析

ここでは、HTS 薄膜にクラックが含まれる場合の数値解法を述べる。HTS は作製から実用化に至るまで急激な温度変化にさらされる。その HTS 材料は高温で合成されるのに対して、実用化されるときには低温で冷やされる。このとき、張力や圧力が HTS に加わり、クラックが HTS 内に発生することがある。この原因は金属系超伝導体より酸化物系超伝導体が非常に脆く壊れやすいためである。

HTS 材料の品質を管理するには、クラック検知が必要不可欠である。この検知を数値シミュレーションするため、クラックを含む遮蔽電流密度方程式を定式化し、この方程式の初期値・境界値問題の数値解法を提案してきた[32, 33]。

HTS にクラックがある場合、HTS の縁に関連した境界条件の他に、クラック面にも Faraday の法則 (積分系) の境界条件が課される。この境界条件は離散化の過程に現れる弱形式に直接組み込まれているので、Faraday の法則を必ずしも満足しない。この問題を解決するために、クラック面に沿って仮想電圧を印加した[32, 33]。この手法を用いることによって、積分系の Faraday の法則を数値的に満足させることが可能となり、クラックを含む遮蔽電流密度解析が実現できた。

上記で述べたように、クラックを含む遮蔽電流密度解析の際、クラックに関連する境界条件が付加される。それ故、離散化で得られる連立1次方程式の係数はブロック行列かつ非対称である。非対称係数行列をもつ連立1次方程式の高速解法に有効なツールとして、反復法と呼ばれる GMRES 法[34, 35]がある。計算の結果、同法の速度は、

LU 分解と比べて、約221倍の速度となることがわかった[36].

一方、GMRES 法の収束特性を改善するため、QR 分解を用いた連立1次方程式の解法が提案されている[37]. これは、ベクトルポテンシャルの補正以外の変数を連立1次方程式から除去し、ブロック行列の元数を低減させる手法である. 数値計算の結果、GMRES の収束特性はクラックの長さや数にほとんど影響されないことが示された[37].

よく知られているように、GMRES 法の計算は行列ベクトル積が支配的である. このため、行列ベクトル積を高速化すれば、遮蔽電流密度解析のさらなる高速化が実現できる. 行列ベクトル積の計算時間を高速化する手法として、 \mathcal{H} 行列法[38-41]を採用した. なお、 \mathcal{H} 行列法の詳細は本稿の付録に示す. 同法では、連立1次方程式の係数行列を階層行列に変換し、部分行列の大部分を階数の低い行列に近似するため、計算の高速化と省メモリ化が期待できる. 数値計算の結果、節点数が増加と共に、 \mathcal{H} 行列法による高速化の効果が高いことが判明した[42]. それ故、 \mathcal{H} 行列法は遮蔽電流密度解析に有効なツールであるといえる.

4. 遮蔽電流密度解析の工学的応用

本章では、以下に示す3つの超伝導薄膜を用いた実験の数値シミュレーション結果を述べる.

- ① 臨界電流密度の非接触測定法の数値的再現
- ② 高温超伝導薄膜中のクラック位置の同定
- ③ 超伝導薄膜によるペレット射出法の数値計算

なお、これらの実験では、HTS 薄膜に印加する磁界源が異なるため、遮蔽電流密度方程式(4)の印加磁束密度 B の与え方が変化する. 以下では、上記実験の数値結果を解説し、磁力線や遮蔽電流密度の可視化結果も示す.

4.1 臨界電流密度の非接触測定法の数値的再現

臨界電流密度 j_c は HTS を特徴づける最も重要なパラメータの一つであり、その非接触測定法として、誘導法[2-5]と永久磁石法[6-9]が提案された. まず、誘導法を説明しよう. 同法では、HTS 薄膜の上方に配置したコイルに交流電流 I_0 を流しながら、コイルに誘起される高調波電圧を測定する. その結果、交流電流が閾値電流を超えたときに、第3高調波電圧 V_3 が急激に立ち上がることが実験で明らかになった[2-5]. さらに、 I_0 - V_3 曲線から閾値電流を決定し、閾値電流から臨界電流密度を見積もる方法が実験的に示された.

誘導法の数値的再現のため、遮蔽電流密度の時間発展を決定する有限要素法コードが開発された[43, 44]. 図1に交流電流 I_0 と第3高調波電圧 V_3 の関係を示す. I_0 と V_3 の曲線から閾値電流を決定し、数値的に見積もられた臨界電流密度は、数値的に仮定した臨界電流密度とほぼ同じ値が得られた. また、別のシミュレーションの結果、誘導法では、コイルが薄膜の縁に近づくと共に、測定精度が劣化することがわかった[44].

一方、永久磁石法と呼ばれる非接触測定法では、薄膜の上方に配置した円柱の永久磁石を上下に移動させることによって、HTS 薄膜に働く電磁力を測定する. このとき、磁

石と薄膜は接触しない. この実験の結果、最大反発力 F_M が臨界電流密度 j_c にほぼ比例することが発見された[6-9].

遮蔽電流密度の時間発展が得られれば、薄膜に働く電磁力は遮蔽電流密度と印加磁束密度から計算できる. 永久磁石法の数値シミュレーション・コード[44, 45]では、与えた臨界電流密度 j_c の値から薄膜に働く電磁力のヒステリシス曲線が実験と同様に数値的にも得られ、永久磁石の上下運動で薄膜に反発力と引力が働くことが示された. この結果を用いて、磁石と薄膜の距離がゼロの場合の反発力を近似的に求めれば、最大反発力 F_M が得られる.

図2に臨界電流密度 j_c と最大反発力 F_M の関係を示す. 同図より明らかなように、 j_c と F_M は数値的にもほぼ比例することがわかった. この結果は実験結果と定性的に一致している. また、磁石が薄膜の縁にある場合でも最大反発力と臨界電流密度が比例することが明らかになった[44]. これは、予め臨界電流密度 j_c と最大反発力 F_M の比例関係を予め調べておけば、測定した電磁力から臨界電流密度を見積もることができることを示している[44]. さらに、磁石の強さが大きく、磁石径が小さいほど、臨界電流

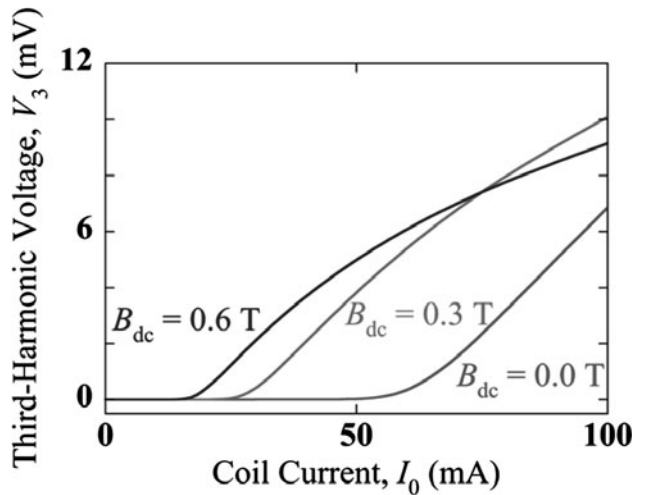


図1 交流電流と第3高調波電圧の関係[42].

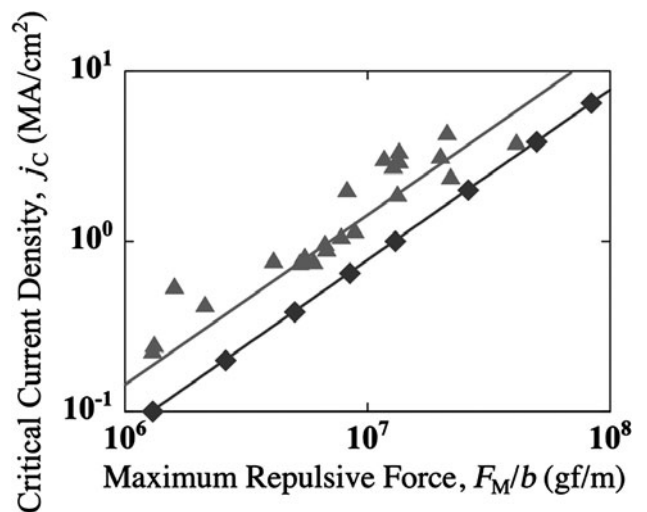


図2 臨界電流密度の最大反発力への依存性. 但し、▲：実験結果[7]、◆：数値結果[43].

密度の空間分布の解像度が改善される[45]。また、図3に永久磁石法における磁力線と遮蔽電流密度の結果を示す。同図より、磁束が遮蔽されている様子や遮蔽電流密度の向きと大きさが可視化されていることがわかる。

4.2 高温超伝導薄膜中のクラック位置の同定

誘導法と永久磁石法は、HTS 薄膜内のクラック検出にも応用されている。両法のクラック検出可能性を調べるための有限要素法コードが開発された[46-49]。同コードを用いることによって、誘導法の測定精度はクラックによって著しく低下することが示された。具体的には、誘導コイルの正射影がクラックと重なると、測定された臨界電流密度の値が減少することがわかった。これは、遮蔽電流密度の空間分布が非対称になるためである(図4(a)参照)。結論として、HTS 薄膜の臨界電流密度分布を測定することに

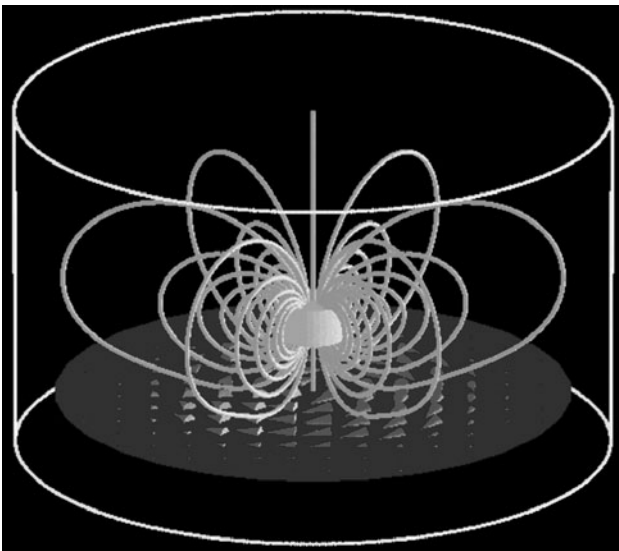


図3 永久磁石法の磁力線と遮蔽電流密度の振る舞い。

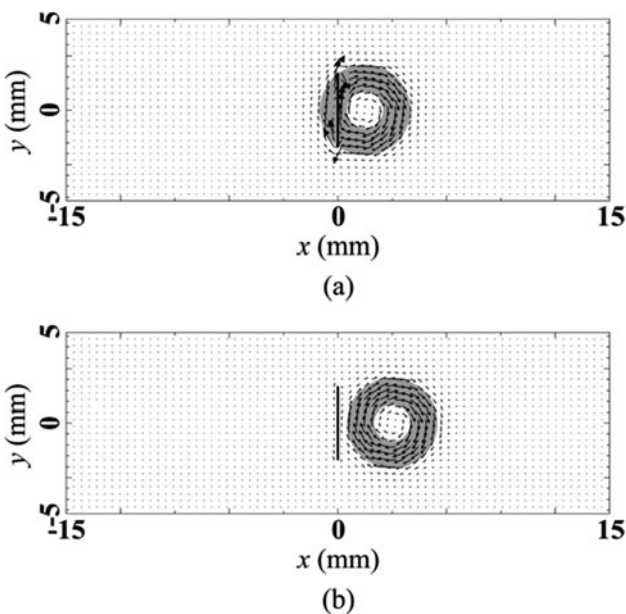


図4 (a)クラックとコイルの正射影が重なる場合と(b)クラックとコイルが離れている場合の遮蔽電流密度の空間分布[47]。但し、太線はクラックを示す。

よって、クラックの大きさおよび位置を正確に検出できることが判明した[46]。一方、薄膜の縁近傍に存在するクラックは、薄膜の縁と同様に扱われるため、高精度に検出することができない[47]。

一方、走査型永久磁石法と呼ばれる実験を用いて、直線形状のクラック検出が行われた[50]。走査型の場合、薄膜の上方に配置した永久磁石を薄膜の水平に平行移動させて電磁力と臨界電流密度を測定する。数値計算の結果、走査型永久磁石法では、2種類の走査方向により、クラックの位置が同定できることを明らかにした[48]。また、走査型永久磁石法では、クラックの検出速度は誘導法よりも高速であるが、分解能の観点からは、低分解能でクラックが検出されることがわかった[49]。

4.3 超伝導薄膜によるペレット射出法の数値的再現

近年、ヘリカル型核融合炉のプラズマ中心に燃料ペレットを射出するため、超伝導リニア加速(Superconducting Linear Acceleration: SLA)システムの利用が提案されている。同システムでは、まず、推進用と加速用のHTS 薄膜を付したコンテナにペレットを注入する。次に、加速用の電磁石と電磁石レールを用いれば、レール上のコンテナが浮上し、ペレットコンテナが加速される仕組みである。ペレットコンテナの速度は5 km/s 以上になると試算されているが、現時点では、この超伝導実験は開発段階であり、実際にはどの程度の速度が得られるか不明である。

SLA システムの数値シミュレーション・コードを開発し、同システムの加速性能を数値的に評価した[51,52]。SLA システムの加速性能はHTS 薄膜の初期位置、電磁石の電流変化率、加速用電磁石の間隔及び薄膜の大きさに強く依存することが判明した。また、2秒以上加速すると、SLA システムによるペレット注入システムは、従来用いられている空気圧ペレット注入および遠心分離ペレット注入と同様の速度を有することが示された[51]。なお、図5は、SLA システムにおける磁力線と遮蔽電流密度の空間分布を可視化した結果である。

膨大な数の加速用電磁石を使えば、約7.8秒の加速でペレット速度が目標速度の5 km/sに達するが、電磁石レールは直線で約21 kmの距離を要する[52]。それ故、現状で

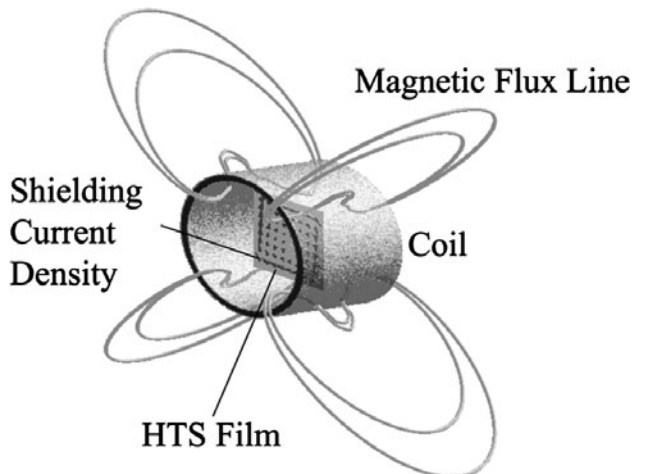


図5 SLA システムの磁力線と遮蔽電流密度の振る舞い[50]。

は、SLA システムの開発に距離と時間が必要となるといえる。この問題解決には、直線の電磁石レールではなく、円形レールにすることが1つの方法であり、今後は、その数理モデルを検討することを考えている。

5. おわりに

本解説記事のまとめと高温超伝導体の数値電磁界解析の今後の展望を述べる。本稿では、HTS 薄膜内遮蔽電流密度の高性能解析技術について解説した。まず、薄板近似と準定常理論に基づく近似を用いることによって、Maxwell 方程式から遮蔽電流密度方程式を導出した。次に、この方程式の離散化法を紹介し、特異積分の評価方法について述べた。また、クラックを含む遮蔽電流密度解析について説明し、その高速解法である GMRES 法と \mathcal{H} 行列法の実装結果を述べた。最後に、遮蔽電流密度の高性能解析技術を用いて、超伝導実験の数値シミュレーション結果を紹介し、遮蔽電流密度や磁力線の振る舞いを可視化した結果を示した。このような提案手法は、近い将来、HTS 薄膜中の様々な電磁界解析に応用され、さらに実り多い結果を生むことになるかと予想される。また、この計算技術を用いれば、他の分野で抱えている同様の問題も解決できると考える。

今後は、多層構造や複雑形状をもつ HTS 内の遮蔽電流密度解析の大規模問題を解くため、辺要素型有限要素法とメッシュレス法を用いた 3 次元遮蔽電流密度の数値シミュレーション・コードを開発及び検証することを考えている。3 次元コードを用いれば、2 次元では再現不可能であった超伝導機器の数値的再現が可能になるため、電磁界解析分野や超伝導工学分野において非常に有用なツールとなり得る。さらに、有限要素を多く与えることができるため、高精度なシミュレーションが可能になる。また、トポロジー最適化を上記コードに実装することによって、最も効率のかつ高性能な超伝導機器の設計案が得られることが期待されるため、革新的な機器設計に広く利用できる可能性がある。

付録. \mathcal{H} 行列法

\mathcal{H} 行列法は行列ベクトル積の演算量を削減する計算法である。同法では、まず、節点の情報から決定された係数行列を部分行列の集合である階層行列 \mathcal{H} に変換する。次に、ACA (Adaptive Cross Approximation) [38-41] による低ランク近似を階層行列 \mathcal{H} の部分行列に適用する。後述する ACA 近似の許容条件を満足すれば、部分行列が低ランクで圧縮されるため、計算の効率化を図ることができる。

階層行列 \mathcal{H} の決定は、解析領域に配置した有限節点を分割することによって、クラスタ木を生成することが出発点となる。第 1 に、すべての有限節点を含むような境界ボックスと呼ばれる長方形を用意する。但し、図 6 に現れる n_c はクラスタ T 内の節点数を表し、これをルートクラスタ $T_1^{(0)}$ と呼ぶ。今後、クラスタの上付きの括弧数字はクラスタのレベルを表し、下付きの数字 i は各レベルにおける第 i 番目のクラスタを示す。第 2 に、境界ボックスの長辺で 2 つに等分割することによって、 $T_1^{(1)}$ と $T_2^{(1)}$ の 2 つのクラ

スタが決定できる。このような分割を不等式 $n_c \leq n_{\min}$ を満たすまで繰り返す。なお、 n_{\min} はクラスタ内の最小節点数である。図 6 の場合、レベル 2 までのクラスタ木ができる(図 7 参照)。

クラスタ木による階層行列 \mathcal{H} の構築を説明する。まず、クラスタ木から係数行列を階層行列に分割する(図 8 参照)。結果として、 \mathcal{H} は部分行列 $W_{(\sigma, \tau)}$ で構成されるが、ここで σ と τ はそれぞれ行番号と列番号に対応したクラスタである。次に、ACA 近似の許容条件： $\min(\text{diag}(\sigma), \text{diag}(\tau)) \leq \eta \text{dist}(\sigma, \tau)$ を用いて部分行列 $W_{(\sigma, \tau)}$ に低ランク近似を実行する。但し、 $\text{diam}(\sigma)$ と $\text{dist}(\sigma, \tau)$ はそれぞれクラスタ σ の対角線の長さや境界ボックス間の距離であり、 η は正の定数である。結果として、許容条件を満たした部分行列 $W_{(\sigma, \tau)}$ は、ACA 近似によって行列 UV^T に近似される。但し、 U と V はそれぞれ $p \times r$ 行列と $q \times r$ 行列であり、 r は近似ランクを表す。行列ベクトル積を具体的に記すと、 $p \times q$ の部分行列 $W_{(\sigma, \tau)}$ と任意の q 次元ベクトル y の積は、通常の場合、 $W_{(\sigma, \tau)}y$ であるのに対して、低ランク近似では $UV^T y$ となる。行列ベクトル積の演算量は pq と $r(p+q)$ で表せるため、不等式 $r < pq/(p+q)$ を満たす場合にのみ、低ランク近似が高速になる。

図 8 は遮蔽電流密度解析で得られる行列を階層行列に変換した後、ACA による低ランク近似を適用した結果である。同図の数値は近似された部分行列のランク数である。一方、空白はフルランクの部分行列である。なお、最大の

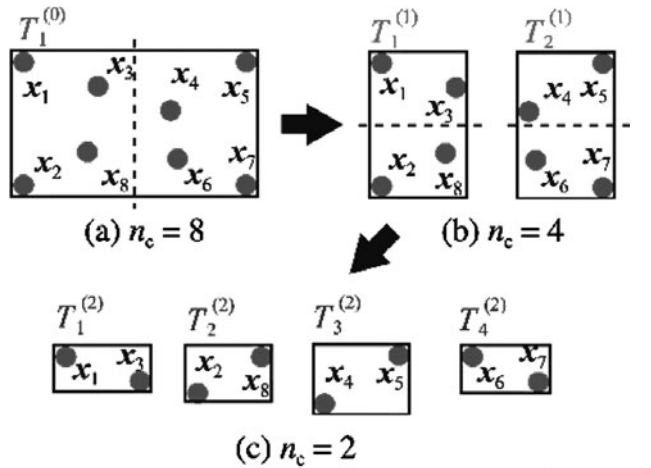


図 6 有限節点の分割例 [53]。但し、 n_c はクラスタ $T_i^{(l)}$ に含まれる節点数を示す。

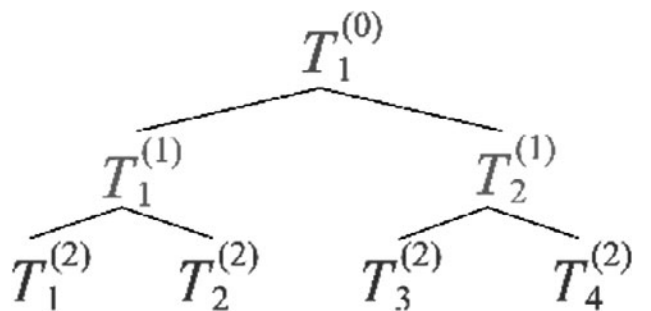


図 7 図 6 で決定されたクラスタ木 [53]。

					12	12	14	14			
							14	14			
					12	13	14	15			12
							13	11	14	13	
	12	12					18	13			
							11	11	13	16	
	12	13					13	19			
	14	14							13	11	
			13	18	11	13					
	14	15							11	12	
			11	13	11	19					
	12		14	13			13	11			
			13	16			11	12			

図8 階層行列 H へのACA近似の適用例[53]. 但し、数値は各ブロック行列の近似ランクの値を示す。

部分行列の次元は $p = q = 950$ であり、近似ランク r は12となる[53]。それ故、ACAによって大幅な演算量の削減が期待できるといえる。

謝辞

本研究の一部は核融合科学研究所(NIFS)との共同研究として行われた研究成果が含まれている。また、数値シミュレーションの一部は、NIFSで運用されているプラズマシミュレータで実施された。この場を借りて感謝申し上げます。最後に、本解説記事の執筆機会を与えていただいた山形大学大学院理工学研究所・齋藤誠紀准教授に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] 八木隆太 他：丸善実験物理学講座〈11〉輸送現象測定 (丸善, 1999).
- [2] J.H. Claassen *et al.*, Rev. Sci. Instr. **62**, 996 (1991).
- [3] Y. Mawatari *et al.*, Appl. Phys. Lett. **81**, 2424 (2002).
- [4] Y. Mawatari *et al.*, Appl. Phys. Lett. **83**, 3972 (2003).
- [5] 馬渡康徳 他：低温工学 **40**, 346 (2005).
- [6] S. Ohshima *et al.*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **15**, 2911 (2005).
- [7] A. Saito *et al.*, Physica C **426**, 1122 (2005).
- [8] 武石健太 他：低温工学 **40**, 340 (2005).
- [9] S. Ohshima *et al.*, Physica C **445**, 682 (2006).
- [10] A. G. Sivakov *et al.*, Appl. Surf. Sci. **106**, 390 (1996).
- [11] T. Kiss *et al.*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **13**, 2607 (2003).
- [12] Central Japan Railway Company: <https://scmaglev.jr-central-global.com/>
- [13] 宮 健三：解析電磁気学と電磁構造 (養賢堂, 1995).

- [14] 上坂 充 他：日本機械学会論文集 C 編 **60**, 490 (1994).
- [15] M. Uesaka *et al.*, Cryo. **35**, 243 (1995).
- [16] A. Kamitani and S. Ohshima, IEICE Trans. Electron., E **82**-C, 766 (1999).
- [17] 内野倉国光 他：高温超電導体の物性 (培風館, 1995).
- [18] 立木 昌, 藤田敏三：高温超伝導の科学 (裳華房, 1999).
- [19] 松下照男：磁束ピンニングと電磁現象—超伝導工学の基礎 (産業図書, 1994).
- [20] D. Dew-Hughes, Cryo. **28**, 674 (1988).
- [21] E.H. Brandt, Phys. Rev. B **54**, 4246 (1996).
- [22] 森 正武：FORTRAN77 数値計算プログラミング (岩波書店, 1987).
- [23] A. Kamitani *et al.*, IEEE Trans. Magn. **47**, 1138 (2011).
- [24] 森 正武：数値解析 (共立出版, 1973).
- [25] 名取 亮：数値解析とその応用 (コロナ社, 1990).
- [26] 山本哲朗：数値解析入門 (サイエンス社, 2003).
- [27] G.H. Golub *et al.*, Matrix Computations (Johns Hopkins Univ Press, 2012).
- [28] J.R. Bunch *et al.*, Numer. Math. **27**, 95 (1976).
- [29] J.R. Bunch and L. Kaufman, Math. Comp. **31**, 163 (1977).
- [30] A. Kamitani *et al.*, Plasma Fusion Res. **5**, S2112 (2010).
- [31] H. Takahashi and M. Mori, RIMS Kyoto Univ. **9**, 721 (1973).
- [32] A. Kamitani *et al.*, IEEE Trans. Magn. **48**, 727 (2012).
- [33] A. Kamitani *et al.*, Plasma Fusion Res. **7**, 2405024 (2012).
- [34] 藤野清次, 張 紹良：反復法の数理 (朝倉書店, 1996).
- [35] Y. Saad *et al.*, SIAM J. Sci. Stat. Comput. **7**, 856 (1986).
- [36] T. Takayama *et al.*, J. Adv. Simulat. Sci. Eng. **3**, 173 (2016).
- [37] A. Kamitani *et al.*, Plasma Fusion Res. **16**, 2405005 (2021).
- [38] M. Bebendorf *et al.*, Numerische Mathematik **86**, 565 (2000).
- [39] S. Kurz *et al.*, IEEE Transactions on Magnetics **38**, 421 (2002).
- [40] Y. Takahashi *et al.*, IEEE Trans. Magn. **43**, 1277 (2007).
- [41] V. Le-Van *et al.*, IEEE Trans. Magn. **50**, 7010904 (2014).
- [42] A. Kamitani *et al.*, Plasma Fusion Res. **11**, 2405041 (2016).
- [43] T. Takayama *et al.*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **19**, 3573 (2009).
- [44] T. Takayama *et al.*, Plasma Fusion Res. **5**, S2113 (2010).
- [45] T. Takayama *et al.*, Plasma Fusion Res. **6**, 2401059 (2011).
- [46] T. Takayama *et al.*, Plasma Fusion Res. **8**, 2401025 (2013).
- [47] T. Takayama *et al.*, Plasma Fusion Res. **9**, 3401129 (2014).
- [48] T. Takayama *et al.*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **23**, 9001107 (2013).
- [49] A. Kamitani *et al.*, Plasma Fusion Res. **10**, 3405023 (2015).
- [50] K. Hattori *et al.*, Physica C **471**, 1033 (2011).
- [51] T. Takayama *et al.*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **28**, 3700205 (2018).
- [52] T. Takayama *et al.*, Plasma Fusion Res. **14**, 3401077 (2019).
- [53] T. Takayama *et al.*, Int. J. Appl. Electromagn. Mech. **52**, 555 (2016).



たか やま てる おう
高山 彰 優

山形大学大学院理工学研究科・助教。2004年山形大学工学部技術部を経て、2015年名古屋大学大学院工学系研究科・博士（工学）を取得。2017年1月より現職。シミュレーション科学・超伝導工学を専門とし、現在は高温超伝導体内の遮蔽電流密度解析とその工学的応用に関する研究を中心に従事しています。双子の6歳息子達と4歳娘の育児と仕事の両立をめざし、日々努力しています。家族の応援が仕事のやる気・頑張りにつながっています。