



## 6. ノイズと統計処理

### 6. Noises and Statistical Processing

永島 芳彦, 稲垣 滋

NAGASHIMA Yoshihiko and INAGAKI Shigeru

九州大学応用力学研究所

(原稿受付：2019年11月1日)

本章では、ノイズによるデータの誤差と誤差伝播、及び誤差評価と誤差低減のための統計処理について基礎統計学を用いて初学者向けに解説する。実験家は測定量から目的の物理量の真値を表すものとして推定量を用いる。推定量は測定量の線形・非線形関数であり、関数形は直接測定もしくは間接測定の種類に依存する。測定量にノイズが重畳すると、ノイズが誤差成分として線形・非線形に伝播し、推定量に偶然誤差／ばらつきや系統誤差／バイアスを与える。ノイズによる誤差を低減するには同一条件の測定量を増やすことが最良である。最後に、真値が時間的に揺らぐ乱流データの場合の解析例を紹介する。

#### Keywords:

random error, bias, estimator, normal distribution, chi-square distribution, t-distribution, correlation

#### 6.1 はじめに：プラズマ乱流の解析

乱流研究では乱流の何に注目するのか？ 瞬時の流速場が予測できれば理想的だがそこには境界条件等の系の詳細が必要となる。乱流の本質を理解するためにはそのような微細構造よりも、系の詳細によらない統計的性質に着目した方がよい。このため乱流の解析では得られた時系列データをしばしば統計処理する。乱流の解析対象は密度や電位等の物理量の真値の時間変化である。しかし我々が得られるのはイオン飽和電流のような測定量の時間変化である。乱流解析では、誤差を含んだ測定量をそのまま物理量として扱うだけでなく、しばしば誤差を含んだ測定量の非線形関数によって表される物理量を扱うことも有り、本章ではそのようなプラズマ乱流計測を例として、データを統計処理する手法について述べる。

ここでは測定量が物理確率過程の確率変数とノイズの確率変数の和であると考え、測定量のデータ解析によって何がしかを実証する上では、測定値の確からしさの範囲を規定するために、精度／誤差の評価が不可欠である。極論すれば、誤差を評価できない測定点は無価値である。あらかじめ測定誤差が判明していれば最良だが、実験に固有のノイズの混入を完全に予測することは困難であり、しばしば再現実験を重ねて誤差自体も実験から評価することが多い。本章では、ノイズを誤差源と捉え、実験データ解析における誤差への対処法の基礎について初学者向けに解説する。乱流解析では、揺動データが解析の主対象であるが、平均値もしばしば用いられる。また、統計処理では平均操作が本質である。それらの操作と誤差の解釈には統計学の知識が求められる。6.2では測定と誤差について概説する。

直接測定と間接測定、偶然誤差／ばらつきと系統誤差／バイアスについて説明する。6.3では測定に係る用語解説と準備を行う。母集団や標本、推定量やその種類、標本分布などを説明する。6.4では直接測定において正規分布の標本から各種統計量を得るための手法について概説する。6.5では間接測定における誤差の伝播について述べる。6.6では、乱流データにノイズが重畳した系の解析例を示す。乱流では、物理確率過程によって測定量の真値が時空間で大きく揺らぎ、完全に同一条件下での複数回測定は難しい。その上測定量にノイズが重畳し、物理確率過程とノイズの分布とが混在した分布が観測され、分別は一般に難しい。ここではノイズと物理確率過程を分別する試みを紹介する。最後にまとめを行う。

#### 6.2 データ解析ではノイズを誤差源と捉える [1]

実験研究者は目的の物理量の値を得るために、直接その物理量を測定するかあるいは測定可能な別の物理量を測定し数式を用いて間接的に目的の物理量を計算する。前者の場合を直接測定、後者の場合を間接測定という。測定量は物理量の関数であり得られた値を測定値という。ノイズが無い場合は測定によって測定量（データ）の真値が得られる。しかし測定値と測定量の真値は一般には異なり、測定量を用いて目的の物理量の真値を表現する手段として、推定量という測定量の線形・非線形関数を用いる。関数形は直接測定もしくは間接測定の種類に依存する。推定量の式に測定値を代入することで推定値を得て、目的の物理量の真値の代用品とする。簡単な例として、円の面積という物理量を半径という測定量から求める場合を考える。実際に

半径を測定すると、真の値（定数）にノイズという確率的な値が加算された値（測定値）が得られる。一回の測定ではノイズの性質がわからないため、測定を複数回繰り返して得られた測定値（標本）を用いて、例えば平均などの操作によって真の値を推定する（推定量）。詳しくは6.5.1にて述べる。

直接測定と間接測定に係らず、測定対象に確率過程が含まれなければ、同一実験条件下の複数回測定で測定値は変化せず集中分布となる（図1 (a)）。一方しばしばノイズが測定量に混入し、求める物理量の真値を歪める。ノイズとは、ターゲットの物理量と関連がなく定常的及び確率的に振舞う測定成分であり、ノイズによって物理量の真値からドリフトし、また同一条件下の複数回測定によって測定値に分散が生じる。実際の測定値と測定量の真値との差を誤差という。誤差として着目されるのは、平均に重畳する成分と、平均0で分散に重畳する成分である。前者を系統誤差 (systematic error)/バイアス (bias), 後者を偶然誤差 (random error)/ばらつき (dispersion) という。本稿では、測定量に直接重畳する成分を系統誤差や偶然誤差とし、測定量の関数で目的の物理量の真値を推定する際に重畳する誤差成分をバイアスやばらつきと呼ぶことにする。

実験系が十分制御されていない限り、これら誤差成分が実験前に判明している例は少ない。特に系統誤差は判明しがたく、その発見と対策は一般には大仕事だが、判明すれば測定値から差し引くことで除去できる可能性がある。例えば、オフセット処理は系統誤差除去手段の一つである。測定の時間帯や測定機器を変えることでも系統誤差の発見に結びつく場合があり、その過程で系統誤差が偶然誤差に変化する場合がある。すなわち、系統誤差の発現する条件がばらつくことで系統誤差自体がばらつく場合である。また較正によって系統誤差の一部を除去でき、最良の系統誤差対策と考えられている。

一方偶然誤差については、偶然誤差の結果測定量が確率変数として振舞うため、その制御と差分による除去は困難であり、統計的推測によって真値を推定する。注意すべきは、事前に誤差分散が判明している場合を除き、測定量を

得る前は真値のみならず偶然誤差の情報すら持っていないという事実であり、特に、実験前に誤差分散が判明していても、実験中に新たに重畳するノイズによって誤差分散が変化する可能性がある。したがって誤差分散も推定すべき量であり、これを特に推定誤差というが、混同の恐れがない場合は推定誤差を誤差と呼ぶことが慣例である。

測定量の真値が誤差を含んだ結果、測定量は真値だけでなくバイアスやばらつきが重畳した分布を持つようになる。この時測定とは、確率や作法に従って分布から標本を得ることに相当する。標本から真値を推定するには統計学が必要であり、6.3で述べる。

## 6.3 標本としての測定量と真値の推定[2,3]

### 6.3.1 測定量の真値の推定：統計量/推定量

まず複数の異なる属性を持つ複数の個体が集団を構成しているとする。統計の対象とする全個体を包括する母集団 (population) があり、その中に各属性の母集団分布 (population distribution) が複数存在する。測定量を得ることは、母集団分布を調査してその全部もしくは一部を得ることに相当する。母集団分布の一部を標本という。母集団分布や標本は集団であり、集団から分布を特徴付ける量を抽出する上で統計学を用いる。母集団分布の要素数が有限でかつその全数を把握できる場合（全数/悉皆調査）では記述統計学、無作為抽出した標本が有限で母集団分布の要素数より少ない場合（標本調査）では統計的推測（推計統計学）を用いる。国勢調査は全数調査の一例である。全数調査と標本調査では、同じ数学式でも意味の異なる場合がある。各調査では分布を特徴付ける量をしばしば調査対象とする。特徴付ける量とは、分布を代表する量すなわち算術平均 (arithmetic mean), 幾何平均 (geometric mean), 頻度50%の按分点である中央値 (median), 分布の峰である最頻値 (mode), 最大と最小の平均であるミッドレンジ (mid-range) 等である。また、ばらつきの尺度すなわち二次キュムラントの分散 (variance), 分散の二乗根である標準偏差 (standard deviation), 平均値からの差の絶対値の平均である平均偏差 (mean deviation), 最大と最小の差であるレンジ (range) が求められる場合もある。この原稿では、特に断らない限り、算術平均を平均として用いる。

最も単純な問題設定として、直接測定で系統誤差が除去され測定量が真値と偶然誤差の和の場合を考える。すなわち、測定量を同一母集団から復元無作為抽出し、母集団分布の一部である標本を得る。標本から真値や誤差分散の同定は困難だが、母集団分布の平均や分散などを標本から推定することになる。一般的には母集団分布が少数の母数 (parameter) の関数形であるとは限らないが、標本が少ない場合は、関数形を持つとモデル化して母数を推定する。正規分布は平均と分散でのみ分布の関数形が決まる例である。少数の母数で記述できる分布をパラメトリック分布、それ以外の場合をノンパラメトリック分布と呼ぶ。標本から計算された、モーメントなどの分布を特徴付ける量を統計量 (statistic) という。また母数の推定に係る量を推定量 (estimator) といい、一般には統計量と区別される。しばし

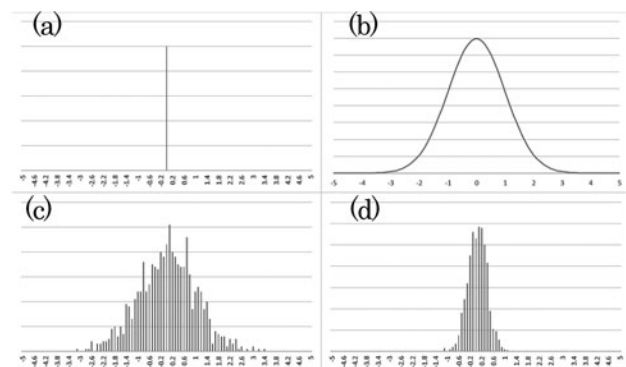


図1 (a)真値が0の集中分布, (b)標準正規分布, (c)標準正規分布乱数1000点の度数分布, (d)標準正規分布乱数を9点平均した平均値推定量1000点の度数分布。横軸の範囲を±5でプロットしている。(a)は真値, (b)は真値と偶然誤差で構成される確率変数の母集団分布, (c)は標本, (d)は標本平均の標本分布を表現している。

ば推定量として統計量が用いられるが、統計量ではない量が推定量として用いられる場合もある。統計量／推定量は標本のみの関数であり、平均や分散等に対応した関数形が存在する。

### 6.3.2 標本分布：統計量自体のばらつき

標本抽出には確率の要素が入るため、統計量自体もばらつきを持つ。例えば、一回の実験で得た1つのデータは真値と誤差の和であり、真値と誤差いずれも不明である。複数回の実験で得たデータをすべて用いて一つの統計量を得た場合、そのばらつきも同様に不明である。統計量のばらつきを知る手段として、複数の同一統計量を得る方法がある。例えば一日にN回実験しそれをM日実施する場合を考える。実験日ごとにN回の実験からそれぞれ統計量を得、M日の実験でM個の統計量を得る。統計量はN個の確率変数の関数であり、たとえ異なる実験日でデータの母集団が変わらない場合であっても、実験日ごとに異なる統計量が得られ統計量の集団は分散を持つと予想される。そのようにして得られるであろう統計量の集団を標本分布といい、データの集団である標本と区別される。データ自体の平均（標本平均）やデータ自体の分散（標本分散）は標本分布を構成し、統計量もエラーバーを持つ。実験研究者がデータとそのエラーバーを図示／プロットする場合、通常はデータの真値が何%の確率でエラーバーの中に含まれるかを示す意図があるだろう。測定量が真値と偶然誤差の和である場合、エラーバーとして表記すべきはデータ自体の標準偏差（標本標準偏差）ではなく標本分布の標準偏差である。標本標準偏差をエラーバーとした場合、エラーバーは真値の納まる範囲確率を規定していない。データが正規母集団分布を持つ場合、一日N回の実験から標本平均の標準偏差を計算でき、標準誤差（standard error）と呼ぶ。

一方分散がノイズ由来のみではなく物理確率過程に強く依存する場合は、標本標準偏差を表記・プロットすることは物理確率過程の標準偏差を示す意味で一定の意味がある。しかしそのプロットでは標本標準偏差に含まれるノイズすなわち誤差の情報が明示されていないことに留意すべきである。

### 6.3.3 同じ母数の推定量は複数種存在しうる

推定量は同じ母数に対しても複数存在し、それぞれ基準が異なる。以下に、推定量の基準の例を述べる。

- 一 致 性：標本の要素数を増加させた場合に、推定量が母数に漸近する。推定量自体の期待値が母数に一致するとは限らない。
- 不 偏 性：偏りが無く、推定量の期待値が母数になる。
- 有 効 性：推定量のばらつきがより小さいことを言う。
- 漸近正規性：標本の要素数を増加させた場合に、標本分布が正規分布に漸近する。

一致性と不偏性は特に重要な基準で、その推定量の極限が求める母数であることを担保する。以下に、平均と分散を例に推定量の違いを説明する。用いるデータ  $[X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_n]$  について、記述統計学の場合は全要素、統計的推測の場合は標本かつ  $X_i$  は確率変数である。また  $n$  はデータ数である。平均モーメントの表式は、

$$\mu = \sum_{i=1}^n X_i / n \quad (1)$$

$$\bar{X} = \sum_{i=1}^n X_i / n \quad (2)$$

(1)は記述統計学の母平均、(2)は標本平均で統計的推測では母平均の不偏推定量 (unbiased estimator) である。平均の推定では、記述統計学と統計的推測では同一の数学表現である。 $n$  が大きくなるにしたがって標本平均はほぼ母平均とみなせることを大数の法則という。また、元の確率変数の母集団分布がどのような確率分布でも、 $n$  が大きくなるにしたがって標本平均の標本分布は母平均の近傍で正規分布に漸近する定理を中心極限定理という。

一方二次キュムラントである分散の表式は、

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 / n \quad (3)$$

$$s^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / n \quad (4)$$

と書ける。(3)は記述統計学の母分散、(4)は標本分散で統計的推測では母分散の一致推定量である。その期待値は母分散に一致しないが、母集団分布の要素数が無限大で標本数が母集団分布に漸近する極限では母分散に一致する。更にモーメントそのものではないが、以下の表式

$$u^2 = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 / (n-1) \quad (5)$$

は統計的推測における母分散の不偏推定量であり、その期待値は母分散に一致する。分散の推定では、記述統計学と同じ数学表現を用いた場合は不偏ではない推定量となる。データ分析で採用されるのは不偏推定量が多数だが、用途によって不偏でない推定量が選ばれる場合もある。また、適切な不偏推定量が存在しない例もある。その場合はバイアスを考慮しなければならない。

中心極限定理に従い、標本平均の標本分布は  $n$  が大なるに従って正規分布に漸近する。さらに正規分布の再生性を用いると標準誤差は

$$\text{standard error} = u / \sqrt{n} \quad (6)$$

と書ける。分布の再生性とは、同種の確率分布で独立な確率変数同士の和の確率分布について、その平均と分散が元のそれらの算術和となり、元の確率分布が再生される性質を言う。平均の結果、データ数の増大に伴い標準誤差は縮小していく。このことは、標本平均の期待値が母平均に一致することから理解できる。標準誤差は、一般的にはエラーバーの正確な範囲を規定するものではないが、ある種の目安を与える。図1はデータの各種分布を示している。(a)はデータに揺らぎが無い場合の真値が0の集中分布、(b)は標準正規分布、(c)は標準正規分布乱数1000点の度数分布、(d)は標準正規分布乱数を9点平均した平均推定量1000点の度数分布である。(d)では9点平均によって分散が縮小される。

統計量／推定量を用いてある一つの値として母数を推定する手段を点推定という。点推定における推定量の導出法として、分布のモーメントを算出するモーメント法と、対

数尤度関数の極値を持つ条件から算出する最尤法の2種類がある。最尤法では確率分布関数の微分操作を行うため、背景確率分布のモデル化が必要である。正規母集団分布の場合には、モーメント法と最尤法の平均及び分散の推定量は一致する。最尤法で求めた推定量を最尤推定量という。点推定においてエラーバーとして標本分布の標準偏差を用いる場合、真値が上下のエラーバーの範囲に存在する(当たりの)確率は正規分布の場合は70%程度であり、範囲外に存在する(はずれの)確率が30%程度存在する。またデータから得られる標準偏差はばらつきを持ち、エラーバーの範囲に真値が納まる確率を厳密には定義できない。当たりの確率範囲を規定する手段として、次章で述べる区間推定がある。

6.4 正規母集団からの区間推定[2,3]

区間推定は、真値の入る範囲の確率を決め、確率分布の積分がそれと一致するような積分区間を求める推定法をいう。統計量の背景確率分布を既知の関数でモデル化することで範囲確率を規定できる。測定量の確率分布を正規分布としてさらに標準化(確率分布から平均を差し引き標準偏差で除する)すると、標準正規分布から派生した種々の関数モデルが確率分布に適用できる。真値が納まる範囲の確率(信頼係数 $1-\alpha$ という)を厳密に指定したい実験に有効である。このとき $\alpha$ ははずれの確率で、しばしば上側と下側で $\alpha/2$ ずつ積分区間を按分する。真値の(上下)範囲を(上側/下側)信頼限界という。通常は中心極限定理を根拠として、どのような確率変数の平均値でも確率分布が正規分布に従うとして理論展開される。さらにデータの確率分布を標準化し、各種統計量が従う標準正規分布を用いた(別の)確率分布モデルを用いる(図2)。

6.4.1 母分散が既知の場合の母平均の区間推定

母平均 $\mu$ が不明の状態でも母分散だけがわかっている場合、平均値の確率変数 $\bar{X}$ を標準化して標準正規分布に従う統計量 $z$ を定義し、

$$z = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) / \sigma$$

と書く。このとき $\sigma$ は既知の母標準偏差である。母分散が

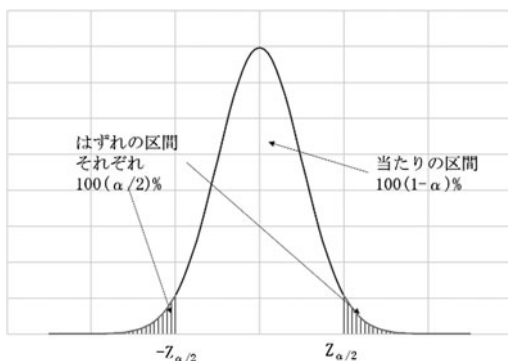


図2 正規分布の区間推定概念図。 $\alpha$ ははずれの確率を表す。統計量が標準正規分布に従う場合、上下側の積分確率がそれぞれ $\alpha/2$ となる区間の境界を $\pm Z_{\alpha/2}$ で表す。 $Z$ は正規分布を表す。

既知のケースはまれであるが、よく制御された実験では信号が来る前のノイズの振る舞いから分散を別途求め、分散が既知とできる場合があるかもしれない。 $z$ の確率が

$$P(-Z_{\alpha/2} \leq z \leq Z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

と書けることから信頼係数 $1-\alpha$ の母平均 $\mu$ の上下信頼区間

$$\bar{X} - Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + Z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}$$

が決定される。この式は、真値が標本平均 $\pm$ ファクターをかけた標準誤差の範囲に納まることを意味し、このファクターが範囲の確率を規定する。

6.4.2 母分散の区間推定： $\chi^2$ 統計量

前節では母分散がわかっている場合の推定を述べたが、一般的には母分散は不明であり、推定誤差としてデータから推定する必要がある。確率変数が標準正規分布に従うときその不偏分散を用いた次の表式

$$\sum (X_i - \bar{X})^2 / \sigma^2 = (n-1)u^2 / \sigma^2 = \chi_{n-1}^2$$

は自由度 $n-1$ の $\chi^2$ 分布に従う。母分散 $\sigma$ の信頼区間は、

$$(n-1)u^2 / \chi_{n-1, \alpha/2}^2 \leq \sigma^2 \leq (n-1)u^2 / \chi_{n-1, 1-\alpha/2}^2$$

と書ける。すなわち、母分散が確率 $1-\alpha$ 内に納まる範囲は不偏分散にファクターを乗じた(除した)範囲で規定される。 $\chi^2$ 分布の期待値は自由度と同一、分散は自由度の2倍であり、自由度が増すに従って変異係数=標準偏差/期待値は縮小する。また自由度はデータ数-1に相当し、自由度が増すに従って正規分布に漸近する。

6.4.3 母分散が不明の場合の母平均の区間推定： $t$ 統計量

母平均と母分散の両者が不明の状態では、平均値の確率変数 $\bar{X}$ を標準化する際は母分散の代わりに不偏分散を用いる。6.4.1では確率変数は統計量の分子のみに存在したが、本節では統計量の分母と分子がそれぞれ確率変数であるため、得られた統計量は標準正規分布とはならない。このとき標準正規分布の統計量の代用品である $t$ 統計量を定義し、

$$t_{n-1} = \sqrt{n}(\bar{X} - \mu) / \sqrt{u^2}$$

と書く。これは正規分布を $\chi^2$ 分布の二乗根で割った形になり、自由度 $n-1$ の $t$ 分布に従うことが知られている。 $t$ 分布は自由度が1の時はローレンツ分布となる。これより、母平均 $\mu$ の上下信頼区間

$$\bar{X} - t_{n-1, \alpha/2}u/\sqrt{n} \leq \mu \leq \bar{X} + t_{n-1, \alpha/2}u/\sqrt{n}$$

が決定される。

6.5 間接測定と誤差分散の伝播[1]

間接測定では、求める物理量 $\phi(x, y, \dots)$ が測定量 $x, y, \dots$ の関数である。測定量はそれぞれ確率変数 $X, Y, \dots$ であるため、求める物理量も確率変数 $Z = \phi(X, Y, \dots)$ になる。このとき、測定量の誤差が線形・非線形に伝播する。特に、偶然誤差の二乗がしばしば平均値へバイアスを与える。ばらつきについては、通常は誤差成分が小さいとして

関数のテイラー展開の1次の項のみ採用し、分散の算術和から分散の伝播を考える。一方、偶然誤差と系統誤差では伝播の考え方が異なる。まず、最も単純な例を挙げて、偶然誤差がバイアスとばらつきの両者に伝播する様子を示す。次に偶然誤差の分散の伝播から、一般的な誤差伝播の表式を示す。最後に系統誤差の伝播の考え方を紹介する。

### 6.5.1 間接測定時の平均操作

まず間接測定での平均への影響を述べる。ノギス等を用いて円の直径を直接測定し、半径を二乗して円の面積を間接的に推定する。この時  $\phi(x, y, \dots) = \pi x^2$  と書ける。直接測定ノイズによる偶然誤差を平均操作によって低減させるが、平均操作の手順は2種類考えられる。面積を算出した後に平均操作を行うもしくは半径を平均した後に面積を算出する。測定量の独立な確率変数  $X_i$  が平均  $\mu$ 、分散  $\sigma^2$  を持ち、真値  $\mu$  と確率変数の誤差項  $\varepsilon_i$  の和  $X_i = \mu + \varepsilon_i$  として書け、さらに誤差項同士は無相関とすると、両者では得られる平均値が異なる。前者は標本平均の統計量であり、

$$\bar{A} = \pi \sum_i X_i^2 / n = \pi \left[ \mu^2 + \sum_i \varepsilon_i^2 / n + 2\mu \sum_i \varepsilon_i / n \right]$$

と書ける一方、後者は統計量ではないが面積推定量であり、

$$\hat{A} = \pi \left( \sum_i X_i / n \right)^2 = \pi \left[ \mu^2 + \left( \sum_i \varepsilon_i / n \right)^2 + 2\mu \sum_i \varepsilon_i / n \right]$$

となる。それぞれの期待値は、

$$E[\bar{A}] = \pi(\mu^2 + \sigma^2),$$

$$E[\hat{A}] = \pi(\mu^2 + \sigma^2/n).$$

であり、いずれの面積も期待値は真値  $A = \pi\mu^2$  と一致せず、不偏性を持たない。 $\hat{A}$ 、 $\bar{A}$  では第二項が二次の項で平均値の正への偏りの原因である。 $\hat{A}$  の第二項には異なる誤差項同士の積  $\varepsilon_i \varepsilon_j$  が含まれるが、誤差項同士が独立である場合にはその期待値はゼロとなる。間接測定では、このように直接測定の偶然誤差が伝播してバイアスになる場合がある。更に、平均操作の段階によってバイアス項の大きさが異なる。この例では、面積算出前に平均操作した方が、面積算出後に平均操作した面積推定量と比較して  $1/n$  だけ期待値のバイアス項が縮小され、また、計算された面積推定量は一致性を持つ。いずれの場合もバイアス項を除去するために直接測定の分散の推定量が必要なことに留意する。

上記の例では、確率変数の平均を間接測定に入力した場合と、素の確率変数を間接測定に入力した結果の確率変数を平均化した場合とでは、期待値が異なっていた。両者が相違するか否かは推定量の関数形に依存する。また、事前の平均操作が望ましくない場合もある。例えばフーリエ解析における相関解析では、2つのフーリエ成分自体の絶対位相ではなく成分間の位相差が重要な情報源である。複素数であるフーリエ成分の偏角は実験ごとに異なり且つばらつくケースがある。その場合、事前の平均操作は絶対位相を平坦化して重要な位相差の情報ごと消去するため、やってはいけない操作である。このようにデータ分析では推定量が含む情報をよく理解し吟味した上で、あくまでデータ

数の増大によってノイズを低減する対策が基本となる。

### 6.5.2 間接測定時の偶然誤差の分散の伝播

次に偶然誤差による間接測定の分散への影響を述べる。物理量  $z = \phi(x, y, \dots)$  の真値  $z_0 = \phi(x_0, y_0, \dots)$  は、測定量の真値  $x_0, y_0, \dots$  の関数である。測定量の確率変数  $X, Y, \dots$  は互いに独立である。このとき測定量の真値からのずれが小さいとして、物理量  $z = \phi(x, y, \dots)$  を  $x, y, \dots$  に関して真値の周りのテイラー級数展開し1次の項のみを取り上げると、

$$z - z_0 = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=x_0} (x - x_0) + \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=y_0} (y - y_0) + \dots$$

この式の測定量  $x, y, \dots$  を確率変数  $X, Y, \dots$  に置き換えて、式全体を二乗し期待値を取ると間接測定の分散  $\sigma_z^2$  は、

$$\sigma_z^2 = \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_{x=x_0} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=y_0} \right)^2 \sigma_y^2 + \dots$$

$\sigma_x^2, \sigma_y^2, \dots$  は確率変数の母分散である。このとき、異なる(真値を差し引いた)確率変数同士の積の項は偶然誤差の独立性のため期待値0としている。いくつかの条件を前提として、正規分布に係らずこのように母集団分布の分散が伝播される。先の面積の例では、 $\sigma_z^2 = 4\pi^2 \mu^2 \sigma_x^2$  となる。

### 6.5.3 間接測定時の系統誤差の伝播

最後に間接測定の系統誤差の影響を述べる。系統誤差はバイアス成分が主であるが、意図せず実験条件が変わるなどの原因によってばらつく場合がある。したがって、系統誤差伝播の表式は2種類考えられ、1次の誤差項の算術和に相当する場合と分散の伝播と同様に誤差項の二乗の算術和の場合との2ケースがある。系統誤差を  $\delta_x, \delta_y, \dots$  とすると、

$$\delta_z = \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_0 \delta_x + \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_0 \delta_y + \dots,$$

$$\delta_z^2 = \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_0 \right)^2 \delta_x^2 + \left( \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_0 \right)^2 \delta_y^2 + \dots$$

このとき偏微分の下添字の0は原点の周りを意味する。前者が算術和に相当しバイアス成分が主である。後者は系統誤差が累積され偶然誤差のようにふるまうケースである。

## 6.6 乱流解析[5,6]

乱流を理解するためには統計的性質を抽出し粗視化する必要がある。中性流体乱流ではエネルギースペクトルや流れの速さ分布が注目されている。プラズマでは多様な不安定性と飽和機構が共存・競合し外力と釣り合う、と考えられており、その釣り合い状態では様々な時空間スケールの波が次々と生まれては消えている(非定常状態の集合)、という描像が確立されている。このようなプラズマ乱流を特徴付ける性質としてフーリエスペクトルが注目されてきた。フーリエ変換は元の波形データの情報をすべて含みまた逆変換によって元に戻せることから、波形データの情報の過不足なく分析が可能な変換操作であり、揺動解析に広く利用される。特にその位相情報は波動の伝播や揺動駆動輸送・波動間結合など種々の高度な物理過程を推定する上

で極めて有用である。特別推進研究「乱流プラズマの構造形成と選択則の総合的研究」(2004年～2008年, 研究代表者伊藤早苗)において, 乱流研究における理論・計算・実験の統合研究が進展した。ドリフト波乱流を基軸としたマルチスケール間結合をキーワードに, 特に実験解析の手法に劇的な開拓が見られ, それらの一部は本学会誌の小特集「プラズマ乱流実験の新展開」[7]でまとめられている。

基礎となった解析手法は, 実時間データ及び元データにフーリエ変換を介した後の強度分析及び二次的な時空間相関解析や三次相関解析である。例えば, 実時間データの詳細観察から対象実験系の非定常性を紐解いた永島・荒川「乱流素過程の詳細計測について」[8], 二次元スペクトル解析を三次相関解析に発展させた乱流スペクトルの非定常性を時空間に適用した山田・Oldenbürger「乱流解析法の進展について—マルチスケール結合」[9], そしてそれら手法を大規模トロイダルプラズマに応用し核融合研究への展開を示した田村・稲垣「輸送のエッジ—コア結合と長距離相関を持つ揺らぎの発見」[10]等が挙げられる。図3では, 同一トロイダルプラズマ乱流を対象に, 測定点が異なる揺動間(揺動の物理量自体も異なる)の二次非線形性を実証したクロスバイコヒーレンス解析であり, マルチスケール間結合を実証した先駆的な研究である。

このようにプラズマ乱流研究ではフーリエスペクトルから乱流の基礎過程を推定しているため, 如何に正しいフーリエスペクトルが得られるかが重要である。

ここでは, 乱流の波形データをフーリエ変換しスペクトル解析を行った例について紹介する。乱流の測定量を確率変数とノイズの和とすると, 両者の分別は一般には困難であるが, ある程度は相関解析によって除去可能である。まずノイズの影響について述べ, 次にパワースペクトルやバイコヒーレンスの分散について説明する。最後に, ノイズによってバイアスが発生した失敗例とその対策例を示す。

### 6.6.1 独立なノイズと信号のクロストーク

定常性を仮定しない一般的な場合では, 測定量の時間変動は次のように書ける。

$$x(t) = \langle x(t) \rangle + \bar{x}(t) + \bar{n}_x(t)$$

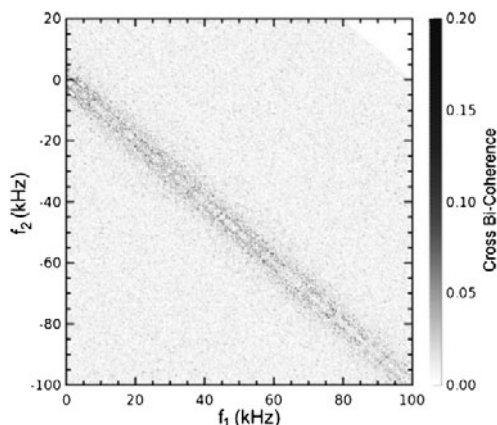


図3 マイクロ波反射計による密度揺動とECE輻射計による低周波放射温度揺動間のクロスバイコヒーレンス[4].

$\langle x(t) \rangle$  は時刻  $t$  でのアンサンブル平均,  $\bar{x}(t)$  は時刻  $t$  での測定量の揺らぎの成分,  $\bar{n}_x(t)$  は時刻  $t$  での測定量のノイズ成分である。すなわち, 測定量の背景確率分布が時間変動する。実際には揺らぎの定常性(一次と二次のモーメントのみの弱い定常性と高次モーメントを含む強い定常性がある)を仮定し, しばしば有限時間幅のデータを抽出し次の表式が用いられる。

$$x = \bar{x} + \bar{x}_x + \bar{n}_x$$

$\bar{x}$  は時間平均成分,  $\bar{x}_x$  は時間揺らぎの成分,  $\bar{n}_x$  は測定量のノイズ成分である。ノイズ成分は同一母集団分布から復元抽出した偶然誤差のみとしている。有限時間幅がサンプリング帯域効果の下限周波数を決める。フーリエ解析では検出可能な周波数より低周波成分を除去する目的で, 単純な定常成分である時間平均を取り除くよりも, 波形の勾配傾向を含む線形トレンド除去を前処理として行うことが多い。

揺らぎ信号を対象とするため, 二次以上のモーメントが解析の対象となる。分散・共分散の時間平均は,

$$\begin{aligned} \overline{(\bar{x} + \bar{n}_x)^2} &= \overline{\bar{x}^2} + 2\overline{(\bar{x}\bar{n}_x)} + \overline{(\bar{n}_x)^2}, \\ \overline{(\bar{x} + \bar{n}_x)(\bar{y} + \bar{n}_y)} &= \overline{(\bar{x}\bar{y})} + \overline{(\bar{x}\bar{n}_y)} + \overline{(\bar{y}\bar{n}_x)} + \overline{(\bar{n}_x\bar{n}_y)}, \end{aligned}$$

と書ける。ノイズと揺らぎ信号の分別は, 両者が独立でありその期待値が0となる仮定/性質を利用する。

分散については第2項の期待値は0だが, 第3項はノイズの振幅成分で必ず分散にバイアスし除去は不可能である。

共分散については, 第二項以降のノイズと信号間やノイズ同士の共分散は, 独立性が明らかであれば期待値は0である。すなわち, 共分散/相関を大量の測定量で計算すればノイズと物理確率過程の揺らぎを分離可能である。

実際には, クロストークがある場合には第2項以降もバイアスの原因になりうる。信号源が測定器のセンサー以外の箇所から信号に混入し, また複数信号間のクロストークによって互いの信号が他方のノイズ成分に重畳する。クロストークを含む信号処理上の対策はノイズ成分振幅に対する信号成分振幅の比を高め, バイアス項の上限を定めることが必要である。バイアスの問題は, 後述するが, クロストークが無くとも揺動解析では避けられない課題である。次節以降はノイズ同士やノイズと信号間で独立が保たれているとして解説を進める。

### 6.6.2 パワースペクトル

揺らぎの信号のフーリエ解析で代表的なものはパワースペクトル解析である。高速フーリエ変換で得られた複素フーリエ振幅を用いて直接パワースペクトルを推定する。複素フーリエ振幅はその定義から測定量  $x(t)$  の線形関数  $X(\omega) = \sum x(t_k) \exp(-i\omega t_k) \Delta t$  であり, 測定量のノイズも線形に重畳する。直接フーリエ変換によるパワースペクトル推定量は実部と虚部の二乗和であり,

$$S(\omega) = \frac{2\pi}{T} |X(\omega)|^2 \propto |\operatorname{Re}X(\omega)|^2 + |\operatorname{Im}X(\omega)|^2$$

のように複素フーリエ振幅の位相情報を消去して振幅成分のみを抽出する。元の測定量  $x(t)$  が平均の正規分布に従う

確率変数であるとする、推定量はその二乗和の確率変数であり、フーリエ振幅から直接求めたパワースペクトルは自由度2の $\chi^2$ 分布に従うとされる。自由度2では変異係数は $\sqrt{2-1}/(2-1)=1$ でありすなわち誤差100%を意味する。一方、アンサンブル平均数を増すことで $\chi^2$ 分布の自由度も増し、変異係数は減少する。アンサンブル平均数が $n$ の時に変異係数 $\sqrt{2n-1}/(2n-1) \sim 1/\sqrt{2n}$ は積算数の二乗根の逆数に依存して変異係数が改善され、フーリエ振幅を直接利用したパワースペクトル推定の誤差分散の規準を与える。

一方、ノイズは二乗和にバイアスとして重畳する。このバイアスはアンサンブル平均操作によって減少せずしばしばノイズフロアと呼ばれる。ノイズフロアの検出には、通常信号が飛来しないタイミングにおいて測定器を動作させ、バックグラウンドノイズを見て判断する。また、信号の受信外周波数帯域のノイズフロアの性質を受信帯域に外挿する手法が考えられる。

### 6.6.3 複素スペクトル (バイスペクトルを例に)

フーリエ解析の強みは、信号の位相情報を複素数の位相角に含められる点である。クロススペクトルは周波数/波数が等しい2点のフーリエ成分間の位相差と波形の保存の程度を表し、共分散(2点相関)に相当する。またバイスペクトルは三波結合の位相角や保存の程度を表し、3点相関を表す。いずれも複素数であり、バイスペクトルを例にそれら複素スペクトル推定量の分散を示す。バイスペクトルの不偏推定量が次のように書けるとする。

$$\hat{B}(\omega_3) = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_j(\omega_1) X_j(\omega_2) X_j^*(\omega_3),$$

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

下添え字 $j$ は複素データセットの番号を表し、 $M$ はデータの積算数である。すなわち、複素データを平均して推定量とする。バイスペクトル推定量の期待値は、

$$E[\hat{B}(\omega_3)] = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M E[X_j(\omega_1) X_j(\omega_2) X_j^*(\omega_3)] = B(\omega_3)$$

となる。一方次のように変数を定義する。

$$P(\omega) = E[|X(\omega)|^2],$$

$$b(\omega_3) = \frac{B(\omega_3)}{\{E[|X(\omega_1)X(\omega_2)|^2]\}^{1/2} \{E[|X(\omega_3)|^2]\}^{1/2}}$$

前者はパワースペクトル、後者はバイコヒーレンスと呼ばれバイスペクトルを規格化した量である。この時バイスペクトル推定量の分散は、

$$\begin{aligned} \text{Var}[\hat{B}(\omega_3)] &= E[\hat{B}(\omega_3)\hat{B}^*(\omega_3)] - E[\hat{B}(\omega_3)]E[\hat{B}^*(\omega_3)] \\ &= \frac{1}{M^2} \sum_{j,k} E[X_j(\omega_1)X_j(\omega_2)X_j^*(\omega_3) \\ &\quad \{X_k(\omega_1)X_k(\omega_2)X_k^*(\omega_3)\}^*] \\ &\quad - |B(\omega_3)|^2 \\ &= \frac{1}{M} \{E[|X(\omega_1)|^2|X(\omega_2)|^2|X(\omega_3)|^2] - |B(\omega_3)|^2\} \end{aligned}$$

$$\sim \frac{P(\omega_1)P(\omega_2)P(\omega_3)}{M} [1 - b(\omega_3)^2]$$

である。すなわち、各周波数成分の振幅二乗の積とバイスペクトル推定量の期待値の二乗との差分が分散に相当する。データ積算数に反比例して分散が減少する特徴がある。特に、バイスペクトル推定量の期待値が小さい極限で、振幅二乗の積を積算数で除した値に収束する。これにより初めに定義した推定量が期待値に収束することと整合している。

一方、クロススペクトルやバイスペクトルの有意性検定には、しばしば各スペクトルを規格化したクロスコヒーレンス/バイコヒーレンスが用いられる。背景の揺らぎがノイズや物理確率過程であるかに係らず、クロスコヒーレンス/バイコヒーレンスによって特定の周波数及び周波数間の線形/非線形相関の有意性が判明する。

バイコヒーレンス推定量の表式は、

$$\hat{b}(\omega_3) = \frac{\left| \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M X_j(\omega_1) X_j(\omega_2) X_j^*(\omega_3) \right|}{\left[ \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |X_j(\omega_1) X_j(\omega_2)|^2 \right]^{1/2} \left[ \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M |X_j(\omega_3)|^2 \right]^{1/2}},$$

$$\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$$

また、バイコヒーレンス推定量の分散は、近似的に次のように書ける。

$$\text{Var}[\hat{b}(\omega_3)] \sim \text{Var} \left[ \frac{\hat{B}(\omega_3)}{P(\omega_1)P(\omega_2)P(\omega_3)} \right] \sim \frac{1}{M} [1 - b(\omega_3)^2]$$

特に、バイコヒーレンスが小さい場合は、バイコヒーレンス推定量の分散は $1/M$ となり、標準偏差は積算数の二乗根に反比例する。すなわち、積算数に応じて精度が改善される。文献ではしばしばバイコヒーレンス推定量の二乗が三波非線形性の有意性の指標として用いられる。この時、バイコヒーレンス推定量の二乗には、バイコヒーレンス推定量の分散がノイズフロア(バイアス)として重畳する。これを特に有意水準と表現し、この値を超えた場合に信号が有意であるという判断に用いられる場合がある。図4では、乱流計測におけるバイコヒーレンス推定量の二乗の積算数依存性を表している。ノイズフロア(バイアス)が積算数に応じて減少していく様子がわかる。

図4のような図を収束曲線と表現し、通常は得ることができないデータ数無限大すなわちバイアス0における極限値の推定に用いる。収束曲線を直線回帰分析し、その $y$ 切片の推定量が十分議論に足る精度を持つまでデータを収集する。つまり、収束曲線はデータを取得する数の目安を与える。実験回数を無限回にはできないため、実験回数を設定する上で参照される。直線回帰の際は、収束曲線上の点ごとに誤差が異なることに注意する必要がある。

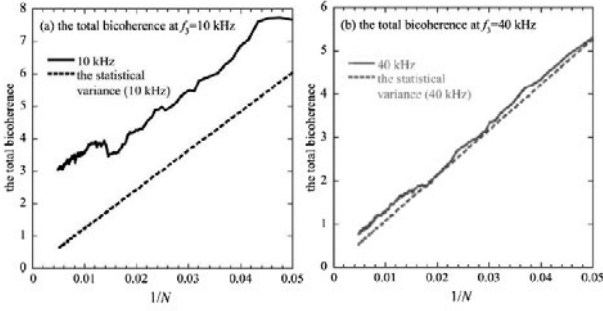


図4 二乗バイコヒーレンスのデータ積算数依存性. (a)乱流と帯状流の結合の場合, (b)乱流間の結合の場合. 二乗バイコヒーレンスにはバイコヒーレンス推定量の分散がバイアスとして重畳する. 文献[11]より引用.

#### 6.6.4 測定チャンネル数の設計：少々失敗例とその改善例

プラズマ実験では、しばしば空間2点の静電ポテンシャルデータ  $\Phi$  の差分から電磁的でない電場を計算し、また空間3点のデータから直交する2方向の電場が計算可能である. そのようにして  $E \times B$  速度による静電揺動運動量束を求める. 例えば、次のような表式

$$E_r \sim -\frac{\tilde{\Phi}_3 - (\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2)/2}{d_r}, \quad E_\theta \sim -\frac{\tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_1}{d_\theta}$$

$$v_r v_\theta \sim -\frac{\tilde{E}_r \tilde{E}_\theta}{B^2}$$

$$\propto \tilde{\Phi}_3 \tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_3 \tilde{\Phi}_1 + (\tilde{\Phi}_1^2 - \tilde{\Phi}_2^2)/2$$

のように、2つの直交する電場ベクトルに共通の信号が含まれる. 測定量にノイズが含まれる場合、

$$E_r \sim -\frac{\tilde{\Phi}_3 - (\tilde{\Phi}_1 + \tilde{\Phi}_2)/2}{d_r} - \frac{\tilde{n}_3 - (\tilde{n}_1 + \tilde{n}_2)/2}{d_r},$$

$$E_\theta \sim -\frac{\tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_1}{d_\theta} - \frac{\tilde{n}_2 - \tilde{n}_1}{d_\theta},$$

$$v_r v_\theta \propto \tilde{\Phi}_3 \tilde{\Phi}_2 - \tilde{\Phi}_3 \tilde{\Phi}_1 + (\tilde{\Phi}_1^2 - \tilde{\Phi}_2^2)/2$$

$$+ \tilde{n}_3 \tilde{n}_2 - \tilde{n}_3 \tilde{n}_1 + (\tilde{n}_1^2 - \tilde{n}_2^2)/2.$$

と書ける. ここに、 $d_\theta$ ,  $d_r$  はそれぞれポロイダル方向と径方向の電極間距離である. その期待値はノイズ同士が独立であっても特に第6項にノイズによるバイアス項が存在する. すなわち、 $E \times B$  ドリフト速度の揺らぎによるレイノルズ応力の測定を3点プローブで実施した場合、除去困難なバイアスが発生する. これは、3点のプローブでレイノルズ応力を推定した際に、ノイズ成分の独立性が一部損なわれたことに起因する. バイアスの量は極めて微小でコヒーレントな揺らぎの系では信号ノイズ比が極めて高いことから定量的評価が実施できたが、対象が乱流の場合では応力に寄与する帯域幅の増大に従ってノイズの寄与は増大するのに加え、本信号の相関が低下する. 本計測器の乱流への適用は困難と判断し、測定器を大幅に改良した. 改良後は、観測点を4点に増強し、電場を計算する上で用いるデータの重複を回避し、乱流解析に応用する準備を整え、実際に乱流の統計則の研究に発展させる端緒となった.

## 6.7 むすび

以上、データ解析におけるノイズの考え方の例について、基礎統計学を軸に乱流実験を具体例に挙げつつ述べた. 基礎統計学の端緒では、正規分布モデルと確率変数の線形和が主に用いられる. 線形システム上でのデータ解析と誤差評価は、対象実験系の解釈を限定的にするが最も理論が確立しており、本章がその学習と理解の一助になれば幸いである. 一方、データ解析が複雑になり特に非線形に係る解析では誤差評価も難しくなり、しばしば研究者自身が新規に誤差評価を定式化する必要性が発生する. しかしまさにその部分に物理解の発展があると信じ読者の挑戦を促したい.

最後に、ノイズというと求める信号に対して取り除くべきものというイメージが先行している. 業務としては尤もであるが、しばしば時系列システムのモデルでは、いわゆる「ノイズ」が駆動元に組み込まれ、システムの存在には不可欠になっている. すなわち、物理系の存在には必然的に「ノイズ」が伴う場合がある. 対象系を理解できるかどうかはともかく、ノイズに一番近い実験家が真実に一番近いともいえる. ノイズを忌避するというよりは、うまく付き合うことで次の発見と発展があるかもしれない. 実験家の奮闘を期待したい.

## 謝辞

本章の根源となった、伊藤早苗九州大学名誉教授と伊藤公孝核融合科学研究所名誉教授そして藤澤彰英九州大学教授の、これまでの丁寧かつ忍耐強い指導に謝辞を申し上げます. 当方は実験家でありながらノイズについて理論家らに多くを教えていただいた. 本章の執筆にあたり科学研究費補助金基盤研究A(15H02335)及び特別推進研究(17H06089)の支援を受けた.

## 参考文献

- [1] 吉沢康和：新しい誤差論（共立出版株式会社，1989）.
- [2] 東京大学教養学部統計学教室 編：統計学入門（基礎統計学Ⅰ）（東京大学出版会，1991）.
- [3] 東京大学教養学部統計学教室 編：自然科学の統計学（基礎統計学Ⅲ）（東京大学出版会，1992）.
- [4] N. Tamura *et al.*, *Proc. 23rd IAEA Fusion Energy Conference* (Daejeon, South Korea, 2010), EX-C/P-16.
- [5] 日野幹雄：スペクトル解析（朝倉書店，2010）.
- [6] Y.C. Kim and E.J. Powers, *IEEE Trans. Plasma Sci.* **7**, 120 (1979).
- [7] 稲垣 滋 他：プラズマ・核融合学会誌 **88**, 300 (2012).
- [8] 田村直樹, 稲垣 滋：プラズマ・核融合学会誌 **88**, 302 (2012).
- [9] 永島芳彦, 荒川弘之：プラズマ・核融合学会誌 **88**, 15 (2012).
- [10] 山田琢磨, OLDENBÜRGER Stella：プラズマ・核融合学会誌 **88**, 309 (2012).
- [11] Y. Nagashima, *Rev. Sci. Instrum.* **77**, 045110 (2006).