



## プロジェクトレビュー

# 特異値分解固有モードを利用した磁場設計 (核融合装置技術から応用した磁場設計)

## Magnetic Design Methods Using Singular Value Decomposition (Magnetic Design Methods Developed in Fusion Research and Their Applications)

阿部 充志\*

ABE Mitsushi

日立製作所ヘルスケアビジネスユニット核融合加速器部核装置設計グループ

(原稿受付：2018年10月11日)

目標磁場を実現する起磁力配置を求める逆問題は、核融合装置を含む磁気応用機器の設計や実験で頻繁に出現する。ここでは、打ち切り特異値分解 (TSVD) 正則化を適用してきた例を紹介する。トカマク装置実験では、構造物上の電流を考慮したポロイダル磁場分布再構成と多変数制御型ポロイダル磁場コイルを用いた負帰還制御、それに、面電流表現と結びつけてステラレータ用モジュラーコイル設計手法開発に適用した。ここでの TSVD 正則化では、SVD 固有モードを、強度と磁場分布に注目して、選択する特徴が有る。核融合以外の分野にも応用している。MRI 装置の磁場に関し、振幅 3 ppm 以下の均一磁場を作る起磁力配置設計、励磁後の精密磁場調整法の確立および能動磁気シールド構造を持つ傾斜磁場コイル設計に適用した。現在、素粒子 (ミューオン) の磁気・電気モーメント精密計測用で、MRI 以上の均一磁場を持つ磁石設計に適用している。

### Keywords:

singular value decomposition, truncated SVD, tokamak, poloidal field control, Hitachi Tokamak HT-2, magnetic design, MRI, magnet, homogenous magnetic field, gradient field coil.

### 1. はじめに

実験装置の磁場分布を求めるには、Biot-Savart の法則や有限要素コードを用いて、与えられた電流や磁気モーメント (MM: Magnetic Moment) 分布等の起磁力配置から磁場分布を計算する。一方、磁気応用機器の設計では、目標とする磁場分布を発生できるコイル等の起磁力配置を求める。後者はいわゆる逆問題であり、磁気応用機器の設計では必ず解く必要のある問題である [1]。核融合装置の設計でもコイル配置設計や PFC (Poloidal Field Coil) 電流配分に存在する [2]。また、磁気共鳴撮像 (MRI: Magnetic Resonance Imaging) 装置などの高精度な磁場を必要とする機器、多くは超伝導利用であるが、電流や磁性体の配置を正確に求める逆問題に加え機器設置後に計測された誤差磁場の補正磁場を生成する MM 配置を求める逆問題 (シミング計算) もある [3, 4]。

このような逆問題は、核融合分野では実験遂行時にも存在する。プラズマ位置形状や表面位置を実時間で制御する負帰還 (FB: Feedback) 制御の演算も逆問題である。また、限られた点数の磁場・電流計測データを用いて、プラズマ付近のポロイダル磁場分布を空間連続的に把握 (再構成) する磁場計測手法 [5-7] が代表的な逆問題として存在する。筆者も、この磁場再構成を Double-III で行い、プラズマ閉じ込め特性が、プラズマ表面位置に依存することを把握し

た [8]。また、小型トカマク装置日立トカマク HT-2 [9-22] でも、数十点のポロイダル磁場・電流の計測値からポロイダル磁場の再構成 [9, 13, 14] を行った。HT-2 では、プラズマと構造物 (特に真空容器) の磁氣的相互作用を把握することを実験目標とした [10, 13-22] ため、真空容器に誘起される電流の把握が重要であった。特異値分解 (SVD: Singular Value Decomposition) [23-25] を利用して、真空容器などに誘起される誘導電流を、数個の SVD 固有電流分布の組み合わせで表現し、ポロイダル磁場分布の再構成に利用した [15]。また、超伝導トカマク装置 TRIAM-1M にも適用し、低温部の低抵抗部材を流れる誘導電流に起因すると考えられる誤差磁場を考慮した計測磁場入力型の 2 次元 (2D: two-dimensional) 平衡計算コード [13] を通して閉じ込め特性の把握を行った [26]。

さらに、SVD による正則化に注目し、単なる打ち切り特異値分解 (TSVD: Truncated SVD) でなく、SVD 固有モード (以下では簡単に固有モードと書く場合もある) の強度と磁場分布の有意性に注目して固有モードを選択する正則化手法として、HT-2 での磁場制御や、核融合以外の分野で磁気応用機器の (目標磁場を実現する起磁力配置設計) に適用した。磁場関連を主としたプラズマ計測に SVD を応用した例は、近年、本学会誌でも取り上げられている [27-29] が、HT-2 実験での SVD 応用は先駆的でもあり、実際

\*現在の所属は、高エネルギー加速器研究機構素粒子原子核研究所, 〒319-1106 茨城県那珂郡東海村白方203-1 高エネ研東海キャンパス  
author's e-mail: abemk@post.kek.jp

的でもあった。そのため、HT-2実験での良好な結果を受けて、TSVD正則化を応用する磁気応用機器の磁場設計に応用した。核融合装置設計への応用として、準軸対称ステラレータCHS-qa[30]磁場設計で検討したモジュラーコイル形状の算出手法[31]を開発した。また、トロイダル磁場リップルを低減するように、フェライト鋼F82H配置の最適化にも適用した[32]。その後、核融合以外で、MRI装置製品開発で磁場設計に適用し、さらに、基礎物理実験用の磁石設計に応用している。

核融合実験関連とその他の応用先は、互いに異質な分野であるが、問題を解くための共通手法として、TSVD正則化を適用してきた。電流から磁場への応答行列 $\mathbf{A}$ に対して、目標磁場分布 $\mathbf{B}^{\text{TG}}$ を再現する電流分布 $\mathbf{I}$  ( $\mathbf{B}^{\text{TG}} = \mathbf{A}\mathbf{I}$ : 例として電流で記述)を求める手法として使ってきた。このような問題で、逆問題解法の要は $\mathbf{A}$ の逆行列を求めることである。しかし、一般に $\mathbf{A}$ は非正則なので、逆行列は存在せず、正則化法を使う[1]。筆者は、固有モードの強度と磁場分布に注目したTSVD正則化を利用した最小二乗法を用いて、満足する磁場性能を持つ機器の磁場設計を行ってきた。

代表的な正則化手法[1]として、Tihonov正則化と本記事で取り扱うTSVD正則化がある。後者には次の利点があると考えられる。

- (i) 単位電流(起磁力)あたりの磁場強度(特異値)が大きな(低次)固有モードから選択する。したがって、最小の起磁力で必要な磁場を発生する電流分布を選択する機能をTSVDが持っている。
- (ii) 固有モード数と磁場分布の近似精度には明確な関係があり、得られる精度を把握しながら、低次成分で起磁力配置を検討できる。
- (iii) 各SVD固有モードと目標磁場分布を比較することで、使用する固有モードから実機で必要とする起磁力配置を把握できる。
- (iv) 分布電流(例えば、トカマク装置の真空容器を流れる誘起電流)のように自由度の多い起磁力配置についても、磁場に対して大きな寄与を持つ起磁力分布をあらかじめ把握して選択し、必要な精度を確保しながら、自由度を減少させて議論できる。

これら利点については、実機設計例で示していくが、上記項目全体に共通していることは、固有モードの選択を通じて派生することである。正則化は線形方程式系の逆計算を安定に行う手法であるが、以下では上記特徴を引き出すために、固有モードに注目して、その加算で逆問題を解く。したがって、正則化というより、有益な固有モードの抽出とその利用方法についての議論となる。つまり、本記事の表題のようにSVD固有モードを使用した磁場設計の議論である。

本プロジェクトレビュー(以下では記事と略す)の趣旨は、上記の特徴を反映した固有モード利用の磁場設計技術を、核融合技術の応用として紹介することである。著者が応用・発展させた次の内容で紹介する。まず、HT-2実験でのSVD応用で、ポロイダル磁場の再構成手法とFB制御を

述べる。次に、核融合装置設計への応用として、準軸対称ステラレータCHS-qa磁場設計で検討したモジュラーコイル形状の算出手法を紹介する。後半では、MRI装置や基礎物理実験用磁石に応用した磁場設計を報告する。特に、ここでのTSVD正則化には、個々のSVD固有モードの磁場分布と強度を把握して、選択する特徴がある。この点に注目して記述する。

## 2. 最小二乗法と正則化

ある磁場分布を持つ磁気応用機器を設計する場合、その磁場を発生する電流分布 $\mathbf{I}$ を求め(磁場設計)、それを保持できる構造(耐電磁力、耐電圧、電流密度、冷却など)を設計していく。磁場設計の部分で逆問題を解く。目標磁場分布として、多くの場合、磁束密度( $\text{Wb}/\text{m}^2$ )分布であるが、磁束( $\text{Wb}$ )分布を考えることもある。多数個の磁場評価点(MFEP: Magnetic Field Evaluation Point)上の磁場分布 $\mathbf{B}$ (要素 $B_i$ は $i$ 番目MFEPの磁場)と電流分布 $\mathbf{I}$ (要素 $I_j$ は $j$ 番目電流値)の関係は、線形方程式系、

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{I} \quad (1)$$

で表現できる。電流から磁場への応答行列 $\mathbf{A}$ の要素 $A_{ij}$ [T/A]は $i$ 番目電流が $j$ 番目MFEPに作る単位電流あたりの磁場強度であり、Biot-Savartの法則等で算出し、(MFEP数) $\times$ (電流要素数)の次元を持つ。目標の磁場分布 $\mathbf{B}^{\text{TG}}$ を再現する電流配分は $\mathbf{A}$ の逆行列を用いることで把握できる。しかし、一般的には $\mathbf{A}$ は非正則で式(1)はill-posed問題であるため、 $\mathbf{B}^{\text{TG}}$ を近似的に再現する電流分布 $\mathbf{I}$ を、最小二乗法[24]により算出する。つまり、

$$\|(\mathbf{B}^{\text{TG}} - \mathbf{A}\mathbf{I})\|^2 = (\mathbf{B}^{\text{TG}} - \mathbf{A}\mathbf{I})^t(\mathbf{B}^{\text{TG}} - \mathbf{A}\mathbf{I}) \rightarrow \text{最小} \quad (2)$$

の電流分布 $\mathbf{I}$ の近似解を求める。この解は、 $\mathbf{I}$ について微分して、極値を持つ条件から、

$$(\mathbf{A}^t\mathbf{A})\mathbf{I} = \mathbf{A}^t\mathbf{B}^{\text{TG}} \quad (3)$$

を解くことで得られる。ここで上添え字 $t$ は転置行列であることを示す。 $(\mathbf{A}^t\mathbf{A})$ は正方行列なので、多くの場合、逆行列を算出でき、式(3)を利用すれば、下記である。

$$\mathbf{I} = (\mathbf{A}^t\mathbf{A})^{-1}\mathbf{A}^t\mathbf{B}^{\text{TG}} \quad (4)$$

最もよく知られた逆問題解法であるが、この式で算出する電流分布に基づいた磁気応用機器設計は難しい。多くの場合、必要以上の磁場精度を振幅(要素 $I_j$ の最大・最小値の差異)の大きな $\mathbf{I}$ で発生する解を得て、過大な電流値を算出する。このため、磁場設計には使えない。

機器設計に必要な解 $\mathbf{I}$ は、適度な精度で、実現可能な電流分布を与えるものである。これに対して、磁場精度と $\mathbf{I}$ の実現性を取引する手法としての正則化法があり、代表的には、Tihonov法とTSVD法の正則化がある[1]。以下、本記事では、TSVD法を応用した議論となる。

行列 $\mathbf{A}$ にSVDを適用すると

$$\mathbf{A} = \sum u_i \lambda_i v_i^t, \quad (5)$$

であり、磁場分布を表す基底  $\mathbf{u}_i$  と、これに一对一に対応した電流分布の基底  $\mathbf{v}_i$  および相互の換算係数 (T/A) と考えることのできる特異値  $\lambda_i$  の組み合わせを、固有モード番号  $i$  について加算した式で表現できる。通常、特異値  $\lambda_i$  の大きさの順に固有モードの番号  $i$  を付ける。これを用いて  $\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t$  を求めると、

$$\mathbf{A}^* = (\mathbf{A}^t \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^t = \sum \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^t / \lambda_i, \quad (6)$$

である。これが  $\mathbf{A}$  の一般逆行列であることは、式(5,6)から、 $\mathbf{A} \mathbf{A}^* \mathbf{A} = \mathbf{A}$  が成り立つ (つまり、 $\mathbf{A} \mathbf{A}^*$  は無作用) ことで確認できる。つまり、SVD を用いることで容易に一般逆行列を求めることができる。この結果、 $\mathbf{I}$  を、

$$\mathbf{I} = \sum (\mathbf{u}_i^t \mathbf{B}^{\text{TG}}) \mathbf{v}_i / \lambda_i \quad (7)$$

で求めて、逆問題を解く。和は、固有モード番号  $i$  について行い、必要な磁場精度が確保できる固有モード番号  $M_D$  で加算を打ち切り (Truncated)、低次 (大きな  $\lambda_i$ ) の SVD 固有モードのみ加算に加える。全ての固有モードを加算すると通常の最小二乗法 (式(4)) である。この場合、高次 (小さな  $\lambda_i$ ) の固有モードを含めて加算するため、分母に小さな  $\lambda_i$  を持つ項の加算で、解が不安定となり、過大な電流を求めることにつながる。TSVD 正則化は、低次の固有モードを加算し、発生する磁場は些細として高次成分を無視して、妥当な電流で磁場を近似的に再現する。加算する固有モードの選択については、次節で議論する。

一方、Tihonov 正則化は式(3)に誤差  $\epsilon$  を含ませ、

$$(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \epsilon^2 \mathbf{L}^t \mathbf{L}) \mathbf{I} = \mathbf{A}^t \mathbf{B}^{\text{TG}} \quad (8)$$

とする。  $\mathbf{L}$  は線形な行列であり、単位行列であれば、上式は、 $\epsilon$  に応じて電流  $\mathbf{I}$  を小さくする解を求める。行列  $(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \epsilon^2 \mathbf{L}^t \mathbf{L})$  は正則となるため、求める電流配分 (逆問題解)  $\mathbf{I}$  は、

$$\mathbf{I} = (\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \epsilon^2 \mathbf{L}^t \mathbf{L})^{-1} \mathbf{A}^t \mathbf{B}^{\text{TG}} \quad (9)$$

である。その解は、SVD 固有モードを用いて示すと、

$$\mathbf{I} = \sum [\lambda_i / (\lambda_i^2 + \epsilon^2)] \mathbf{u}_i^t \mathbf{B}^{\text{TG}} \mathbf{v}_i \quad (10)$$

である。ただし、式(10)では  $\mathbf{L}$  を単位行列とした。和は、固有モード番号  $i$  について行う。式(7)と式(10)を比較すると、Tihonov 正則化では、 $\lambda_i = \epsilon$  となる固有モード番号付近で加算を打ち切り、おおよそ同様な解を出力すると理解できる。ただし、通常、Tihonov 正則化では、 $(\mathbf{A}^t \mathbf{A} + \epsilon^2 \mathbf{L}^t \mathbf{L})$  の逆行列を求めて計算を実行すると、固有モードを意識することはない。式(2)と式(8)の意味を考えると、磁場  $\mathbf{B}^{\text{TG}}$  を再現する時に式(2)に  $|\mathbf{I}|$  を小さくする条件を追加したことになる。  $\mathbf{L}$  として単位行列を用いれば、式(10)で電流ノルム  $|\mathbf{I}|$  を小さくする条件を加えたことになるが、単位行列以外の  $\mathbf{L}$  を使うことも可能であり、電流以外のパラメータを小さくする条件を加えることも可能である。しかし、Tihonov 正則化では、打ち切りが緩やかに行われるために、本来必要でない高次 (小特異値) 成分が解に入り込み、電流を大きくする可能性がある欠点が存在す

る。筆者の磁場設計で TSVD 正則化を使ってきた理由のひとつがこれである。

## 2.1 各固有モード強度に注目した TSVD 正則化

TSVD 正則化では、一般的に、式(7)で、特異値の大きなもの (低次) から加算し、必要な精度が得られる  $M_D$  番目で打ち切るが、式(7)を参考にすると、固有モードの寄与は 1 番目固有モードの特異値との比の  $\lambda_1/\lambda_i$  で解  $\mathbf{I}$  に反映されることが解る。言い換えると、ill-posed は  $\lambda_1/\lambda_i$  が発散していくような行列  $\mathbf{A}$  を持つ問題と理解できる。この意味で、 $\lambda_i$  が小さいため、わずかな磁場しか発生できなない高次固有モードは不必要であり、加算から除外する。これを、磁気応用機器の磁場設計に応用してきたが、筆者の TSVD 正則化では、加算に選択する条件に、固有モードが有意な磁場分布を持ち、強度を持つことを条件に加えた。つまり、ill-posed の問題による発散を防ぎ、近似解を求めるために、各固有モードで磁場に対して下記のように、実現できる電流で有意な寄与を持つ固有モードのみを選択・加算して目標の磁場を近似的に発生できる起磁力配置を求める。

固有モードの選択のために、式(7)を書き直して、

$$\mathbf{I} = \sum \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^t \mathbf{B}^{\text{TG}} / \lambda_i = \sum n_p^{1/2} \mathbf{v}_i P_i^{\text{TG}} / \lambda_i, \quad (11)$$

として、下記の固有モード強度、

$$P_i^{\text{TG}} = \mathbf{u}_i^t \mathbf{B}^{\text{TG}} / n_p^{1/2} \quad (12)$$

で、固有モードを加算する。ここで、 $n_p$  は MFEP 数で、 $\mathbf{B}^{\text{TG}}$  の次元数である。ここでは、固有モード強度を規格化するために  $n_p^{1/2}$  で割っている。再現磁場  $\mathbf{B}^{\text{REC}}$  は、電流  $\mathbf{I}$  でも計算できるが、MFEP 点での磁場は、

$$\mathbf{B}^{\text{REC}} = \sum n_p^{1/2} P_i^{\text{TG}} \mathbf{u}_i \quad (13)$$

である。TSVD 正則化による逆問題の解法、特に式(11)、(13)の加算を模式的に図1に示す。SVD で、磁場と電流分布の基底と特異値を求め、式(12)の  $P_i^{\text{TG}}$  を図の右側の様に求め、左側のように、式(11)、(13)の加算を実行する。加算する固有モードを多くすると、上部左側のように細かく振動する解になることが多いが、固有モード数を適数にすると、実現性のある解を獲る。TSVD で加算する固有モードの選択は、下記の様に考える。

1) 残差磁場  $\mathbf{B}^{\text{RE}}$  が目標値  $\epsilon_r$  以下となるように加算、

$$\mathbf{B}^{\text{RE}} = \mathbf{B}^{\text{TG}} - \mathbf{B}^{\text{REC}} = \mathbf{B}^{\text{TG}} - \sum n_p^{1/2} P_i^{\text{TG}} \mathbf{u}_i \quad (14)$$

で、加算する固有モード数  $M_D$  を多くすると、残差磁場は小さくなる。下記の振幅 (PP: peak-to-peak) が目標値以下となるまで固有モードを加算する。つまり、

$$B_{\text{PP}}^{\text{RE}} = B_{\text{MAX}}^{\text{RE}} - B_{\text{MIN}}^{\text{RE}} < \epsilon_r \quad (15)$$

となる  $M_D$  を選ぶ。

2) SVD 固有モードの磁場分布と強度に注目、

式(5)で説明したように、磁場基底  $\mathbf{u}_i$ 、電流基底  $\mathbf{v}_i$  および特異値  $\lambda_i$  で  $i$  番目の固有モードを構成する。個々の磁場基底  $\mathbf{u}_i$  が必要であるものかを、 $(i) P_i^{\text{TG}}$

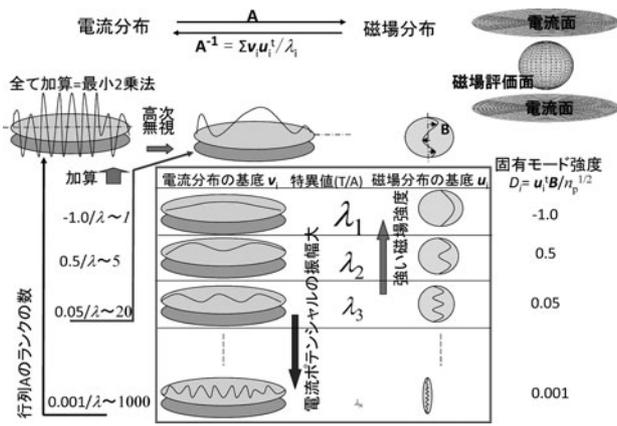


図1 打ち切り特異値分解正則化を用いた逆問題解法の模式的説明。

が有意な大きさか？ (ii) 目標磁場に必要固有モードか？から判断した上で、加算する。  $u_i$  は MFEP での磁場を示しているのみであるが、  $v_i$  で計算する単位電流分布あたりの磁場分布  $b(v_i)$  を固有モードの磁場分布とすると理解しやすい。

3) 必要電流強度の実現性,

式(11)で各電流  $I_j$  が実用的に実現できる範囲である。

以上の条件で打ち切り次数  $M_D$  や加算する固有モードを設定するが、上記の3項目を同時に満たさない場合もある。たとえば磁石の設計であれば、電流配置を考えている領域が不適切、もしくは過大な目標磁場領域の大きさや精度等の原因がある。この場合、検討している幾何学的体系や磁場仕様を再検討することになる。

以下では、TSVD 正則化による逆問題解法を応用した磁気応用機器の磁場設計例を示すが、電流  $I$  と磁束密度  $B$  の関係 (式(1)) からの議論だけでなく、他の組み合わせの場合もある。例えば、磁場  $B$  ではなく、磁束  $\Phi$  をする場合、入力側では、電流  $I$  でなく磁気モーメント分布  $M$  とする場合もある。

3. 核融合装置での磁場制御・磁場設計

本記事の計算手法は、TSVD 正則化を用いた最小二乗法であるが、固有モードの強度や磁場分布に注目する点に特徴がある。SVD 固有モードをすべて加算すれば、近似精度はよくなる。しかし、前節の議論からわかるように、小特異値の固有モードまで利用すると、不安定な解になり易い。ここでは、必要以上の精度は求めないことで、妥当な磁場分布を得てきた実験例を議論していく。

3.1 トカマク実験での特異値分解応用

小型装置の日立トカマク HT-2 (図2) は、1986年12月に運転開始[9]し、2003年3月にシャットダウンされた。計測磁場からポロイダル磁場分布の再構成を重要な計測手段とし、ポロイダル磁場のFB制御に、式(11)、(12)を利用してSVD 固有モード強度を制御する方法を用いた。

前者は、計測磁場を再現するようにトロイダル方向電流を最小二乗法で求める磁場近似手法であるが、より正確(磁場近似の残差が小さい)に再構成するために、真空容器に流れる誘導電流が作る磁場の再構成に固有モードの重ね合わせを利用した[15]。真空用機器などのトカマク装置構造物に誘起される電流を考慮するポロイダル磁場再構成は、近年取り上げられている[28,29]が、ここでは、'80年末から90年代中期にかけてプラズマと構造物の磁氣的相互作用を考慮する工夫を施した磁場再構成手法を紹介する。

後者では、低一周電圧・抵抗での放電開始[15,17,18]やプラズマ対向壁をフェライト鋼 F82H とした放電[19,20,21]を可能とした TSVD 応用の FB 制御法とポロイダル磁場再構成法を述べる。これらを通して TSVD 応用が実用的な手法であることを紹介する。

3.1.1 ポロイダル磁場の再構成

最初に、HT-2 実験の基礎的とした計測磁場に基づく 2D ポロイダル磁場分布の再構成を述べる。この手法としては、プラズマ電流分布を単に数本の円電流で近似する方法[9,15]とプラズマ電流の 2D 平衡分布に基づく方法[13]の2種類を開発した。それぞれ、SHP (SHaPe) と FITEQ (FITted EQUilibrium) と呼んだ。通常の実験では前者

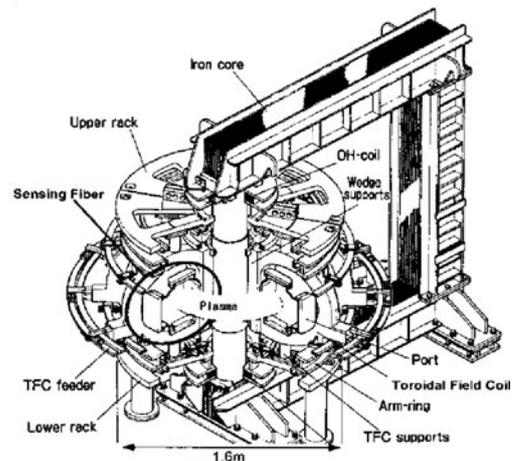
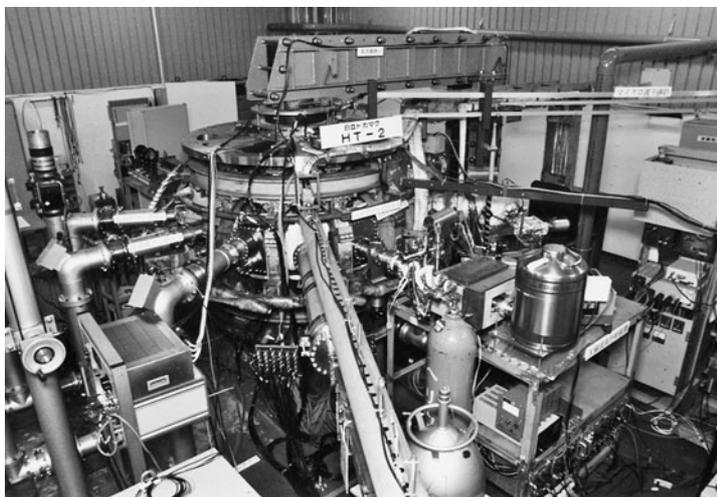


図2 日立トカマク HT-2 実験室の写真 (左：1992年頃) と本体の模式図 (右)。

(SHP)を用いた。一方、FITEQは、ディスラプション時のプラズマ挙動の把握[14]、ハロー電流の推定[22]およびTRIAM-1MのOHプラズマ閉じ込め特性の把握に利用した[26]。これらにはTFCの持つ誤差磁場や構造物の影響によるポロイダル磁場も考慮した。後者の影響には、HT-2では真空容器上の誘導電流[9, 10, 15]と磁化したF82Hによる磁場[19-21]であり、TRIAM-1MではTFC(トロイダル磁場コイル)の極低温部の安定化導体や輻射シールドに誘起される誘導電流による磁場[26]である。

HT-2では図3の様に真空容器電流を扱っている[15]。上側に応答行列を特異値分解して得た固有PFC電流配分 $\mathbf{v}_i$ から、ポロイダル断面で磁場分布を算出した磁場分布 $\mathbf{b}(\mathbf{v}_i)$ を固有磁場分布として示し、下側には、放電開始時の磁場再構成における残差磁場を時系列で示す。真空容器電流を多数の線輪電流(トロイダル方向円電流)に分割し、磁場計測値から最小二乗法で電流値を決めるが、このままでは磁場計測点数以上に電流が存在してill-posed問題である。そこで、変数を減少させるためにSVDを利用した。線輪電流値からプラズマ領域の磁束への応答行列を算出し、これにSVDを適用して得る固有モード(図上側)の電流分布をポロイダル磁場コイル(PFC)の様に扱い、その大きさをPFC電流やプラズマ電流(4~5成分)と共に計測磁場を再現するように最小二乗法で決めた[9, 10, 15]。

HT-2では真空容器渦電流の再現精度を向上させるために、真空容器壁を挟んで内外に磁気センサを配置させ、かつ、PFCには磁束ループを配置して、プラズマを囲む3面の磁場計測面を持っていた。つまり、磁場評価点(MFEP)の計測磁場分布を $\mathbf{B}^{\text{MS}}$ としこれを再現するための電流ベク

トル $\mathbf{I}$ を

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= (I_{P1}, I_{P2}, I_{P3}, I_{P4}, I_{HY1}, \dots, I_{HY8}, I_{V1}, I_{V2}, \dots, I_{VN}) \\ &= (\mathbf{I}_P, \mathbf{I}_{HY}, \mathbf{I}_V) \end{aligned} \quad (16)$$

とし、真空容器壁電流 $\mathbf{I}_V$ から磁場への応答関数 $\mathbf{A}_V$ をBiot-Savartの法則で求めると、MFEPに $\mathbf{I}_V$ が作る磁場 $\mathbf{B}^V$ は次式で表すことができる。

$$\mathbf{B}^V = \mathbf{A}_V \mathbf{I}_V \quad (17)$$

この $\mathbf{A}_V$ にSVDを適用し、真空容器上の電流 $\mathbf{I}_V$ は

$$\mathbf{I}_V = \sum I_{VMi} \mathbf{v}_{Vi} \quad (18)$$

のように、真空容器壁上のSVD固有電流分布 $\mathbf{v}_{Vi}$ の加算で表現する。この固有モードが図3上部である。 $I_{VMi}$ は $i$ 番目固有モードの電流値で、2.1節の議論を利用すれば、固有モード強度 $P_i$ と、 $I_{Mi} = n_p^{1/2} \mathbf{v}_i P_i / \lambda_i$ の関係がある。磁場残差 $E_r$ を

$$E_r^2 = \|\sigma \mathbf{B}^{\text{MS}} - (\mathbf{A}_P \mathbf{I}_P + \mathbf{A}_{HY} \mathbf{I}_{HY} + \mathbf{A}_V \sum I_{VMi} \mathbf{v}_{Vi})\|^2 \rightarrow \text{最小} \quad (19)$$

とする電流配分 $(\mathbf{I}_P, \mathbf{I}_{HY}, \mathbf{I}_{VM})$ を決めて、これらの電流からポロイダル断面全体のポロイダル磁場分布を再構成する。ここで、 $\mathbf{I}_{VM}$ の要素は $I_{VMi}$ であり、 $\sigma$ は重みの対角行列で成分として計測誤差の逆数を持つ。電流に対しては通常重みは用いない。この方法で精度良く、数値的には安定に、ポロイダル磁場分布を再構成した。式(18)、(19)の加算は9個の固有モードについて実行していたが、多くの場合、第1番目 $I_{VM1}$ が誘導電流による磁場の支配的な大きさを持っていた[15]。

図4にポロイダル磁場分布の再構成例を示す[15, 18]。58個程度の電磁データ(電流, 磁束, 磁場)を利用している。鉄芯による磁場は解析式で補正し、TFCが作る誤差磁場成分としての半径方向(水平)磁場 $B_H$ として5 Gauss(トロイダル磁場1.0 T)を加えている[13]。TFC由来の誤差磁場は磁気センサで直接的に計測することはできない。しかし、計測磁場を元に2D平衡磁場の再構成を行うときに、プラズマに働く上下方向の力を零とし、上下位置を安定化した計算のために必要な $B_H$ をTFC由来の誤差磁場とした[13]。図3の放電開始プラズマには閉じた磁気面は存在しないために、ここでは単にプラズマ電流位置のみが把握できていると考える。

一周抵抗を0.3 mΩに小さくした[18]のために、真空容器を流れる電流 $\mathbf{I}_V$ は8 kAで、この実験のプラズマ電流 $I_P = 20$  kAと比較して無視できなく、真空容器壁の内外で100 Gauss程度のポロイダル磁場の差がある。しかし、再構成された放電開始直前のポロイダル磁場は真空容器内にヌル点を持ち、かつ、高速度カメラによる放電開始時のプラズマ位置とよく一致している。つまり、真空容器に無視できない電流が流れても、精度良くポロイダル磁場が再構成できていることが解る。

図3下側には計測値の最小二乗近似の残差誤差と計測誤差推定値の比を二乗加算した値を放電時刻ごとに示した。

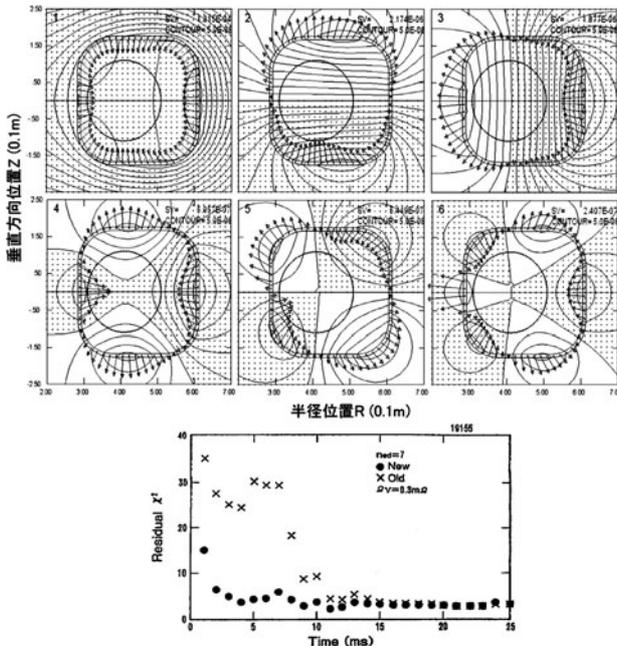


図3 真空容器を流れる電流のSVD固有モード分布(上)と放電開始時の規格化した残差2乗和の時間変化の比較(下:文献[15] Fig. 3(a)より引用)。真空容器電流は●ではSVD固有モード分布、×では三角関数による分布、の重ね合わせで表現した。SVDでは残差が小さく精度良くポロイダル磁場分布が再構成できる。

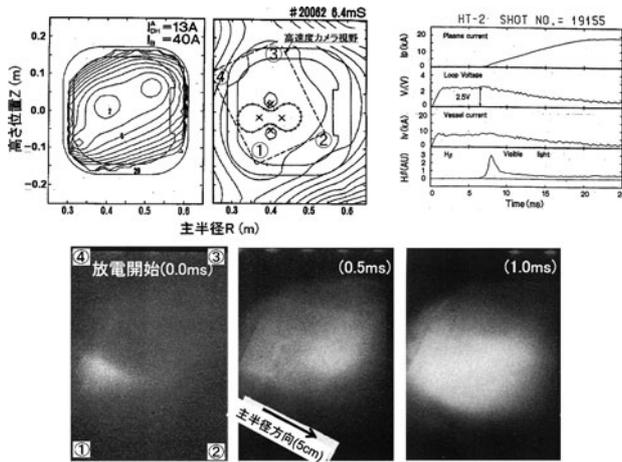


図4 低一周抵抗真空容器での放電開始時 ( $I_p = 0.9$  kA) の磁場解析結果 (上: 左側はポロイダル磁場強度分布, 右側は磁束線分布, 文献[15] Fig. 6, Fig. 7より引用) と放電波形 (上右 (文献[18], Fig. 7より引用)), 下側は再構成磁場の精度確認のための高速度カメラによる写真 (主半径の側のリミッタ部分が左端)。

真空容器上の電流をフーリエ級数で近似した場合 (図中ではOLD) に比べて, SVD固有分布の重ね合わせの方が精度良く磁場分布を近似できたことが解る[15]。この方法で, 図4の様に精度良くポロイダル磁場を再構成できるようになり, 放電開始時やディスラプション時においても精度良くポロイダル磁場を把握できるようになった[15, 16]。

一方, 超伝導トカマク装置では, TFCがつくる誤差磁場以外に, 極低温・低抵抗の構造材に誘起された電流による磁場も考慮する必要がある。これらを考慮した2D平衡磁場の再構成手法は, 超伝導トカマク装置 TRIAM-1Mで, 平衡磁場の把握やエネルギー閉じ込め特性の把握にも利用した。TRIAM-1Mでは, 磁場計測はプラズマを取り囲むポロイダル断面で1本の閉曲線上であり, 渦電流が流れる構造物を取り囲む配置ではなかったが, 極低温部の構造物に誘起される電流が発生する磁場分布はプラズマやPFCによる磁場分布とは異なる分布であり, 分離して求めることが可能であった。TFCのプラズマ側位置にトロイダル方向一様な2D分布電流面を配置し, SVD固有モード強度を, PFCやプラズマ電流配分と共に最小二乗法で計測磁場から求めた。この考え方で平衡磁場を図5のように把握できた。PFCによる磁場 (垂直磁場-302ガウス) とは別に無視できない大きさ (10%の垂直磁場減少) の磁場を把握できた。この磁場も考慮して, プラズマの2D平衡電流・磁場分布を求めエネルギー閉じ込め時間が特性を議論した。TRIAM-1Mは高磁場・大アスペクト比が特徴であった。それまで,  $f_s (= 0.32R_p \kappa^{0.5} a_p^{-0.75} \cdot R_p, \kappa, a_p$  はそれぞれプラズマの大半径, 楕円度および小半径) [33]が1.0前後で成り立つことが示されていた新アルカトール則が,  $f_s = 1.75 \sim 1.85$  の変流器プラズマについても成り立つことを示した[26]。

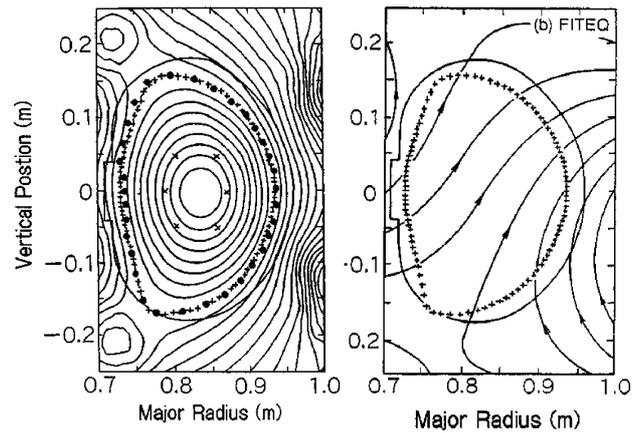


図5 超伝導トカマク TRIAM-1Mにおける2D平衡磁場のFITEQによる再構成結果。左: 全ポロイダル磁場の磁束分布とプラズマ断面形状。●はSHFで求めたプラズマ表面位置で磁気軸付近の6個のxがプラズマを模擬した電流位置。右: プラズマおよびPFC以外からのポロイダル磁場。文献[26], Fig. 6, Fig. 7(b)より引用。

### 3.1.2 ポロイダル磁場の多変数FB制御

HT-2では巻き戻しのないPFCを使い, SVD固有モード強度を調整する考え方で, ポロイダル磁場分布の多変数負帰還制御を行った[17, 18]。制御結果は前記のポロイダル磁場再構成手法で確認した。FB制御[17]に使った固有モード磁束分布 (ここでは磁場でなく磁束分布を扱う) の等磁束線 (磁力線) を図6右側に, ポロイダル断面で示す。左側には, 応答行列  $\mathbf{A}$  の算出体系を模式的に示した。単位PFC電流がプラズマ表面付近の磁束評価点に作る磁束の大きさ[Wb/A]が要素  $A_{ij}$  である。図6の磁束分布は,  $\mathbf{A}$  を特異値分解して得た固有PFC電流配分  $\mathbf{v}_i$  から, ポロイダル断面で磁場分布を算出したもの  $\mathbf{b}(\mathbf{v}_i)$  である。特異値 (この場合, Wb/Aに相当) の大きな固有モードおよびプラズマの平衡に有意な固有モードを使うことで, より小さな電流で 予め決めたポロイダル磁束分布をFB制御した。つまり, 計測点位置の目標磁束分布を決めておき  $\Phi^{TG}$ , 計測値  $\Phi^{MS}$  との誤差  $\Delta\Phi = \Phi^{TG} - \Phi^{MS}$  を補正するようにコイル電流をFB制御する。つまり, 補正するPFC電流  $I^{FB}$  は図6の固有モードを用いて, 式(11), (12)で算出する。予め定めた参照電流値との加算を行ってPFC電流の指令値として電源に入力した。

図6右には固有モード6個を磁束分布図で示す6組のPFCの固有電流分布から磁束分布を計算し, 等磁束線分布を示している。1番目と3番目の磁力線 (等磁束面) 形状は似ているが, 3番目ではプラズマ中心が磁束符号の変化位置で, プラズマとの相互インダクタンスが零である。1番目はプラズマ領域で磁束を持つ変流器モードとしてプラズマ電流 ( $I_p$ ) 制御に用いた。2, 3番目はそれぞれ, 水平磁場, 垂直磁場に対応するものと理解できる。4, 5番目は四重極磁場であるが, ポロイダル断面内で90度だけ磁極方向が回転して, 相互に独立である。しかし, 5番目は上下反対象であり, 実際の運転に用いる必要はない。最後の固有モードは6重極磁場である。しかし, HT-2の電源容量1.5 kAの最大値を使っても5ガウス程度の磁場であり, 効

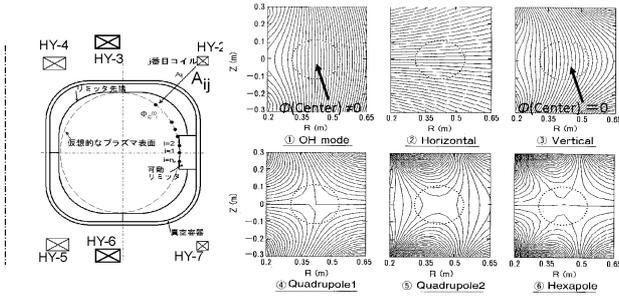


図6 PFCからポロイダル磁場へのSVD固有モード。左：計算体系(文献[17] Fig.6より引用), 右：固有モード磁力線分布(文献[17] Fig.9より引用)。4番目, 6番目の固有モードはFB制御には不使用。

果は小さい。そのため, 6重極磁場は予め決めた電流値のみで通電した。

一方, 磁場計測にも固有モード強度の概念を応用した。リミッタ表面であらかじめ決めた磁束分布  $\phi$  を決め, 磁束の誤差  $\delta\phi$  を固有モード分布  $u_i$  の内積  $\delta\phi \cdot u_i$  から求める誤差磁場の固有モード強度を零とするようにFB制御の入力計測磁場とした。図7にこの配置を示す。MFEPとしては,  $\phi$  ( $i = in, out, top, bot$ ) は4点のみであるが, この4点で近似的に内積  $\delta\phi \cdot u_i$  を求めた。このSVD固有モード強度を制御する考え方でPFC電流制御を行い,  $I_p$ , プラズマ位置 ( $R_p, Z_p$ ) および楕円度をそれぞれ独立(非干渉)にFB制御した。プラズマ表面に比べて, 図7のMFEPの磁束は, プラズマ表面より,  $d_i R_i B_{\theta i}$  だけ低い値であるため, 目標磁束を変更することで,  $d_i$  の変更を通じてプラズマ位置断面形状を制御した。ここで,  $d_i, R_i, B_{\theta i}$  はそれぞれ,  $i$  番目位置 ( $i = in, out, top, bot$ ) の, プラズマ表面までの距離(m), 半径(m), およびプラズマ表面に平行なポロイダル磁場強度(T)である。

図8は, 放電の途中で, プラズマ断面形状のみ変更した場合の電流波形とポロイダル磁場分布図である。時刻10~20msで4重極磁場(図6の5番目固有モード)を強くした。代表的なPFC電流としてプラズマ直上下のHY3コイルの電流を  $I_p$ , 一周電圧 ( $V_l$ ) と共に示す。HY3コイル電流の増加にもかかわらず,  $I_p, V_l$  共に不変である。また, 下側にはHY3コイル電流の増加前後と, 増加中の時刻で, プラズマ周囲の磁束分布を示した。プラズマ電流・位置は変化していないが, 断面形状が縦長に変化しており,  $I_p$  やプラズマ位置とは独立(非干渉)に, プラズマ断面形状が制御できたことがわかる。

この制御法では, 固有モードの磁束分布を従来から利用されてきた垂直磁場や4重極磁場と対比することで磁場制御系の機能の把握が容易であった。この後, HT-2では, この制御法を用いて, (i)低一周電圧での放電開始[17], (ii)低一周抵抗真空容器での放電[18], および, (iii)磁性体(F82H)第一壁での放電[19]の実験を可能にした。そのうち, (ii)については, 図4に示した。

以上のようにTSVD正則化をHT-2実験に用いた結果から, 磁場調整に利用できると考えた。そして, TSVDを磁気応用機器の磁場設計に応用できるように, 以下の磁場設計手法を開発した。

### 3.2 TSVD利用のコイル形状計算手法 DUCAS

磁気閉じ込めの核融合装置の設計にTSVDを使った例としてステラレータ用モジュラーコイル設計[31]とトロイダル磁場リップルを低減のF82H配置最適化手法[32]がある。ここでは, より汎用性のある前者を紹介するが, この計算手法はDUCAS[31](Design tool Using Current potential And SVD)と呼んでいる。

DUCASは任意の磁場分布を入力とし, TSVD法で式(1)を解いて, あらかじめ配置した薄板曲面上の電流分布を求める。このときの変数は, 核融合装置の渦電流[34-36]を把握するために使われて来た電流ポテンシャル(CP: Current Potential)である。他のモジュラーコイル型ステラレータ用のコイル形状設計にも使われた[37, 38]。MRI装置設計分野では流れ関数[39-41]として利用されている。CPは節点の周りを周回する電流(節点のMMとも理解できる)で, 多数の節点を周回する電流の組み合わせで, 面上の電流分布を表現する。ただし, 端に配置された接点で

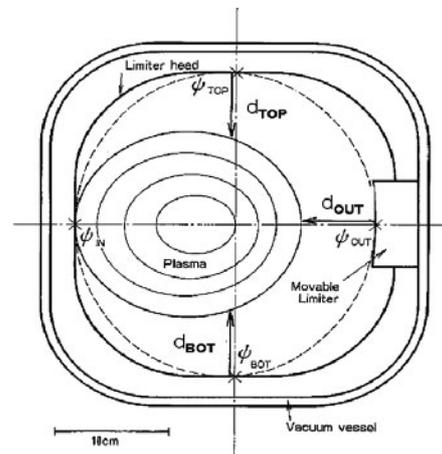


図7 磁束の計測・負帰還制御のポロイダル断面位置(文献[17] Fig.7より引用)。

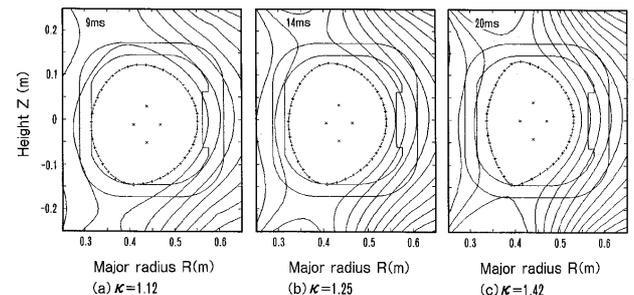
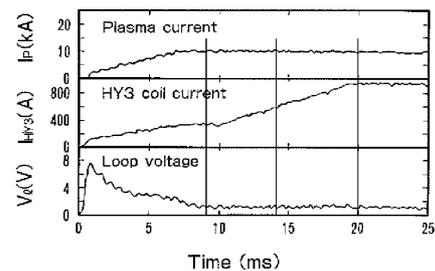


図8 プラズマ位置・断面形状の負帰還制御例, 上:放電波形(文献[17] Fig.14より引用), 下:プラズマ断面形状:(文献[17] Fig.15より引用)。

は周回せず、三角要素が存在する部分のみに電流が流れる。目標磁場を近似的に再現する CP 値分布の計算法として、TSVD を利用し、CHS-qa[30]を対象として、DUCAS を開発した。この DUCAS は、それまでの他の同様な計算手法[37, 38]と比べると、任意の電流面形状に応用可能な磁場再現精度を容易に調整可能、極めて良好な精度可能の利点がある。これらの利点は4.1節のMRIへの応用[42, 43]を可能とした理由となった。

電流面を三角要素の集合で表現し、各節点に CP 値を与え、その分布が与える電流分布が、目標の磁場を再現するように、CP 値分布を決める手法である。この要素とその集合の曲面の例を図9に示す。図の3節点の CP 値 ( $T_1, T_2, T_3$ ) から三角要素内の電流ベクトル (A/m) は

$$\mathbf{i} = \{T_1(\mathbf{X}_3 - \mathbf{X}_2) + T_2(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_3) + T_3(\mathbf{X}_2 - \mathbf{X}_1)\} / (2S) \quad (20)$$

で求まる。ここで  $T_i$  は  $i$  番目節点の CP 値で、 $S$  は要素の面積である。この表現法は、薄板近似で核融合装置などの設計で渦電流分布を算出する手法と同じであるが、渦電流解析では回路方程式で電流分布を決める[34-36]のに対して、DUCAS では TSVD を利用した最小二乗法で決める。数千の節点で曲面(電流面 (CCS: Current Carrying Surface))を定義し、式(20)で表す要素電流に対して磁場評価点の磁場を Biot-Savart の法則で算出して整理すると、式(1)と同様、

$$\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{T} \quad (21)$$

のように整理できる。ここで、 $\mathbf{B}$  は MFEP 上の磁場分布を示すベクトルであり、DUCAS ではプラズマ表面に垂直な磁場成分である。 $\mathbf{A}$  は Biot-Savart の法則で計算した非正則な応答行列であり、 $\mathbf{T}$  は節点 CP 値の分布を示すベクトルである。この式で目標磁場  $\mathbf{B}^{TG}$  を与えれば、2.1節の議論のように TSVD 正則化を用いて解くことができる。また、電流面上で CP 等高線を描くと、これが電流の流線であり、これに沿って切り出すとコイル形状を得る。

一般には参考文献[31, 42, 43]のように境界条件や対称条

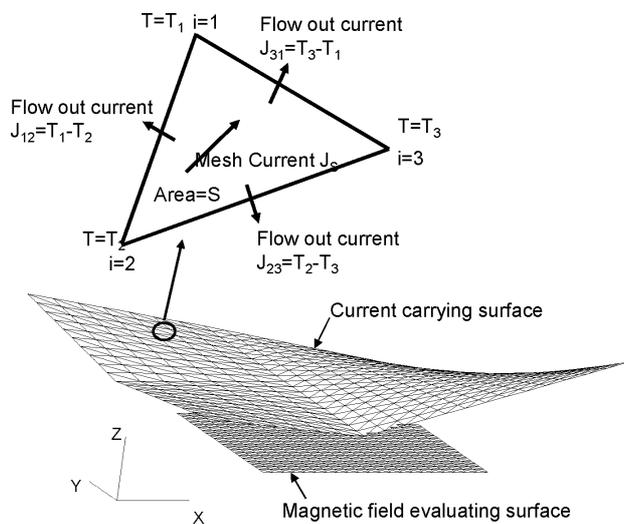


図9 三角要素と電流ポテンシャルによる DUCAS の計算体系。文献[31], Fig. 1 および Fig. 2 より引用。

件を組み込んで式 (21) を解く。これは、行列  $\mathbf{A}$  にこれらの条件の行列  $\mathbf{R}$  を用いて、サイズの小さい行列  $\mathbf{A}' (= \mathbf{R}\mathbf{A})$  に書き換えて解く。この考え方は、薄板近似の渦電流解析[34-36]と同じである。DUCAS では、周期境界と接続条件を使って、モジュラーコイル型ステラレータのコイル形状を求めている。また MRI 用 ASGC (能動磁気シールド型傾

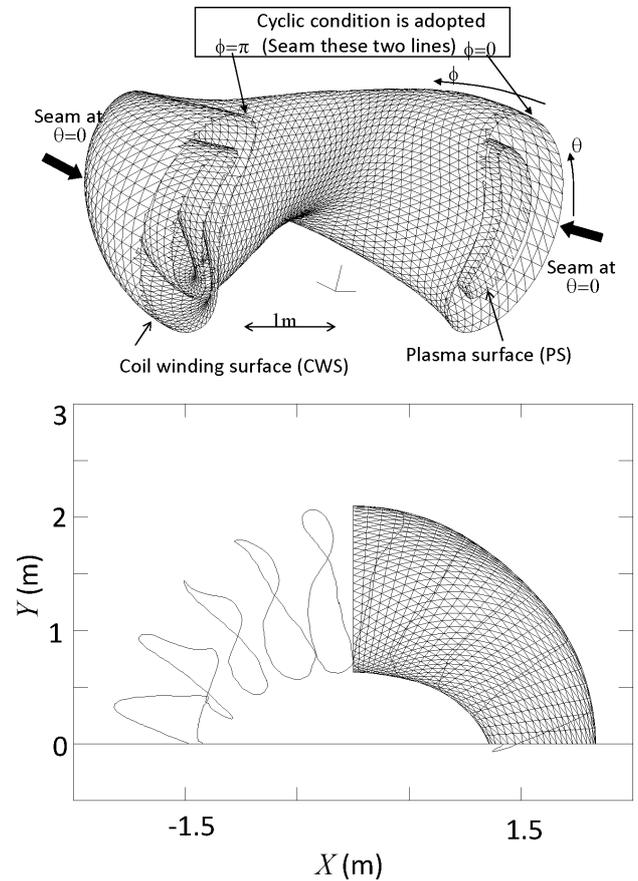


図10 CHS-qa のコイル形状を算出する DUCAS の計算体系 (上) および DUCAS で求めた流線と流線から切り出したモジュラーコイル形状 (下)。それぞれ、文献[31], Fig. 8 および Fig. 12 より引用。

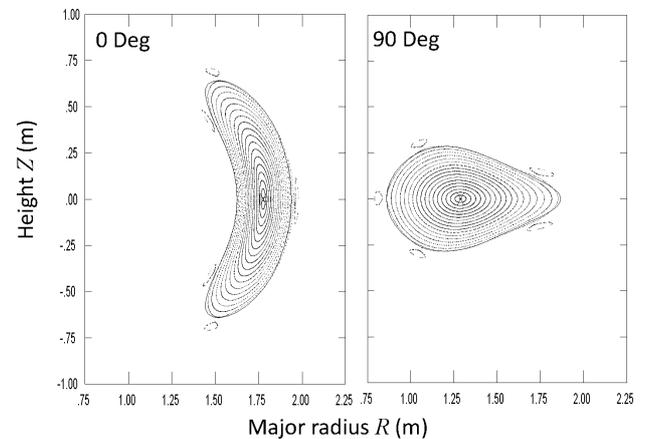


図11 DUCAS 計算による線電流群を用いて計算した磁力線のポアンカレプロットで示す磁気面形状。文献[31], Fig. 13 より引用。

斜磁場コイル：Active Shield Gradient field Coil) の設計 [43] では、対称条件以外に、2面の電流面を繰り返し計算で解き、2種類の目標磁場分布に矛盾しない電流分布を求める。このMRI用GC（傾斜磁場コイル：Gradient field Coil) の設計については後で詳しく述べる。

図10はCHS-qaのモジュラーコイルに適用した計算体系の図である。電流面とMFEPを配置した面（目標磁場分布を入力する）を示している。MFEPはプラズマ表面に配置され、このプラズマ表面に平行な磁力線を発生する磁場となるように、式(21)をTSVD利用の最小二乗法で解き、CP分布  $\mathbf{T}$  を求める。 $\mathbf{T}$  の等高線から求めたコイル形状を図10下部に示す。また、このコイル形状（線電流）から磁場を計算し、磁力線を追跡して求めたポアンカレプロットを図11に示す。この手法で、目標磁場としたプラズマ表面に沿った磁気面が構成されていることがわかる。また、磁場精度は加算する固有モード数で任意に調整できることも示した。この計算コードはDUCASと呼ぶことにしたが、ステラレータ実機の設計に使う機会はまだ無い。しかし、4.1節に記述するように、MRI装置の設計調整（シミング）とGCの実機製品設計に応用した。

#### 4. TSVD 正則化を応用した磁場設計

以上の計算手法をMRI装置の磁場設計に応用 [42-49] した (図12)。また、高精度磁場を必要とする基礎物理実験用磁石の設計にも適用中である [50]。これらを紹介する。

##### 4.1 MRI 用磁石の静磁場設計と調整

MRIでは3種類の電磁場を利用する。それらは、

- 1) 強い静磁場で非常に均一な磁場分布（たとえば、40 cm 球体内で  $\pm 1.5$  ppm 以内の磁場強度振幅）。
- 2) 空間的に強度勾配を持つ磁場分布でパルス磁場（たとえば強度勾配は撮像空間内で  $X, Y, Z$  の3方向に 40 mT/m）。
- 3) 高周波（1.5 Tであれば、周波数は約 63.866 MHz）である。1) で特に 0.7 T 以上の強磁場MRI装置では超伝導磁石を使っている。ここでは1), 2) のSVD利用の設計例を述べる。これら2つに、それぞれ、HT-2で使った固有モード強度の調整 [17, 18] の考え方と準軸対象ステラレータのモジュラーコイル設計に用いたDUCASを応用した。両者の考え方によるMRI磁場設計を行った。

##### 4.1.1 MRI 磁石の静磁場設計

MRIでは極めて均一な強度の磁場分布を必要とする。診断用の全身MRI装置（1.5, 3.0 Tの超伝導磁石利用） [3, 4] では、直径40 cm球体内で磁場変動が3 ppm (peak-to-peak) 以下程度である。このように均一な磁場分布を得るには、磁石設置現場での磁場調整（シミング） [3, 4] も必要であるが、磁石設計時に均一な磁場分布を持つ能力を磁石に与えておく必要がある。この状況は、SVDを用いることで理解しやすいことを見いだした。また、この考えの応用で開発したMRI装置は主に図12左の垂直磁場機（1.2 T）であるが、ここではより一般的なシリンダ形状の水平磁場型MRI（図12右）磁石で記述する。SVD固有モードを利用する点は同じである。

この起磁力（ここではコイルブロックCB: Coil Block）配置の計算手順を図13 [45] に模式的に示す。3段階に分けて算出する。MRI用磁石には、強磁場を発生する主コイルブロック（MC-CB: Main coil CB）と磁石周囲への漏れ磁場を遮蔽するシールドコイル（SC-CB: Shield coil CB）がある。MC-CB配置は均一な強磁場を発生するように決め、SC-CBの半径位置と電流はMC-CBが持つMMをほぼ打ち消すように決める。変更されたSC-CBの磁場を考慮してMC-CB配置を決め、新たなMC-CB配置によるMMを打ち消すSC-CB配置を再度決める。このように、SC-CBとMC-CB配置は繰り返し計算で決める。以下では、均一磁場を発生するMC-CB配置設計手法を説明する。

Step-1では、目標の磁場強度と均一度を持つようにソレノイド状に連続的に同軸配置した円電流（FL電流：Filament Loop 電流）の電流分布を算出する。つまり、FL電流を、MRI磁石で主に磁場を作る主コイル位置に円筒状に配置し、外部への漏れ磁場を零に近づけるため、全体としてMMを打ち消すシールドコイルを置く。FL電流は計算結果に基づいて主コイルを構成するCBに、以後のStepで置き換える。このStep-1では、FL電流配置を表すベクトル  $\mathbf{l}$  に対して、MFEPの磁場分布  $\mathbf{B}$  は、式(1)のように、 $\mathbf{B} = \mathbf{A}\mathbf{l}$  と表される。ここで、応答行列  $\mathbf{A}$  の要素  $A_{ij}$  は  $j$  番目FLの単位電流が  $i$  番目MFEPに作る磁場である。

$\mathbf{B}$  はMFEPの磁場分布を軸方向成分 ( $B_z$ ) で構成する。MRIでは磁場の絶対値  $B$  で均一な磁場が必要であるが、起磁力配置検討は軸方向成分  $B_z$  で定式化する。必要な均一

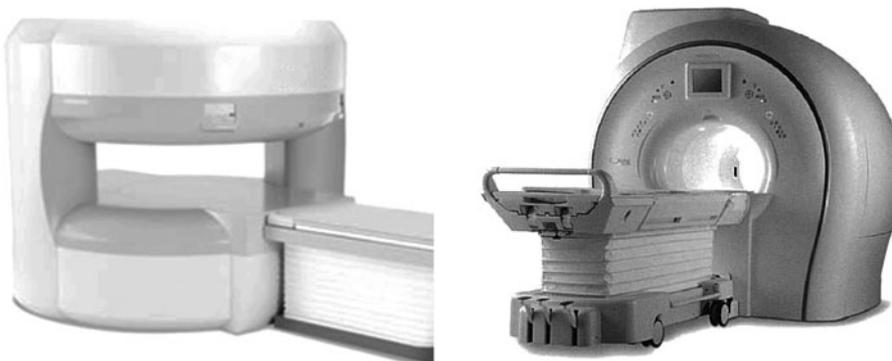


図12 MRI 装置の外観写真。左：垂直磁場型，右：水平磁場型。

磁場が得られた段階では、磁場強度の変動分は通常、主磁場が0.5 Tから3.0 Tであっても、1 ガウス (3.0 T に対して 33.3 ppm peak to peak) 以下であり、半径方向成分  $B_R$  も同程度以下である。そのため、 $B_z$  と  $B$  の差異は  $0.02 \mu\text{T}$  以下となり、MRI で必要な均一度の数 ppm (したがって  $1 \mu\text{T} \sim 10 \mu\text{T}$  の磁場振幅) に対して十分小さい。そこで、均一磁場を発生する磁石の磁場設計では  $B_z$  を評価する。つまり、 $\mathbf{B}$  の要素は  $i$  番目磁場評価点に対して  $B_{zi}$  である。この考えは、4.1.3項で議論するシミング計算 (計測磁場から磁場を補正して均一磁場分布に調整するための磁気モーメント配置  $\mathbf{M}$  を求める計算) でも同じであり、軸方向成分  $B_z$  でシミング計算も定式化する。

参考文献[44, 45]では、ソレノイド状に配置した円線輪電流から均一磁場を予定する領域の磁場への応答行列  $\mathbf{A}$  のSVD固有モードを重ね合わせてMRIで必要とする電流分布 (式(7)) を算出し、その電流分布から詳細な磁場分布を算出し、必要とする均一度を得る条件を検討した。この段階では図13のStep-1に示したように連続的に分布する電流であり、次のStep-2では電流分布の山になった位置にMC-CBを配置する。その結果、式(7)で加算する固有モード数と実際に配置するMC-CB数が同数であり、通常のMRIではMC-CB数は6個であることも解った。

他研究にStep-1相当部に、Tihonov正則化を使い電流分布を検討した例[51, 52]がある。しかし、TSVDのようなCB数との関係は見通せないで、式(8)の定数  $\epsilon$  を決定するには、 $\epsilon$  を試行錯誤的に変更しながら式(9)を計算し、妥当な  $\epsilon$  を求める。また、式(10)の議論でも指摘したように、高次成分が入り込み、起磁力で不利になる可能性がある。一方でTSVDではCB数との関係が明確であり、設計状況を把握し易く、かつ、不必要な高次成分も解に入り込まない点が有利である。

Step-2では、Step-1で得られた電流をまとめて、数個のCBに置き換える。CBは同軸・離散配置である。Step-2では各CBの巻き線数は実数とし、CB全体の電流 (AT: Ampere-Turn) と断面形状は連続的 (実数として) に変化させて、CB配置を最適化する。CBの配置や位置形状はCB配置で計算できる磁場分布  $\mathbf{B}^{\text{CB}}$  とStep-1で求めた磁場の基底で、固有モード強度  $P_i^{\text{CB}}$  が、目標磁場の固有モード強度

に等しくなるように調整する。つまり、

$$P_i^{\text{CB}} = \mathbf{u}_i^{\text{CB}} \mathbf{B}^{\text{CB}} / n_p^{1/2} \rightarrow P_i^{\text{TG}} \quad (22)$$

である。この調整は、図14(a)上図で、両矢印で書かれた断面片位置を調整する。×印のCB内径と全長は通常求める磁石の仕様で決まるため、設計者もしくは磁石使用者の入力値である。CB断面長方形の辺で矢印の部分移動させてこの辺上に発生する電流からMFEP上の磁場への応答行列を作り、その特異値分解で得られる電流と磁場の固有モードを利用する。例えば、CBの電流密度を  $C_D$  (A/m<sup>2</sup>) とし、軸方向幅を  $\Delta R_{\text{OT}}$  変化させるとすると、半径大側の断面辺上に電流

$$i_{\text{OT}} = C_D (Z_{\text{TP}} - Z_{\text{BT}}) \Delta R_{\text{OT}} \quad (23)$$

が現れる。軸方向位置の移動についても同様に軸方向の両端辺に同じ電流密度  $C_D$  で電流が現れると考える。図の両矢印数と同じで、6個のCBの場合、16個の固有モードがあり、そのうち8個が軸方向に対称なものである。ここでは、MFEPを球体のVOI (Volume Of Interest) 表面上に配置し、その間の応答行列を作成する。その後は、2.1節のTSVD正則化を用いる。

得られたSVD固有モード8個を図14(a)下に示す。各枠で、横軸は軸方向位置  $Z$  で、縦軸は半径方向位置  $R$  として、VOIとCBおよびFL電流の位置を示している。各枠の右側にはStep-1のSVD固有モードを示し、左側にStep-2のSVD固有モードを示している。各枠の上には電流分布の基底を示す。また、下部の半円形部には磁場分布の基底を示す。各枠の上には固有モード番号 (MODE番号) と、2つの磁場分布の基底の内積 ( $\mathbf{u}_i^{\text{CBt}} \mathbf{u}_i^{\text{FL}}$ ) を示している。すべての枠で0.99を超えており、2つの磁場分布基底はほぼ同じ分布を示している。したがって、Step-1で得た磁場分布は、離散配置のCB群でも同じ磁場分布を得ることが可能であると言える。つまり、Step-1で実現可能と判断された磁場分布、均一度は、離散化したCBでも実現できると結論できる。この性質を利用して、 $\mathbf{u}_i^{\text{FL}} \mathbf{B}^{\text{CB}}$  で計算する固有モード強度  $P_i^{\text{CB}}$  を

$$P_i^{\text{CB}} \rightarrow P_i^{\text{TG}} = P_i^{\text{FL}} \quad (24)$$

とするように図14(a)上図の断面辺位置を調整する。

各枠の右側には、3個の数値が書かれているが、それぞれ上から、特異値 (ここでは T/A)、2乗平均磁場強度 (T) および磁場振幅 (T) を、3.0 T 一様磁場を 40 cm 直径球の VOI 表面で実現するために必要な値を書いている。番号が大きく (高次で小特異値) なるほど、磁場強度が小さくなる。MODE13では 1 ppm (3 T) 以下の寄与となっている。したがって、これ以上高次の固有モードを考慮する必要は無い。またMODE13では、例え、大きな強度誤差 (30%) があっても、0.3 ppm 以下の磁場誤差でしかなく、無視できる。したがって、MODE11までは正確に調整するが、MODE13は磁石の製作性を優先して調整する[45]。

Step-3では導体の巻き数をCB毎に整数化する。導体の

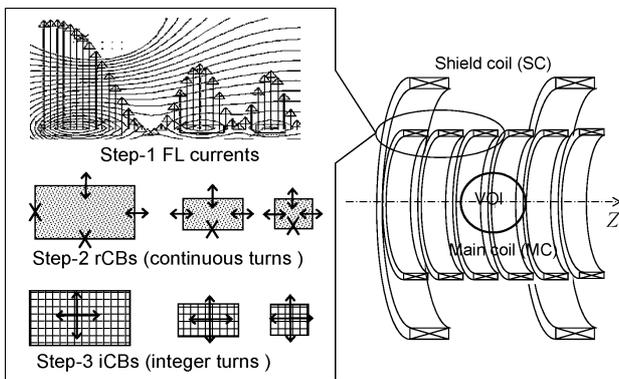


図13 静磁場磁石の起磁力配置設計手順。文献[45], Fig. 1より引用。

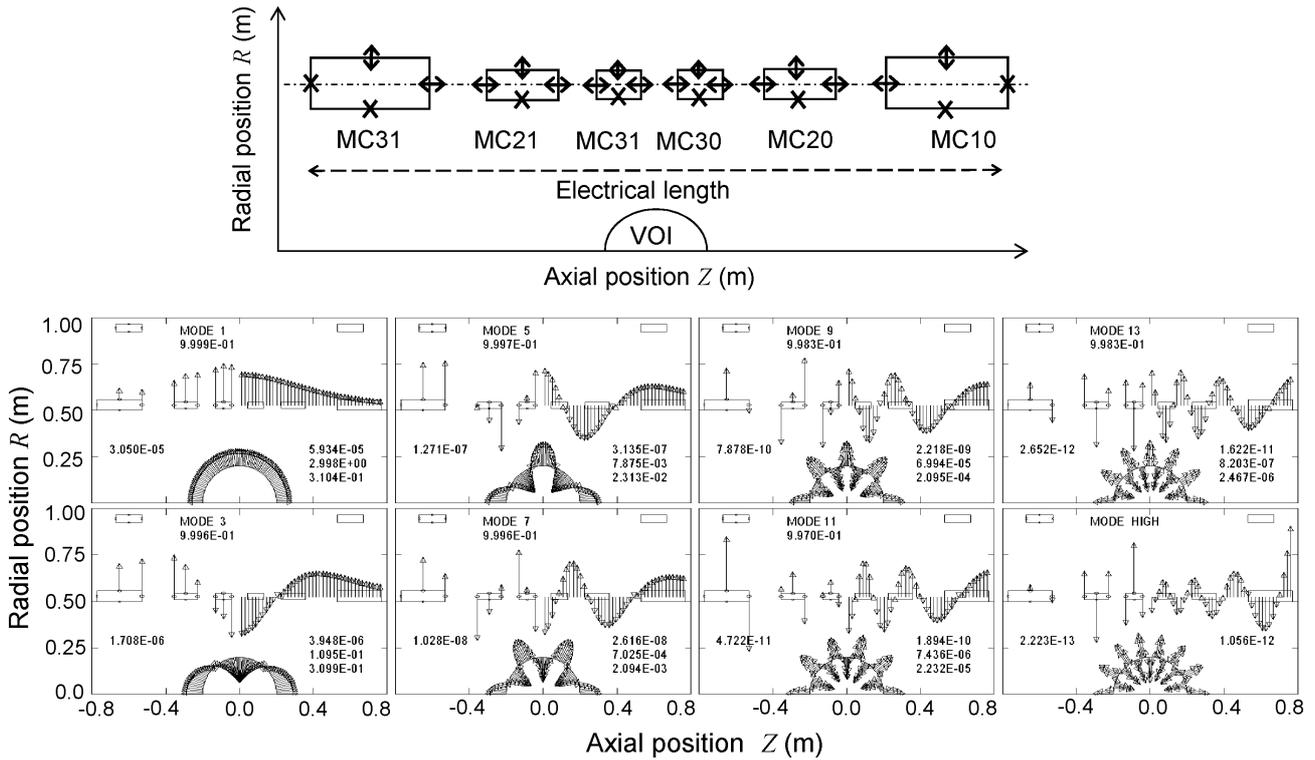


図14(a) ソレノイド状の連続電流分布モデルによる均一磁場分布の計画. 上: コイル断面の調整部分 (矢印), 下: コイル配置の調整に用いる固有モード. 文献[45], Fig. 4, Fig. 5 より引用.

経験磁場や電源, 永久電流スイッチ, それにクエンチ時の電圧や導体の温度上昇などの設計項目を考慮した上で, 導体径と素線電流を決め, 巻き線配置, 巻き線数 (したがってCB断面形状) を設計する. この段階では, 各CBの巻き数は整数化されているので, iCBと呼ぶことにする. Step-3では, iCBの断面形状は決まっているので, 位置 (半径位置  $R$ , と軸方向位置  $Z$ ) のみの変更により磁場分布を最適設計する. 図14(b)にはStep-3での固有モードを示す. 6個のCB, 12個の自由度で, 6個の軸対称SVD固有モードを持つ. この6個の磁場分布基底も, Step-1の基底とほぼ同じ分布を持つことが解っており, 強度をStep-1の固有モード強度に合わせる. さらに高次の固有モードは調整されないが, 小さな磁場であるため, 均一度への影響は極めて小さい.

求めた起磁力配置例を図15に示す. 左側はStep-2の結果, 右側はStep-3の結果である. とともに  $3.0\text{ T} \pm 1.5\text{ ppm}$  の磁場強度等高線が均一磁場を必要とする領域を規則的に取り囲んでおり, 精度よく均一磁場分布が得られていることを示している. 以上の起磁力配置設計手法で使用するSVD固有モードは5-7個の軸対称モードである.  $2n-1$  の奇数番号であるが,  $n$  が1大きくなると, 特異値 (ここでは  $\text{T/m}$  の単位) は約1桁小さくなり, 同じ大きさの電流でも, 発生する磁場は1桁小さくなっていく. このため,  $n=7$  (MODE13) では,  $n=1$  の約  $1/10^6$  の特異値であり, 発生できる磁場強度は  $1\text{ ppm}$  以下である. また, 主コイル数と  $n$  の間には密接な関係があることもわかった. 主コイル数は均一磁場に必要とする固有モード強度を50%以上の割合で加算する固有モード数と同じ数であった.

一方, [41]などの他手法では, 均一度と起磁力 (AT) を組み合わせる値を最小化する方法をとるが, 最急降下法やアニーリングで行う. この場合, Step-1で立てた計画から離れて解を求め, 必ずしも計画通りの解にならないことや, 起磁力配置 (CB数など) と求める磁場の関係が把握し難い点に問題があると考えている. また, 従来の多くの磁石設計やシミング計算では, [53, 54]のように, 撮像領域の磁場分布を球面調和関数に展開し, 最低次 (均一磁場) 以外の項を零に近づけるように線形計画法やアニーリング法で起磁力配置を調整する. しかし, 各球面調和関数に対応した起磁力配置は正確には決められないので, 高次成分が不正確になる [54]. 一方, SVDを使う本記事の提案手法では磁場分布と起磁力配置が対応しており, 高次成分による誤差磁場もその大きさを把握できる. また, TSVDでは, 式(7)のように低次成分から加算するので, 求める解は「電流当たりの磁場強度が強い」の条件を含む. そのため, 小さい起磁力で, 必要な起磁力配置を決めることができると考えている. さらに, 非線形材料を含む体系 (例えば鉄 yoke 有り) でも応用可能であることは参考文献[46]で示した.

以上の議論は, より一般的に使われている水平磁場機 (図12右) の磁場設計として議論したが, 同じTSVD応用の考えで垂直磁場機 {開放型MRI (図12左)} の磁場設計 [47]を行い, 製品化している. この開放型機は  $1.2\text{ T}$  の磁場であり, 製品出荷開始後11年となるが, これ以上の磁場強度を持つ開放型機は未だ存在しない. これは, TSVDの考えで磁場設計したため, 他の方法に比べて小さめの起磁力で設計できたことが奏功したと考えている. また, 以上の

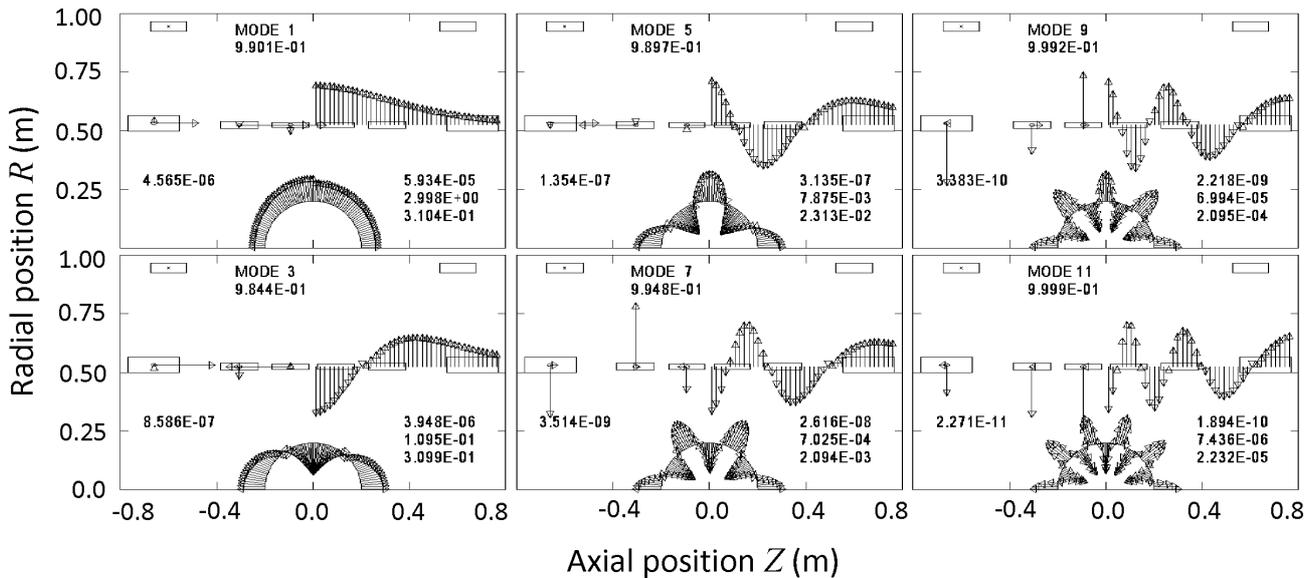


図14(b) MC-CB 設置位置移動に関連した SVD 固有モード。文献[45], Fig. 8 より引用。

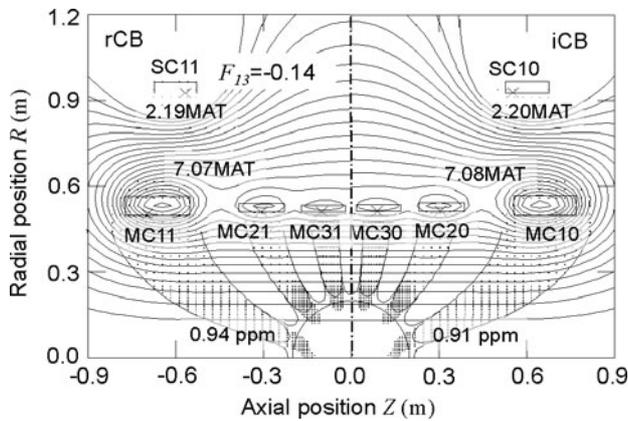


図15 本手法で求めた MC-CB 位置。左は Step-2 の結果、起磁力 (A) は実数で連続値、右は巻き数を整数化した Step-3 の結果。文献[45], Fig. 10(a) より引用。

議論は円形コイルを用いた磁石についての議論であったが、コイル形状が円形で無く、レーストラック型であっても TSVD 利用で、均一磁場をもつ磁石の磁場設計が可能であることも示している [55]。

#### 4.1.2 傾斜磁場コイルの設計

準軸対称ステラレータ CHS-qa 用に開発した DUCAS は目標磁場分布を与えると、その磁場を発生する電流経路を求める。この計算手法を、MRI 装置開発に応用し、さらに装置の設置現場で利用している。それらは、傾斜磁場コイル (GC) の設計 [42, 43, 48, 49, 56, 57] と磁場シミング計算 [58] である。ここでは前者の GC 設計について述べる。

MRI の GC は、常伝導コイルであるが、下記の磁場を発生する。

- (1) 撮像領域に  $B_z = \alpha X$  のように座標に線形な強度の磁場分布 (傾斜磁場) を 0 - 100 ガウス程度で発生させるパルス磁場コイルで、nmr 信号に位置情報を与える。
- (2) 磁石側に磁気シールド。これは、磁石の金属部で渦電流が発生し、それによる誤差磁場を生成することを避けるためである。

GC 形状には 2 種類あり、円筒型 MRI では円筒型 [48, 49]、垂直磁場型 MRI では平板型 [42, 43, 56, 57] である。ともに、超伝導コイル磁石を用いた高磁場機 (0.7 T 以上) では、撮像領域に傾斜磁場を発生させると共に、磁石構造物に対しては磁気遮蔽を能動的に行い誘導渦電流による誤差磁場と超伝導線材の温度上昇を防止するタイプの能動磁気遮蔽型傾斜磁場コイル (ASGC) が用いられる。ここでは、DUCAS を利用した平板型 ASGC の磁場設計例 [43, 57] を示していく。

DUCAS を適用した円盤型 ASGC 磁場設計の計算体系を図 16 に示す。上側は ASGC が作る磁場の磁力線を、垂直磁場型 MRI 用磁石と共に模式的に矢印で示す。撮像領域 (FOV: Field Of View) には座標に比例した磁場で、磁石には磁力線が向かないように磁気遮蔽するシールドコイルを持っている。対象条件を用いて太破線で囲った 1/4 領域で導体配置パターンの設計計算を行っている。図 16 下側は計算モデルである。FOV に傾斜磁場を生成する主コイルと磁石に対して磁気シールドを行うシールドコイルに対応した 2 つの電流面 (CCS: Current Carrying Surface) と、磁場評価点 (MFEP) の集合面 (磁場評価面: MFES: Magnetic Field Evaluation Surface) 2 枚から構成されている。

MFES1 (FOV 表面) 上で傾斜磁場を生成するように CCS1 電流分布を決め、これが発生する磁場を MFES2 上で磁気遮蔽するように CCS2 の電流分布を決める。CCS1, CCS2 面上の電流分布算出は、2 つの MFES 上で互いの影響を考慮して目標の磁場を発生することが必要なため、繰り返し計算となる。繰り返しの終了条件は、CCS1 の電流分布を決めた後も MFES2 上の磁場が十分遮蔽されていることである。つまり、CCS1 を新たに決めても、前回までの計算と同じ磁場となるまで繰り返し計算を行う。通常 15 回程度で収束する。傾斜磁場そのものは撮像領域端の最大磁場に対して、数%の誤差が許されるが、シールド性能は極めて良好なものが求められ、MFES2 上で 0.1 ガウス以下の残差磁場となる精度でコイルパターン (導体配線) を決めた。

DUCAS を使った本手法の計算過程で、CCS2 (シールドコイル配置面) 上の電流ポテンシャル (CP) 分布を求める

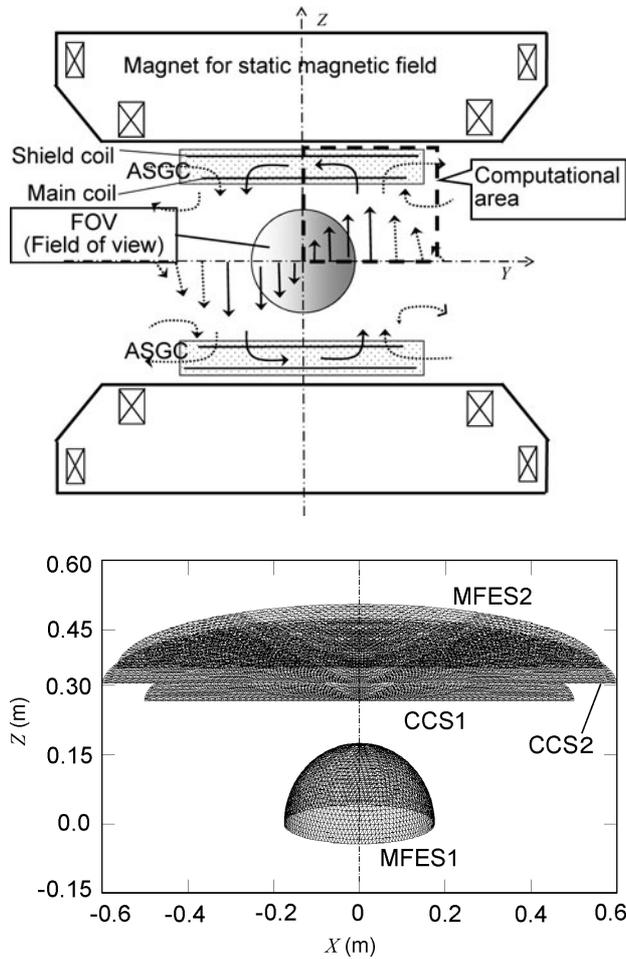


図16 ASGC 傾斜磁場コイルの計算体系。上：垂直磁場型 MRI 用磁石の断面図と傾斜磁場コイルによる磁場の磁力線。下：傾斜磁場コイルパターンの設計計算体系。文献[43], Fig. 1, Fig. 2 より引用。

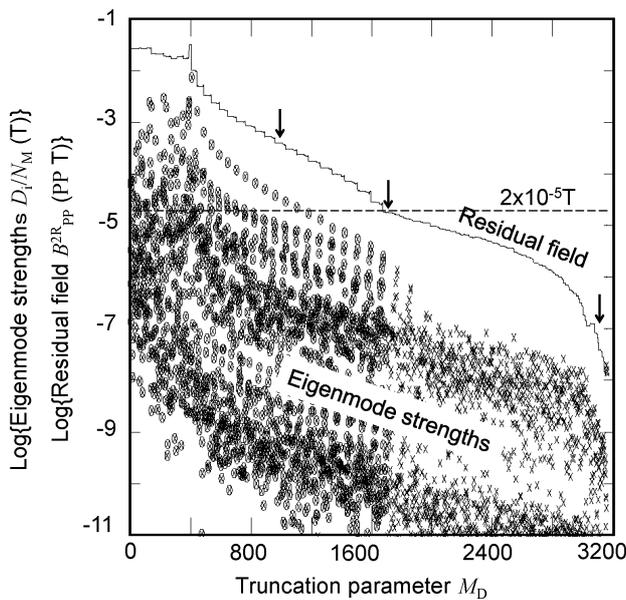


図17 シールドコイル (CCS2) の固有モード数、強度と磁場精度。文献[43], Fig. 8(a) より引用。

際に得た固有モード強度 [式(12)] と残差磁場強度 [式(14, 15)] を、図17に示す。繰り返し計算が収束後である。この図から、固有モード数を多くとることで残差を極めて小さくできることがわかる。1600個以上の固有モード数で十分なシールド性能を得ることができると解り、この条件で電流パターンを設計した。一方、主コイルでは固有モー

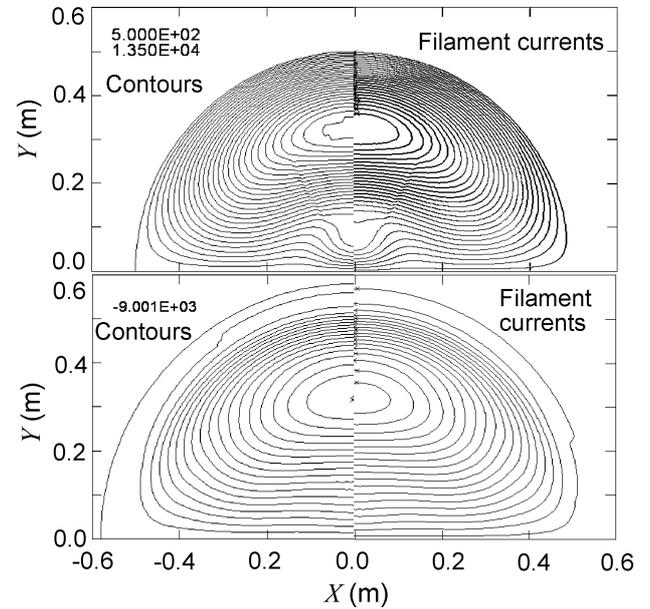


図18 素線電流 500 A で離散化する導体配置の検討図。上：主コイル。下：シールドコイル。左は CP 値等高線、右は離散化導体配置。文献[44], Fig. 13 より引用。

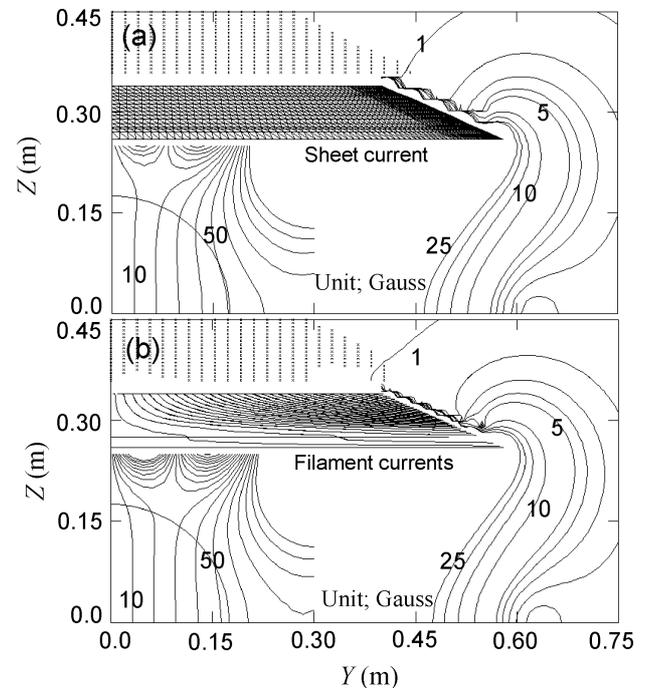


図19 DUCAS を用いた手法で試設計された傾斜磁場コイルが作る磁場分布。上：面電流、下：流線 500 A ごとの等高線で切り出した線電流による磁場を示す。各フレームで、左下部の 40 cm 球面付近には傾斜磁場  $B_z$  成分を 10 ガウス毎の等高線で示し、右部の等高線は傾斜磁場コイルによる磁場の強度を示す。上部分の打点領域は傾斜磁場の  $|B_z|$  が 1 ガウス以下の領域である。文献[45], Fig. 12 より引用。

ド数は数個で十分であった。

このようにして得られた電流の流線 (CP 値の等高線) の例と磁場分布の例を図18と図19に示す。図18にはコイルパターンとして、上枠に主コイル (CCS1) と下枠にシールドコイル (CCS2) の流線を描いている。電源 (素線) 電流を 500 A としている。各枠の左側には CP 値が、 $T=0, 500, 1000, \dots, 13500$  A と 500 A 毎の等高線を書いているが、この線上で渡り線を付加して平板を切り出すと、傾斜磁場コイルが得られる。一方、右側には、250, 750, 1250,  $\dots, 13250$  A の 250 A のオフセットした等高線を描いている。図18右側の線電流に電流 500 A が流れるとして、図19の磁場を計算している。

DUCAS による電流分布計算に基礎を置いているために、CCS は任意の形状をとり得る。その性質を使用して、図19では CCS2 を平板ではなく傘型にして、シールド性能を向上させている。図12左写真の実機ではさらに CCS1 と CCS2 の間を立体的に巻き線する立体巻き線を適用 [57] し、さらに漏れ磁場を減少させた。この磁気シールド性能を向上させ、主コイルとシールドコイル間を一部結線して小型化と両立させた立体巻線型 ASGC [57] を商用とし、組み込んでいる。

#### 4.1.3 シミング計算

MRI 撮像で必要とする均一磁場分布は、例えば、40 cm 直径の球体 (40 cmDSV:40 cm Diameter Spherical Volume) 内で磁場変動の振幅 (peak-to-peak) が 3.0 ppm 程度以内、45 cmDSV で 10 ppm 程度以内という均一度である。以下で、均一度とは FOV 内部の磁場変動振幅である。一般に、設計時に起磁力配置を正確に決めたととしても、製作・設置直後の磁石磁場は数百から 1500 ppm を超える均一度となる誤差磁場を持つ。これは、設計時の丸め誤差、磁石の組み立て誤差、また建屋鉄材の磁化などによる設置現場の環境磁場が原因である。したがって、磁石設置時には精度良くこの誤差磁場を補正 (以後、シミングと言う) する必要がある。また、使用開始後でも、均一度が劣化した場合には、保守時などにシミングを行う。均一磁場を必要とする撮像空間の周囲に磁気モーメント (MM) を分布配置させ、その MM が作る磁場で、誤差磁場を補正する。MM の発生源は、MRI 装置の磁場中で磁化した鉄片を使うことが多い。また、鉄片以外に、小コイル群を用いるシムコイル、永久磁石、などがある。鉄片のように、磁場中での磁化による MM を使うシミングを受動的シミング (Passive shimming) と呼ぶ。ここで取り扱う参考文献 [58, 59] も受動的シミングである。これらのシミング計算は、計測磁場を元に磁場分布を補正する MM 配置を TSVD 利用で算出する。受動的以外のシミング計算にも応用できるものである。

図20は円筒型 MRI 磁石のシミング体系である [59]。通常 24本のシムトレイを持つが、図はそのうちの12本のシムトレイを円筒状に配置して示している。それぞれには24個のポケットがある。ポケットに鉄片 (薄板) を配置する。シムトレイ24本のうち、12本を粗 (coarse) シミングに利用し、残りの12本はわずかな鉄片のみ配置する詳細 (fine) シミングに利用する。後者では磁石の消磁・励磁作業が不要

であり、作業量削減と共に、より磁場精度を向上できる。ポケット中の鉄量は枚数の変更で、必要量に近似し、磁気モーメントの大きさを調整できる。

$j$  番目磁気モーメント  $\mathbf{m}_j$  が  $i$  番目位置に作る磁場  $\mathbf{b}_i$  は、

$$\mathbf{b}_i = (10^{-7}) \{3(\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})\mathbf{r}_{ij}/r_{ij}^3 - \mathbf{m}_j/r_{ij}^3\}, \quad (25)$$

である。このうちの軸方向成分  $b_{zi}$  を利用する。応答行列  $\mathbf{A}$  の要素は

$$A_{ij} = (10^{-7}) \{3(\mathbf{m}_j \cdot \mathbf{r}_{ij})Z_{ij}/r_{ij}^3 - m_{zj}/r_{ij}^3\}, \quad (26)$$

であり、 $j$  番目位置の単位磁気モーメント (1.0 Am<sup>2</sup>) の軸方向成分が  $i$  番目 MFEP に作る磁場の軸方向成分強度である。ポケットに配置された鉄片はほぼ軸方向 (Z 方向) に向いて飽和磁化 (鉄 1 cc = 1.71 Am<sup>2</sup>) している。シミング計算ではシムポケットの磁気モーメントの配置のベクトル  $\mathbf{M}$  とこれによる MFEP 上の Z 成分磁場分布  $\mathbf{B}^M$  の関係を示す行列方程式  $\mathbf{B}^M = \mathbf{A}\mathbf{M}$  から議論する。これに 2.1 節の TSVD 法を用いて、目標磁場を近似的に再現する  $\mathbf{M}$  を求める。シミング計算では誤差磁場  $\mathbf{B}^{ER}$  が目標磁場である。一様な磁場分布  $\mathbf{B}^0$  を得ようとすると、シミング計算入力の誤差磁場は、

$$\mathbf{B}^{ER} = \mathbf{B}^0 - \mathbf{B}^{MS} \quad (27)$$

である。 $\mathbf{B}^{MS}$  は計測磁場 (Z 方向) の分布を示し、MFEP 数 ( $\mathbf{B}^{ER}$  の次元) は数百程度である。また、シムポケット数 ( $\mathbf{M}$  の次元) も数百である。以下では、計測点は 576 点、シムポケット数は 288 個が代表的な値であり、シミング計算・作業例を通じて、TSVD 応用の有効性を議論する。

図21には誤差磁場  $\mathbf{B}^{ER}$  分布を示している。打点領域は  $B_i^{ER} < 0$  であり、磁場強度  $B_i^{MS}$  がやや強い領域である。左図は  $\mathbf{B}^{ER}$  をメルカトル図法で、直径 45 cm 球表面の分布で示している。縦軸は軸方向の仰角 (緯度) である、横軸は周回角度 (経度) である。シミング前では誤差磁場は大きく、振幅幅 (peak-to-peak) で 370 ppm (45 cmDSV) の

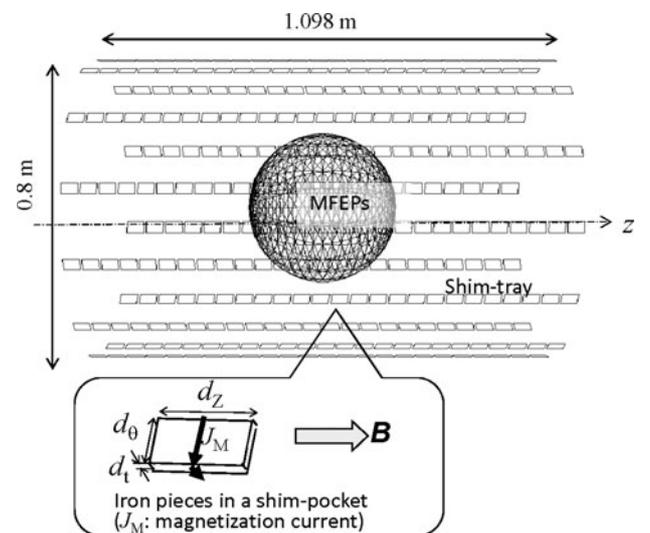


図20 シミング作業の体系 (水平磁場型 MRI 用磁石)。文献 [59]、Fig. 3 より引用。

均一度である。右図は磁気軸を通る断面（右図で90度-270度で  $X=0$  の面）の誤差磁場分布を示している。この図では、直径 50 cm 球面の計測磁場576点を、直径 70 cm 球面上に配置した電流面で、計測磁場を再現するように決め、その電流分布から磁場を再構成している (DUCAS 応用)。したがって、計測面の直径 50 cm 球内部では  $0.1 \mu\text{T}$  以下の精度で磁場分布を再現できている。左図では、270度付近 ( $Y < 0$ ) で磁場の弱い領域 (非打点領域) が広がっていると解る。これに対応して右図では  $Y < 0$  で、磁場が弱い。右図で直径 45 cm 円上に書いた小矩形が MFEP を示している。磁場計測点は直径 50 cm 球面上であるが直径 45 cm 球面に内挿して、周回方向に15度ごとに MFEP を配置し、576点をシミング計算の MFEP としている。

図22は、磁場分布を式(12)のように  $P_i^{ER} = \mathbf{u}_i^T \mathbf{B}^{ER} / n_p^{1/2}$  でSVD固有モード強度に展開している。左側は図21に示した誤差磁場の  $P_i^{ER}$  であり、右側はシミング計算で予測されたシミング後の  $P_i^{SH}$  である。計測磁場は左図のようになり、低次モードで、大きな強度を持つ。折れ線は、式(15)の残差磁場振幅を示している (左右図で同じ)。  $B^0 = 1.5 \text{ T}$  に対して、10 ppmは  $1.5 \times 10^{-5} \text{ T}$  であり、加算する固有モードの上限  $M_D$  を100前後とすることで、目標の均一度 (直径 45 cm 球面で 10 ppm 以下) を得ることが可能であると予測できる。

シミング計算では、式(1)~式(11)の電流  $I$  を磁気モーメント  $M$  に置き換えて実行する。この場合、負の磁気モーメント (したがって負の鉄量) を算出することもある。また、ポケットには配置可能な最大量も存在する。そのため、シムポケットの鉄量 (磁気モーメントの大きさ) には制限をつける。鉄量に制約を課すにはSVD固有モードの高次成分 (特異値の小さな固有モード) を用いる。高次成分が作る磁場は極めて弱く、均一磁場への寄与は極めて小さいので、制限外となったポケットの鉄量は、本来調整不必要な高次成分で、調整する。実際のシミング計算で、この高次成分強度を直接に計算することは難しい。参考文献[59]では、(i)負もしくは容量超えとなったポケットの鉄量をそれぞれ、制限内 (零または最大量) に強制的に変更、(ii)この時に新たに発生した誤差磁場を算出、(iii)新たな誤差磁場を補正する鉄量を算出し加算、の計算を鉄片量が制限範囲内となるまで繰り返す。そのシミング計算の結果得られた  $P_i^{SH}$  が図22右である。低次固有モードはシミング

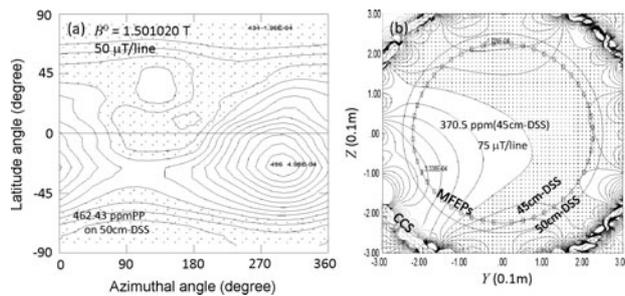


図21 シミング前の誤差磁場分布。左：メルカトル図法で示した直径50 cm 球面上の計測誤差磁場分布。右：Y-Z面 (上下軸方向) 上の誤差磁場分布。文献[59]。Fig. 6 より引用。

されて  $P_i^{SH}$  がほぼ零である。

前記の繰り返し計算は、誤差磁場や  $B^0$  値などに依存して繰り返し回数が変わるが、数10回から1000回超である。図22では、2本の縦線を示しているが、この例では  $M_D$  を繰り返し計算途中で変更している。短い縦線は周回方向に均一な分布を持つ固有モードであり、4.2節で議論した磁石設計で用いた固有モードと考えられる。本磁石では6個の主コイルを持っており、シミングも6番目の短線に相当する固有モードまではシミングすることが妥当である。

周回方向均一の固有モード (以下では基本固有モードと呼ぶ) は、設計時に使った固有モード (図14) である。一定の割合で組み合わせることで、VOI全体の磁場強度を均一に調整する機能を持つ。一般に図20のシミング体系 (鉄片配置) では、シミング用鉄片を配置すると、磁場強度を下げる。このため目標磁場を下げてシミングを行う。この影響で、 $\mathbf{B}^{ER}$  中の基本固有モードは他と比べて強めの固有モード強度を持っている。6番目の基本固有モードはシミングすべきものであるが、小特異値のため鉄量を多くする (式(11)参照)。そのため、この固有モードについては繰り返し計算途中で、シミング計算から外している。しかし、完全ではないが、この基本モードについても残差固有モード強度を低下できていると、図22で確認できる。

図23は、左にシミング計算で予想したシミングの残差磁場分布と、右にシミング作業後に得られた残差磁場分布、である。中心を通る断面 (縦が軸方向Z) で示している。右の作業後の実測磁場は、シミング計算—鉄片配置の作業を

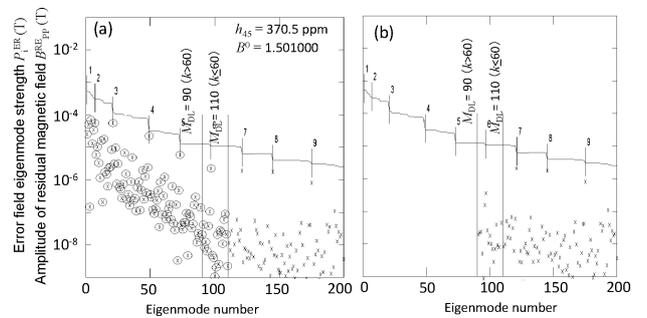


図22 固有モード強度 vs 固有モード番号 (左：計測磁場の誤差磁場、右：シミング計算で予想した残差磁場)。左図：文献[59]、Fig. 7(a)より引用。

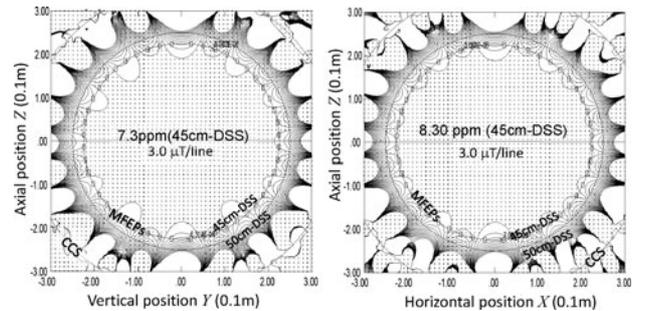


図23 シミング後の残差磁場分布。(左：シミング計算による残差磁場の予測分布、右：シミング作業後の計測残差磁場)。文献[59]、Fig. 9 および Fig. 11 より引用。

4回繰り返して得られた磁場分布である。実際の鉄片には数%の鉄量誤差があり、シミング計算通りの正確な配置は一度ではできない。そのため、残った誤差磁場を繰り返し作業で補正する[59]。

図23で、打点領域は残差が負(強磁場)の領域である。直径45cmの磁場評価面付近で見ると、両図で、磁場の強い打点領域は周回方向に12個存在することが解る。この模様は、半球の断面で示した図15と同様である。つまり、図23の打点領域は、CBにつながり、6個の主コイルを反映した設計磁場分布をシミングにより再現できると予測され(左)、実際にそのような残差磁場となった(右)といえる。逆に言うと、いくらシミングを高精度で行っても、4.1.1項で設計した値より良好な均一度を得ることは事実上できないといえる。

4.2 基礎物理実験装置での磁場設計

均一な磁場分布は、MRIでは質の良い(画像の歪みや偽像がない)撮像性能のためである。このような磁場は基礎物理実験分野でも必要である。高エネルギー加速器研究機構(KEK)ではミュオンの磁気/電気能率( $g-2/EDM$ )を精度良く計測する計画があり、J-PARC(大強度陽子加速器施設)で実験準備を進めている。ミュオン  $g-2/EDM$  を、従来に比べて精度を向上させて計測する[60-62]のために、実験空間ではMRIに比べ約1桁良い(均一度が小さい)均一磁場が必要である。しかし、2.1節および4.1節の考え方を応用すれば、固有モード数の調整で、本実験に必要な磁場均一度を実現できる[44, 45, 50]。

図24は計画中の実験におけるミュオンのらせん入射軌道[62]を示す。上側から入り、徐々に軸方向移動速度を減らし、中心面付近(ミュオン蓄積領域)で軸方向(半径方向磁場)キッカー磁場により止められる。MRIと異なり、どのような起磁力配置の概念が必要かをまず検討した。この起磁力配置の概念を決める仕様は3件で、

- (i) 従来以上の計測精度を得るため、良好な磁場均一度が必要で、中心半径33.3cmで幅3.0cm、軸方向高さ10.0cmの円筒領域(ミュオン蓄積領域)で軸方向磁場  $B_z$  が3.0Tで、磁場変動は $\pm 0.1$  ppm(均一度0.2 ppm)の範囲である。
- (ii) 入射領域では軸方向移動速度を弱めるために、 $B_R > 0$  が必要である。
- (iii) 超伝導磁石であり、MRI磁石技術を応用する。永久電流モードで運転し、NbTi超伝導線を用い、導体の最高磁場を5.5T以下で、125 A/mm<sup>2</sup>程度とする。

上記の条件を満たす起磁力配置概念を探索するために、MRI磁石設計と同様のステップ(図13参照)を経て、磁石の起磁力配置概念を決めた。MRIでは均一磁場の仕様が重要であったが、ここでは、さらに(ii)の  $B_R$  仕様を重要な点として検討する必要がある。

図25はStep-1の検討を示す。均一磁場領域を取り囲むようにFL電流を配置している。MRIと同様に打点で示した磁場が高い領域( $B > 3.0$  T)であり、起磁力源から均一磁場領域に伸びる。電流の無い領域では、 $dB_z/dR = dB_R/dZ$  であるが、図25では  $dB_z/dR > 0$  ( $Z = 0.0 \sim 1.1$  m)で、

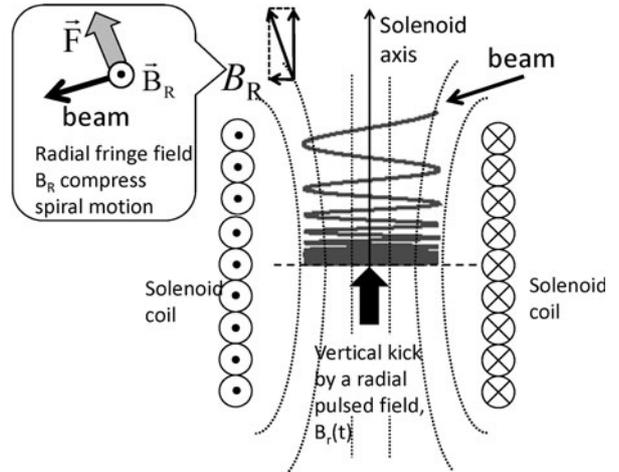


図24 ミュオンビームらせん入射の軌道概念。文献[50], Fig. 1より引用。

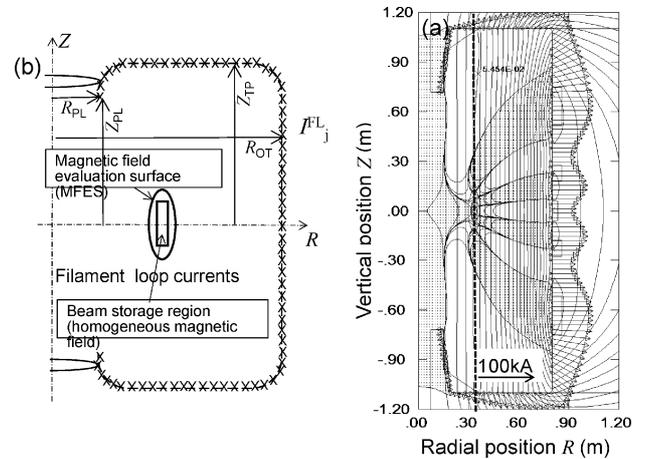


図25  $g-2/EDM$  計測実験用磁石の概念検討。半径  $R$  - 軸方向位置  $Z$  の2Dで検討した。文献[49], Fig. 2 (b) および Fig. 4より引用。

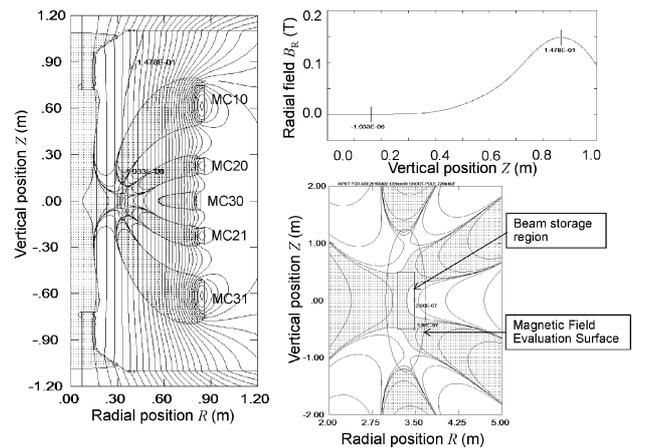
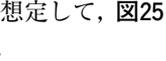
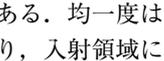
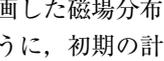


図26  $g-2/EDM$  磁石の起磁力配置案。文献[49], Fig. 11より引用。

$dB_R/dZ > 0$  となり、入射領域 ( $Z = 0.05 \sim 1.1$  m) で  $B_R > 0$  を可能としている。単純なソレノイド状のFL電流配置(水平磁場型MRI磁石状の配置, 図13参照)でも検討したが、この状態 ( $dB_R/dZ > 0$ ) を実現できなかった。図25右のように、半径小側から蓄積領域に向かって、水平面付近で磁

場の高い領域を発生しておくことが重要であった。このため、FL 電流は蓄積領域を取り囲むように配置している。FL 電流の一部は鉄 yoke を配置することを想定して、25 右の磁場分布および起磁力配置概念とした。

SVD 固有モード分布強度は、鉄 yoke や CB を用いて設計する磁石においても、FL 電流で求めた Step-1 の固有モードでその強度 (式 (12) :  $P_i^{TG} = \mathbf{u}_i^T \mathbf{B}^{TG} / n_p$ ) を求め、Step-1 の値に一致するように起磁力を配置する。これは 4.1 節の MRI 用磁石設計と同じ考え方であるが、ここでは、CB 位置形状だけでなく、鉄 yoke の形状も調整した。

その結果、得られた起磁力配置が26 である。均一度は peak-to-peak 値で 0.13 ppm (右下図) であり、入射領域に負の  $B_R$  は存在しない (右上)。これらは、仕様条件を満たし、導体経路磁場 (5.0 T) と電流密度を NbTi 線材で実現可能な超伝導磁石であることを確認できた。鉄 yoke には中心部に上下対称な pole (鉄) を配置し、5 個の CBs とともに、均一磁場領域とその周辺部が25 で計画した磁場分布と同様になっていることがわかる。このように、初期の計画と同様の磁場が得られる理由は式 (12) の固有モード強度を同一にしているためである。

以上の様に g-2/EDM 詳細計測用磁石の実現性が確認できた。これを受けて、詳細設計が進められている。実機で均一磁場を得るために重要なシミングには、MRI 磁石用に TSVD 開発した TSVD 応用のシミング計算手法 (4.1.3 項) [59] を応用する予定である。

## 5. まとめと期待

TSVD は、最小 2 乗法解を求めるために非正則な行列の一般逆行列を求める逆問題解法の一つであるが、個々の SVD 固有モードの強度と磁場分布を把握して加算する TSVD 法として、トカマク装置のポロイダル磁場制御、ステラレータ CHS-qa のコイル設計に適用してきた。これらでは良好な結果を得た。小型トカマク装置 HT-2 では 6 個の独立に電流制御を行う多変数制御型の PFC を用いて、プラズマの位置断面形状制御、および放電開始時のポロイダル磁場マルチ点制御を安定に行えた。これは、相互に非干渉な固有モード強度を FB 制御すれば、ポロイダル磁場を求める分布に安定に制御できることを意味する。一方、DUCAS では、従来、薄板近似の渦電流解析に用いてきた三角面要素による面電流表現使用して、CHS-qa のモジュラーコイルの形状設計手法を開発した。

以上の SVD を利用する逆問題解法技術を MRI 装置や実験装置の設計・調整への適用を行っている。MRI の静磁場設計では、ソレノイド状の CB 群に利用した。固有モードの重ね合わせで到達可能な均一度を正確に把握できることを確認した。また、MRI 撮像でパルス磁場を均一磁場に重ねて nmr 信号に位置情報を与える GC では DUCAS を応用して、高性能な磁気シールドを持つ ASGC を設計できた。さらに、磁石設置後では、静磁場に組み立て誤差や周囲の鉄材による環境磁場の影響で誤差磁場が含まれる。この誤差磁場は、TSVD 正則化利用のシミング計算で決めた磁気モーメント (多くの場合、強磁場中で磁化した鉄片) を配

置してシミングできることを確認した。

MRI 静磁場設計に適用した方法を、ミュオン・電気モーメント詳細計測用磁石に適用して磁石設計を進めている。この磁石は MRI 磁石に比べて、一桁良好な均一度が必要であるが、固有モード数の調整を行えば、シミングを含め MRI 磁石と同じ考え方で均一磁場が実現できる。この素粒子実験用磁石設計は、現在、概念設計から詳細設計に移行している段階である。

以上のように、式 (1) を出発点とし、応答行列  $\mathbf{A}$  に SVD を適用して得る固有モードを利用した逆問題解法と磁場設計について、定式化と実例を示してきた。DUCAS の計算法を用いると任意形状の面上で電流経路および巻き線配置を決めることが出来る。さらに、鉄 yoke を含む体系でも精密な磁場設計が可能であった。精密磁場を発生する磁石の設置時には、TSVD 応用のシミング計算で正確な磁場調整もできた。また、均一磁場でなくても、CHS-qa や MRI 傾斜磁場コイルのように、目標磁場分布が明確であれば、広い応用が可能であると考えられる。筆者は、この記事の読者が、特異値分解を応用した磁場設計や調整技術を、さらに発展させることに繋がっていくことを期待します。

## 謝 辞

本記事の内容の範囲は広く長年に渡って開発してきた TSVD 応用の磁場設計、調整・制御をまとめた。この間、多くの人に多大なご支援をいただいた、感謝を述べたい人は多い。

まず、日立製作所エネルギー研究所 (当時: 以下同じ) の先輩・後輩に、HT-2 実験の支援に謝意を表す。また、HT-2 の建設・改造・実験では日立工場の核装置設計グループに多大な支援をいただいた。原子力研究所那珂研究所の故永見博士ら Doublet III 実験チームの方々には妥協のない議論をいただいた。また、伊藤教授 (当時) をはじめ九州大学 TRIAM-1M 実験グループの先生方には、実験へ参加と結果の議論で有益な時間を過ごさせていただいた。感謝します。

DUCAS の開発課程では、核融合科学研究所の松岡教授、岡村教授には有益な指導・討論をいただいた。また、清水博士にはプラズマ形状データの提供をいただいた。感謝します。

MRI 装置の磁場設計に応用した手法は、実機の磁場でその正しさも確認でき、より合理的な設計手法へと進むことができた。この課程で、旧日立メディコおよび現日立製作所ヘルスケア BU 柏事業所および核装置加速器部の技師たちには多大な支援と議論をいただいた。感謝します。また、高エネ研を中心としたミュオン g-2/EDM 共同研究チームの人たちには、磁石設計にあたって、物理側面の多大な議論をいただいていることにも感謝します。そして最後に、昨年永眠した妻の故香代子には、この記事で述べた研究生生活を、強力に支えてもらいました。感謝して本記事を捧げます。

本記事は、筆者が日立製作所で長年行ってきた特異値分解を利用した磁場再構成、制御・調整および設計に関する

数値計算手法について述べたが、2018年7月に茨城大学大学院理工学研究科量子線科学専攻で行った集中講義の主要部分をまとめたものである。

### 参考文献

- [1] M. Guamieri *et al.*, IEEE Trans. Magn. **26**, 622 (1990).
- [2] 阿部充志：「特異値分解を用いた磁場再構成・制御法と核融合研究への応用に関する研究」, 総合研究大学院大学, 物理科学研究科, 核融合科学専攻, 博士論文, 乙第193号, 2009年9月.
- [3] G. Morrow, IEEE Trans. Appl. Supercond. **10**, 744 (2000).
- [4] T.C. Cosmos and M. Parizh, IEEE Trans. Appl. Supercond. **21**, 2104 (2011).
- [5] D.W. Swain and G.H. Neilson, Nucl. Fusion **22**, 1409 (1982).
- [6] L.L. Lao *et al.*, Nucl. Fusion **25**, 1421 (1985).
- [7] L.L. Lao *et al.*, Nucl. Fusion **25**, 1611 (1985).
- [8] M. Abe *et al.*, Nucl. Fusion **29**, 1659 (1989).
- [9] 阿部充志 他：核融合研究 **61**, 38 (1989).
- [10] M. Abe *et al.*, Jpn. J. Appl. Phys. **29**, 395 (1990).
- [11] T. Watari *et al.*, Application of Intermediate Frequency Range Fast Wave to JIPP T-IIU and HT-2 Plasma, in Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research (Washington DC, 1990), IAEA-CN-53/E-3-3.
- [12] S. Kinoshita *et al.*, Nucl. Fusion **32**, 1465 (1992).
- [13] M. Abe and K. Takeuchi, Kakuyugō kenkyu **67**, 257 (1992).
- [14] M. Abe *et al.*, J. Plasma Fusion Res. **69**, 352 (1993).
- [15] M. Abe *et al.*, J. Plasma Fusion Res. **70**, 671 (1994).
- [16] 阿部充志 他：プラズマ・核融合学会誌 **71**, 620 (1995).
- [17] M. Abe and K. Takeuchi, Fusion Technol. **29**, 277 (1996).
- [18] M. Abe *et al.*, Fusion Technol. **32**, 545 (1997).
- [19] 阿部充志 他：プラズマ・核融合学会誌 **73**, 1283 (1997).
- [20] M. Abe *et al.*, 17th IAEA Fusion Energy Conference, Yokohama, Japan, 19-24, October 1998, IAEA-CN-69/EXP8-12 (CD-ROM).
- [21] M. Abe and T. Nakayama, 'Discharge and Poloidal Magnetic Field Reconstruction in a Ferritic First Wall Tokamak', Proc. 17th IEEE/NPSS Symposium Fusion Engineering **1**, 104 (1997).
- [22] M. Abe *et al.*, J. Plasma Fusion Res. **74**, 491 (1998).
- [23] 柳井晴夫, 竹内 啓：射影行列・一般逆行列・特異値分解 (UP 応用数学選書10) (東京大学出版会, 1983).
- [24] 中川 徹, 小柳義夫：最小二乗法による実験データ解析 (UP 応用数学選書7) (東京大学出版会, 1982).
- [25] 伊理正夫：一般線形代数 (岩波書店, 2003).
- [26] M. Abe *et al.*, Nucl. Fusion **36**, 405 (1996).
- [27] 西野信博, 大館 暁：プラズマ・核融合学会誌 **86**, 648 (2010).
- [28] M. Itagaki *et al.*, Plasma Fusion Res. **9**, 1402046 (2014).
- [29] 板垣正文 他：プラズマ・核融合学会誌 **91**, 23 (2015).
- [30] S. Okamura *et al.*, J. Plasma Fusion Res. Series **1**, 164 (1998).
- [31] M. Abe *et al.*, Phys. Plasmas **10**, 1022 (2003).
- [32] T. Nakayama *et al.*, Jpn. J. Appl. Phys. **40**, 3409 (2001).
- [33] P. N. Yushmanov *et al.*, Nucl. Fusion **30**, 1999 (1990).
- [34] A. Kameari, J. Compt. Phys. **42**, 124 (1981).
- [35] 亀有昭久 他：プラズマ・核融合学会誌 **72**, 1223 (1996).
- [36] H. Fukumoto *et al.*, IEEE Trans. Magn. **29**, 1878 (1993).
- [37] P. Merkel, J. Comp. Physics **66**, 83 (1986).
- [38] N. Pomphrey *et al.*, Nucl. Fusion **41**, 339 (2001).
- [39] S. Piassanetziky, Meas. Sci. Technol. **3**, 667 (1992).
- [40] A. L. Rostislav and R. Ludwig, Concepts Magn. Reson. **26**, 67 (2005).
- [41] G. Shou *et al.*, IEEE Trans. Magn. **46**, 1052 (2010).
- [42] M. Abe, IEEE Trans. Magn. **49**, 5645 (2013).
- [43] M. Abe, IEEE Trans. Magn. **50**, 5100911 (2014).
- [44] M. Abe and K. Shibata, IEEE Trans. Magn. **49**, 2873 (2013).
- [45] M. Abe and K. Shibata, IEEE Trans. Magn. **51**, 7002713 (2015).
- [46] Y. Murata *et al.*, IEEE, Trans., Appl. Supercond. **19**, 2293 (2009).
- [47] 阿部充志 他：「電磁石装置および磁気共鳴撮像装置」特許第4921935号, 出願日2006年11月22日, 登録日平成24年2月10日.
- [48] 阿部充志：「傾斜磁場コイルおよび核磁気共鳴撮像装置」特許第5497785号, 出願日2010(平成22)年11月26日, 登録日2014(平成26)年3月14日.
- [49] 寺田将直 他：日本 AEM 学会誌 **20**, 606 (2012).
- [50] M. Abe *et al.*, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A **890**, 51 (2018).
- [51] H. Zhao *et al.*, Med. Phys. **27**, 599 (2000).
- [52] H. Zhao *et al.*, J. Magn. Reson. **141**, 340 (1999).
- [53] N. Yu-Cheng *et al.*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **14**, 2008 (2004).
- [54] A. Belov *et al.*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **5**, 679 (1995).
- [55] R. Ando *et al.*, IEEE Trans., Appl. Supercond. **18**, 1525 (2008).
- [56] K. Matsuzawa *et al.*, J. Magn. Reson. **278**, 51 (2017).
- [57] M. Abe and Y. Imamura, "Design of Compact Planar GC for High Field Open MRI Using the Computational Tool DUCAS", ISMRM 19th Annual Meeting, No.3794, Montreal, Quebec, Canada 7-13 May 2011, および, 阿部充志「傾斜磁場コイル及びそれを用いた核磁気共鳴断層写真装置」, 特許第4857061号, 出願日2006(平成18)年9月26日, 登録日2011(平成23)年11月4日.
- [58] M. Abe, Magn. Reson. Med. Sci. **16**, 284 (2017).
- [59] M. Abe *et al.*, IEEE Trans. Appl. Supercond. **27**, 4400812 (2017).
- [60] T. Mibe, the J-PARC g-2/EDM collaboration, Nucl. Phys. B - Proc. Suppl. **218**, 242 (2011).
- [61] N. Saito, the J-PARC g-2/EDM collaboration, AIP Conference Proceedings **1467**, 45 (2012).
- [62] H. Inuma *et al.*, Nucl. Instrum. Methods Phys. Res. A **832**, 51 (2016).