



解説

ホール型推進機における 電離振動の理論・シミュレーション研究の進展

Progress of Theory and Simulation on Ionization Oscillations in Hall Effect Thrusters

原 健太郎

HARA Kentaro

テキサス A&M 大学

(原稿受付：2018年7月5日)

ホール型推進機における10–30 kHz程度の電離振動現象は、従来は捕食・被食関係を用いた簡易なモデルでのみ現象が説明されていたが、最新の理論や数値解析をもとに電子輸送並びに電子の熱流束のバランスが振動に寄与していることが示された。本解説では、ホール型推進機における電離振動のメカニズムに加えて、Hybrid-direct kinetic モデルを用いた数値計算や電離振動理論について議論する。

Keywords:

Hall effect thruster, breathing mode, ionization oscillation, direct kinetic simulation, linear perturbation theory

1. ホール型推進機の研究状況

近年、プラズマ化した推進剤を加速・排気することにより低燃費を実現できる宇宙電気推進機を用いた全電化衛星が注目されており、日本でも2021年の打ち上げをめざしJAXAを中心に開発が進んでいる[1]。米国NASAや空軍、ヨーロッパでも、商用・軍用的人工衛星に搭載する推進機として既に利用されている。全電化衛星用の電気推進機の第1候補としてホール型推進機の研究開発が世界各国で盛んに行われている。

図1にホール型推進機の作動原理を示す。電極間に生じる軸方向の電場とそれに直交する外部磁場によって引き起こされる $E \times B$ ドリフトにより電子を円環形状の放電室に閉じ込め、周方向にホール電流が形成される。陰極(ホローカソード)から生成された電子は放電室内で強い磁場に捕捉され磁場を横切る輸送を抑制される。アノード面か

ら流入された推進剤(一般的にキセノンを使用)は、磁場に捕捉された電子により電離される。生成されたイオンは磁場の影響を受けずに静電的に放電室外に加速・排気され、その反作用で推力を得る。放電室内壁面、並びに推進機外部壁面(ポールピース)はそれぞれ絶縁体であり熱にも強いBNのようなセラミックを用いる。陰極から生成された電子は、プルーム中でイオン流れを中性化させ衛星表面に帯電を起こさない働きも持っている。イオンエンジンでは加速グリッド間にて空間電荷制限が起こり抽出できるイオン電流密度が制限されてしまう一方、ホール型推進機では電離とイオン加速が同時に起こるため比較的高い推力密度を達成できることが特色の一つである。

ホール型推進機は様々な物理現象が複雑に干渉し合うことで物理的にも研究対象として注目されている。磁場を横切る方向の電子輸送は実験結果に基づく異常拡散として議論されることが多く、第一原理に基づく理論・モデルは今のところ提唱されていない。径方向の磁場と壁面とが直交していない条件でのプラズマ壁面干渉は電子輸送の理解に必要である。これまでホール型推進機のための放電プラズマ解明が重視されてきた一方、ホローカソードのプルームにおけるプラズマ振動の研究も近年行われており、カソードの損耗や放電プラズマとのカップリングなどもホール型推進機の解明には重要であることが示唆されている。地上における真空槽での実験と宇宙空間での実ミッションでの作動の差異(facility effect)を理解することもホール型推進機の開発において非常に重要である。

これら複雑な物理現象が多く存在する中、これまでの研

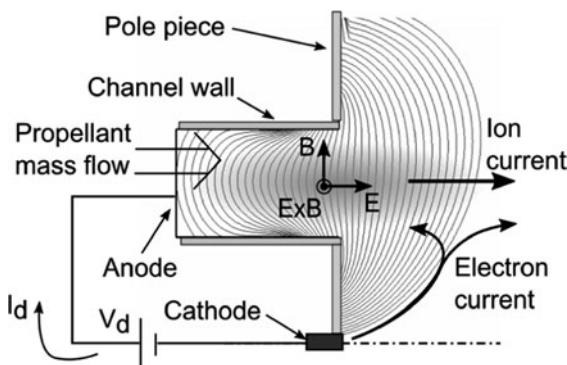


図1 ホール型推進機の簡略図及び作動原理。

究によってホール型推進機の放電プラズマ中には様々な不安定性や振動が確認されている。例えば、電子のサイクロトロン周波数による GHz 程度の高周波振動から電離不安定性による kHz 程度の低周波振動まで幅広い周波数帯での振動が相互干渉をしている。低周波振動の中でも特筆すべき 2 つの振動現象は、放電振動と周方向に起こる Rotating spokes がある。

10–30 kHz 程度の放電振動は、推進剤である中性粒子とプラズマの生成と移流に寄与する振動であることから、通称 Breathing mode と呼ばれる。推進機の損耗を招くだけでなく、衛星開発時に放電を維持する電源の設計や推進機が発生する電磁ノイズの評価に強く影響を及ぼすため、この振動が発生しない作動領域を大きく確保することが求められる。これまでの実験によると、Breathing mode は磁場形状・強さ、電圧、推進剤流量や陰極の作動状態などの様々な要素に影響を及ぼされることが確認されている[2,3]。数値解析においても、流体法・粒子法・ハイブリッド法と様々な解析手法によって同じような振動現象は再現できている[4,5]一方、その電離振動のメカニズム、すなわち、電離振動・減衰の条件、に関してはこれまで理解がされていなかった。これまでは、Lotka-Volterra 方程式に代表される捕食・被食関係 (Predator-prey) を用いて説明されてきた[6,7]。このモデルでは、イオン及び電子が捕食、中性粒子が被食で電離振動が起こることを模擬しているが、電子に関する考察がほぼされていなかったが、本解説では電子の挙動が電離振動に影響を及ぼすことを議論する。また、Rotating spokes に関しても研究が進められているが、最新の研究[8]ではプラズマ下流でドリフト不安定性が発生し周方向に生じるプラズマの擾乱が電離振動とカップリングするというメカニズムが示唆されている。

2. Hybrid-DK シミュレーション

ホール型推進機の計算手法紹介の前に、3 つの主なプラズマの数値解析手法に関して紹介する。まず、流体法は質量・運動量・エネルギー保存則などを解く手法で、Magnetohydrodynamic (MHD) や二流体モデルなどに代表される。計算コストが低い一方、クヌーセン数が小さい ($Kn < 0.1$) 粒子間の衝突が起こる領域で有効である。次に、粒子法は希薄流体や非衝突の流体に有用であり、非マクスウェリアンの速度分布関数を考慮することができる。計算コストやメモリの観点から実粒子を仮定することは不可能であるため、10の5乗から8乗程度の実粒子を一つの超粒子 (superparticle) で模擬し、運動論に基づき粒子の移流、加速・減速、衝突をモデル化する。最大の欠点は超粒子により数値ノイズが不可避であることであることが挙げられる。最後に、粒子の第一原理則であるボルツマン方程式やヴラソフ方程式を離散化された格子状で解き、直接速度分布関数を求める手法がある。著者はこれを Direct Kinetic (DK) 法と呼んでおり、これまでランダウ減数・プラズマ波動現象・プラズマ壁面干渉など主に 1 次元のプラズマ流れに適応されてきた。この 2 つの運動論モデルの比較、また低温プラズマ現象への適応は文献[9]を参照され

たい。

ホール型推進機の計算手法としては、これら 3 つの計算手法を全ての粒子種に用いる方法と粒子種によって異なる手法を用いるハイブリッド法がこれまで用いられてきた。本解説では、ホール型推進機の放電プラズマ計算における主流であるハイブリッド法を採用した結果を紹介する。イオンは電離と加速が同時に行われるため非マクスウェリアンになり、その評価が推進性能、すなわち比推力や推力、を正確に算出することが重要であるため運動論モデルを用いることが推奨されている。本モデルでは数値振動 (ノイズ) による電離振動という物理的な挙動への影響を避けるため DK 法を用いる[10]。電子に関しては、準中性を仮定し、かつ、ドリフト拡散近似を適用する。

2.1 ホール型推進機放電プラズマの数値計算

本 Hybrid-DK モデルの詳細は文献[10,11]に記述しているが、本解説でも概要を示す。まず、イオンに関しては 1 次元の運動論モデルを用いるが、以下の方程式を解く。

$$\partial_t f + v_x \partial_x f + a_x \partial_v f = \dot{f}_{\text{coll}} \quad (1)$$

ここで、 $f = f(x, v_x, t)$ は速度分布関数、 x は実空間、 v_x は速度、 t は時間、 $a_x = eE/m_i$ は加速度、 \dot{f}_{coll} は衝突項を示す。さらに、 e は電気素量、 E は電場、 m_i はイオン質量である。数密度、平均流速、温度は速度分布関数からそれぞれ 0 次、1 次、2 次のモーメントによって算出することができる。本モデルではイオンの衝突項に中性粒子の基底状態と励起状態からの電離を含む。数値解析の観点からいうと、式(1)は多次元の双極型偏微分方程式である。物理空間及び速度空間における移流と衝突を Strangsplitting を用いて別々に解く。二つの移流方程式に関しては、3 次精度のスキームを基にしている Arora-Roe スキームを用いた有限要素法の一つである MUSCL 法を採用する[10]。数値スキームによっては数値振動を引き起こし、速度分布関数が負の値になった時に電離とカップリングすることで計算結果が不安定になることも見られたので、非負の値を保証する堅牢なスキーム・手法を採用することを勧める。また本 DK 手法は、捕捉粒子不安定性[11]、プラズマ波動[12,13]、及びプラズマ壁面干渉[9]などに幅広く使用されている。

電子の記述に関しては、ドリフト拡散近似を採用する。軸方向の電子流束 (Γ_{ez}) は以下のように記述できる。

$$\Gamma_{ez} = -n_e \mu_e E_z - \mu_e \nabla_z p_{eV} \quad (2)$$

ここで、 μ_e は電子の移動度、 n_e は電子数密度、 $p_{eV} = n_e T_{eV}$ は電子の圧力、 T_{eV} は電子温度 (単位は eV) を示す。また、周方向の電子流速は $\Gamma_{e\theta} = \Omega \Gamma_{ez}$ と仮定する。 $\Omega = \omega_B / \nu_m$ はホールパラメータ、 $\omega_B = eB/m_e$ はサイクロトロン周波数を示す。磁場を横切る方向の電子移動度は、非磁化時の電子移動度 $\mu_0 = e/(m_e \nu_m)$ を用い、 $\mu_e = \mu_0 (1 + \Omega^2)^{-1}$ と表せる。古典拡散と異常拡散で記述されることを仮定し、 ν_m は中性粒子との弾性衝突及び非弾性衝突 (励起や電離) における衝突周波数に加えて壁面衝突や異常拡散項も含む。

一方、イオンと電子の質量保存則から、準中性及び一価イオンのみを仮定した場合、 $\nabla \cdot \Gamma_e = \nabla \cdot \Gamma_i$ であり放電電流保存を満たす。静電場 $E = -\nabla\phi$ を用い、式(2)を電流保存則に代入すると、

$$\nabla \cdot (n_e \mu_e \nabla \phi) = \nabla \cdot (\mu_e \nabla p_e + \Gamma_i) \quad (3)$$

と記述できる。準中性条件を用いることで電子数密度はイオン数密度と等しくなり ($n_e = n_i$)、イオン数密度は式(1)の速度分布関数を用いて求めることができる。ここで、準中性仮定によってポアソン方程式の適用ができないため、電位に関する2次の楕円型偏微分方程式である式(3)を用いる。

電子の全エネルギーは運動エネルギーと内部エネルギー(温度)の和で表せる。一般的な低温プラズマでは拡散項が支配的である場合、運動エネルギーは内部エネルギーに比べ無視できる、すなわち、平均流速が熱速度よりも小さい。しかし、ホール型推進機では $E \times B$ ドリフトが周方向に 10^6 m/sほどの速度を持つため、相当する運動エネルギーは10 eV程になるため電子温度と同じオーダーになる[10]。電子の全エネルギー保存則は以下のように記述できる。

$$\partial_t (n_e \epsilon_e) + \partial_x (\Gamma_{ez} \epsilon_e + p_e u_{ez} + q_{ez}) = j_{ez} E_z - S_w - S_c \quad (4)$$

ここで、 ϵ_e は電子の全エネルギー、 $p_e = n_e k_B T_e$ 、 k_B はボルツマン定数、 T_e は電子温度 (単位は K)、 q_{ez} は熱流束、 $u_{ez} = \Gamma_{ez}/n_e$ は電子の平均流速、 $j_{ez} = -e\Gamma_{ez}$ は電子電流密度、 S_w は壁面への熱損失、 S_c は衝突によるエネルギー損失を示す。本解析手法では、壁面への熱損失モデルは $S_w = n_e \Delta \epsilon_w \nu_w$ のように与えるが $\Delta \epsilon_w = 2T_e + K_e$ は一電子が壁面との衝突の際に失う平均エネルギー、 $\nu_w = u_{iw}/[\Delta R(1-\sigma)]$ は電子の壁面衝突周波数、 $K_e = m_e(u_{ez}^2 + u_{e\theta}^2)/2$ は運動エネルギー、 $u_{iw} = (k_B T_e/m_i)^{1/2}$ はボーム速度、 ΔR は放電室の幅、 $\sigma = \sigma(T_e)$ は二次電子放出率を示す。また、電子の全エネルギーは $\epsilon_e = K_e + (3/2)k_B T_e$ のように運動エネルギーと熱エネルギーの総和で表される。

最後に、中性粒子に関しては速度一定を仮定し、質量保存則を解く。基底状態と励起状態の中性粒子をそれぞれ想定し、励起状態からの脱励起も含む。

2.2 実験結果との比較

世界で最も使用されているホール型推進機の一つである SPT-100 を想定した数値解析を行う。放電室長さは $L_{ch} = 2.5$ cm、外径は 5 cm、内径は 3.45 cm、解析領域は陽極から放電室出口の外 1 cm までを含む。陽極からの推進剤流量は 5 mg/s、放電室放電電圧は $V_d = 300$ V、磁場形状は磁場強さが変化しても変わらないと仮定する。本計算では、背景ガスの影響と電荷交換衝突は無視している。異常拡散項はサイクロトロン周波数の 1/160 を放電室内部で、その 1/16 (ボーム拡散に相当) をブルーム中で仮定している。

計算結果と実験結果の比較を図2に示す。図2(a)は米国ミシガン大学で実験された H6 スラスタの放電振動の挙動[14]、図2(b)は SPT-100 のノミナル条件での実験結

果、そして図2(c)は本モデルであるハイブリッドDK法を使った計算結果である。H6の実験から高速プローブとカメラを使って、放電振動が起こる低磁場領域では周方向のスポークが発生せず、放電振動が安定化した高磁場領域ではスポークが生じることが観測された。放電振動の際はプラズマが周方向一様であるため Global ionization mode (以降単に global model)、周方向のスポークの場合を Local ionization mode (以降単に local mode) と呼ぶ。

図3は図2に示される放電振動の詳細を示す。SPT-100の実験結果は参考文献[3]から抽出してきたものであり、その論文には相当する放電電流の時間経過は報告していなかったため、H6の実験とSPT-100の計算結果との比較を行う。推進機の大きさが違うため、放電電流の絶対値に差異はあれど、定性的な挙動は良い一致を得られたことが見られる。放電振動が大きいときは、放電電流は正弦波のような波形からパルスのような波形に遷移する。このことから放電振動は非線形な物理現象であることが示唆される。更に、振動モード [図3(a)と(c)] においては、振動周波数は実験、計算それぞれ 10 kHz, 20 kHz ほどであることがわかり、同じオーダーの振動周波数が再現できた。

実験と数値解析ともに、磁場が小さくなるに連れて時間平均した電流値は上昇している。ホールパラメータが十分

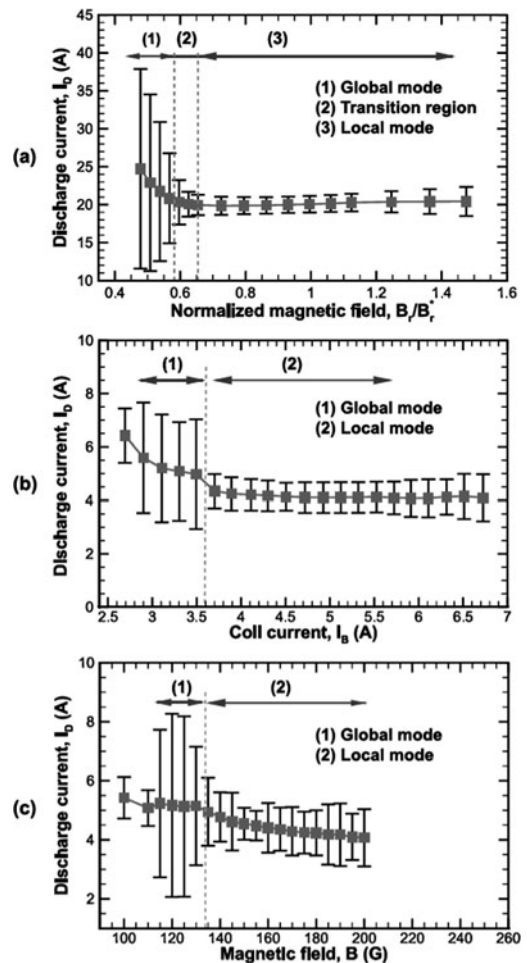


図2 ホール型推進機における放電振動。(a)H6 スラスタ実験、(b)SPT-100 実験、(c)SPT-100 数値解析。[11]より転載。

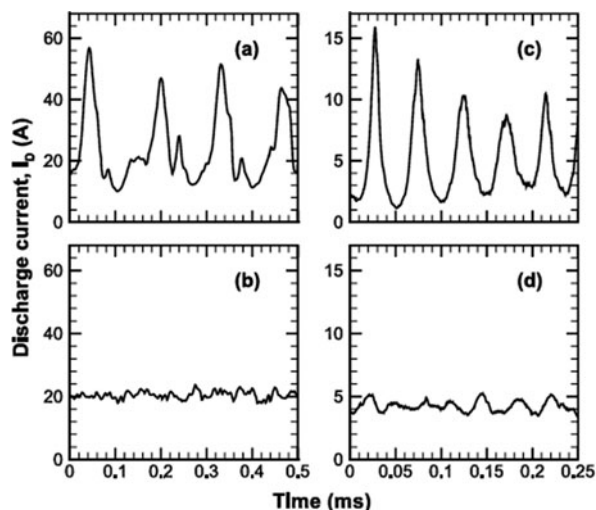


図3 図2に示されている放電振動の詳細。H6 スラスタ実験：(a) Global mode, (b) Local mode, SPT-100 計算：(c) Global mode, (d) Local mode. [11]より転載。

大きい場合は、 $\mu_e \propto \nu_m/B^2$ と記述できる。磁場が小さい場合は、電子の移動度も上がるので、電場が一定だと仮定すると電子電流も増加する。そのため放電電流も増加するので放電振動領域 (Global mode) 内での ν_m はある程度一定であると考えられる。図2 (a)と (b)にあるように、実験結果では磁場が増加するにつれて放電電流が一定になっているのは ν_m が増加している可能性が高い。また、Local modeで周方向のプラズマが一樣でなく $\langle n_e E_\theta \rangle$ が非零の場合は、周方向のプラズマ振動により軸方向への電子輸送の増加に寄与する[15]が、本モデルは軸方向1次元の計算なのでこの影響を捉えることはできず軸方向と周方向の2次元の計算をする必要があることに留意されたい。

2.3 放電振動の解明

図4はGlobalmode (B = 120 G)とLocalmode (B = 180 G)における電子電流で割った電子熱流束のバランスを示す。ジュール熱の効果は電場のプロファイルと比例し、B = 120 G と 180 G 両方ではほぼ変わらない。電子エネルギーの定常解を得るためには、ジュール加熱と同程度のエネルギー損失が必要となる。本ハイブリッドDK法を用いた結果、磁場が小さい場合、 $E \times B$ ドリフトは大きいため運動エネルギーが大きくなる。そのため電子の内部エネルギー(電子温度)は低下し壁面衝突による熱損失は低減される。放電室内、及び出口付近では中性粒子との非弾性衝突による電子エネルギーの損失は無視できる。そのため、電子エネルギー損失は移流によるもののみ可能になる。一方、Local modeの放電振動が低減された際は、壁面による熱損失が主な損失メカニズムとなり移流項が小さいことがわかる。磁場が増加した分 $E \times B$ ドリフト、すなわち運動エネルギー、は小さくなるため同程度の全エネルギーがある場合、電子温度が高くなる。

また本モデルを用いて、以下の知見を得ることに成功した。(i)励起状態の中性粒子による放電振動への影響を確認した。これまでのホール型推進機での数値解析では計算

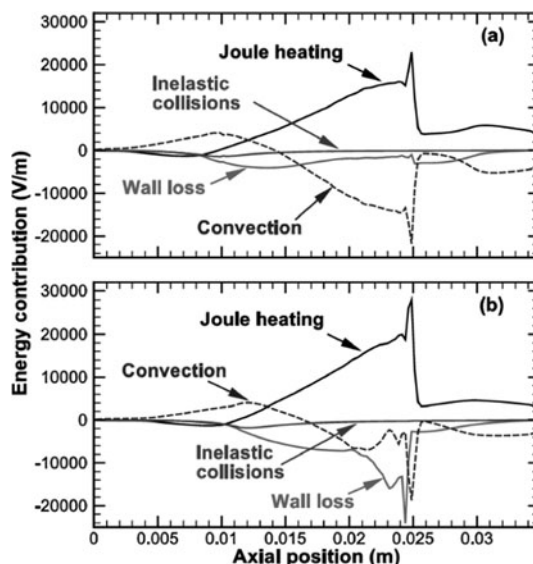


図4 ホール型推進機放電プラズマ内の電子熱流束バランス。(a) Global mode: B = 120 G, (b) Local mode: B = 180 G. [11]より転載。

時間短縮や簡略化のため励起状態は考慮されないことが多かったが、陽極付近での電子温度は5 eV以下程度であるために励起状態からの段階的な電離を模擬することが重要である。(ii)異常拡散のモード遷移に対する影響は大きい。例えば、放電室内の異常拡散項を増やしたところ放電振動は起こりにくくなり、プルーム中の異常拡散項を減らすと振動モードの領域が広がる。(iii)図4に示すように、電子熱流束、すなわち1次元でのエネルギー収支が電離振動に寄与している示唆を得られた。必ずしもすべての電離振動がこの条件を満たすとは限らないが、電子に関する議論の重要性を初めて示すことに成功した。

3. 電子温度の変動を考慮した電離振動の理論的アプローチ

上述の結果は実験結果と数値解析結果を比較した (Validation) 上で物理現象を検討したもので、理論との比較による Verification を行うことが電離振動の解明につながる。数値解析は軸方向の1次元で行った一方、1次元の理論を構築する前に0次元の理論を構築し知見を得られるかを探る方針を取る。なお、本節の理論及び結果は文献[16]を元にしてのいる。

3.1 従来のモデル: Predator-prey

従来の電離振動の理論的モデルは、Predator-prey モデルが採用されてきた[6, 7]。これはイオン(準中性仮定で電子数密度と等しい)と中性粒子の連続式を以下のように考慮する。

$$\partial_t N_i + N_i U_i / L = N_i N_n k_{ion} \quad (5)$$

$$\partial_t N_n - N_n U_n / L = -N_i N_n k_{ion} \quad (6)$$

ここで N と U はそれぞれ平均化された数密度と特性的な速度、添字の i と n はそれぞれイオンと中性粒子、 L は電離長、 k_{ion} は電離の速度係数を示す。どのような系でもこのように時間変化する場合は、線形化し不安定性が生じるかを調

べることで振動現象の解明また制御の指針を得ることが出来る。ここでは、 $U_i \approx (2eV_d/m_i)^{1/2}$ はイオンの排気速度、 U_n は中性粒子の熱速度程度で一定であると仮定する。任意の変数 Q を線形近似する場合、 $Q = Q_0 + Q' \exp(-i\omega t)$ と置くことができる。 Q_0 は時間平均した値 (0 次の項)、 Q' は擾乱の大きさ (1 次の項)、 $\omega = \omega_r + i\gamma$ は周波数で ω_r が実成分、 γ が不安定性の成長率である。すなわち、 γ が非負であればその系は振動が増幅されることがわかる。このような線形摂動理論は非線形の現象を解明できるものではないものの、非線形の現象が生じる条件を示す重要なステップである。さて、 N_i と N_n の摂動を考慮すると、0 次の成分は $U_i/L = N_{n0}k_{ion}$ 、 $U_n/L = N_{i0}k_{ion}$ となる。更に、1 次の成分は、

$$-i\omega N'_i + N'_i U_i/L = N'_i N_{n0}k_{ion} + N_{i0} N'_n k_{ion} \quad (7)$$

$$-i\omega N'_n - N'_n U_n/L = -N'_i N_{n0}k_{ion} - N_{i0} N'_n k_{ion} \quad (8)$$

を得られ、これらを組み合わせることで、

$$\omega^2 = N_{n0} N_{i0} k_{ion}^2 \quad (9)$$

という分散関係式が導出できる。0 次成分を用いると $\omega = \pm (U_i U_n)^{1/2}/L$ と記述することができる。Predator-prey モデルが好まれていた理由としては、導出される (実) 周波数が放電振動のそれと近い値が求められるところにある。例えば、イオンの排気速度 20 km/s、中性粒子の熱速度 300 m/s、電離長が放電室長さと同程度であると仮定すると $L = 2$ cm。これらから、 $\omega = 1.2 \times 10^6$ rad/s、すなわち周波数は $f = \omega/2\pi = 19.5$ kHz と求められる。これは図 2 に示す Global mode (振動しているケース) の周波数とほぼ一致する。一方、着目すべきは、この分散関係式からは不安定性 (γ) に関する解を求めることができないため、上述の Predator-prey モデルは初期条件の差異がそのまま振動現象に結果する記述であることがわかる。実験結果ではプラズマパラメータの僅かな変化で大きなモード遷移が行われることが観測されているので、このモデルはホール型推進機の電離振動を記述するのには不十分であると結論づけることができる。

3.2 ホール型推進機の電離モデル

Predator-prey モデルが不十分である理由は不安定性の議論の欠如に加えて、連続式がホール型推進機の物理現象を考慮していないことである。0 次元のグローバルモデルの概念を使い、イオンと中性粒子の連続式は以下のように書き表すことができる。

$$\partial_t N_i + N_i U_i/L_{ch} + N_i U_{iw}/\Delta R = N_i N_n k_{ion} \quad (10)$$

$$\partial_t N_n + (N_n - N_{int}) U_n/L_{ch} = -N_i N_n k_{ion} \quad (11)$$

Predator-prey モデルからの変更点は以下の 3 つである。まず、電離長の代わりに実際の放電室形状を用いる (L_{ch} と ΔR)。次に、イオンの壁面への拡散を考慮する (U_{iw} : 径方向におけるイオンのボーム速度)。最後に、中性粒子の流束は陽極からの推進剤流入が一定であることから一定の N_{int} を考慮し、かつ、中性粒子もイオンと同様放電室外へ排出されるため中性粒子流束における符号を変更した。

本モデルから、準一次元の電離長をプラズマの特性と放電室形状から求めることができる。式 (8) と (10) を比較すると $U_i/L = U_i/L_{ch} + U_{iw}/\Delta R$ であるため、

$$L = L_{ch} (1 + U_{iw} L_{ch}/U_i \Delta R)^{-1} \quad (12)$$

例えば、放電室幅が小さい場合は電離長が短くなるのがわかる。これはイオンの径方向への拡散が支配的になるため、実質的に電離が起こる領域が狭くなると理解できる。

式 (12) を用いると、0 次成分は $N_{n0} = U_i/(L k_{ion})$ と表せるが、放電室内中の中性粒子密度は陽極からの推進剤流量によるそれを超えることはできない。 $N_{n0} < N_{int}$ は定常解を持つ条件であると言える。すなわち $\nu_{ion,max} = N_{int} k_{ion} (T_e)$ と $\nu_{accel} = U_i/L$ を用いると、 $\nu_{ion,max} > \nu_{accel}$ と表せる。左辺は流入された推進剤が全て電離した場合の最大イオン生成率で、右辺はイオンの加速による損失率に相当する。この条件式より、プラズマの定常解を持つための最低限必要されている電子温度を求めることができる。図 5 に SPT-100 の例を示す。なお、 $k_{ion}(T_e)$ は [17] のモデルを利用した。例えば、放電電圧が大きく推進剤流入量が小さい場合は、高い電子温度を必要とすることがわかる。もし電子温度がこれより小さい場合は、定常解を持つことができない条件なので、非定常なプラズマとなる。すなわち、定常解周りを振動するモードは成り立たず、不安定な (例えば、パルス状の) 振動モードが起こると考えられる。

電子温度が一定である場合、1 次の線形摂動成分は

$$-\omega^2 - i\omega N_{int} N_{i0} k_{ion} (N_{int} - N_{n0})^{-1} + N_{n0} N_{i0} k_{ion}^2 = 0 \quad (13)$$

と導出することができ、周波数の実成分と不安定性の成長率は以下のように表せる。

$$\omega_r = \pm (N_{i0} N_{n0} k_{ion}^2 - \gamma^2)^{1/2} \quad (14)$$

$$\gamma = -N_{i0} k_{ion} / [2(1 - N_{n0}/N_{int})] \quad (15)$$

線形不安定性の成長率は負となることから、振動は無条件で減衰するので、電子温度や電離長など電子の挙動が振動しない限り電離振動は起こらないと示唆される。また、 $N_{i0} \ll N_{n0}$ となる弱電離である場合、もしくは、 $\gamma \rightarrow 0$ の場

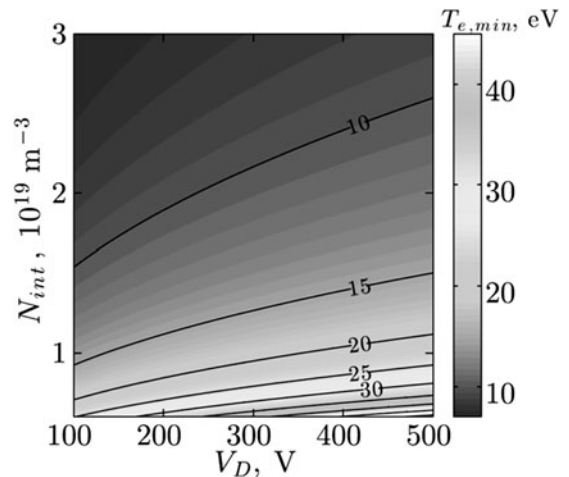


図 5 定常プラズマ解を持つための最低限必要な電子温度。[12] より転載。

合は、Predator-prey モデルの解と一致する。以上のことより、電子温度が一定である場合は電離振動は減衰することがわかる。

電子温度を一定とすると振動が無条件で減衰するため、次に外的に電子温度を強制的に振動させプラズマ密度と中性粒子密度の時間変化を調べる。すなわち式(10)・(11)中の $k_{ion}(T_e)$ の項を一定と仮定せず、例えば、 $k_{ion} = k_0 [1 + \alpha \cos(\omega_0 t)]$ と時間変化させる。図6は、電離反応速度の振動大きさ α を変化させたときの電離振動の時間変化を示す。ここでは、 $\omega_0 = 2 \times 10^5 \text{ rad/s}$, $N_{int} = 2 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $N_{n0} = 10^{19} \text{ m}^{-3}$, $N_{j0} = 10^{17} \text{ m}^{-3}$, $k_0 = 2 \times 10^{-13} \text{ m}^3/\text{s}$. 最初の2, 3サイクルのあとはほぼ一定な振幅である振動モードが確認できる。 α が0に近づくにつれて振動は成長せず初期条件で大きな振動を仮定していても振動は減衰する。図6には、電離振動の振幅が小さい場合と大きい場合の2つを示すが、これらはそれぞれ線形モードと非線形モードと呼ばれる[7]。線形モードでは中性粒子とプラズマ密度ともに正弦波のような振動が確認できる。一方、非線形モードでは正弦波ではなく、強い電離による急激なプラズマ密度の増加及び中性粒子の減少が確認できる。中性粒子の減少に続いて陽極近傍からの推進剤流入によって中性粒子密度の増加が行われた際に電離がまた誘発されるという電離振動が起こる。

3.3 電子エネルギー方程式を含む電離振動理論

イオンと中性粒子の連続式に加えて、イオンの運動量保存則と電子エネルギー保存則を考慮する。

$$\partial_t N_i + N_i U_i / L = N_i N_n k_{ion} \quad (16)$$

$$\partial_t N_n + (N_n - N_{int}) U_n / L_{ch} = -N_i N_n k_{ion} \quad (17)$$

$$\partial_t (N_i U_i) + N_i U_i^2 / L = e N_i E / m_i \quad (18)$$

$$\partial_t (N_i \epsilon_e) + (5/3) N_i U_e \epsilon_e / L = S_{joule} - S_{wall} - S_{coll} \quad (19)$$

各項の詳細は文献[16]を参照されたい。本モデルでは、壁面への熱流束成分に対して放電室内20%のプラズマが S_{wall} に寄与するという仮定を含む。

図7にSPT-100を想定した線形摂動理論による不安定性成長率の結果を示す。ここでは実成分の周波数のグラフは示していないが、不安定性成長率が正である解に関しては、実成分は0であった。このことから0次元のモデルでは電離不安定性がある場合は固有の実振動周波数を持たないことがわかる。しかし、この理論における最も重要な結果は、電子エネルギー方程式の摂動を考慮した際に電離不安定性が確認できることである。これは電子温度の振動こそが電離振動を引き起こす原因の一つであることが強く示唆される結果であり、その振動・減衰条件も熱流束のバランスによることが示されている。

電子温度が図5に示される最低温度より下回る場合は、定常的なプラズマが生成されないため線形摂動理論による解を持たない。すなわち非定常なモードになる。電子温度がそれを上回るとき式(16)~(19)の解が存在することとなり、 γ が正である場合は振動モード、 γ が負である場合は減衰モードと場合分けができる。図7からは大まかに2つの特性がわかる。まず、電子の移流項が強くなる(縦軸を下

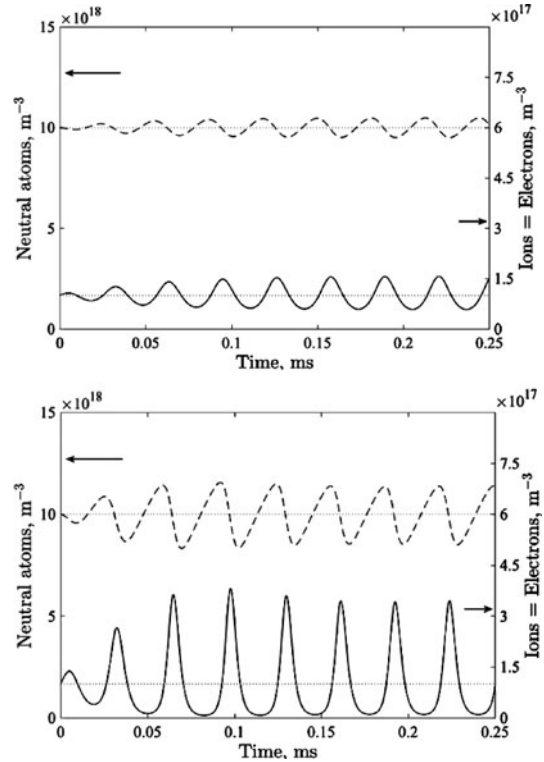


図6 外的に電離反応速度 $k_{ion} = k_0 [1 + \alpha \cos(\omega_0 t)]$ と振動させた際のプラズマ密度と中性粒子密度の振動。(上)振幅 $\alpha = 1\%$, (下)振幅 $\alpha = 5\%$.

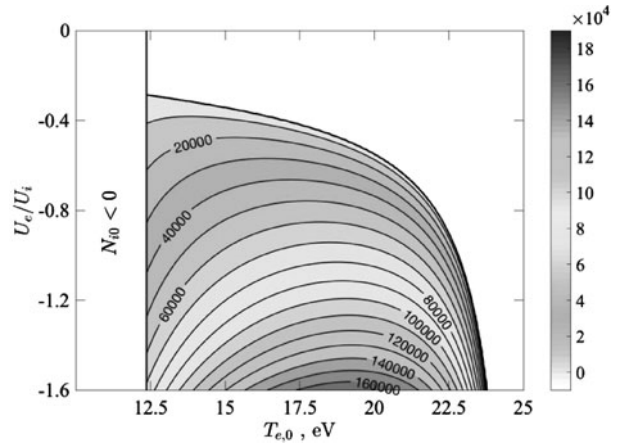


図7 線形摂動理論による不安定性成長率の結果。SPT-100を想定する。

にいく)につれて電離不安定性が大きくなることである。その次には、同じ電子速度 (U_e) において不安定性は電子温度が20 eV程度で最大となるが、それ以上の電子温度となる場合は振動が減衰する。これは電子温度が高くなるにつれて電子の壁面への熱流束が増加することによって考えられる。すなわち、0次元の電子エネルギー方程式を含む電離振動理論によって、電子輸送と電子の熱流束(特に壁面への損失)が電離振動に大きく寄与していると示唆されたHybrid-DKモデルの結果と一致した結果が得られたと結論づけることができる。

4. まとめ

本解説では、ホール型推進機特有の電離振動である研究

を報告した。これまでの計算手法に則りつつイオンに数値ノイズを含まないDKモデルを適用させたHybrid-DKモデルを使って放電振動を再現し、実験結果と比べ振動周波数など定性的な一致を得た。数値計算結果を用いて、実験的に得ることが難しい電子の挙動についての考察を行ったところ、電子輸送と電子の熱流束が振動モードの励起・減衰に寄与している示唆が得られた。特に本計算結果では、ジュール熱による加熱に対応する熱損失のメカニズムに注目した。低磁場で起こる振動モード (global mode) では移流項が支配的であり、高磁場で起こる安定モード (local mode) では壁面への熱流束が支配的であった。電離振動は放電室内とプルーム中の異常拡散項にも依存することがわかり、電子輸送の第一原理的理解が必要である。

さらに数値解析に得られた知見に基づき、電離振動の理論開発を行った。まず、電気推進業界で最も言及されている捕食・餌食関係の Predator-prey モデルのレビュー、またホール型推進機の物理に忠実な電離モデルの開発を行った。線形摂動理論によって定常プラズマ解を持つための最低限の電子温度の導出をし、電子温度の振動がない条件下では電離振動は無条件に減衰するような解が得られた。電離振動の線形・非線形のモードは電子温度の振動の大きさによるものであることを示した上、電子エネルギー方程式を含む電離振動理論を構築し、電子輸送と電子の熱流束によって不安定性成長率が正である解が存在することが確認された。これはHybrid-DKモデルが示唆する結果と良い一致が得られたと結論づけることができる。

最後に、数値解析・理論ともに改善の余地があることに言及する。例えば、1次元のモデルでは2次元のプラズマ拡散や複雑な磁場形状における電子の熱損失などが正確にモデル化できていない。また、理論においても1次元の理論を構築できればより正確な分散関係式 (周波数と波数)

を求められる可能性がある。一方、低周波振動を理解することは異常拡散など高周波のプラズマ振動の解析にも非常に有用であると考えられる。これまではプローブや高速カメラを使った低周波振動の実験が多かったが、レーザーを用いた non-intrusive な実験手法が期待される。磁場を横切る電子の異常拡散に関する数値解析などが今後の注目される研究テーマになることが予想されるが、それら高周波プラズマ振動が低周波の電離振動にどのような影響を及ぼすかを解明することが課題となる。

参考文献

- [1] D. Lev *et al.*, 35th International Electric Propulsion Conference, IEPC-2017-242.
- [2] G.N. Tilinin, *Sov. Phys. Tech. Phys.* **22**, 974 (1977).
- [3] N. Gascon *et al.*, *Phys. Plasmas* **10**, 4123 (2003).
- [4] J.P. Boeuf and L. Garrigues, *J. Appl. Phys.* **84**, 3541 (1998).
- [5] S. Barral *et al.*, *Phys. Plasmas* **10**, 4137 (2003).
- [6] J.M. Fife (Ph.D. thesis, MIT, 1998).
- [7] S. Barral and E. Ahedo, *Phys. Rev. E* **79**, 046401 (2009).
- [8] R. Kawashima *et al.*, *Plasma Sources Sci. Technol.* **27**, 035010 (2018).
- [9] K. Hara and K.M. Hanquist, *Plasma Sources Sci. Technol.* **27**, 065004 (2018).
- [10] K. Hara *et al.*, *Phys. Plasmas* **19**, 113508 (2012).
- [11] K. Hara *et al.*, *J. Appl. Phys.* **115**, 203304 (2014).
- [12] K. Hara *et al.*, *Phys. Plasmas* **22**, 022104 (2015).
- [13] K. Hara *et al.*, *Phys. Rev. E* **96**, 053212 (2017).
- [14] M.J. Sekerak, *J. Propul. Power* **32**, 903 (2016).
- [15] T. Lafleur *et al.*, *Phys. Plasmas* **23**, 053502 (2016).
- [16] K. Hara *et al.*, *Phys. Plasmas* **21**, 122103 (2014).
- [17] D. Goebel and I. Katz *Fundamentals of Electric Propulsion: Ion and Hall Thrusters* (Wiley, 2008).



はら けん た ろう
原 健 太 郎

テキサス A&M 大学航空宇宙工学科アシスタントプロフェッサー。東京大学工学部卒 (2008)、東京大学大学院工学系研究科修士修了 (2010)、ミシガン大学航空宇宙工学科にて博士号取得 (2015)、日本学術振興会海外特別研究員としてプリンストンプラズマ物理研究所に在籍後、2016年より現職。専門は、低温プラズマ物理、電気推進、数値計算手法の開発の研究。

科にて博士号取得 (2015)、日本学術振興会海外特別研究員としてプリンストンプラズマ物理研究所に在籍後、2016年より現職。専門は、低温プラズマ物理、電気推進、数値計算手法の開発の研究。