



解説

古典物理から量子場の世界へ：放射の反作用

Radiation Reaction - from Classical Physics to Quantum Fields

瀬戸 慧大

SETO Keita

Extreme Light Infrastructure - Nuclear Physics (ELI-NP) /

Horia Hulubei National Institute for R&D in Physics and Nuclear Engineering (IFIN-HH)

(原稿受付日：2016年9月8日)

プラズマの中には莫大な数の電子が含まれているが、“電子そのものの取り扱い”を考えたことはあるだろうか？ 専門家は量子力学における Dirac 方程式が電子の方程式だと教えてくれるだろう。しかしながら、P.A.M. Dirac は Dirac 方程式の提案後に一つの古典力学的な“光輻射を伴う電子模型”，すなわち，“放射の反作用の古典模型（方程式）”を提案した。本解説ではこの放射の反作用が最新鋭の 10 PW 級レーザーを用いたプラズマ科学と強く関連した話題であることを議論したい。通常のプラズマ科学ではお目にかかれぬ高強度電磁場と相互作用する単一電子模型を歴史とともに解説する。

Keywords:

radiation reaction, high-intensity field physics, high-intensity laser, non-linear QED, stochastic analysis, ELI-NP

1. プラズマから単一電子への道

プラズマを扱っていると否応なしに電子の挙動について調査せねばならない。どれくらいの密度・温度を持った電子フローがそこに存在するのかがプラズマ理工学に携わる者の最大の関心事であろう。MHD 方程式のなかでプラズマフローを解くとき、トカマクなりヘリカルなりの磁場配位、あるいはレーザー電場のプロファイルを外場として定義して挙動を解く。しかしながら、仮に電磁場を今まで考えたことがないほど大きな振幅に変えてみたときに何が見えてくるだろうか？ 定性的には強い場で荷電粒子を揺さぶるのでプラズマ内の電子の速さは光の速さまで加速され、相対性理論が支配する領域に突入することは予想できるが [1]、果たしてそれだけだろうか。

この問いに解を与える研究が花開きつつある。それはヨーロッパを中心とした PW 級レーザーの建設計画で、その中でもフラグシップは東欧 3 カ国（チェコ、ハンガリー、ルーマニア）に設置された Extreme Light Infrastructure (ELI) と名づけられた $O(\sim 10 \text{ PW})$ の最先端かつ最高強度のレーザーを擁する研究基盤群である [2]。これらは極限まで集光された光を生み出すこと、それによる物理過程の解明、さらに CERN（欧州原子核研究機構：Conseil Européen pour la Recherche Nucléaire）が有する世界最大の円形加速器 LHC（Large Hadron Collider）が出力できる以上のエネルギー¹をめざしレーザープラズマによる粒子加速機構の解明と開発に心血を注いでいる。研究施設がそこにあれば当然これを利用したいグループが傍に控えており、10 PW レーザーとレーザープラズマ組み合わせた素粒

子物理（正確には非線形の量子電磁力学：Quantum Electrodynamics；以下 QED と略す）実験がこれまで実現できなかった相互作用まで探査できると主張している。便宜のためこのような物理領域を“高強度場物理（high-intensity field physics）”と呼ぶことにしよう。私自身もこの集団の一員であるわけだが、この楽観的な予想こそ“はじめの問題”への解答である。すなわち、超高強度レーザーに晒されたプラズマは“時に”素粒子実験に比類する結果を生み出しうるのだ。ただし複雑な要素を多数含むプラズマをそのまま研究することは困難を極める。すると成すべきことは非常にシンプルで、単一粒子（フェルミオン）と高強度レーザーの相互作用をまず理解し、その上で複雑系たるプラズマに拡張するというストーリーが生まれる。ゆえに高強度場物理に登場する粒子は現在は基本的にたった 3 種類で、電子・陽電子そして光子である。慧眼な読者は QED を構成する最低限のキャストしか考慮しないことに気づいたことだろう。本稿では特に光輻射を伴う単一電子の挙動、すなわち“放射の反作用（radiation reaction）”と呼ばれる模型に話題を絞り、これが 10 PW レーザーによる非線形 QED 実験の最初の一歩として重視されている理由を解説する。典型的には外部から印加する集光されたレーザー場は $O(10^{22} \sim \text{W}/\text{cm}^2)$ と $O(1 \text{ GeV})$ 程度の単一電子の相互作用を想定しており、放射の反作用を通じて $O(10 \text{ MeV} - \text{GeV})$ のガンマ線を生み出す。1 MeV の光子は電子・陽電子対に変化できるため、これを種として 2 次・3 次の高エネルギー電子・陽電子生成のカスケードを作れば、これが高強度場物理のプラズマたる電子・陽電子プラズマを形づ

1 2015年のアップグレードで 13 TeV まで加速が可能。CERN: <http://home.cern/>

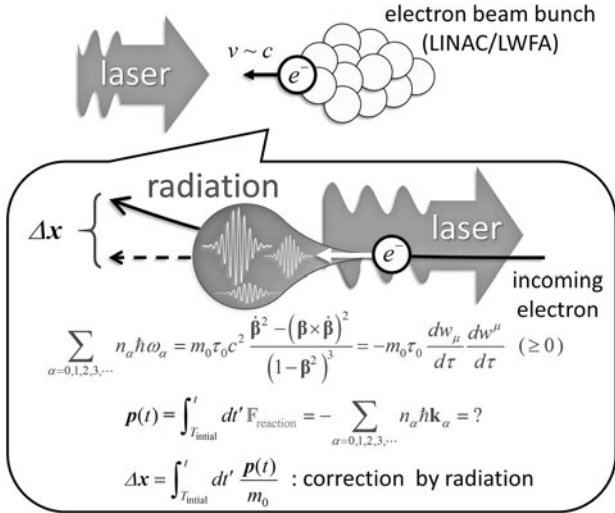


図1 放射の反作用.

くり, 我々に豊富な物理を教えてくれることだろう [3]. 以下ではプラズマの中からたった一粒の電子をとりだし, 放射の反作用の物理を古典論から量子場の理論に至るまで吟味し尽くそう. この問題は物理学史に名を刻む Lorentz [4], Dirac [5] に Feynman [6] も挑んだ由緒ある問題である. 量子場を取り入れた模型まで駆け上がったときには, 電子そのものに新たな物理の地平を切り開く可能性が含まれていることに気づくはずだ. できるだけ簡潔な解説するためにかなり思い切った模型の近似を度々使用することを予め断っておく. 厳密な理論展開に興味を持った読者は各引用文献をご一読いただきたい.

2. 古典的な放射の反作用模型

2.1 古典的定式化への最短コース

物理を論じるには模型なしでは始まらないので, 簡単な方法で放射の反作用の基礎模型である Lorentz-Abraham-Dirac (LAD) 方程式 [5] まで駆け抜けよう. 放射の反作用とは Compton 散乱を一般化したものとみなせる. すなわち高エネルギー単一電子が外場の光子を吸収し, 終状態として散乱電子と放射フォトンが現れる. これをマクロに見れば放射光分のエネルギーを失うため, 特に強力な光を放つ過程では電子の運動軌跡が補正されねばならない (図1). 光のエネルギーは Poynting ベクトル $\mathbf{P} = \mu_0^{-1} \mathbf{E} \times \mathbf{B}$ で伝播すると電磁気学で習う. この式の電磁場の部分に単一電子を電流とする Maxwell 方程式の解を代入すれば電子からの電磁場放射を論じることができる. 幸いこのような単一荷電粒子の作る電磁場は Liénard-Wiechert 場 (遅延場) として解析的に導かれている. Poynting ベクトルを全方位に面積分すればある瞬間に電子が失うエネルギー損失が導かれ, これを Larmor の放射公式 [7] と呼ぶ.

$$\frac{dW_{\text{classical}}}{dt} = m_0 c^2 \tau_0 \gamma^6 [\dot{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \dot{\boldsymbol{\beta}})^2] \quad (1)$$

ここでは正值で輻射損失を定義していることに注意されたい. m_0 は電子の静止質量で, $\boldsymbol{\beta}$ は電子の速度を光の速さ c で割ったもの $\boldsymbol{\beta} := \mathbf{v}/c$ である. この式で重要なのは, Lorentz 因子と呼ばれる $\gamma := 1/\sqrt{1-\beta^2}$ と, 時間の次元を持つ定数 $\tau_0 := e^2/6\pi\epsilon_0 m_0 c^3$ の2つである. Lorentz 因子は $E = m_0 c^2 \gamma$ として電子の持つ“全”エネルギーに直結するので光を放つときはこの γ に何かしらの変化が要求される. 一方で τ_0 は 6×10^{-24} sec というとても小さく小さな値で, 後述の数学的困難を引き起こす.

さて, いよいよ放射の反作用を考察するわけだが, (1) 式のままでは, 少々計算が難しいので非相対論極限という技を使ってみよう. これは粒子の速さが光の速さに比べてはるかに小さいなら $\boldsymbol{\beta} = \mathbf{v}/c \rightarrow 0$, $\gamma \rightarrow 1$ と置き換えても差し障り無いというテクニックで, 今の場合だと $dW_{\text{classical}}/dt = m_0 \tau_0 c^2 \dot{\boldsymbol{\beta}}^2$ である. この電子の光輻射損失を組み込んで電子のエネルギーバランス式,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m_0 \mathbf{v}^2 \right) = \mathbf{F}_{\text{ex}} \cdot \mathbf{v} - \frac{dW_{\text{classical}}}{dt} \quad (2)$$

を考えよう. 変形を経て,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt (m_0 \dot{\mathbf{v}} - \mathbf{F}_{\text{ex}} - m_0 \tau_0 \ddot{\mathbf{v}}) \cdot \mathbf{v} + [m_0 \tau_0 \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}]_{-\infty}^{\infty} = 0 \quad (3)$$

という方程式の平滑化を行う. $[m_0 \tau_0 \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}]_{-\infty}^{\infty} = 0$ とできる状況に物理を限定できるとき, Lorentz-Abraham 方程式

$$m_0 \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ex}} + m_0 \tau_0 \ddot{\mathbf{v}} \quad (4)$$

を得る. 右辺第2項が電子の光輻射を外力として書き換えたもので, 放射の反作用“力”などと度々呼ばれる. 3次元の方程式が手に入れば, あとは共変性 (特殊相対性原理) を方程式に課すことで, この方程式は4次元の Minkowski 時空での方程式へと昇華される. それこそが以下の LAD 方程式²である.

$$m_0 \frac{dw^\mu}{d\tau} = -e F_{\text{ex}}^{\mu\nu} w_\nu - e F_{\text{LAD}}^{\mu\nu} w_\nu \quad (5)$$

$$F_{\text{LAD}}^{\mu\nu} = -\frac{m_0 \tau_0}{ec^2} \left(\frac{d^2 w^\mu}{d\tau^2} w^\nu - \frac{d^2 w^\nu}{d\tau^2} w^\mu \right) \quad (6)$$

いきなり相対論の手法が飛び出したが, 式がわかっていれば解釈はそれほど難しくない. 運動を描くには発展パラメータが必要で, 相対論の場合は固有時間 τ を採用する. この τ は定数を掛けるだけで相対論的粒子の作用積分 $S = mc^2 \int d\tau$ になる特殊なパラメータである. $w := \gamma \times (c, \mathbf{v})$ は4次元速度で, この書き方にすると3次元速度 \mathbf{v} が光の速さを超えないという束縛が自動的に実装さ

2 LAD 方程式の導出: Minkowski 時空で方程式を考えるためにはまず3次元の式を $\mathbf{F}_{\text{LA}} = m_0 \tau_0 d^2 \mathbf{v}/dt^2 \mapsto f_{\text{LAD}}^\mu = m_0 \tau_0 d^2 w^\mu/d\tau^2 + C^\mu$ と拡張する. \mathbf{v} を4元速度 w に, 時間微分を“固有”時間微分 $d/d\tau$ に置き換えることで共変性が担保される. 最後に一般的な外力のルール $w_\mu f_{\text{LAD}}^\mu = 0$ を満たすように C を選べば LAD 方程式が導かれる.

れる。第0成分(時間成分), $w^0 = c\gamma$ に注目しよう。これを $m_0w^0 = m_0c^2\gamma/c = E/c$ と思うことで, 運動方程式(5)式の左辺は $d(E/c)/dt$ と $d(m_0\gamma\mathbf{v})/dt$ をただ一纏めに書いただけであることがわかる。 $-eF_{\text{ex}}^{\mu\nu}w_\nu$ というのは電子に働く仕事と外力3成分を纏めた $\gamma \times (-e\mathbf{F}_{\text{ex}} \cdot \boldsymbol{\beta}, -e\mathbf{F}_{\text{ex}})$ というベクトルである。レーザーを考えている場合であれば $\mathbf{F}_{\text{ex}} = -e(\mathbf{E}_{\text{laser}} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_{\text{laser}})$ などとすればよい。そうすると残った $-eF_{\text{LAD}}^{\mu\nu}w_\nu$ が放射の反作用を意味し, $F_{\text{LAD}}^{\mu\nu}$ は単一電子電流が作る電磁場だと認識できる。人によっては(5-6)式を変形した

$$m_0 \frac{dw^\mu}{d\tau} = -eF_{\text{ex}}^{\mu\nu}w_\nu + m_0\tau_0 \frac{d^2w^\mu}{d\tau^2} + \frac{m_0\tau_0}{c^2} \frac{dw_\nu}{d\tau} \frac{dw^\nu}{d\tau} w^\mu \quad (7)$$

を好む者もいる。 $m_0\tau_0 d^2w^\mu/d\tau^2$ の項は Schott term と呼ばれ run-away という数理的な大問題を引き起こす元凶である(後述2.2節)。残りの $m_0\tau_0 (dw_\nu/d\tau)(dw^\nu/d\tau)$ は direct radiation term と呼ばれる。これは $m_0\tau_0 (dw_\nu/d\tau)(dw^\nu/d\tau) = -m_0c^2\tau_0\gamma^6[\boldsymbol{\beta}^2 - (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\beta}^2)]$ が成立ことに由来し(1)式と組み合わせ

$$\frac{m_0\tau_0}{c^2} \frac{dw_\nu}{d\tau} \frac{dw^\nu}{d\tau} w^\mu = -\frac{1}{c^2} \frac{dW_{\text{classical}}}{dt} w^\mu \quad (8)$$

が満たされる。大雑把に光輻射をベクトルに見立てたとき

$$\sum_{l=0,1,2,\dots} n(\omega_l) \hbar k_l^\mu \sim \frac{dW_{\text{classical}}}{dt} \frac{w^\mu}{c} \Delta t \quad (9)$$

という運動量を Δt の時間で“失う”多重の非線形Compton散乱(後述4.2節)を古典力学で論じたものが放射の反作用の直感的なイメージである。

2.2 Run-away 解と摂動(近似)

式さえわかれば後は解析的なり数値的な手法なりで解けばよしいと言いたいところだが, ここには相当な困難が潜んでいる。具体的に言えば, まず(4)式を変形すると以下の解を厳密に満たす。

$$\dot{\mathbf{v}}(t) \propto \exp(t/\tau_0) \quad (10)$$

解析的に解けているように見えるが, $\tau_0 = O(10^{-24} \text{ sec})$ であった事実を鑑みると, 一瞬のうちに指数発散してしまう[4,5]。そのような加速現象が起こってくれるならLHCのような大規模な加速器を作る必要も無く, これが非物理的な挙動であることは明らかであろう。放射の反作用の問題の数理的な面白さの一つは run-away と呼ばれるこの指数発散問題にある。Schott term $m_0\tau_0\ddot{\mathbf{v}}$ が Schott term 自身を増幅することが原因で, 自己加速などと呼ばれることもある。1900年初頭にこの問題が提示されて実に100年以上経つが, 万人が認める完全な解決は今のところ提出されていない。言い換えると部分的にはいくつかの手法でこれを抑制できる(後述4節)。とはいえ解けないままでは実験

のデザインもできなく不便なので以下のような近似(摂動計算)がよく利用される。非相対論極限(4)で $\ddot{\mathbf{v}}$ に運動方程式そのものを代入してみよう。

$$m_0\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ex}} + \tau_0 \frac{d}{dt} \underbrace{(\mathbf{F}_{\text{ex}} + m_0\tau_0\ddot{\mathbf{v}})}_{= m_0\ddot{\mathbf{v}}} \quad (11)$$

こうして速度の高次の導関数に運動方程式自身を代入し続けて少しずつ値の精度を高める方法を摂動計算(perturbation)というが, 早々に計算を打ち切って

$$m_0\ddot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ex}} + \tau_0\dot{\mathbf{F}}_{\text{ex}} + O(\tau_0^2) \quad (12)$$

としてみよう。これであれば外力がわかっているならば放射の反作用の項 $m_0\tau_0\ddot{\mathbf{v}} \approx \tau_0\dot{\mathbf{F}}_{\text{ex}}$ を困難なく見積もれる。これを提案者にちなんで Eliezer-Ford-O'Connell (EFO) 方程式[8]と呼ぼう。さらに $\mathbf{F}_{\text{ex}}(\mathbf{x}(t))$ なので,

$$m_0\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ex}} + \tau_0\mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{F}_{\text{ex}} + O(\tau_0^2) \quad (13)$$

としても良からう。これは Landau-Lifshitz (LL) によって提案された方法である[9]。簡単のために非相対論領域で議論したが, 高強度レーザーと電子の相互作用を Particle-in-Cell (PIC) シミュレーションで処理する際には相対論的 LL 方程式が採用されている³。しかしながら物理そのものの研究が進み, 近年はさらに QED からの補正を加えた PIC [10] が主流になりつつある。

3. 電子の発見と真空の誘電率

3.1 Lorentz の電子模型

話は変わって電子はどのように考えられてきたかをみてみよう。1897年の J.J. Thomson による電子の発見後, H.A. Lorentz は1906年に電子論という教科書を著した。当時はまだ Schrödinger 方程式の発見前だったために物理は古典力学で表現されたが, 先に登場した A. Liénard (1898) や E. Wiechert (1901) などの最先端の理論研究結果が取り込

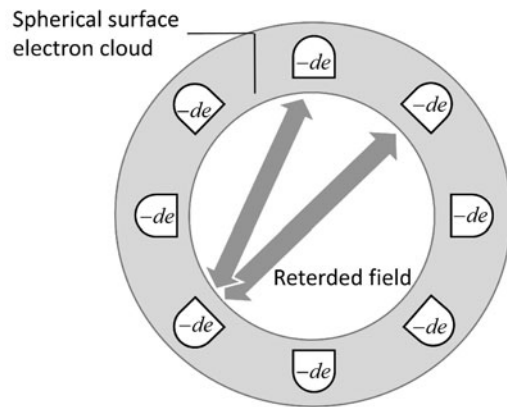


図2 Lorentz の電子模型 (文献[11]の Fig. 1 から引用)。

3 余談であるがPICに放射の反作用を導入せねばならない理由はGeVクラスの高エネルギー電子はGeVオーダーの光子を放つことがしばしばあり, 現状計算できる空間メッシュサイズではこれをMaxwell方程式を通じて解像できないために, 粒子運動の部分でこの問題処理をしたいという実務的な問題に由来する。

まれている。彼らはそれぞれ単一電子系の Maxwell 方程式を厳密に解くことに成功しており[7], Lorentz はこれを巧みに使い電子の内部構造を調べようとしたわけである⁴。以下は Lorentz による研究結果である。

まず電子は半径 r で中空の球核であると仮定する。この球核を細かな素片 $-de$ に分解しよう (図 2)。これらは半径 r の球核 S_r^2 上にある素片たちで電荷分布を意味する。その中から一点 $x \in S_r^2$ 抽出して電荷 $-de(x)$ を定義すれば、この電荷には他の点で定められた素片電荷が作る電磁場が作用するだろう。式で書けば $-de(x)$ に働く外力は

$$d\mathbf{F}(x) = -de(x) \int_{x \neq y \in S_r^2} d\mathbf{E}_{\text{LW}}(x, y) \quad (14)$$

である。点 y にある素片が点 x に作る Liénard-Wiechert (LW) 場 (遅延場) を $d\mathbf{E}_{\text{LW}}(x, y)$ と書いた。したがって、電子と仮定した球殻全体には外場が働いておらずとも

$$\mathbf{F} = \int_{x \in S_r^2} d^3x d\mathbf{F}(x) \quad (15)$$

という電子そのものが作る力 (自己力) が働いている。シンクロトロン放射のような非球対称な LW 場では 0 ではない \mathbf{F} が現れるはずだ。複雑な計算を経て⁵, Lorentz は以下のような運動方程式こそ電子の方程式であると主張した。

$$(m_0 + m_{\text{EM}}) \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ex}} + m_0 \tau_0 \ddot{\mathbf{v}} \quad (16)$$

これが (4) 式のオリジナルな導出法である。先ほどは runaway というものを見たがここでは加えて違う難問が待ち構えている。それは電磁質量と呼ばれる $m_{\text{EM}} = 3/4 \times \tau_0 c/r \times m_0$ の存在である。点電子として考えるため、はじめに定めた電子モデルの半径を 0 に近づけると明らかにこの値は発散してしまう。これは朝永らによる質量のくりこみ (renormalization) の古典物理バージョンとして知られており、 $m_0 + m_{\text{EM}} \sim 10^{-30}$ kg と静止質量の測定値を充て、 m_0 と m_{EM} そのものについてはよく知らないとき開き直ってしまう。電子モデルは既に古典論でくりこみを要求しており、放射の反作用を通じて特異性を抑制せねばならない。

3.2 真空の誘電率と電子電荷は定数だろうか？

さて、くりこみの話をしたのもう一種類くりこみの話をしたい。それは電荷のくりこみと呼ばれるものである。あまり難しいことは考えず電子と電荷 Ze をもつイオンを考えてみよう。このとき電子には当然 $-Ze^2/4\pi\epsilon_0 r^2$ の力が働く。仮に違う誘電率 $\epsilon = \epsilon_r \epsilon_0$ の世界があり、電子の電荷も e_0 と変更されるとしよう。すなわち Coulomb 力は今の場合 $-Ze_0^2/4\pi\epsilon r^2$ である。 $e = e_0/\sqrt{\epsilon_r}$ のとき二つの場の値は一致するが、われわれはその電場が (e, ϵ_0) と (e_0, ϵ) のどちらの系に生み出された電場であるかを知る術はなく、真空を

定義する際の自由度となりうる。この自由度は QED で如実に現れる。実は QED を含む量子場における真空とは“空っぽ”を意味せず、量子力学的な最低エネルギー状態を指す。そのため、目に見えなくとも空間の背景には基底状態のフェルミオンの対が“仮想的に”うじゃうじゃ存在しているのが現代物理の真空の見方である。電子のまわりには強い Coulomb 場があるので空間を励起するなど造作も無い。すると電子の周りに仮想的な電子・陽電子の対が、プラズマという Debye 遮蔽の幾何を作る。Debye 遮蔽が遮蔽体内部の情報を一部隠すため、我々が観測している“真空”における Coulomb 場は電子・陽電子による Debye 遮蔽された後の見かけの電荷 $e = e_0 - \delta e = 1.6 \times 10^{-19}$ C が作る場とみなせる ($\sqrt{\epsilon_r} = 1 + \delta e_0/e_0 (> 1)$)。この話は静止している電子について述べたもので、粒子が運動すれば強力なシンクロトロン光が強く ϵ_r を変化させるだろう。

4. 量子場による補正

4.1 QED 真空ゆらぎのある電磁力学

“QED 真空”を放射の反作用模型に適応するには“QED の低エネルギー極限の有効場の理論”というものを持ってくる必要がある。Heisenberg-Euler Lagrangian (密度) と名付けられたこの模型は、登場する光子が実電子・陽電子の静止エネルギーに比べてはるかに小さなエネルギーを持つ場合の光子の非線形ダイナミクスとして知られている。

$$L = \frac{1}{4\mu_0 c} \langle F|F \rangle + \frac{\eta}{8} \left[\langle F|F \rangle^2 + \frac{7}{4} \langle F^*|F \rangle^2 \right] \quad (17)$$

$\eta := 4\alpha^2 \hbar^3 \epsilon_0 / 45 m_0^4 c^3$ で、Lagrangian 密度 (17) 式⁶ の第 1 項 $1/4\mu_0 c \times \langle F|F \rangle$ は $\hbar \rightarrow 0$ で消滅しない古典的光伝播を支配している。残る $\eta = O(\hbar^3)$ の部分が QED 真空のゆらぎによる光子の伝播補正 (真空偏極) を表現している。これを場で変分すれば Maxwell 方程式が手に入る。

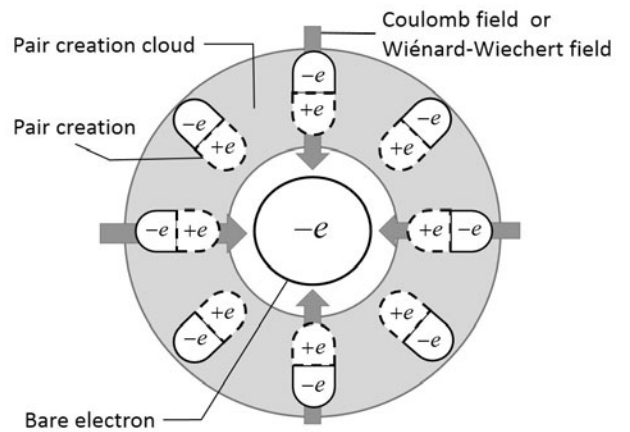


図 3 QED 真空と裸の電子 (文献[11] の Fig. 2 から引用)。

4 念のために断っておくと、現在の素粒子の標準模型では電子には内部構造は無いことになっている。当時は今で言うハドロン物理と同じで電子の中にさらに小さな電荷をもつ粒子とその構造があるのではないかと予想されていた。

5 結果として $\mathbf{F} = m_0 \tau_0 \ddot{\mathbf{v}} - m_{\text{EM}} \dot{\mathbf{v}}$ で、 $m_0 \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_{\text{ex}} + \mathbf{F}$ に代入する。

6 $\langle A|B \rangle := A_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ で $*A$ は A のデュアル (双対) テンソル。電磁場 F に対して $\langle F|F \rangle = 2 \times (\mathbf{B}^2 - \mathbf{E}^2/c^2)$ と $\langle F^*|F \rangle = 4 \mathbf{B} \cdot \mathbf{E}/c$ が成立する。

$$\partial_\mu \left[F^{\mu\nu} - \eta \left(\langle F|*F \rangle F^{\mu\nu} + \frac{7}{4} \langle F|*F \rangle^* F^{\mu\nu} \right) \right] = 0 \quad (18)$$

これは ϵ_r を量子効果として定めた Maxwell 方程式である。 $\eta \rightarrow 0$ で古典電磁気学の Maxwell 方程式 $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$ を得る。さて次のようなことを考えてみよう。電子から放たれた LAD 場 $F_{\text{LAD}}^{\mu\nu}$ はすでに真空分極の衣を纏っている (式 (6), かつ $\partial_\mu F_{\text{LAD}}^{\mu\nu} = 0$)。しかし, 電子の運動方程式は $m_0 d(\gamma v)/dt = -e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ なので裸の輻射場との相互作用を採用すべきだろう。衣を着た場とは電磁気学で言うところの物質中の場 $\epsilon_0^{-1} \times (\mathbf{D}, \mathbf{H}) = F_{\text{LAD}}^{\mu\nu}$ のことであり, 裸の場とは $(\mathbf{E}, \mathbf{B}) = F^{\mu\nu}$ である。そのため, 外場も含めて

$$F^{\mu\nu} - \eta \left(4 \langle F|*F \rangle F^{\mu\nu} + \frac{7}{4} \langle F|*F \rangle^* F^{\mu\nu} \right) = \mathfrak{F}^{\mu\nu} \quad (19)$$

$= \epsilon_0^{-1} \times (\mathbf{P}, \mathbf{M}) : \text{QED 真空分極}$

という関係で, 真空分極を纏う前後の場の関係を定義することができる (図 3)。ただし, $\mathfrak{F}^{\mu\nu} = F_{\text{ex}}^{\mu\nu} + F_{\text{LAD}}^{\mu\nu}$ である。これを裸の場 F について解いていくと,

$$F^{\mu\nu} \approx \frac{1}{1 - \eta \langle \mathfrak{F}|\mathfrak{F} \rangle} \mathfrak{F}^{\mu\nu} \quad (20)$$

を得るため, 電子の運動方程式は (4-5) 式から

$$\frac{dw^\mu}{dt} = \frac{e}{m_0 (1 - \eta \langle \mathfrak{F}|\mathfrak{F} \rangle)} \mathfrak{F}^{\mu\nu} \omega_\nu \quad (21)$$

と電荷質量比を $e/m_0 \times (1 - \eta \langle \mathfrak{F}|\mathfrak{F} \rangle)^{-1}$ に置き換えたものによればよいことを要求する。因子が増えて複雑に見えるが, これはうまく run-away を抑えることが解析的に証明できている。つまり, QED の真空ゆらぎが放射の反作用の自己加速問題を抑制してくれるわけである [12]。

4.2 光輻射機構：非線形 Compton 散乱

光の散乱を非線形 Compton 散乱として考えてみよう。これは今現在の PW 級レーザーにおける放射の反作用を表現するための主要モデルである。電子のレーザー光吸収を Dirac 方程式 $[\gamma_\mu (\hbar \partial^\mu + eA_{\text{ex}}^\mu) - mc \mathbb{I}^{4 \times 4}] \psi_V = 0$ で考える。特にレーザー外場 A_{ex} が平面波である場合はこの方程式の解 ψ_V は Volkov 解という特別な名前が与えられており, この解を集めた関数族は直交性と完備性を備えるため Hilbert 空間を張る。さらに光輻射場 A_{rad} を導入して

$$[\gamma_\mu (\hbar \partial^\mu + eA_{\text{ex}}^\mu + eA_{\text{rad}}^\mu) - mc \mathbb{I}^{4 \times 4}] \psi = 0 \quad (22)$$

を Volkov 解で摂動展開することで, 光子を 1 粒だけ飛び出させるような量子状態の遷移確率 (確率振幅) を導くことができる (特に非線形 QED においてこの手法は Furry picture と呼ばれている)。これは複数のレーザー光子を単一電子が吸収し, その後にこの電子が一粒だけ光子を飛ばす非線形 Compton 散乱を意味する [13]。これを光輻射のエネルギーロス の形まで変形するとおおよそ

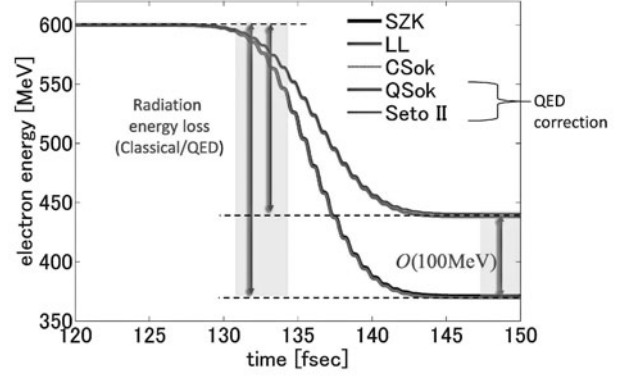


図 4 光輻射する電子の持つエネルギーの時間発展。ELI-NP が擁する LINAC 程度のエネルギーを持つ電子とレーザーと完全対向する幾何を初期条件として, Furry picture による輻射公式の補正を導入すると古典模型の場合と比べ 100 MeV ものエネルギーの散逸が抑制される [15]。

$$\frac{dW_{\text{Furry}}}{dt} \approx q(\chi) \times m_0 c^2 \tau_0 \gamma^6 [\beta^2 - (\beta \times \dot{\beta})^2] \quad (23)$$

のように求まる [14]。これは古典論の場合の (1) 式に関数 $q(\chi)$ が追加されただけである。 $q(\chi)$ は古典論の Maxwell 方程式 $\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \mu_0 \times [-ec \int_{\mathbb{R}} d\tau w^\mu(\tau) \delta^4(x - x(\tau))]$ が QED の Maxwell 方程式

$$\partial_\mu F^{\mu\nu}(x) = \mu_0 \times [-ec \bar{\psi}(x) \gamma^\nu \psi(x)] \quad (24)$$

に移行したときにデルタ関数が平滑化されたことに由来する。すると輻射 LAD 場は大雑把に

$$F_{\text{LAD}} \mapsto F_{\text{Modified LAD}} = q(\chi) \times F_{\text{LAD}} \quad (25)$$

として (4-5) 式, あるいは (21) 式に代入することで量子効果を古典模型に導入できる [14, 15] (図 4)。この関係と関数 $q(\chi)$ は将来展望で少し述べるので記憶に残しておいて欲しい。ただし, この Furry picture は平面波外場の場合でなければ Volkov 解による Hilbert 空間を構成できないためレーザーの集光や重ね合わせを考える場合はさらに別の模型を探索せねばならない。

5. 最近の進展と将来展望

5.1 理論：Brown 運動

量子力学の教科書には “Ehrenfest の定理” というものが登場する。これは Schrödinger 方程式の解を用いて位置 $\mathbf{x}(t)$ の統計平均を取ると, $m_0 d^2 \langle \mathbf{x}(t) \rangle / dt^2 = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \rangle$ なる時間発展を満たすので $\langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \rangle$ を外力とみなせば古典論と量子力学の対応を保証できるという定理である。そのことを深く考え, $m_0 d^2 \langle \mathbf{x}(t) \rangle / dt^2 = \langle \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \rangle$ に近い方程式で, 平均をとる前の方程式を導けないだろうか? と考察した一派があった。E. Nelson による現代的な確率論で数理武装されたこの量子力学は今日 “確率力学 (Stochastic dynamic)” と名づけられている [16]。特徴として ① 運動方程式がかなり古典力学に似通っており, ② 波動関数の二乗が確率密度となる数学的意味付けができる点でユニークで

7 特に電子と光子の 1 粒子ずつの散乱は “線形” Compton 散乱で振幅は Klein-Nishina の公式として知られている。

ある。そして最大の利点は③従来の量子力学では不可能であった量子の運動軌跡を“平均軌跡ではなく”言葉通り完全に追跡できる点である。本解説でこのような突拍子もない話題を取り上げたのは、古典論と類似性の高い方法であるのならば放射の反作用を量子力学で論じることが期待できるためである。Furry picture (従来法) より広い適応範囲、すなわち非線形・非摂動的な扱いを目標に参考文献 [17, 18] からエッセンスを抽出して以下に考えてみよう。

量子らしさを確率過程の"stochasticity"を用いて表現し、相対論まで視野に入れた4次元 Minkowski 時空上に軌跡を描くような確率過程のクラスに限定する。Klein-Gordon 粒子 (スピン無し電子) の軌跡を D-発展可測的過程と名付け

$$\begin{aligned} & \hat{x}^\mu(\tau, \omega) - \hat{x}^\mu(\tau', \omega) \\ &= \int_{\tau'}^{\tau} dt'' \mathcal{V}_\pm^\mu(\hat{x}(\tau'', \omega)) + \sqrt{\frac{\hbar}{m_0}} \times \int_{\tau'}^{\tau} dW_\pm^\mu(\tau'', \omega) \end{aligned} \quad (26)$$

と伊藤 (確率) 積分で定義する [17]。"stochasticity"という言葉はランダムさのようなもので、量子の不確定性を担う。この式の中では標準 Wiener 過程 W_\pm (物理的には Brown 運動) がそれを表現しており、計測 (サンプル) ω ごとにこの W_\pm の値をランダムに変化させる。微分形式で以下のように (26) 式を書く者もいるだろう。

$$d\hat{x}^\mu(\tau, \omega) = \mathcal{V}_\pm^\mu(\hat{x}(\tau, \omega)) d\tau + \sqrt{\frac{\hbar}{m_0}} \times dW_\pm^\mu(\tau, \omega) \quad (27)$$

これは確率微分方程式と呼ばれ、解の関数族を ω をラベル

$$\begin{aligned} m_0 \mathcal{D}_\tau \mathcal{V}^\mu(\hat{x}(\tau, \omega)) &= -e \hat{\mathcal{V}}_\nu(\hat{x}(\tau, \omega)) F_{\text{ex}}^{\mu\nu}(\hat{x}(\tau, \omega)) \\ &+ \frac{m_0 \tau_0 \Xi(\tau)}{c^2} \left[\dot{a}^\mu(\mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]) \frac{d\mathbb{E}[\hat{x}^\nu(\tau, \bullet)]}{d\tau} - \dot{a}^\nu(\mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]) \frac{d\mathbb{E}[\hat{x}^\mu(\tau, \bullet)]}{d\tau} \right] \mathcal{V}_\nu(\hat{x}(\tau, \omega)) \\ &- e \hat{\mathcal{V}}_\nu(\hat{x}(\tau, \omega)) \delta \hat{x}^\alpha(\tau, \omega) \cdot \partial_\alpha \mathfrak{F}^{\mu\nu}(\mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]) + O\left(\frac{\otimes}{\otimes} \delta \hat{x}(\tau, \omega)\right) \end{aligned} \quad (32)$$

が光輻射 (放射の反作用) を含む Klein-Gordon 方程式である [18]。ただし $\Xi(\tau)$ は

$$\mathbb{E}[f(\hat{x}(\tau, \bullet))] = \Xi(\tau) \times f(\mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]) \quad (33)$$

を満たす関数で本質的に前節で述べた高強度場による補正に直結する。放射の反作用の"stochasticity"は ω -依存性とし

$$m_0 \frac{d^2}{d\tau^2} \mathbb{E}[\hat{x}^\mu(\tau, \bullet)] = -e \left[F_{\text{ex}}^{\mu\nu}(\mathbb{E}[\hat{x}_\nu(\tau, \bullet)]) + \mathfrak{F}^{\mu\nu}(\mathbb{E}[\hat{x}_\nu(\tau, \bullet)]) \right] \frac{d\mathbb{E}[\hat{x}_\nu(\tau, \bullet)]}{d\tau} \quad (35)$$

$$\mathfrak{F}^{\mu\nu}(\mathbb{E}[\hat{x}_\nu(\tau, \bullet)]) = -\frac{m_0 \tau_0 \Xi(\tau)}{ec^2} \left[\dot{a}^\mu(\mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]) \frac{d\mathbb{E}[\hat{x}^\nu(\tau, \bullet)]}{d\tau} - \dot{a}^\nu(\mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]) \frac{d\mathbb{E}[\hat{x}^\mu(\tau, \bullet)]}{d\tau} \right] \quad (36)$$

と Ehrenfest の定理を得る。 $w(\tau) \leftrightarrow d\mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]/d\tau$ の対応をとれば LAD 方程式 (5-6) と (25) の組み合わせとの類似性に気づく。このモデルの輻射公式は

$$\frac{dW_{\text{stochastic}}}{dt}(\tau) = \Xi(\tau) \times \frac{dW_{\text{classical}}}{dt}(\mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]) \quad (37)$$

であり、平面波外場の場合は Furry picture に漸近するため

として (26) 式で定める。 \mathcal{V}_\pm^μ は流体でいうドリフトフローに相当する。2種類の時間発展 \pm は解曲線 \hat{x} の不連続性に由来し、正/負の時間発展を明示している。(26-27) は確率力学の枠組みでは kinematics (粒子性) として扱われ、 \mathcal{V}_\pm の決定にはさらに dynamics (波動性) を定めて導く。この dynamics は Klein-Gordon 方程式

$$(i\hbar \partial_\nu + eA_\nu)(i\hbar \partial^\nu + eA^\nu)\phi - m_0^2 c^2 \phi = 0 \quad (28)$$

に一致せねばならない。ここで複素速度 $\mathcal{V} := (\mathcal{V}_+ + \mathcal{V}_-)/2 - i(\mathcal{V}_+ - \mathcal{V}_-)/2$ の成分を

$$\mathcal{V}^\alpha := \frac{1}{m_0} \times [i\hbar \partial^\alpha \ln \phi(x) + eA^\alpha(x)] \quad (29)$$

で定めることで、古典論と酷似した粒子と場の dynamics を得る [17]。

$$m_0 \mathcal{D}_\tau \mathcal{V}^\mu(\hat{x}(\tau, \omega)) = -e \hat{\mathcal{V}}_\nu(\hat{x}(\tau, \omega)) F^{\mu\nu}(\hat{x}(\tau, \omega)) \quad (30)$$

$$\begin{aligned} & \partial_\mu [F^{\mu\nu}(x) + \delta f^{\mu\nu}(x)] \\ &= \mu_0 \times \mathbb{E} \left[-ec \int_{\mathbb{R}} d\tau \text{Re} \{ \mathcal{V}^\nu(x) \} \delta^4(x - \hat{x}(\tau, \bullet)) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

ただし、 $\hat{\mathcal{V}}^\mu(x) := \mathcal{V}^\mu(x) + i\hbar/2m_0 \times \partial^\mu$ 、 $\mathcal{D}_\tau := \hat{\mathcal{V}}^\mu(x) \partial_\mu$ のように定義した。また $\mathbb{E}[\hat{X}(\bullet)]$ は $\hat{X}(\omega)$ の平均を意味する。(30) 式は Klein-Gordon 方程式に一致することがわかっている [17]。(31) を解いて

て $\delta \hat{x}(\tau, \omega) := \hat{x}(\tau, \omega) - \mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]$ を通じて $-e \hat{\mathcal{V}}_\nu \delta \hat{x}^\alpha \cdot \partial_\alpha \mathfrak{F}^{\mu\nu}$ の項に括りだされ、加速度の時間微分に相当する

$$\dot{a} := \frac{d^3 \mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]}{d\tau^3} + \frac{3}{2} \frac{d \ln \Xi(\tau)}{d\tau} \frac{d^2 \mathbb{E}[\hat{x}(\tau, \bullet)]}{d\tau^2} \quad (34)$$

を導入した。(32) 式を平均すれば $\mathbb{E}[\delta \hat{x}(\tau, \bullet)] = 0$ なので

$\Xi(\tau) \approx q(\chi)$ を誘導する。因子 $\Xi(\tau)$ は kinematics から導かれる光輻射スペクトルの量子補正であると結論付けられ、Fokker-Planck 方程式を厳密に解けば Furry picture では表現できない相互作用を抽出できる [18]。この手法で粒子の生成・消滅を表現できれば量子場の非摂動的な取り扱いを押し出し、新たな数理表現法を開発できることが期待できる。

5.2 実験：ELI-NP での放射の反作用実験

具体的な実験計画について述べよう。現在世界中で非線形 QED の初期実験として放射の反作用実験が提案されている (図 5)。ルーマニアの ELI-NP (図 6) は世界で唯一 2 基の 10 PW レーザーと最大 720 MeV の電子線 LINAC (線形加速器) を有しているため、LINAC から直接電子バンチを実験エリアに導くことでレーザーと電子の相互作用を作ることが可能である。レーザー電子加速はレーザーのコンディションに依存するため LINAC によって不確定要素を減らす算段といえよう。散乱された電子をカロリメータで、電子からの輻射光を本プロジェクトのために設計したガンマ線計測器で散乱粒子の終状態を計測し、願わくは上記 $\Xi(\tau)$ の同定を実施する。この実験は副産物として電子・陽電子の対生成もわずかながら生じるため、これらの同時計測も計画されている。この非線形 QED 実験の鍵は有効な統計数をいかに確保するかであるが、ELI-NP の 10 PW フルスベックショットは 0.1 Hz で運転が可能であるため、セットアップ完了後 2 週間程度で本ステージの実験は完了する [19]。

華々しい内容を書き綴ったつもりであるが、高強度レーザー科学のコミュニティはお世辞にも理論屋・実験屋ともに充実した研究者人口を擁しているとは言えない。本稿では基礎物理についてのみ述べたが、ELI-NP ではレーザーを用いた一般的なプラズマ科学のテーマも実施しており、現在も新規職員・共同研究者を募っている。またごく最近、大阪大学の田中和夫氏が ELI-NP の Science Director 職に着任されたので日本のプラズマ研究グループの参入は以前に比べ容易になったのではないと思われる。本稿で ELI-NP に興味をお持ちいただけたならば一度我々のホームページや Technical Design Reports [20] をご覧いただければ幸いである、と宣伝して皆様の参入に期待しつつ筆を置くことにする。

謝 辞

これらの研究は大阪大学在学時に文部科学省の特別経費「レーザー相対論核科学の開拓」から、ELI-NP/IFIN-HH に着任後からはルーマニア政府と EU の地域開発共同基金 Extreme Light Infrastructure Nuclear Physics (ELI-NP) Phase I, and also Phase II からの援助を受けて成された。これら支援団体に謝意を申し上げる。

参考文献

- [1] G.A. Mourou *et al.*, Phys. Today **51**, 22 (1997).
- [2] ELI-beamlines: <http://www.eli-beams.eu/>
ELI-attoseconds: <http://www.eli-alps.hu/>
and ELI-NP: <http://www.eli-np.ro/>
- [3] A. Di Piazza *et al.*, Rev. Mod. Phys. **84**, 1177 (2012).
- [4] H.A. Lorentz, *The Theory of Electrons and Its Applications to the Phenomena of Light and Radiant Heat, A Course of Lectures Deliverd in Columbia Univ., New York, in March and*

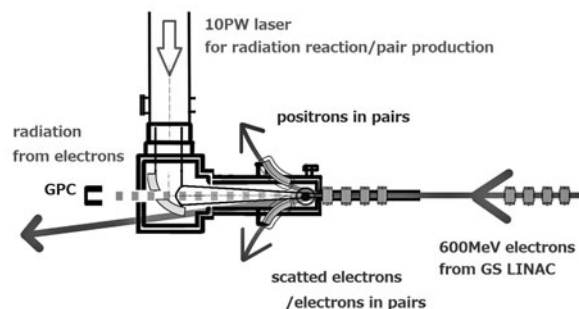


図 5 PW レーザー+LINAC による ELI-NP 実験。



図 6 ELI-NP の概観写真。

- April 1906, 2nd edition (Teubner, Leipzig, 1916).
- [5] P.A.M. Dirac, Proc. Roy. Soc. A **167**, 148 (1938).
- [6] R.P. Feynman, Phys. Rev. **76**, 749 (1949).
- [7] A. Liénard, L'Éclairage Électrique **16**, 5-14, 53-59, 106-112 (1898); E. Wüchert, Annalen der Physik **309**, 667 (1901).
- [8] C.J. Eliezer, Proc. Roy. Soc. A **194**, 543 (1948); G.W. Ford and R. F. O'Connell, Phys. Lett. A **174**, 182 (1993).
- [9] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *The Classical Theory of Fields* (Pergamon, New York, 1994).
- [10] たとえば T. Moritaka *et al.*, J. Phys: Conf. Ser. **454**, 012016 (2013).
- [11] 瀬戸慧大: レーザー研究 **42**, 174 (2014).
- [12] K. Seto, Theor. Exp. Phys., **2014**, 043A01 (2014); K. Seto, Theor. Exp. Phys., **2015**, 023A01 (2015).
- [13] L.L. Brown and T.W.B. Kibble, Phys. Rev. **133**, A705 (1964).
- [14] I.V. Sokolov *et al.*, Phys. Plasmas **18**, 093109 (2011).
- [15] K. Seto, Prog. Theor. Exp. Phys., **2015**, 103A01 (2015).
- [16] E. Nelson, Phys. Rev. **150**, 1079 (1966), and E. Nelson, "Dynamical Theory of Brownian Motion" (Princeton University Press, 2nd Ed., 2001).
- [17] K. Seto, arXiv:1611.05861 (2016).
- [18] K. Seto, arXiv:1611.05458 (2016).
- [19] K. Homma *et al.*, Rom. Rep. Phys. **68**, S233 (2016).
- [20] N.V. Zamfir *et al.*, Rom. Rep. Phys. **68**, Supplement, ELI-NP Technical Design Reports (2016).



せ と けい た
瀬 戸 慧 大

ELI-NP/IFIN-HH, Research Scientist.

学部は兵庫県立大永田グループ (2007年) で磁場閉じ込めプラズマを, 大学院では阪大レーザー研の長友・三間グループ (2008~2013) でレーザープラズマをやっていたのでプラズマ物理学者を気取っていたつもりが, 気づくと理論・数理物理学を生業とするようになってしまいました. 2014年にELI-NP/IFIN-HH (ルーマニア) にポスドクとして渡航した後, 2016年7月より現職. 興味は量子論基礎として放射の反作用の模型研究, 特に非線形・非摂動な数理模型の探査です.