



解説

流れをもつ MHD 平衡理論 —一般化された Grad-Shafranov 方程式から 二流体及び拡張 MHD 平衡へ—

Theory of MHD Equilibrium with Flow — from the Generalized Grad-Shafranov Equation to Two-Fluid and Extended MHD Equilibria —

伊藤 淳

ITO Atsushi

自然科学研究機構核融合科学研究所

(原稿受付：2016年8月15日)

核融合プラズマにおいて近年重要性が増してきた流れをもつ電磁流体力学 (MHD) 平衡に関する理論およびその拡張の最近の進展を解説する。軸対称静止平衡を表す Grad-Shafranov (GS) 方程式を拡張し、イオンの流れの効果を取り入れた方程式は一般化された GS 方程式と呼ばれる。これはさらにイオンと電子の二流体平衡へと拡張され、磁束関数とイオンの流れ関数に対する連立 GS 方程式となる。これらの性質の GS 方程式からの変化を説明する。さらにそれぞれの方程式における圧力の非等方性の影響を議論する。そして、流れと二流体効果に加え、有限ラーマー半径効果を含んだ拡張 MHD モデルにおける平衡の場合でも比較的簡単に解くことができる簡約化平衡モデルについて解説し、今後の展望を述べる。

Keywords:

magnetohydrodynamics, equilibrium, flow, anisotropic pressure, two-fluid MHD, finite Larmor radius

1. はじめに

プラズマの巨視的な構造を表す電磁流体力学 (MHD) 平衡は、様々な研究に用いられる。磁場閉じ込めプラズマ研究においては、不安定性、乱流輸送、新古典輸送計算の入力条件となり、その正確な評価が求められている。そして、近年、トロイダル・プラズマ中の流れが中性粒子ビーム入射による外部からの駆動や非線形現象による自発的な生成によりトロイダル及びポロイダル方向に存在し、流れのシアーにより乱流や輸送が抑制され、プラズマ閉じ込めが改善する現象が注目されている。閉じ込めが改善することで、圧力などの平衡量の勾配が急峻になり、二流体効果などの微視的な効果を含んだ構造が形成される。そのような流れをもつ平衡の計算には下記に示すような困難さがあり今後の進展が期待されている分野である。プラズマの平衡流は、太陽風や降着円盤などの宇宙・天体プラズマにも共通する普遍的な話題でもある。本解説では、流れをもつ MHD 平衡に関する理論研究の最近の成果を紹介する。

MHD 平衡を表す偏微分方程式としては、軸対称静止平衡に対する Grad-Shafranov (GS) 方程式がよく知られている。この GS 方程式に流れの効果が加わったものが、一般化された GS 方程式である [1, 2]。これは、イオンと電子の流れを別々に扱う二流体平衡に拡張されている [3, 4]。2, 3 節

では、それぞれの方程式系の数学的な性質について、非等方圧力をもつ平衡に対する最近の成果 [5] を紹介する。そして、4 節では、漸近展開を用いた簡約化モデルについての解説を行う。流速やベータ値のオーダーリングを仮定して一般化された GS 方程式を漸近展開することで簡約化された方程式が得られる。この手法を用いることで、二流体及び有限ラーマー半径効果による反磁性ドリフト流や圧力非等方性を導入する拡張が可能となる [6-8]。二流体及び有限ラーマー半径効果などの微小スケールの効果を導入した MHD モデルは拡張 MHD と呼ばれ、効率的にプラズマのマルチスケールな現象を扱えるモデルとして注目されている [9, 10]。5 節では、まとめと安定性解析などへの適用及び流れをもつ 3 次元平衡と運動論効果へのさらなる拡張への展望を述べる。

2. 一般化された Grad-Shafranov 方程式

MHD における流れのない平衡は、電流密度 \mathbf{j} 、磁場 \mathbf{B} 、圧力 p 、に対して、

$$\mathbf{j} \times \mathbf{B} = \nabla p, \quad (1)$$

$$\mu_0 \mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{B} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3)$$

で表される。 μ_0 は真空透磁率を表す。円筒座標系 (R, φ, Z) における軸対称平衡では、(3)式から磁場を

$$\mathbf{B} = \nabla\psi(R, Z) \times \nabla\varphi + I(R, Z) \nabla\varphi \quad (4)$$

$$I = B_\varphi R \quad (5)$$

のように表すと、ポロイダル磁場の磁束関数 ψ に対する Grad-Shafranov (GS) 方程式

$$R^2 \nabla \cdot (R^{-2} \nabla \psi) + \mu_0 R^2 p'(\psi) + II'(\psi) = 0 \quad (6)$$

が得られる。この方程式は ψ の任意関数である p, I を与えることで解くことができる。この GS 方程式はトカマクなどの磁場閉じ込め核融合装置や、惑星磁気圏などのプラズマの巨視的な平衡状態を表すために広く用いられる。式(1)の磁力線方向成分が

$$\mathbf{B} \cdot \nabla p = 0 \quad (7)$$

であることから、圧力は $\psi =$ 一定の磁気面上で一定の値をもつ。

平衡状態に流れがある場合には、力の釣り合いに対流項による慣性が加わり、

$$m_i n \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p \quad (8)$$

で表される。 m_i はイオンの質量で、電子の質量は無視する。 n は密度で、 \mathbf{v}_i はイオンの流速ベクトルを表す。得られる軸対称平衡方程式は、磁力線方向の運動エネルギーと圧力によるエネルギー保存を表す Bernoulli の法則が加わった、一般化された GS 方程式となる。この平衡状態では圧力は磁気面で一定とはならず、その分布は連立方程式を解くことで自己無撞着に得られる。この平衡方程式は、実験室系における流れをもつ定常状態のほか、太陽風、活動銀河核から噴き出るジェット、降着円盤のモデル化にも用いられる [11]。

ここでは、流れをもつ MHD 平衡を表す一般化された Grad-Shafranov 方程式に圧力の非等方性を含んだモデル [6] について解説する。定常状態の MHD 方程式系は、

$$\nabla \cdot (n \mathbf{v}_i) = 0, \quad (9)$$

$$m_i n \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{p}_e, \quad (10)$$

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} = 0, \quad (11)$$

$$\mathbf{p}_e = p_{e\perp} \mathbf{I} + \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2} \mathbf{B}\mathbf{B}, \quad (12)$$

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi \quad (13)$$

および(2)式となる。 \mathbf{I} は単位テンソルである。圧力は電子によるものとする。電子の圧力方程式は、熱流束方程式から電子質量を無視することで、以下のように与えられる [12]。

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{p_{e\perp}}{n} \right) = 0, \quad (14)$$

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \left[\left(\frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} - 1 \right) B \right] = 0 \quad (15)$$

ここで、 $B = |\mathbf{B}|$ である。(14)、(15)式は、等方的圧力に対しては磁気面上で温度が一定であることを表している。

(9)式からイオンの流速ベクトルを、磁場と同様にイオンのポロイダル流の流れ関数 Ψ_i とトロイダル流速 $v_{i\varphi}$ を用いて以下のように表す。

$$n \mathbf{v}_i = \nabla \Psi_i \times \nabla \varphi + n R v_{i\varphi} \nabla \varphi \quad (16)$$

このとき、平衡方程式は(10)、(11)式の径方向、トロイダル方向、磁力線方向の各成分と(14)、(15)式から以下のように与えられる。

$$p_{e\parallel} = n T_{\parallel}(\psi), \quad (17)$$

$$\frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} - 1 = \frac{B_0}{B} \Delta(\psi), \quad (18)$$

$$\Psi_i = \Psi_M(\psi), \quad \frac{n V_p}{B_p} = \Psi'_M(\psi), \quad (19)$$

$$\Phi = \Phi_E(\psi), \quad (20)$$

$$\frac{v_{i\varphi}}{R} - \frac{B_\varphi}{nR} \Psi'_M(\psi) = \Phi'_E(\psi), \quad (21)$$

$$\tau_1 R B_\varphi - \mu_0 m_i R^2 \Psi'_M(\psi) \Phi'_E(\psi) = I_M(\psi), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \mu_0^{-1} \nabla \cdot \left(\frac{\tau_1}{R^2} \nabla \psi \right) + n T'_{\parallel} - \frac{B_0 \Delta' p_{e\parallel}}{B_0 \Delta + B} \\ - n T'_{\parallel} \ln \left(\frac{p_{e\parallel}}{p_{e\perp}} \right) + n H' + \frac{B_\varphi I'_M}{\mu_0 R} \end{aligned} \quad (23)$$

$$+ m_i \Psi''_M \left(R B_\varphi \Phi'_E + \frac{B^2 \Psi'_M}{n} \right) + n m_i R v_{i\varphi} \Phi''_E = 0,$$

$$\frac{m_i}{2} \left[\left(\frac{B \Psi'_M}{n} \right)^2 - (R \Phi'_E)^2 \right] + T_{\parallel} \ln \left(\frac{n p_{e\parallel}}{p_{e\perp}} \right) = H(\psi), \quad (24)$$

$$\tau_1 = \tau - M_{Ap}^2 = 1 - \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2 / \mu_0} - M_{Ap}^2 \quad (25)$$

$B_p = |\nabla\psi|/R$, $V_p = |\nabla\Psi_i|/nR$ はそれぞれポロイダル磁場とポロイダル流速を表す。 $M_{Ap} = V_p/V_{Ap}$ はポロイダルアルヴェンマッハ数を表し、 $V_{Ap} = B_p/\sqrt{\mu_0 n m_i}$ はポロイダル磁場に対するアルヴェン速度 (ポロイダルアルヴェン速度) である。 B_0 は定数である。(23)、(24)式は、一般化された GS 方程式と Bernoulli の法則の連立方程式系 [2] に非等方な電子の圧力を含む拡張をしたものである。6つの磁束関数に対する任意関数 $\Psi_M, \Phi_E, \Delta, T_{\parallel}, I_M, H$ を与えることで解くことができる。

2 階偏微分方程式の性質は、

$$a \frac{\partial^2 \psi}{\partial R^2} + b \frac{\partial^2 \psi}{\partial R \partial Z} + c \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} + \dots = 0 \quad (26)$$

とするとき、 $b^2 - 4ac$ が正、負、ゼロのとき、それぞれ双曲型、楕円型、放物型と呼ばれ、解の性質が異なる。GS 方程式(6)は、楕円型の 2 階偏微分方程式であり、Poisson 方程式と同様に境界条件を与えることで解が得られる。一般化された GS 方程式のように係数 a, b, c が磁束関数の空間に対する 2 階微分を含まない準線形の偏微分方程式もこの分類に従う。但し、その係数は自己無撞着に決まる量である。軸対称平衡に対しては、非一様性をもつポロイダル方向の流速によって、楕円型と双曲型の領域が現れる。これは、中性流体における亜音速流から超音速流への状態遷移と類似しているが、MHD においては、シアアルヴェン波、

遅い磁気音波、速い磁気音波の三つの波が存在するため、複雑な振る舞いを示す。トロイダル流のみの場合には常に楕円型となり、GS方程式にトロイダル回転による遠心力の効果を含んだモデルとなる[13, 14]。ポロイダル流速に対する楕円性条件は以下で表される。

$$M_{Ap}^2 < \beta', \quad M_s^2 < M_{Ap}^2 < \tau, \quad \tau < M_{Ap}^2 < M_f^2, \quad (27)$$

$$\beta' \equiv (\kappa/\alpha)\beta_{\parallel}, \quad \beta_{\parallel} = p_{e\parallel}/(B^2/\mu_0), \quad (28)$$

$$\alpha = 1 + \frac{2p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} \quad (29)$$

M_s^2 , M_f^2 ($M_s^2 < M_f^2$) は、

$$B_p^2 M_{Ap}^4 - (\alpha B_p^2 + \gamma B_p^2) M_{Ap}^2 + \beta_{\parallel} (\tau B_p^2 + \kappa B_p^2) = 0 \quad (30)$$

の M_{Ap}^2 の解であり、それぞれ遅い磁気音波と速い磁気音波の位相速度に対応している。またここでは磁場閉じ込め核融合プラズマを対象としているため、 $p < B^2/\mu_0$ としている。非等方圧力の場合には、流速に加え、ファイアーホース不安定性の安定条件

$$\tau = 1 - \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} > 0 \quad (31)$$

と、ミラー不安定性の安定条件

$$\kappa = 1 + \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \frac{2p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} > 0, \quad (32)$$

も楕円性条件となり、これを満たしている場合を考えている。ここでは、電子の圧力方程式(14)、(15)を用いることで、運動論によるミラー不安定性の安定条件と等しくなっている。低速域の双曲型領域

$$\beta' < M_{Ap}^2 < M_s^2 \quad (33)$$

はポロイダル音速

$$V_{sp} = \frac{B_p}{B} \sqrt{\frac{p}{m_i n}} \quad (34)$$

の程度のポロイダル流速に対応する。ポロイダル音速近傍の双曲型領域を横切る遷音速流が存在するとき、密度はポロイダル方向にショック構造をもつ[15, 16]。また、この双曲型領域を、小半径方向の不連続面に対して遷音速流をもつ平衡モデルも提案されている[17-19]。また、ポロイダル流速がシアアルヴェン波の位相速度に対応するポロイダルアルヴェン速度と等しいとき ($M_{Ap}^2 = \tau$) が特異点となっており、アルヴェン特異点と呼ばれる。ポロイダル流速が速い磁気音波の位相速度よりも大きい領域 ($M_{Ap}^2 > M_f^2$) では常に双曲型となる。

3. 二流体 MHD 平衡

二流体 MHD は、磁場のイオン流体への磁場の凍り付きが破れた状態を表し、イオンのスキん長

$$d_i = \sqrt{\frac{m_i}{\mu_0 n e^2}} \quad (35)$$

の微小スケールの現象を扱うことができる[20]。イオンと電子を別々に扱う流体モデルであるため、平衡方程式は、電子の流れに凍りついた磁場の磁束関数とイオンの流れ関数のそれぞれに対する GS 方程式の連立方程式となる。それにイオンの流れに対する Bernoulli の法則が加わる。二流体 MHD では、オームの法則(11)の代わりに一般化されたオームの法則

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} = \frac{1}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla \cdot \mathbf{p}_e) \quad (36)$$

を用いる。ここでも電子の質量は無視しているため、磁場は電子の運動に凍りついている。このとき、平衡方程式は以下のように与えられる。

$$\phi + \frac{m_i}{e} R v_{i\phi} = \chi(\Psi_i), \quad (37)$$

$$e\Phi - T_{\parallel}(\phi) \ln\left(\frac{np_{e\parallel}}{p_{e\perp}}\right) = e\Phi_*(\phi), \quad (38)$$

$$\mu_0^{-1} R^2 \nabla \cdot \left(\frac{\tau}{R^2} \nabla \phi \right) - e R B_p \frac{d\Psi_{*e}}{d\phi} - R^2 (p_{e\parallel} - p_{e\perp}) \frac{d \ln \Delta}{d\phi} \quad (39)$$

$$- n R^2 \left[e \frac{d\Phi_*}{d\phi} + \frac{dT_{\parallel}}{d\phi} \ln\left(\frac{np_{e\parallel}}{p_{e\perp}}\right) - \frac{dT_{\parallel}}{d\phi} \right] + \frac{e^2 n}{m_i} [\chi(\Psi_i) - \phi] = 0,$$

$$R^2 \nabla \cdot \left(\frac{1}{n R^2} \nabla \Psi_i \right) - \frac{\mu_0 e^2}{m_i \tau} [\Psi_i - \Psi_{*e}(\phi)] \quad (40)$$

$$+ \frac{n e^2}{m_i^2} [\chi(\Psi_i) - \phi] \frac{d\chi}{d\Psi_i} - \frac{n R^2}{m_i} \frac{dW}{d\Psi_i} = 0$$

$$\frac{m_i}{2R^2} \left\{ \frac{|\nabla \Psi_i|^2}{n^2} + \frac{e^2}{m_i^2} [\chi(\Psi_i) - \phi]^2 \right\} + e\Phi_*(\phi) + T_{\parallel}(\phi) \ln\left(\frac{np_{e\parallel}}{p_{e\perp}}\right) = W(\Psi_i) \quad (41)$$

これは二流体 MHD の GS 方程式[3]に非等方な電子の圧力を含む拡張をしたものである。 χ , Φ_* , Δ , T_{\parallel} , W , Ψ_{*e} の 6 つの磁束関数またはイオンの流れ関数に対する任意関数を与えることで解くことができる。高次の偏微分方程式に対しても、不連続な波面が伝搬する波動解の存在しない条件としてイオンのポロイダル流速に対する楕円性条件を求めることができる[21, 22]。その楕円性条件は以下で与えられる。

$$V_p^2 < (\kappa/\sigma) C_{s\parallel}^2, \quad (42)$$

$$\sigma = 1 + \frac{p_{e\parallel} - p_{e\perp}}{B^2/\mu_0} \left(1 + \frac{p_{e\perp}}{p_{e\parallel}} \right) \quad (43)$$

二流体平衡は、ポロイダル流速がポロイダル音速ではなく音速よりも小さいときに楕円型となる。この場合も圧力非等方性による不安定性の安定条件を満たすものとしている。一流体 MHD から二流体 MHD へ拡張することで楕円性条件は単純になる。これは、偏微分方程式の楕円性条件を与える判別式が、一様プラズマの分散関係式の短波長極限

と類似しており、一流体MHDでは、シアアルヴェン波、速い磁気音波、遅い磁気音波の位相速度が有限の値をもつものに対し、二流体MHDでは、音波の位相速度だけが有限の値をもつことに起因している。この性質を利用して、アルヴェン特異点が二流体効果による特異摂動によって解消された解[4]が得られている。

4. 漸近展開と拡張MHD平衡

4.1 簡約化MHDを用いた流れをもつ平衡の定式化

上で見てきたように、一般化されたGS方程式は、自己無撞着に決まるポロイダル流の流速によって楕円型と双曲型の領域が混在し、解くには困難が伴う。ここでは簡約化MHD[23-26]のオーダーリングを用いて漸近展開することで簡約化された平衡方程式について解説する。流速のオーダーリングにより、楕円型領域での正則な解だけを扱うことができる。この手法により、二流体及び有限ラーマー半径効果による反磁性ドリフト流や圧力非等方性を導入する拡張ができ、しかも比較的簡単に解くことができる方程式が得られる。GS方程式に対する流れの効果が現れるオーダーまで計算することで、流れによる磁場の変形も表すことができる。

簡約化MHDは、オーダーリングによって注目する時空間スケール現象を抽出した方程式系であり、通常はトーラスの小半径の空間スケールの揺動に対し、速い磁気音波の時間スケールの揺動が取り除かれる。高ベータ簡約化MHDの手法を用いることで、簡約化されたGS方程式に対し、ポロイダルアルヴェン速度程度、ポロイダル音速程度の二種類の流れを導入することができる。拡張MHDモデルにおける力の釣り合いは、

$$m_i n \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i = \mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla(p_i + p_e) - \lambda_i \nabla \cdot \Pi_i^{\text{gv}} \quad (44)$$

で表される。右辺第三項がイオンジャイロ粘性項と呼ばれ、有限ラーマー半径効果によって現れる項である[27-29]。また、一般化されたオームの法則を、

$$\mathbf{E} + \mathbf{v}_i \times \mathbf{B} = \frac{\lambda_H}{en} (\mathbf{j} \times \mathbf{B} - \nabla p_e) \quad (45)$$

のように書き、 $(\lambda_H, \lambda_i) = (0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ の場合をそれぞれ流れをもつMHD、二流体MHD、有限ラーマー半径効果を含むMHD、有限ラーマー半径効果を含む二流体MHDを表す。ジャイロ粘性項は無衝突磁化プラズマに対する式[27, 28]を用いる。ここでは圧力は簡単のため等方的とする。

高ベータプラズマに対する簡約化MHDのオーダーリングは、トーラスの小半径と大半径を表す定数 a, R_0 に対する大アスペクト比近似 $\epsilon = a/R_0 \ll 1$ を用いて以下のように表される。

$$B_p \sim \epsilon B_0, \quad p_i \sim p_e \sim \epsilon (B_0^2 / \mu_0), \quad |\nabla| \sim 1/a \quad (46)$$

逆アスペクト比 ϵ で拡張MHD方程式系を漸近展開し、簡約化された平衡方程式を導出する。各々の物理量は以下のように展開される。

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_1 + \phi_2 + \dots, \\ I &= B_0 R_0 + I_1 + I_2 + I_3 + \dots, \\ p_i &= p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} + \dots, \\ p_e &= p_{e1} + p_{e2} + p_{e3} + \dots, \\ \Phi &= \Phi_1 + \Phi_2 + \dots, \\ \Psi_i &= \Psi_{i1} + \Psi_{i2} + \dots, \\ n &= n_0 + n_1 + \dots, \\ R &= R_0 + x \end{aligned} \quad (47)$$

流速はトロイダル方向とポロイダル方向で同程度とし、そのオーダーによって平衡方程式が異なる。また、ポロイダル流の二流体及び有限ラーマー半径効果による反磁性ドリフトの成分も同程度とする。流速がポロイダルアルヴェン速度程度の場合(4.2節)のオーダーリングは、

$$M_{\text{AP}}^2 \sim O(1), \quad |M_{\text{AP}}^2 - 1| \sim O(1) \quad (48)$$

となる。流速がポロイダル音速程度の場合(4.3節)のオーダーリングは、

$$M_{\text{AP}}^2 \sim O(\epsilon), \quad |M_{\text{AP}}^2 - \beta| / \beta \sim O(1), \quad (49)$$

$$\beta = \frac{\gamma p_{i1} + p_{e1}}{B_0^2 / \mu_0} \sim O(\epsilon) \quad (50)$$

となる。ここでは $\gamma = 5/3$ とする。どちらの場合も、最低次の力の釣り合いは以下ようになる。

$$p_{i1} + p_{e1} + \frac{B_0}{\mu_0 R_0} I_1 = \text{const.} \quad (51)$$

また、低次の物理量 $I_1, p_{i1}, p_{e1}, \Phi_1, \Psi_{i1}, n_0$ は一次の磁束関数の任意関数となる。この手法は、(48), (49)式で表されるように、流速はそれぞれの場合でアルヴェン特異点とポロイダル音速付近の双曲型領域と同程度のオーダーではあるが十分離れた領域を考えているため、楕円型領域の正則なMHD平衡解とその拡張を扱うためのものである。遷音速流のショック構造や特異点近傍の微小スケールの効果による特異摂動を扱うには別のオーダーが必要となる。また、トロイダル流速もポロイダル流速と同じオーダーであるため、曲率半径の違いによりトロイダル流による遠心力は寄与しない。

漸近展開を用いた流れをもつ平衡方程式の導出については、変分原理によってGS方程式が得られるラグランジュアンを漸近展開してから変分原理によって平衡方程式を得る手法も近年開発されている[29, 30]。

4.2 ポロイダルアルヴェン速度程度の流れ

流速がポロイダルアルヴェン速度程度のとき、平衡方程式は、磁束関数の一次の量 ϕ_1 に対し、以下のように与えられる[6]。

$$[1 - F(\phi_1)] \left(\frac{\partial^2 \phi_1}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \phi_1}{\partial Z^2} \right) - \frac{|\nabla \phi_1|^2}{2} F'(\phi_1) \quad (52)$$

$$= -\mu_0 R_0^2 \left[\frac{2x}{R_0} (p_{i1} + p_{e1})' + g_s' \right] - \left(\frac{I_1^2}{2} \right)'$$

$$F(\phi_1) = \left(\frac{V_E}{V_{\text{Ap}}} + \lambda_H \frac{V_{\text{di}}}{V_{\text{Ap}}} \right) \left[\frac{V_E}{V_{\text{Ap}}} + (\lambda_H - \lambda_i) \frac{V_{\text{di}}}{V_{\text{Ap}}} \right] \quad (53)$$

はポロイダル流の効果を表し,

$$\frac{V_E}{V_{Ap}} = -\sqrt{\mu_0 m_i n_0} \frac{R_0 \Phi_1'}{B_0} \quad (54)$$

は $E \times B$ ドリフトによるポロイダル流,

$$\frac{V_{di}}{V_{Ap}} = -\sqrt{\mu_0 m_i n_0} \frac{R_0 p_{i1}'}{en_0 B_0} \quad (55)$$

は反磁性ドリフトによるポロイダル流を表す. この場合は, ポロイダル流の効果(53)は磁束関数の一次の式に現れる. ポロイダル流速は, $E \times B$ ドリフトと二流体効果による反磁性ドリフトで構成される. この反磁性ドリフトが有限ラーマー半径効果によって相殺される, ジャイロ粘性相殺と呼ばれる拡張 MHD に特徴的な効果[31]がこの平衡方程式にも含まれている. また, $1-F=0$ が特異点となっており, これは MHD のときにはアルヴェン特異点である. 二流体及び有限ラーマー半径効果を導入することで特異点はずれるが, ここでのオーダーリングでは依然として存在する.

簡約化された GS 方程式は, ψ_1 の任意関数と, 境界条件を与えることで解くことができる. 以下は有限要素法による数値解を示す. 円形断面の固定境界と Z 方向の赤道面 ($Z=0$) に対する上下対称性を仮定している. 図1は MHD の場合のポロイダル断面の ψ_1 の等高面(磁気面)を表している. 図1(a)は流れのない場合の解で, 高ベータ平衡の特徴として, ψ_1 の頂点(磁気軸)が原点からトーラスの外側にずれる Shafranov シフトが現れている. 図1(b)は全領域でポロイダル流速がポロイダルアルヴェン速度よりも小さい場合, 図1(c)は全領域でポロイダル流速がポロイダルアルヴェン速度よりも大きい場合の解で, それぞれの場合で流れによって Shafranov シフトが外側と内側にずれる[32]. この場合の流れによる磁気面のずれのスケールは, 小半径と同程度の大きさを示す. 図2は図1(b)の場合に二流体及び有限ラーマー半径効果を加えた場合の赤道面での ψ_1 の径方向分布で $E \times B$ ドリフトの符号に対して非対称になるという流れをもつ二流体平衡の特徴を表している. $E \times B$ ドリフトの符号がイオン反磁性ドリフトと同じであるとき, 合計の流速は大きくなり, Shafranov シフト

が増大し, 逆符号のときには合計の流速が小さくなり, Shafranov シフトは減少する.

4.3 ポロイダル音速程度の流れ

流速がポロイダル音速程度のとき, 平衡方程式は以下のように与えられる[7].

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial Z^2} = -\mu_0 R_0^2 \left[\frac{2x}{R_0} (p_{i1}' + p_{e1}') + g_*' \right] - I_1 I_1' \quad (56)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial R^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial Z^2} + \left[\mu_0 R_0^2 \left(\frac{2x}{R_0} p_1'' + g_*'' \right) + \left(\frac{I_1^2}{2} \right)'' \right] \psi_2 \\ & = \frac{1}{R} \frac{\partial \psi_1}{\partial R} + F(\psi_1) \Delta_2 \psi_1 + \frac{|\nabla \psi_1|^2}{2} F'(\psi_1) \\ & - \mu_0 R_0^2 \left[E_*' + \left(\frac{x}{R_0} \right)^2 [p_{i1} + p_{e1} + 2(C_i + C_e)]' \right. \\ & \left. + \frac{2x}{R_0} (P_{i2*} + P_{e2*})' \right] \end{aligned} \quad (57)$$

磁束関数の1次に対するGS方程式(56)は流れのないMHD平衡と等しく, 2次に対するGS方程式(57)に流れの効果が現れる. (57)式は右辺に(56)式の解を代入することで線形の偏微分方程式となるため, 二流体及び有限ラーマー半

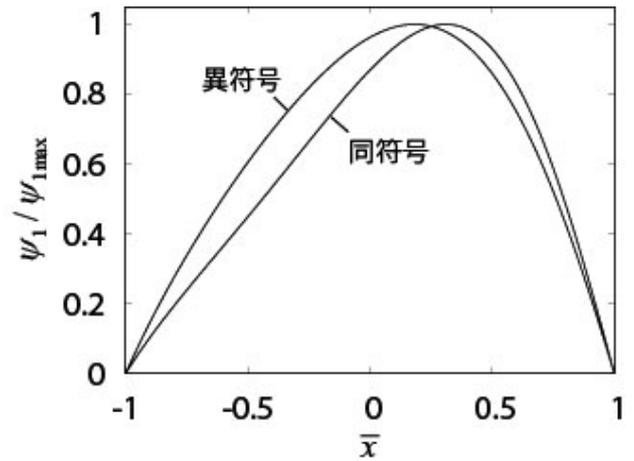


図2 二流体及び有限ラーマー半径効果を加えた場合の(52)式の数値解による赤道面での磁束関数の径方向分布. $E \times B$ ドリフトがイオン反磁性ドリフトに対して同符号の場合と異符号の場合を示している.

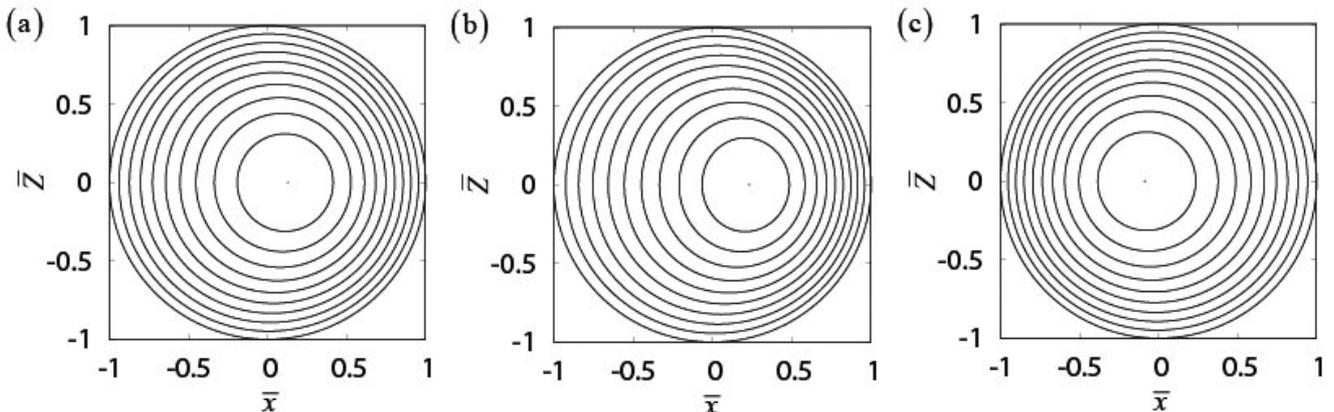


図1 MHD の場合の(52)式の数値解によるポロイダル断面の磁気面分布. (a)は流れのない場合, (b)は全領域でポロイダル流速がポロイダルアルヴェン速度よりも小さい場合, (c)は全領域でポロイダル流速がポロイダルアルヴェン速度よりも大きい場合を表す.

径効果が入っていても比較的簡単に解くことができる。圧力の2次の量は、

$$p_{i2} - p'_{i1}\psi_2 = P_{i2*}(\psi_1) + \left(\frac{2x}{R_0}\right)C_j(\psi_1) \quad (j = i, e), \quad (58)$$

で与えられ、(56)、(57)式の解を代入することで圧力分布を得ることができる。(58)式の右辺第2項の x がポロイダル角に依存することから流れによる磁気面からのずれを表し、流れがない場合にはゼロになる。またこの項はMHDのとき、ポロイダル流速がポロイダル音速と等しいときに特異点をもつ。これは2節で示された双曲型領域が、オーダーリングによって特異点に縮退していると考えられることができる。この場合にも二流体及び有限ラーマー半径効果を導入することで特異点はずれるが存在する。イオンの流れ関数の2次の量は、

$$\begin{aligned} \psi_{i2} = & \psi_{i2*}(\psi_1) - \frac{n_0 R_0}{B_0} \phi_{2*}(\psi_1) + \Psi'_1 \psi_2 \\ & - \frac{\lambda_H R_0}{e B_0} \left[P_{i2*} + P_{e2*} + \frac{2x}{R_0} (C_i + C_e) \right] \end{aligned} \quad (59)$$

で与えられる。右辺第4項から、二流体効果によって磁気面からずれることがわかる。

この簡約化方程式は、圧力非等方性、磁力線方向の熱流束を加えた拡張もなされている[8]。また、一流体モデルの場合には解析解が得られ[33, 34]、二流体及び有限ラーマー半径効果を含む場合の数値解析もなされている[7, 35]。

以下では有限要素法による数値解を示す。(56)、(57)式に対して円形断面の固定境界と Z 方向の上下対称性を仮定している。図3は二流体及び有限ラーマー半径効果を加えた場合の数値解の例で、(a)磁気面、(b)圧力の等値面、(c)イオンの流れ関数の等値面が互いに一致しないという流れをもつ二流体平衡の特徴を表している。但し、この場合のずれは小半径の ϵ 倍程度の小さい量である。

5. まとめと今後の展望

流れをもつMHD平衡の理論に関して、流れによるGS方程式から一般化されたGS方程式への変化、二流体平衡

に対する磁束関数とイオンの流れ関数に対する連立GS方程式の一般化されたGS方程式との違いとそれぞれに対する圧力の非等方性の影響、そして流れと二流体及び有限ラーマー半径効果を含みながら比較的簡単に解くことができる簡約化平衡モデルの解説を行った。最後にそれらの理論に対する今後の展望について述べる。

実験との関係については、トカマクのHモードにおいて流れと反磁性効果が径電場に対して同程度の寄与が見られており[36]、こうした状態への適用に向けてパラメータ領域の検討が必要となる。GS方程式は磁束関数に対する任意関数を含み、流れや二流体効果など、モデルが複雑になるほど与える任意関数の数が増える。任意関数は、実験での測定値や、新古典理論などの別の理論などから決定される。実験結果から求める場合にはより多くの物理量のデータが必要となる。別の理論から決定する場合には、多くの場合、磁場構造に依存するので、GS方程式と連立させて自己無撞着な解を得ることが必要となる。

実験室プラズマにおける流れは、中性粒子ビームによる燃料入射の際にも駆動される。そのような場合に高エネルギー粒子を含んだ流れをもつ平衡を考える必要がある。高エネルギー粒子は上で述べた圧力の非等方性だけではなく、運動論的な取り扱いが必要であり、バルク成分のMHD平衡と粒子シミュレーションから得られた高エネルギー粒子による電流成分を含んだ平衡解[37]のバルク成分に流れを含む一般化が必要と思われる。

運動論的な効果は、上で述べた流れをもつ平衡の楕円性条件にも影響を及ぼすことが指摘されている[38, 39]。磁力線方向に運動論的なクロージャを導入したMHDモデルでは、音波のランダウ減衰により双曲型領域が現れないことが示されている[39]。また、3次元平衡の場合には線形揺動に対する解析により、磁場に平行でない流れの成分があると常に双曲型であるという結果が得られており、磁力線に平行でない流れをもつ三次元平衡に対しても運動論的なクロージャを導入することで解が得られると予想されている[38]。流れをもつ3次元平衡については、トロイダル方向の非一様性を平均化したステラレータ平衡は軸対称平衡同様に得られている[40, 41]が、軸対称平衡を含め、より

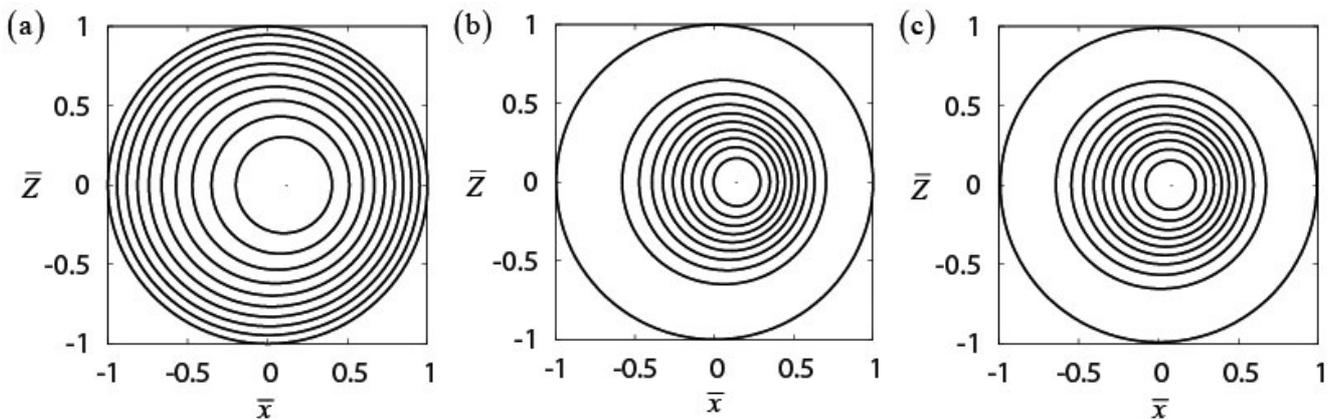


図3 二流体及び有限ラーマー半径効果を加えた場合の(56)-(59)式の数値解によるポロイダル断面の(a)磁気面分布、(b)圧力の等値面、(c)イオン流れ関数の等値面。

複雑なモデルにより一般的な解が得られれば有用である。

簡約化された流れをもつ平衡モデルに関しては、現時点ではMHDで正則な解が得られる領域での一般化に留まっている。特異点近傍での解の振舞いを含んだ簡約化モデルの導出には境界層理論のような取り扱いが必要となる。

平衡解が得られれば、安定性の議論が可能となる。プラズマの流れは安定化に働く場合[42]もあれば、不安定化に働く場合[43]もある。また、流れをもつプラズマの安定性解析には非エルミート性などの複雑な数学的議論が必要であり[44]、そうした安定性の議論にも寄与することが期待される。

参考文献

- [1] H.P. Zehrfeld and B.J. Green, Nucl. Fusion **12**, 569 (1972).
 [2] E. Hameiri, Phys. Fluids **26**, 230 (1983).
 [3] A. Ishida *et al.*, Phys. Plasmas **11**, 5297 (2004).
 [4] J. Shiraishi *et al.*, Phys. Plasmas **12**, 092308 (2005).
 [5] A. Ito *et al.*, Phys. Plasmas **14**, 062502 (2007).
 [6] A. Ito *et al.*, Plasma Fusion Res. **3**, 034 (2008).
 [7] A. Ito and N. Nakajima, AIP Conf. Proc. **1069**, 121 (2008).
 [8] A. Ito and N. Nakajima, Nucl. Fusion **51**, 123006 (2011).
 [9] 中島徳嘉 他：プラズマ・核融合学会誌 **85**, 105 (2008).
 [10] 石澤明宏：プラズマ・核融合学会誌 **90**, 213 (2014).
 [11] A.J.C. Beliën *et al.*, J. Comp. Phys. **182**, 91 (2002).
 [12] J.J. Ramos, Phys. Plasmas **10**, 3601 (2003).
 [13] E.K. Maschke and H. Perrin, Plasma Phys. **22**, 579 (1980).
 [14] 古川 勝 他：プラズマ・核融合学会誌 **76**, 937 (2000).
 [15] K.C. Shaing *et al.*, Phys. Fluids B **4**, 404 (1992).
 [16] 伊藤公孝 他：プラズマ・核融合学会誌 **83**, 509 (2007).
 [17] R. Betti and J.P. Freidberg, Phys. Plasmas **7**, 2439 (2000).
 [18] L. Guazzotto *et al.*, Phys. Plasmas **11**, 604 (2004).
 [19] L. Guazzotto and E. Hameiri, Phys. Plasmas **21**, 022512 (2014).
 [20] L.C. Steinhauer：プラズマ・核融合学会誌 **84**, 530 (2008).
 [21] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* Vol. II (Wiley, New York, 1962).
 [22] A. Jeffrey and T. Taniuti, *Non-linear Wave Propagation* (Academic Press, New York, 1964).
 [23] H.R. Strauss, Phys. Fluids **20**, 1354 (1977).
 [24] H.R. Strauss, Nucl. Fusion **23**, 649 (1983).
 [25] R.D. Hazeltine *et al.*, Phys. Fluids **28**, 2466 (1985).
 [26] J.J. Ramos, Phys. Plasmas **14**, 052506 (2007).
 [27] J.J. Ramos, Phys. Plasmas **12**, 052102 (2005).
 [28] J.J. Ramos, Phys. Plasmas **12**, 112301 (2005).
 [29] E. Hameiri, Phys. Plasmas **20**, 024504 (2013).
 [30] B. Yu and E. Hameiri, Phys. Plasmas **20**, 092507 (2013).
 [31] S.I. Braginskii, in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1965), Vol. 1, p. 205.
 [32] L. Guazzotto and R. Betti, Phys. Plasmas **12**, 056107 (2005).
 [33] A. Ito and N. Nakajima, Plasma Phys. Control. Fusion **51**, 035007 (2009).
 [34] A. Ito and N. Nakajima, J. Phys. Soc. Jpn. **82**, 064502 (2013).
 [35] D. Raburn and A. Fukuyama, Phys. Plasmas **17**, 122504 (2010).
 [36] K. Kamiya *et al.*, Phys. Rev. Lett. **105**, 045004 (2010).
 [37] E. Belova *et al.*, Phys. Plasmas **10**, 3240 (2003).
 [38] A. Bondeson and R. Iacono, Phys. Fluids B **1**, 1431 (1989).
 [39] R. Iacono *et al.*, Phys. Fluids B **2**, 1794 (1990).
 [40] L.M. Kovrizhnykh and S.V. Shchepetov, Nucl. Fusion **29**, 667 (1989).
 [41] 石井康友 他：プラズマ・核融合学会誌 **72**, 772 (1996).
 [42] F.L. Waelbroeck and L. Chen, Phys. Fluids B **3**, 601 (1991).
 [43] N. Aiba and M. Hirota, Phys. Rev. Lett. **114**, 065001 (2015).
 [44] 吉田善章：プラズマ・核融合学会誌 **86**, 209 (2010).



いとう あつし
伊藤 淳

自然科学研究機構核融合科学研究所ヘリカル研究部基礎物理シミュレーション研究系助教。2002年東京大学大学院工学系研究科博士課程修了。サスカチュワン大学博士研究員を経て2005年より核融合科学研究所勤務。研究分野はプラズマの平衡・安定性・波動に対する理論・数値解析。プラズマの流れ、巨視的な現象に対する微視的效果に興味を持っている。