J. Plasma Fusion Res. Vol.91, No.7 (2015) 441‐448

解説

MHD 乱流に対する Hall 効果の物理とモデル化

Physics of Hall Effects on MHD Turbulence and Its Modelling

三 浦 英 昭，荒 木 圭 典[1)]
MIURA Hideaki and ARAKI Keisuke[1)]
核融合科学研究所基礎物理シミュレーション研究系，[1)]岡山理科大学工学部

（原稿受付：2015年 4 月 7 日）

一様等方性電磁流体力学（MHD）乱流の微細構造への Hall 効果とそのモデル化について調べる．Hall 効果を取り入れた減衰性 MHD 乱流の直接数値シミュレーションデータを，Hall 効果の入らない一様等方性乱流のシミュレーションデータと比較する．乱流の微細構造を特徴づける電流密度，渦度の可視化を通じて，電流層と渦層の一体化が Hall 効果によって解け，渦層が管状渦構造へと変化することが示される．このような構造変化は，Hall 項に関わる長さスケール（イオン表皮長）よりも大きいスケールにも波及しており，Hall 効果の影響がイオン表皮長スケールよりも短いスケールにはとどまらないことがわかる．また，シミュレーションで時間刻みを著しく制約する Hall 項の高波数成分を適切な数値モデルで置き換えるため，large eddy simulation を想定して Smagorinsky モデルの適用可能性を検討したところ，高波数成分については適用可能との見通しを得た．

Keywords:
homogeneous and isotropic MHD turbulence, Hall effect, vortex structure, large eddy simulation

1．はじめに

本解説では，一様等方電磁流体力学（MHD）乱流に対する Hall 項の影響を，流体力学における乱流研究からの発展の観点から述べる．

流体力学において乱流の物理機構，すなわち非線形相互作用の性質や乱流の間欠性などの法則性，これをもたらす乱流の局所構造の解明は数十年来の一大テーマである．流体の運動は外力や壁など境界条件などの影響を受けて様々な乱れ方をするが，十分に小さいスケールに着目すると，これらの影響が小さく，統計的な意味で空間に対して一様で等方的な乱流が実現すると考えられる．この仮定の基に様々な理論，たとえば Kolmogorov のエネルギースペクトルに関する 5/3 乗則，速度の三次相関についての 4/3 乗則など多数の，その後の乱流研究の枠組みを与えるような結果が得られている（文献[1-6]とそこに引用されている原著論文などを参照）．他方，コンピュータの性能の向上に伴って登場した乱流の直接数値シミュレーションから，このような乱流場が多数の管状渦構造から構成されることが示されている．このような渦は，乱流運動の素過程を代表する意味で要素渦などとも呼ばれ，一様等方性乱流だけではなく，壁乱流におけるヘアピン渦，縦渦などが注目の対象となってきた[1,7,8]．

MHD 乱流の研究は流体力学の乱流研究とは様々な意味で事情が異なるが，流体力学の一様等方性乱流との対応の観点から，一様等方性 MHD 乱流の研究も行われている．（それ以外の，より一般的な MHD 乱流の研究については他著，例えば文献[9]に任せることにする．）本解説ではその観点から，著者らの最近の研究[10,11]についての紹介を行う．本稿の主な関心は，磁場の誘導方程式が磁場自身に対して一次の方程式であるのに対し，Hall 効果が入ることで二次の方程式に変化すること，この Hall 項は明確な物理量（イオン表皮長）に結びついていることなどが，乱流の構造にどのような影響を与えるかについてである．

Hall 項は，イオンの慣性効果が大きい（イオン表皮長が大きい）時に，イオンと電子の分離効果を表す項で，プラズマ・核融合学会誌上でも時々登場する用語である[12]．一流体の MHD モデルが時として巨視的モデルと呼ばれることからわかるように，イオンと電子が異なる運動を行うのは微視的スケールである．このため，核融合研究でも当初は不安定性の研究の観点から，一流体モデルが専ら用いられてきた．これに対して，近年では，反磁性流れなどの効果に対する観点から，二流体効果（Hall 項と電子圧力勾配項）を取り入れたモデルが盛んに使われている[13-16]．特に高波数の不安定モードは Hall 項による成長率の変化や二流体効果による反磁性流れの影響に敏感である．このような背景から，Hall 項が乱流の流れや磁場にどのような影響を及ぼすのかを知ることは重要である．

また，シミュレーションで時間刻みを著しく制約する Hall 項の高波数成分を，適切な数値モデルで置き換えるための基礎的なデータを取得することも重要な目的の一つである．流体力学の乱流シミュレーションでは，Kolmogorov 長に対して十分な解像度を与えるほどの格子点数を用意す

National Institute for Fusion Science, Toki 502-5292, GIFU Japan

corresponding author's e-mail: miura.hideaki@nifs.ac.jp

ることが困難であるため，格子点数はコンピュータが賄える程度にとどめ，格子解像度以下のスケール（サブグリッドスケール，SGS）に由来する物理効果はモデル化して解く Large Eddy Simulation（LES）が大きな役割を果たしている（[5]とその文献を参照）．SGS モデルの多くでは，乱流の正方向エネルギー伝達（所謂エネルギーカスケード）が逆方向伝達に比べて十分に強い性質を利用し，剪断が強いところで粘性が大きくなる，渦粘性的なモデルが用いられている．MHD 乱流でもこのような試みがなされているが（たとえば[17]），Hall 項についてはこのような研究はあまり試みられていない．本解説では Hall 項の効果に焦点を当てて解説するが，高波数成分の取り扱いに関する知見に関して，一様等方性乱流と核融合の拡張 MHD シミュレーションの間に共通するものが多いと考えている．

以下，第 2 節では Hall MHD 乱流の直接数値シミュレーションについて，第 3 節では高波数成分のモデル化について述べる．

2．Hall MHD 乱流の直接数値シミュレーション

2.1 Hall MHD 方程式と直接数値シミュレーション

非圧縮性 Hall MHD 方程式

$$\frac{\partial u_i}{\partial t}=-\frac{\partial}{\partial x_j}(u_i u_j-B_i B_j)-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p+\frac{B_i B_i}{2}\right)+\nu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial B_i}{\partial t}=-\varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial x_j}, \tag{2}$$

$$E_i=-\varepsilon_{ijk}(u_j-\varepsilon_H J_j)B_k+\eta J_i. \tag{3}$$

を，擬スペクトル法と Runge-Kutta-Gill 法で解く．所謂一流体モデルの MHD 方程式との違いは式（3）にある．右辺のカッコ内は電子速度を表しており，非散逸極限での磁力線の凍り付きがイオン速度ではなく電子速度に対して生じることを表している．電流密度が磁場の回転で与えられることからもわかるとおり，イオン速度と電子速度の違いは高波数領域で現れ，これを特徴づけるスケールがイオン表皮長である．

本解説の数値シミュレーションでは格子点数は $N^3=1024^3$ である．詳細は文献[10]を，より少ない格子点数での計算については文献[11]を参照されたい．ここで，記号 B_i，$J_i=\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k$，$u_i$ はそれぞれ磁場ベクトル，電流密度ベクトル，速度場ベクトルの第 i 成分を表す．また，記号 p は圧力を，ε_{H} は Hall 係数（イオン表皮長 $d_{\mathrm{i}}=\sqrt{m_{\mathrm{i}}/\mu n_0 e^2}$ をシステム長 L_0 で規格化した係数，m_{i}，n_0，μ はそれぞれイオンの質量，数密度，透磁率）を，記号 ε_{ijk} は Levi-Civita の反対称テンソルを，η は電気抵抗を，ν は粘性係数を表す．（本解説では $\varepsilon_{\mathrm{H}}=0.05$ および $\varepsilon_{\mathrm{H}}=0.025$ のシミュレーションについて述べる．他のパラメータは文献[10]を参照されたい．）繰り返される添字については，1 から 3 までの和を取るものとする．また，磁場ベクトル及び速度場ベクトルはそれぞれ $\partial B_i/\partial x_i=0$ および $\partial u_i/\partial x_i=0$ を満たす．境界条件は三次元の各方向に周期的であり，初期条件をランダム場で与え，外力を加えない，減衰性一様等方性乱流のシミュレーションを行う．

2.2 エネルギースペクトル

シミュレーション結果の主だった内容は文献[10,11]に委ね，ここではエネルギースペクトルのみを見る．この場合のエネルギースペクトルとは，ベクトル場の 3 方向成分の Fourier 係数からベクトル場を 2 乗した次元をもつパワースペクトルを作り，3 次元波数ベクトル $\boldsymbol{k}$ の大きさ k をインデックスとして表されるように平均化（これをシェル平均と呼ぶ）したものである．**図 1**（a）は運動エネルギースペクトル，**図 1**（b）は磁場のエネルギースペクトルである．（波数 $kb_\eta=0.08$ 程度がイオン表皮長のスケールであるが，正確な値は規格化する散逸率の値で前後する．）どちらも，それぞれのエネルギーの散逸率と Kolmogorov 長（a_v，b_η）を用いて規格化してある．Navier-Stokes 方程式の場合，減衰性乱流でこの規格化を行うと，Kolmogorov 長のスケール（**図 1** で横軸の値が 1 の領域）でスペクトルが重なる．**図 1**（a）に見るとおり，運動エネルギースペクトルは Hall 項の影響をほとんど受けていないように見える．他方，**図 1**（b）からは，Kolmogorov 長かそれよりも短いスケール（高波数）の領域で Hall 項の影響が顕著であることがわかる．一様等方乱流研究の文脈の中での Hall 項の注目点は，磁場の方程式が磁場自身に対して非線形となることであり（Hall 項がなければ磁場の方程式は磁場に対して線形である），**図 1**（b）は，この非線形効果によって高波数部のエネルギーが励起されることを示している．実際，Hall 項がない場合には，スペクトルのべき則に従う領域が $kb_\eta=0.5$ で終わり，高波数部では急減衰していることから，解像度にかなり余裕があることがわかる．他方，Hall MHD 乱流の場合は，$kb_\eta=1$ までの波数領域が含まれてい

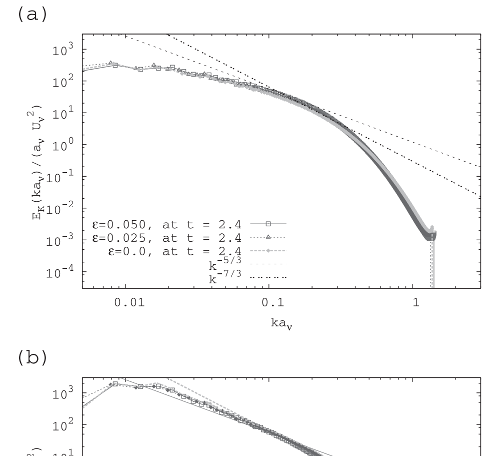

図 1　エネルギー散逸率と Kolmogorov 長で規格化した（a）運動エネルギースペクトルと（b）磁場エネルギースペクトル．

ることから乱流のスケールが表現できる程度には解像度があるが，高波数成分がやや大きくなっていることから，それほど解像度に余裕がある状態ではない．**図1**(a)の運動エネルギースペクトルが十分に収束していて破綻がないことから，高波数で励起された磁気エネルギーがローレンツ力の項を通じて運動エネルギーとして散逸され，解の統計的平衡状態が実現されていると考えている．このように，Hall項は磁場スペクトルの高波数成分を強く励起するため，MHD乱流に比べて広いスペクトル空間が必要である．これについてはトーラスプラズマのHall MHDシミュレーションでも同様の事情であり，多くの場合は十分な解像度を用意する代わりに超粘性で高波数部を打ち切ることが多いが，この部分を解像しなければ正確なシミュレーションは困難である[16]．

2.3　空間構造

ここでの主要な関心事は，Hall項が空間構造にどのような影響を与えるかを明らかにすることである．流体力学の乱流研究では，渦構造がこれにあたる．特に管状渦構造は一様等方乱流，壁乱流，混合層乱流など様々な乱流に普遍的に観測され，乱流の混合や輸送に影響を与えることから重視され，乱流の素過程を形作る最も基本的な構造であることから「要素渦」と呼ばれることもある．管状渦構造はエンストロフィー密度（$|\boldsymbol{\omega}|^2/2=|\nabla\times\mathbf{u}|^2/2$）と密接に関連付けられる（しかし同一ではない；文献[18,19]参照）ので，ここではエンストロフィー密度で代表させる．エンストロフィー密度は，乱流の局所的な散逸構造を表すため，高Reynolds数乱流の極限での役割が重要視される．MHD乱流において，このエンストロフィー密度と対を成すのが電流密度強度$|\mathbf{J}|^2/2=|\nabla\times\mathbf{B}|^2/2$である．こちらも，抵抗性MHD方程式では磁場の散逸構造を表すため，微視的スケールでのエネルギー散逸や，局所的な磁気リコネクションなどと密接に関わる量である．**図2**(a)，(b)にはそれぞれ，Hall係数$\varepsilon_{\rm H}=0$（MHD方程式）の場合と$\varepsilon_{\rm H}=0.05$の場合のエンストロフィー密度，電流密度強度（薄灰色）の等値面を示す．シミュレーションの格子点数は1024^3であるが，この中から512^3の領域を表示した．この時刻におけるTaylor長で定義されたReynolds数，Lundquist数はどちらも160弱であり，Lundquist数がReynolds数よりやや大きい．等値面の閾値はエンストロフィー密度，電流密度強度それぞれの空間平均値+標準偏差の4倍とした．**図2**(a)では，エンストロフィー密度と電流密度強度の両方が層状構造をとっており，その両者が対になっている．このような層状構造は早くからよく知られており，たとえばBiskamp[9]などによって報告されている．（層状構造の形成は運動エネルギーと磁気エネルギーの比率にも大きく左右される．ここでは両者がほぼ同程度の場合について扱っている．）2つの量の等値面が対になって現れるのは，散逸が重要ではないスケールで（理想MHDの意味で）プラズマの凍り付きが維持されているからである．他方，**図2**(b)では，2つの量の等値面が離れて存在している．電流密度強度の等値面は，層状ではあるが，**図2**(a)のそれに比べて細片化されている．これは，**図1**(b)のスペクトルに見た通り，磁場の高波数部がHall効果によって励起された結果ととらえられる．これには2つの側面がある．1つは，Hall項によって高波数部が励起されたため，等値面による可視化の際にこの高波数部による構造が専ら見えている（低波数部の構造はMHD乱流とあまり変わらない）可能性である．もう1つは，高波数部が励起され，たとえばこれに伴う抵抗性散逸が引き起こす磁気リコネクションなどで，低波数まで含めた構造を変えた可能性である．後でローパスフィルターを用いた解析から，低波数部だけを可視化すると，**図2**(b)の等値面よりも大きい構造が再現されるものの，それでも**図2**(a)のような大きな層状は再現されず，層状構造そのものが細片化されていることがわかる．

エンストロフィー密度の構造は，より性質の異なる変化を起こしている．エンストロフィー密度の等値面は，**図2**(a)では層状構造をとり，電流密度の等値面とほぼ一体化しているのに対し，**図2**(b)では，電流密度の等値面から離れ，管状の構造が多数を占めている．これが意味するところは2つある．1つは，Hall項によって磁場と速度場の凍り付きの関係が変化することである．Hall MHD乱流では磁場は電子速度に凍り付き，とくに高波数成分では

図2　(a)MHD，(b)Hall MHDの電流密度（薄い灰色），エンストロフィー密度（濃い灰色）の等値面．閾値は平均値に標準偏差の4倍を加えて決定した．

（イオン速度に対して）電流密度成分の寄与が顕著になる．もう１つは，低波数成分までも含めて運動の性質が変わったことである．エンストロフィー密度の等値面が層状である場合には，速度場の剪断（ずれ）が支配的であると考えられる．これに対して，管状である場合には，流体の旋回，すなわち渦運動が主要な運動であると考えられる．（渦度には旋回運動に起因するものと剪断に起因する部分があるので，渦と渦度は同一ではない．）管状渦が主要な運動の場合には，渦と渦の相互作用による引延しなど運動の複雑化が考えられ，最終的には微視的な流体の混合に影響すると考えられている．このような運動の変化は高波数成分だけで完結するとは考えにくく，低波数成分も含めた大きな変化と考える方が自然である．このような低波数成分への影響を以下で調べることにする．

2.4 局所構造の階層性

電流密度強度，エンストロフィー密度の等値面では，電流密度および渦度がそれぞれ磁場および速度場の微分で与えられる分だけ，高波数成分が強調されている．このため，電流密度やエンストロフィー密度の等値面を描いただけでは，高波数成分ほど寄与が大きく，低波数側の構造がどのようになっているかを知ることはできない．これを補うため，磁場および速度場にローパスフィルターを作用させ，ローパスフィルターの切断波数を変えることで，スケールごとの構造を確かめる必要がある．

図3は，$\varepsilon_{\mathrm{H}}=0.05$ の乱流場について，エンストロフィー密度（濃い灰色）および電流密度を，それぞれ渦度および電流密度にローパスフィルターを作用させて計算したものである．（この場合，イオン表皮長に対応する波数は k=20 である．）わかりやすくするために，全格子点1024^3の中から128×128×256格子点の領域を表示した．**図3**(a)はローパスフィルターを作用させない，元のシミュレーションデータを用いたもの（エイリアシング誤差除去後の最大波数 $k_N=370$），(b)-(d)はそれぞれ，切断波数 $k_c=128, 64, 32$ のローパスフィルターを作用させたものである．**図3**(a)から(b)，(c)，(d)へと解像度が変化するにつれて，当初観測されていた管状のエンストロフィー密度の等値面が消え，他の場所に管状構造が現れることがわかる．これは，全波数を用いた表示の際には高波数成分に起因する微細スケールの管状渦だけが見えているのに対し，ローパスフィルターを作用させることで，低波数側の管状渦構造が見えるようになったものである．これは，乱流の各スケールにおいて多数の渦が各所に存在するという，古典的な流体力学乱流の階層構造のイメージに対応すると考えられる．ここで強調すべきは，低波数側といっても $k_c=32$ はイオン表皮長よりも短いスケールであり，これらの構造変化は，（少なくともこの時点では）イオン表皮長よりも短い変化についてのみいえるということである．イオン表皮長よりも長いスケールへの影響は，次の節で調べる．

エンストロフィー密度の等値面が管状渦の階層構造を表しているのに対し，電流密度の等値面は，スケールを変えても，層状は層状のままである．また，ローパスフィル

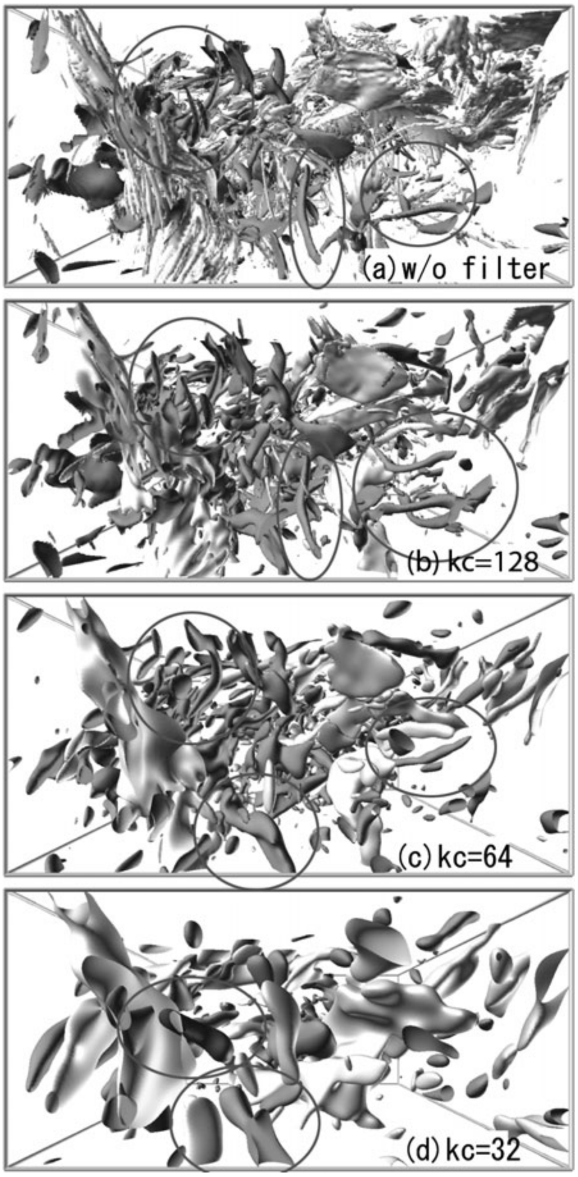

図3　ローパスフィルターを用いたエンストロフィー密度および電流密度の可視化．(a)ローパスフィルターなし，(b)切断波数128，(c)同64，(d)同32．楕円で囲った領域に管状構造が存在する．

ターを変えると，短冊状にコマ切れだった等値面は消えて，新たに層状の等値面が現れるものの，主だった等値面はあまり位置を変えずに現れている．これは最も大きい構造が低波数から高波数まで一貫して他の領域よりも大きいエネルギーをもっていることを示唆している．このような解析をより精密に進めるならば，ウェーブレット基底による分解を行わなければならない[20]．

図4は，ローパスフィルターの切断波数とイオン表皮長の関係を見るために，Hall 係数が 0.025 の場合について，**図3**（Hall係数が0.05のシミュレーション）と同じ解析を行ったものである．Hall 係数はシステム長に対するイオン表皮長の比を表すので，**図3**では波数$k=1/0.05=20$がイオン表皮長のスケールであり，**図4**では波数$k=1/0.025=40$がイオン表皮長のスケールである．**図4**(a)では，全波数を用いた場合のエンストロフィー密度（濃い灰色）と電流密度

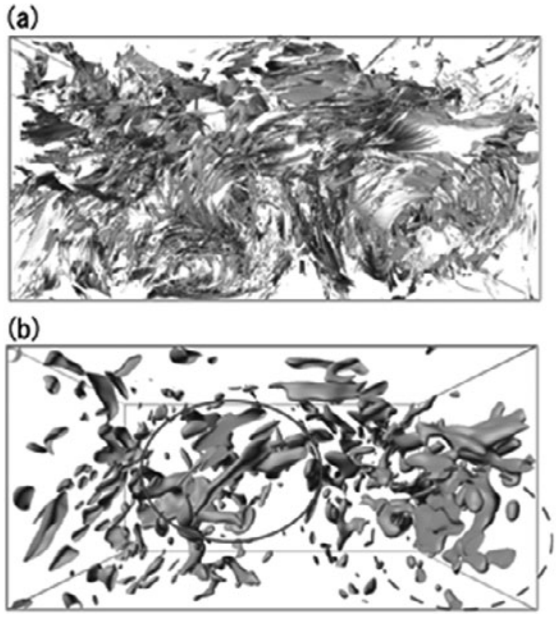

図4 Hallパラメータ0.025の可視化．(a)エンストロフィー密度と電流密度，(b)ローパスフィルターを用いたエンストロフィー密度の可視化．実線の楕円で囲った領域に管状構造が，破線の楕円で囲った領域に層状構造が存在する．

(灰色) の等値面である．電流密度の等値面は，**図3**と同じように微細化が生じていることが容易にわかるが，エンストロフィー密度の等値面の変化はよくわからない．これに対し，切断波数 $k_c = 32$ のローパスフィルターを作用させた結果が**図4** (b)である．(ここでは，エンストロフィー密度の等値面だけを表示した．) この場合，イオン表皮長スケールが $k = 40$ なので，ローパスフィルターを作用させた図はイオン表皮長よりも大きいスケールのフーリエ成分だけで構成されている．**図4** (b)でも，管状構造と層状構造が入り混じっていることがわかる．このことからわかるのは，Hall係数が大きいほどエンストロフィー密度の構造が層状から管状へと遷移するが，必ずしもこの遷移はイオン表皮長よりも短いスケールだけに影響が限定されるとは限らず，イオン表皮長よりも長いフーリエ成分を見ても管状渦構造は見られるということである．これは，単に見た目が管状・層状に変換しているということではなく，渦層が層状構造から管状へと遷移することで，流体の運動形態がイオン表皮長よりも大きいスケールまで含めて変化した結果である．

3．高波数成分のモデル化

イオン表皮長よりも十分に大きいスケールに主な興味がある場合，イオン表皮長は無視して従来のMHDシミュレーションで問題を解きたいと考えるのが自然であり，実際にMHDシミュレーションはそこかしこで行われている．他方で，前節の**図4**が示すところは，イオン表皮長よりも大きいスケールにまでHall項の効果が及ぶという事である．**図1** (a)の運動エネルギースペクトルがHall項によってあまり変わらないように見え，空間構造の変化と首尾一貫しないように思われるかもしれない．これは，統計的な平均量であるスペクトルの関数形は，空間構造よりはむしろ散逸率を基にしたスケーリング則で決まっているからであると思われる．(両対数グラフで見た場合には，低波数側での小さな変化は目立ちにくいという単純な事実も**図1**と**図4**の一見矛盾しているかの如く見せている面がある．) イオン表皮長に比べてどの程度の大きさまでHall項による影響が及ぶのかまだ不明であるが，長時間シミュレーションではこの効果が累積して大規模運動の違いをもたらす可能性がある．このような場合に，中性流体力学のシミュレーションでは，大規模スケールだけをシミュレーションで解く，ラージ・エディ・シミュレーション (Large Eddy Simulation，以下LES) が行われる．LESについての詳細は，たとえばPopeの教科書[5]を参考にされたい．

LESの基本的な考え方は，方程式にローパスフィルターを作用させ，ローパスフィルターの切断波数 k_c よりも大きいスケール (有限個の格子点で表現されるので，グリッドスケールと呼ぶ) については真面目にシミュレーションを行う一方で，サブグリッドスケールについては，現象論的なモデルで置き換えるものである．このSGSモデルが必要になるのは，方程式が主な変数セットに対して非線形な項である．非圧縮性Navier-Stokes方程式であれば移流項のみがその対象であるが，Hall MHD方程式では運動方程式の移流項，Lorentz項や一般化されたOhmの法則などにSGSモデルが必要となる．

式(1)-(3)に対してローパスフィルターを作用させると，以下の式(4)-(6)を得る．

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u_i u_j} - \overline{B_i B_j}\right) - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\overline{p} + \frac{\overline{B_i B_i}}{2}\right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{4}$$

$$\frac{\partial \overline{B_i}}{\partial t} = -\varepsilon_{ijk} \frac{\partial \overline{E_k}}{\partial x_j}, \tag{5}$$

$$E_i = -\varepsilon_{ijk}\left(\overline{u_j B_k} - \varepsilon_H \overline{J_j B_k}\right) + \eta \overline{J_i}. \tag{6}$$

ここで記号 $\bar{\cdot}$ はローパスフィルターを作用させた後の (すなわち，グリッドスケールの) 量を示す．ローパスフィルターの作用後も，磁場及び速度場はそれぞれ，非圧縮性条件 $\partial \overline{B_i}/\partial x_i = \partial \overline{u}_i/\partial x_i = 0$ を満たす．この時，式(4)-(6)は，変数 $\overline{B_i}$ および $\overline{u_i}$ で閉じていなければ，解くことができない．このためには，(4)-(6)に現れるいくつかの非線形項を，このグリッドスケールでの変数 $\overline{B_i}$ および $\overline{u_i}$ で置き換えることがLESのための基本要件となる．ここでは，Hamba and Tsuchiya[20]の論文で提案されたSGSモデルを採用し，シミュレーションデータからこのSGSモデルの採用の可否を検討することにする．

Hamba and TsuchiyaのSGSモデルでは，式(4)-(6)に現れる非線形項を，以下のように置き換える．

$$\frac{\partial \overline{u}_i}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\overline{u}_i \overline{u}_j - \overline{B}_i \overline{B}_j\right) + \frac{\partial \tau^*_{ij}}{\partial x_j} - \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\overline{p} + \overline{B}_i \overline{B}_i}{2}\right) + \nu \frac{\partial^2 \overline{u}_i}{\partial x_j \partial x_j}, \tag{7}$$

$$\frac{\partial \overline{B_i}}{\partial t} = -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial \overline{E_k}}{\partial x_j}, \tag{8}$$

$$\overline{E_i} = -\varepsilon_{ijk}\left(\overline{u_j B_k} - \varepsilon_{\mathrm{H}}\overline{J}_j\overline{B}_k\right) - e_i^{\mathrm{M}} + \eta \overline{J_i}. \tag{9}$$

$$\tau_{ij} = \left(\overline{u}_i\overline{u}_j - \overline{B}_i\overline{B}_j\right) - \left(\overline{u_i u_j} - \overline{B_i B_j}\right), \tag{10}$$

$$e_i^{\mathrm{M}} = \varepsilon_{ijk}\left(\overline{u_j B_k} - \overline{u_j}\,\overline{B_k}\right), \tag{11}$$

ここで式(10)，(11)はサブグリッドスケールからグリッドスケールへの寄与を表す，厳密な（近似のない）式であるが，このままでは式(７)-(９)はグリッドスケールでの速度場，磁場についての式として閉じていない．これを以下のようにSGSモデルで置き換えることで，式を閉じる．

$$\tau_{ij} = -\nu_{\mathrm{SGS}}\overline{S}_{ij}, \tag{12}$$

$$\overline{S}_{ij} = \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i}, \tag{13}$$

$$e_i^{\mathrm{M}} = -\lambda_{\mathrm{SGS}}\overline{J_i}, \tag{14}$$

$$\nu_{\mathrm{SGS}} = C_\nu \varDelta^2\left(\frac{1}{2}C_\nu\overline{S}_{ij} + C_\lambda\overline{J}^2\right), \tag{15}$$

$$\lambda_{\mathrm{SGS}} = C_\lambda \varDelta^2\left(\frac{1}{2}C_\nu\overline{S}_{ij} + C_\lambda\overline{J}^2\right), \tag{16}$$

$$\varDelta = (\varDelta_x\varDelta_y\varDelta_z)^{1/3}. \tag{17}$$

記号$\varDelta_x$，$\varDelta_y$，$\varDelta_z$は三方向のフィルター幅である．Smagorinsky定数は，文献[17]においては$C_\nu = 0.046$，$C_\lambda = (5/7)C_\nu$と与えられている．一様等方性乱流など理想化された問題では定数が定まる場合もあるが，数値シミュレーションや実験との比較によって，また，問題の種別（たとえば壁の有無）などによって微調整されることがある．ここでは，LESを実行するのではなく，SGSモデルの適用可能性を検討する立場から，Smagorinsky定数は定めなくても問題が生じない．

式(12)-(17)で示したサブグリッドスケールを我々のHall MHD乱流にあてはめた場合に，Hall項の影響がどの程度影響するのか不明である．このため，以下のような数値的な検証を行う．

1）直接数値シミュレーションデータで，グリッドスケール成分と，サブグリッドスケール成分を分離する．
2）グリッドスケールに対するサブグリッドスケール成分への影響は，式(10)-(11)で表される．これを，DNSのデータで再現する．
3）グリッドスケール成分から，(12)-(17)を用いて，LESにおけるサブグリッドスケールからグリッドスケールへの寄与を計算する．
4）２)で得られたデータを３)のデータに射影し，その残差を計算する．Smagorinsky定数は局所的に調整可能な値とする．（このような考え方は動的Smagorinskyモデルなどの手法[6]に通じると考えてよい．）この際に，モデル(12)-(17)が十分に良ければ，Smagorinsky定数を局所的に変化させることで，残差を小さくできる筈である．

この考え方に基づいて，以下のようにSGSモデルの射影の残差を定義し，数値計算を行う．

$$R_V^i := -\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\left(\overline{u}_i\overline{u}_j - \overline{u_i u_j}\right) - \left(\overline{B}_i\overline{B}_j - \overline{B_i B_j}\right)\right], \tag{18}$$

$$R_B^i := -\varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left[\varepsilon_{k\alpha\beta}\left(\overline{u}_\alpha\overline{B}_\beta - \overline{u_\alpha B_\beta}\right)\right], \tag{19}$$

$$R_H^i := --\varepsilon_{ijk}\left[-\varepsilon_{\mathrm{H}}\varepsilon_{k\alpha\beta}\left(\overline{J}_\alpha\overline{B}_\beta - \overline{J_\alpha B_\beta}\right)\right], \tag{20}$$

$$\mathbf{W}_V := \nabla\cdot\left[\left(\varDelta^2\left(\frac{1}{2}\overline{S}_{ij}^2 + \frac{C_\lambda}{C_\nu}\overline{j}_i\overline{j}_i\right)^{1/2}\right)\overline{S}_{ij}\right], \tag{21}$$

$$\mathbf{W}_B := \nabla\times\left[\left(\varDelta^2\left(\frac{1}{2}\overline{S}_{ij}^2 + \frac{C_\lambda}{C_\nu}\overline{j}_i\overline{j}_i\right)^{1/2}\right)\overline{j_i}\right], \tag{22}$$

$$\mathbf{P_V} := \mathbf{R}_V - (\mathbf{R}_V\cdot\mathbf{W}_V)\frac{\mathbf{W}_V}{|\mathbf{W}_V|}, \tag{23}$$

$$\mathbf{P_B} := \mathbf{R}_B - (\mathbf{R}_B\cdot\mathbf{W}_B)\frac{\mathbf{W}_B}{|\mathbf{W}_B|}, \tag{24}$$

$$\mathbf{P_H} := \mathbf{R}_H - (\mathbf{R}_H\cdot\mathbf{W}_V)\frac{\mathbf{W}_V}{|\mathbf{W}_V|} - \left[\mathbf{R}_H - (\mathbf{R}_H\cdot\mathbf{W}_V)\frac{\mathbf{W}_V}{|\mathbf{W}_V|}\right]\cdot\mathbf{W}_B. \tag{25}$$

これにより，SGSモデルがどの程度の精度でサブグリッドスケールの寄与を再現できるかを評価したのが，以下の**図５**である．**図５**では，規格化されたサブグリッドスケールの残差$|\mathrm{P}_V|^2$，$|\mathrm{P}_B|^2$，$|\mathrm{P}_H|^2$を，フィルターの切断波数（フィルター幅）を変えてプロットしたものである．式(23)-(25)は残差の大きさで規格化されているので，フィルター幅に対して残差が小さくなるかどうかは自明ではない．しかし，より高波数になるほど散逸的な振る舞いが高まると考えれば，散逸的なモデルであるSmagorinskyモデルはよい近似になると考えられる．**図５**(a)では，速度場に対するサブグリッドスケールの残差P_Vを，時間の関数としてプロットした．減衰性乱流のデータを用いたため，初期時刻には低波数成分だけがエネルギーをもっている．このため，モデルの精度に関わらず，残差は小さい．時間発展に従い，波数空間でのエネルギー伝達が生じて高波数成分にエネルギーが行きわたると，切断波数ごとの残差の違いが明確になる．先に期待した通り，切断波数が低波数（フィルター幅が粗い，すなわちLESの格子点数が非常に少ない）場合には，残差が大きい．これは，非散逸的な（拡散効果では近似できない）非線形相互作用が多数交じっているためと解釈できる．これに対して，切断波数が高波数へと向かう程，残差は小さくなっていき，拡散的な近似が向上することがわかる．**図５**(b)には，誘導方程式のうち，ダイナモ項の寄与について残差P_Bを示した．これも**図５**(a)と同様に，切断波数が高くなるほど，近似が改善されることを示した．

図５(a)，(b)と好対照をなしているのが，Hall項について調べた**図５**(c)である．第一に，初期時刻の早い段階から

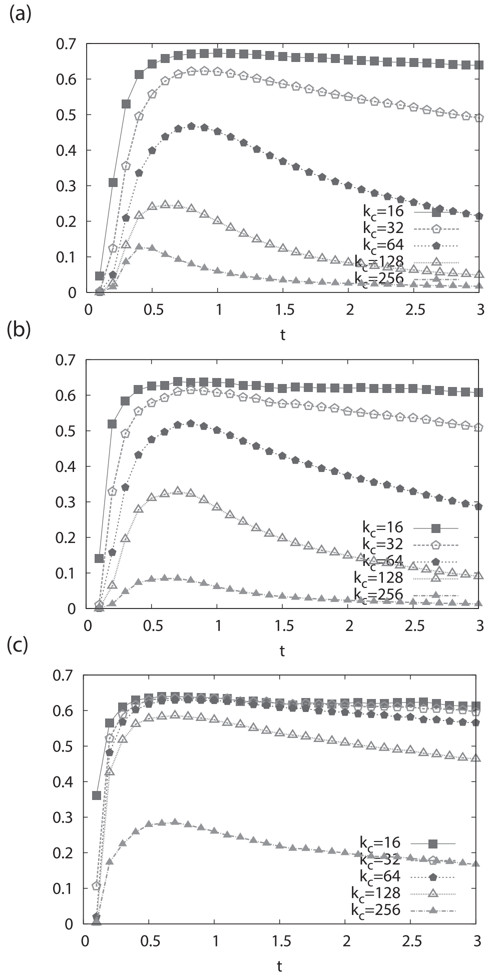

図5 Smagorinsky モデルの残差評価．(a)運動方程式右辺，(b)誘導方程式ダイナモ項，(c)誘導方程式 Hall 項．

大きな残差が生じる．（これは，Hall 項が他の項よりも微分の階数が高いことと関係しているかもしれない．）第二に，切断波数を変化させても，残差がなかなか小さくならない点である．これは，Hall 項の性質が運動方程式の非線形項（移流項，Lorentz 力）や磁場の誘導項とは著しく異なることの端的な現れである．著者らは現時点では以下のように解釈している．運動方程式の非線形項が，エネルギーの（所謂カスケード的な）順伝達であれ逆伝達であれ，波数空間で局所的な性質を有している．とくに波数空間で順伝達的なエネルギー伝達は，渦粘性の考え方とよく合致するため，Smagorinsky モデルで近似しやすい．これに対して，Hall 項では波数空間での非局所的な相互作用もかなり有力であり，比較的低波数での切断は，最低波数（実空間で最大規模）の運動にも影響を与えかねない[11]．このため，イオン表皮長に近いスケールでの切断は，Smagorinsky モデルで近似するのが難しくなる．

興味深いことに，**図5**(c)で切断波数が十分に大きくなると，残差が一気に小さくなる．これは，最高波数の近くでは，拡散的な振る舞いで近似できることを示唆している．この DNS では最高波数が $k_{\max} = 370$ であり，これに対して $k = 256$ ではモデルの性質が改善されている．この急激な収束の原因は不明であるが，**図5**(c)の振る舞いは，$k = 128$ と $k = 256$ の間のスケールに何か物理的に重要なスケールが隠れていることを示唆している．まだこのスケールの正体は不明であるが，これまでのデータからは，Taylor 長とほぼ同程度のように見える[3]．Araki and Miura [21]では，$N^3 = 512^3$ のシミュレーションではあるが，ウェーブレット解析を用いて，Hall 項によるエネルギー輸送の特性が粘性スケールと大スケールで定性的にも異なっており，中間スケールでその切り替わりが起きていることが示しされている．

切断波数が $k = 256$ となると，元の解像度に相当近い領域でフィルターをかけることになり，LES としての御利益は薄いように見える．しかし，たとえば数値シミュレーションにおける時間刻みの制限が Hall 項によるホイッスラー波で決まる場合を考えたい．この場合，ホイッスラー波の周波数が波数の二乗に比例すると考えていいので，$k = 256$ で切断することにより，時間刻みは2倍程度改善される．より精度の高いモデルで切断波数を向上させることができれば，Hall MHD シミュレーションを難しいものにしている時間刻みの制約は，かなり緩和される．問題が時間刻みだけであれば陰的解法を用いて制限を緩和させることも考えられるが，LES の方が全体の計算量を減少させる効果があり，好ましいと考えている．

4．まとめ

本解説では，一様等方 MHD 乱流におけるプラズマの運動と磁場の構造生成に対する Hall 項の影響とモデル化の可能性について，乱流の階層性の視点を基盤にしたフィルタリング手法を用いて解析した結果を紹介した．Hall 項はまず MHD に比べて高波数の成分を励起するが，それは形成される小スケールの構造の違いを伴っていた．この構造の違いは，イオン表皮長を越えて大スケール側の運動にも影響している．これはシミュレーションにとっては不利な状況だが，LES を用いた適切なモデル化で，この大スケールへの影響をより少ない計算資源で再現できることが示唆された．

一様等方性乱流は大きく理想化されていて，実現象に即した問題を考えるには，背景磁場や圧縮性を考慮する必要がある．たとえば太陽風乱流であれば，弱いながらも大規模スケールの磁場があるため，背景に一定の磁場を印加した一様（非等方）MHD 乱流の方が，より現実的である．我々はこのような非等方シミュレーションも実施しており，本項とほぼ同様の渦度場構造の変化が得られている．このように，一様等方乱流から得られる結果は，非等方乱流にも通じるものが多いと考えている．

本解説では，構造の形成に関する素過程については触れなかった．構造形成について議論するには，Hall 効果による磁気リコネクションの促進（これがしばしば Hall MHD 乱流研究の最大関心事である）とか，管状渦の形成の元になる Kelvin-Helmholtz 不安定性に対する Hall 効果の解析が必要であるが，これは今後の課題である．

この研究では，JSPS 科学研究費補助金23540583，22540509から一部助成を受けた．数値シミュレーションお

よび解析には核融合科学研究所・プラズマシミュレータ（日立 SR16000M1），東北大学サイバーサイエンスセンター・NEC SX-9，名古屋大学情報基盤センター・富士通 FX10 を使用した．

参 考 文 献

［1］木田重雄，柳瀬真一郎：乱流力学（朝倉書店，1999）．

［2］後藤俊幸：乱流理論の基礎（朝倉書店，1998）．

［3］W. McComb, *The Physics of Fluid Turbulence* (Oxford University press, 1992).

［4］U. Frisch, *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge University Press, 1995)

［5］S.B. Pope, *Turbulent Flows* (Cambridge University Press, 2000).

［6］P.A. Davidson, *Turbulence: An Introduction for Scientists and Engineers* (Oxford University Press, 2004).

［7］J. Jimenez, Ann. Rev. Fluid Mech. 44, 27-45 (2012)

［8］G. Kawahara *et al.,* Ann. Rev. Fluid Mech. 44, 203- 25 (2012).

［9］D. Biskamp, *Magnetohydrodynamic Turbulence* (Cambridge University Press, 2003)

［10］H. Miura and K. Araki, Phys. Plasmas **21**, 072313 (2014).

［11］H. Miura and K. Araki, Plasma Phys. Cont. Fusion **55**, 014012 (2013).

［12］長井嗣信：プラズマ・核融合学会 **90**, 697 (2014).

［13］H. Strauss *et al.,* Nucl. Fusion **49**, 05505 (2009).

［14］L.E. Sugiyama *et al.,* Nucl. Fusion **41**, 739 (2001)

［15］H. Miura and N. Nakajima, Proc. 23rd IAEA-FEC THS/P5-12 (Daejon, Korea, 11-16 Oct. 2010)

［16］H. Miura *et al.,* Proc. 25th IAEA-FEC TH/P5-17 (St. Petersberg, Russia, 13-18 Oct. 2014)

［17］F. Hamba and M.Tsuchiya, Phys. Plasmas **17**, 012301 (2010).

［18］J. Jeong and F. Hussain, J. Fluid Mech. **285**, 69 (1995).

［19］S. Kida and H. Miura, Euro. J. Mech. B/Fluids **17**, 471 (1998).

［20］K. Araki and H. Miura, J. Plasma Fus. Res. Series 9, 446 (2010).

［21］K. Araki and H. Miura, Plasma Fus. Res. **6**, 2401132 (2011).

三浦英昭（みうら ひであき）

核融合科学研究所ヘリカル研究部所属．流体力学・一様等方性流体の乱流シミュレーション，渦同定研究などを経て，現在は高温プラズマ・不安定性シミュレーションの研究に従事する．

荒木圭典（あらき けいすけ）

岡山理科大学工学部知能機械工学科教授．1994年京都大学大学院理学研究科物理学第一専攻修了．研究分野は流体力学・電磁流体力学の数理と乱流の数値シミュレーション．大学院生の頃から流体の解析力学，特に Arnold の『古典力学の数学的方法』に興味を持ち続けていたがちっとも論文にならなかった．最近ようやく非圧縮性 Hall MHD で，Noether の定理のちょっとした応用を見つけて中二病的に喜んでいる．