解説

流れのある平衡・安定性理論の課題

吉田善章
東京大学大学院新領域創成科学研究科

（原稿受付：2010年3月6日）

流れのあるプラズマに関して，流れが平衡構造に与える効果，安定性に与える効果，乱流輸送に与える効果など，様々なテーマで多くの研究が行われている．この解説は，それらを俯瞰する大ざっぱな論説ではなく，問題の根底にある困難な課題の分析であり，これを通じて核融合プラズマの研究を数理科学の地平に位置づける試論である．

Keywords:
plasma flow, Lagrangian, Hamiltonian, Casimir element, Poisson algebra

1．序論ー核融合における流れの問題の重要性

核融合プラズマの研究において〈流れ〉に対する注目は新たな一時代を画するまで高まっているといえよう．とくに帯状流の乱流抑制効果はプラズマ閉じ込めの性能向上のために有用であり，そのメカニズムも直観的にはわかりやすいから「人気のテーマ」である[1]．プラズマ回転流と固定壁（電気抵抗をもつ）との相互作用も，プラズマの安定条件を評価するうえで重要な影響を与えるとして実験や計算が行われている[2]．また，流れの効果を高ベータ閉じ込めに利用しようという先進核融合の挑戦も行われている[3]．いうまでもなく，プラズマの流れの研究がこれまでなかったわけではない．核融合プラズマが静止平衡であると考えられてきたわけでもない．しかし，流れの理論的問題はあまり真剣に（少なくとも大規模に）研究されてきたテーマではない．これが「新時代」を画そうとしているのは，上記のように「効用」が見いだされたことが大きいのだが，同時にこれまで避けてきた困難な理論に挑戦する機運が高まったからだともいえる[4]．

流れの効果を平衡方程式に加味すること，あるいは安定性の解析に考慮することは，静止プラズマの方程式にいくつか項を付け加えて複雑化した問題を頑張って解けばよいというような事態ではなく，根本的に難しい領域に踏み出すことを意味する．逆にいえば，これまでの理論は〈流れ〉を埒外に追いだして，おおいに縮退した状況に満足してきたのであって，流れがある場合（もちろんほとんどすべての場合，プラズマは流れている）の一般論から逃げていたのである．したがって，理論物理の立場からも，流れの問題は重要（重大）なチャレンジである．

まず何が根本的な問題なのか，雰囲気を述べておきたい．一般に「流れ」とは，ものの集団的な運動を表す概念である．ここでは（通常の）プラズマ，すなわち電磁相互作用によって運動する荷電粒子多体系が主題である．プラズマを構成する粒子たちの集団的な運動＝流れをベクトル場 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ によって表わす（$\boldsymbol{x}$ は空間座標，t は時刻を表す独立変数である）．これは，空間の各微小体積において，そこに含まれる各粒子がもつ運動量の総和を総質量で除した値に相当するのだが，ここではマクロなモデルだけを考えるので，流れを粒子の描像に関連づけることなく，連続体上の各エレメントが運動する速度を意味するベクトル場として流れ $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ をイメージする．振動・波動や不安定性など，すべての集団運動は $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ によって表されるのであるが，ここで〈流れ〉と呼んで問題にしているのは，こうした〈揺動〉に属する種類の運動ではなく，〈構造〉としての運動である．揺動と構造を分かつ定義は一意的ではないが，とりあえずほぼ定常的な運動を後者の〈流れ〉であるとしよう．たとえば，波や小規模な渦に対して大規模海流，局所的な気象に関わる大気の運動に対してジェット気流，そしてプラズマの波動，不安定性，乱流に対して「帯状流」などが揺動と構造の関係である．構造としての〈流れ〉は変動しない――このことを数学的にいうと，生成作用素の〈カーネル＝核〉に属するモードである（生成作用素が線形作用素であるならば，その核とは〈ヌル〉あるいは代数の〈中心元〉のことであり，いわば生成作用素の「欠陥」を意味する）．

運動方程式の自明でない定常解＝「欠陥」＝〈流れ〉とはどのような構造なのか？なぜそのような構造が存在し得るのか？これを中心的な問題として，第2章と3章で詳しく議論する．次に，〈流れ〉そのものは（つまり単独では）定常的であっても，揺動と結合して相互作用する．〈流れ〉が揺動とエネルギーをやり取りしたり（したがって，揺動の全体でエネルギーが保存しない），あるいは〈流れ〉を媒介項にして異なる揺動のモードが相互作用したりするので

Theoretical Problems in the Analysis of Flowing Plasma Equilibrium and Stability

YOSHIDA Zensho
author's e-mail: yoshida@k.u-tokyo.ac.jp

ある．このような現象はたいへん複雑であって，線形理論の範囲（すなわち小さな振幅の揺動に関して）でも解析が難しい．本解説では，安定性の問題について，とくに平衡の構造と関係づけて第3章で議論する．ふつうの安定性理論は，平衡の力学的な構造にはふれないで，単に揺動のスペクトル（分散関係）の計算に議論を集中するのだが，安定性を決めているのは平衡の構造であるということを想起するならば，実は安定性の問題は平衡がどのように特徴づけられるのかに強く関係しているのである．

2．「プラズマ＝運動＋場」という定式化

2.1 プラズマとは何か

プラズマとは何かという定義（特徴づけ）はいろいろあるが，ここでは「物体の運動とその運動を支配する（電磁）場が結合したもの」と定義したい．これを数学的に表現するためには，運動と電磁場を結合させたラグランジアン

$$L = L_{\mathrm{K}} + L_{\mathrm{EM}} \tag{1}$$

を定式化しなくてはならない．L_{K} と L_{EM} はそれぞれ運動と場のラグランジアンである．L_{K} には場が，L_{EM} には運動がパラメタとして含まれる．L_{K} と L_{EM} を切断して研究すると，運動における場は外的な条件，場における運動（カレント）も外的な条件とみなさなくてはならない．両者を（1）のように結合させることで運動と場の動的結合体であるプラズマが定式化されるのである．

電磁場の項 L_{EM} は，場の古典論が教えるように[5]，4元ポテンシャルを $A^{\mu}=(\phi,\boldsymbol{A})$，ファラデーテンソルを $F_{\mu\nu}=\partial_{\mu}A_{\nu}-\partial_{\nu}A_{\mu}$ と書くと

$$L_{\mathrm{EM}} = \int \mathcal{L}_{\mathrm{EM}}\mathrm{d}x := \int -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\mathrm{d}x \tag{2}$$

である．運動の項 L_{K} は，運動を粒子のそれに分解して考えれば，形式的には電気力学が教えるとおり[5]

$$L_{\mathrm{K}} = L_{\mathrm{P}} := \sum_{j=1}^{N}(\boldsymbol{P}_j\cdot\dot{\boldsymbol{q}}_j - H_j) \tag{3}$$

とすればよい（ここでは非相対論の範囲で考える）．ただし $j=1,\cdots,N$ はひとつひとつの粒子の番号，$\boldsymbol{q}_j(t)$ は粒子の軌道（$\dot{\boldsymbol{q}}_j := \mathrm{d}\boldsymbol{q}/\mathrm{d}t$ は速度），$H_j=(\boldsymbol{P}_j-e\boldsymbol{A})^2/(2m)+e\phi$ はハミルトニアン，$\boldsymbol{P}_j=\boldsymbol{p}_j+e\boldsymbol{A}$ は正準運動量，$\boldsymbol{p}_j=m\dot{\boldsymbol{q}}_j$ はメカニカルな運動量である．粒子の電荷を e，質量を m と書いた．多種の粒子からなるプラズマを考える場合は，これらも j に依存する．いうまでもなく，全粒子について運動を個別に解析することは不可能かつ無意味であるので，（3）は「有効な表現」とはいえない．プラズマのマクロな運動，すなわち流れを記述できる有効なラグランジアンを定式化する必要がある．

そのための最も素朴な方法は，流体の運動を連続無限個の〈擬粒子〉の運動に見立てて，粒子の軌道 $\boldsymbol{q}_j(t)$ を擬粒子の軌道＝流線[1] $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_0,t)$ に置き換えるというものである（$\boldsymbol{x}_0$ は各流線の出発点＝アイデンティティーを与えるパラメタであり，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_0,t)$ は座標空間内の微分同相写像とする）：

$$L_{\mathrm{K}} = L_{\mathrm{LF}} = \int(\boldsymbol{P}\cdot\dot{\boldsymbol{Q}} - H_{\mathrm{F}})\rho_0\mathrm{d}x_0. \tag{4}$$

$\rho_0(\boldsymbol{x}_0)$ は流線の出発点における密度，すなわち初期密度分布である．粒子運動のラグランジアン（3）と比べると，粒子の速度 $\dot{\boldsymbol{q}}$ が擬粒子の速度 $\dot{\boldsymbol{Q}}$ で置き換えられている．粒子の数は極めて多いといえども有限個であるが，（4）を構成する擬粒子は連続無限である．数を増やして何も良いことはないと思われるかもしれないが，トリックは擬粒子が〈集団運動の表象〉であることにある．本当の粒子は個別的にほとんどランダムな運動をするので記述不可能である．一方，擬粒子は流体エレメントの運動を表すものであるから，ランダムな部分は平均化され，マクロな階層に現れる集団運動だけを表現する．これに記述可能性を見いだそうという企てだ．擬粒子のエネルギーは，集団運動の運動量 $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}_0,t)$ に関わる運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの和 $H=(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2/(2m)+e\phi$ にさらに内部エネルギー（ランダムな運動のマクロな効果を熱エネルギーによって表現するもの）$\mathcal{E}(\rho)$ をドレスして

$$H_{\mathrm{F}} = H + \mathcal{E}(\rho) \tag{5}$$

と与える．ここでは，簡単のために内部エネルギーを流体密度 ρ の関数として与えている（$h=\partial(\rho\mathcal{E})/\partial\rho$ はエンタルピー密度，$\rho\nabla h=\nabla\mathcal{P}$ と書くと $\mathcal{P}$ が流体の圧力）．ハミルトニアン H_{F} に含まれる場の量は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_0,t)$ で評価する（すなわちラグランジュ表現）．また，密度は粒子保存則を満たすように

$$\rho(\boldsymbol{x},t) = \rho_0(\boldsymbol{x}_0(\boldsymbol{x},t))\cdot\frac{D(\boldsymbol{x}_0)}{D(\boldsymbol{x})} \tag{6}$$

と与える[2]．ただし，$D(\boldsymbol{x}_0)/D(\boldsymbol{x})$ は微分同相写像 $\boldsymbol{Q}$ のヤコビアンである．

ラグランジアン $L=L_{\mathrm{LF}}+L_{\mathrm{EM}}$ の変分を計算すると理想プラズマの運動方程式＋場の方程式（マックスウェル方程式）が得られる（このことは読者の演習としよう）．しかし，運動方程式はラグランジュ座標で書かれたもの，場の方程式はオイラー座標で書かれたものになる．これでは使いにくい（時空間の点 $(\boldsymbol{x},t)$ における流速 $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$ を求めようとすると，$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)=\dot{\boldsymbol{Q}}|_{x,t} := \dot{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{x},t),t)$ と計算しなくてはならない）．

1 本解説で流線とは流体エレメントの軌道のことであるが，流体力学では，流線（streamline）は時間を固定して流速ベクトルを接ベクトルとする曲線（field line）のことをいう場合が多い．その場合，軌道に相当する曲線は流跡線（streakline）と呼ばれる．

2 形式的に $\rho_0(\boldsymbol{x}_0)=\sum_j\delta(\boldsymbol{q}_j(0)-\boldsymbol{x}_0)$ とし，$\mathcal{E}=0$ とおけば，$L_{\mathrm{LF}}=L_{\mathrm{P}}$ となる．流体を有限個の（しかし現実の粒子総数のような巨大な数ではなく，計算機で処理できる程度の大きな数の）離散的擬粒子の集団で近似してシミュレーションを行う方法＝擬粒子法が研究されている．その場合は，擬粒子のハミルトニアンは内部エネルギー $\mathcal{E}$ でドレスしておく必要がある．それによって擬粒子は流体圧力を受ける．

2.2　表現の統一（正準形式へ）

そこで$L_{\rm K}$をオイラー表現で書くことを試みよう[6][3]．まず，流速を表すベクトル場を$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$として

$$L_{\rm EF}=\int(\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{V}-H_{\rm F})\rho\,{\rm d}x \tag{7}$$

とおいてみよう．全ての関数（ハミルトニアン$H_{\rm F}$に含まれる関数も含めて）はオイラー座標（観測系）で定義されている．ただし，$\boldsymbol{V}$を「運動」と連関させないと運動方程式は得られない（単に$\delta\boldsymbol{V}$による変分を計算すると$\boldsymbol{P}=0$となってしまう）．理論における「運動」とは，軌道（あるいはそれを連続化した流線の束）という「幾何学的オブジェクト」である．ラグランジュ表現ではこれを$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_0,t)$と表現したが，オイラー表現ではその**逆像**，$\boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{x},t)=\sigma(\boldsymbol{x},t)$を用いる．$\boldsymbol{V}$と「運動」の連関は，次のように定式化できる．

$$\boldsymbol{\xi}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t) \tag{8}$$

とおくと，これは流体エレメントの〈変位〉をオイラー表現したものである．

$$D_t f=\partial_t f+\boldsymbol{V}\cdot\nabla f, \tag{9}$$
$$D_t^* f=\partial_t f+\nabla\cdot(f\boldsymbol{V}) \tag{10}$$

と書く．流速は$\boldsymbol{V}=D_t\boldsymbol{\xi}$とすればよい[4]．しかし，恒等式$\boldsymbol{V}=D_t\boldsymbol{x}$に(8)を代入すると$\boldsymbol{V}=D_t\boldsymbol{\xi}-D_t\sigma$．したがって$D_t\boldsymbol{\sigma}=0$を要請しておけば，$\boldsymbol{V}=D_t\boldsymbol{\xi}$は恒等関係となり，$L_{\rm EF}$の中で$\boldsymbol{V}$を陽に$D_t\boldsymbol{\xi}$と書かないで$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)$のままにしておいてよい[5]．$D_t\boldsymbol{\sigma}=0$は$\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{x},t)=\boldsymbol{x}_0$（すなわち各流線の初期位置）が保存量であることを意味する．これは然るべき要請だ——各流線はその初期位置を〈アイデンティティー〉として記憶＝保存するという意味に他ならない．もう一つρも質量保存則$D_t^*\rho=0$を要請しておけば，陽に(6)のように書かなくて$\rho(\boldsymbol{x},t)$のままにしておいてよい．(7)において$D_t\sigma_j=0$（$j=1,2,3$）および$D_t^*\rho=0$を要請するためにラグランジュ未定乗数λ^j（$j=1,2,3$）およびφを導入して

$$L'_{\rm EF}=\int\left[\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{V}-H_{\rm F}-(D_t\varphi+\lambda^j D_t\sigma_j)\right]\rho\,{\rm d}x \tag{11}$$

とおこう（$\int\varphi(D^*{}_t\rho)\,{\rm d}x$を部分積分によって$-\int(D_t\varphi)\rho\,{\rm d}x$と書き換えてある）．ラグランジアン$L=L'_{\rm EF}+L_{\rm EM}$に関する変分は

$$\delta\boldsymbol{V}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{P}=\nabla\varphi+\lambda^j\nabla\sigma_j, \tag{12}$$
$$\delta\boldsymbol{p}\ \Rightarrow\ \boldsymbol{p}=m\boldsymbol{V}, \tag{13}$$
$$\delta\varphi\ \Rightarrow\ D_t^*\rho=0, \tag{14}$$
$$\delta\sigma_j\ \Rightarrow\ D_t^*(\rho\lambda^j)=0\quad\Rightarrow\quad D_t\lambda^j=0, \tag{15}$$
$$\delta\lambda^j\ \Rightarrow\ D_t\sigma_j=0, \tag{16}$$
$$\delta\rho\ \Rightarrow\ D_t\varphi=\boldsymbol{P}\cdot\boldsymbol{V}-(H+h), \tag{17}$$

そしてδA_μはマックスウェル方程式（カレント=$(e\rho,e\rho\boldsymbol{V})$）を生じる（場の方程式の側は，ここでは難しいことは何もない）．(12)はベクトル場$\boldsymbol{P}$のクレブシュ表現といわれるものである[7]．(14)−(17)を用いて計算すると

$$\begin{aligned}D_t\boldsymbol{P}&=D_t(\nabla\varphi+\lambda^j\nabla\sigma_j)\\&=-\nabla(e\phi+h)+e\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+e(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

電磁場を$\boldsymbol{E},\boldsymbol{B}$で表すと，おなじみの理想プラズマの運動方程式になる：

$$mD_t\boldsymbol{V}=-\nabla h+e(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{V}\times\boldsymbol{B}). \tag{18}$$

ラグランジアン(11)はもう少し見やすい形に書き換えることができる．クレブシュ表現(12)を$L'_{\rm EF}$の中に使って簡約すると

$$L''_{\rm EF}=\int\left[(\rho\dot{\varphi}+\mu^j\dot{\sigma}_j)-\rho H_{\rm F}|_{\boldsymbol{P}=\nabla\varphi+(\mu^j/\rho)\nabla\sigma_j}\right]{\rm d}x \tag{19}$$

と書ける．ただし$\mu^j=\rho\lambda^j$とおいた．このラグランジアンをみると$(\rho\dot{\varphi}+\mu^j\dot{\sigma}_j)$の部分が正準形式（つまり${\rm d}(\rho d\varphi+\mu^j{\rm d}\sigma_j)$がシンプレクティック2次形式）だと思える．$\rho$-$\varphi$，$\mu^j$-$\sigma_j$（$j=1,2,3$）を共役変数とし，

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{\rm F}&=\int\rho H_{\rm F}|_{\boldsymbol{P}=\nabla\varphi+(\mu^j/\rho)\nabla\sigma_j}\,{\rm d}x\\&=\int\left\{\left[\rho(\nabla\varphi-e\boldsymbol{A})^2+2\mu^j\nabla\varphi\cdot\nabla\sigma_j\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+(\mu^j\nabla\sigma_j)^2/\rho\right]/2m+e\rho\phi+\rho\,\mathcal{E}(\rho)\right\}{\rm d}x\end{aligned}$$

をハミルトニアンとする正準方程式は

$$\begin{cases}\dot{\rho}=\partial_\varphi\mathcal{H}_{\rm F}\\ \dot{\varphi}=-\partial_\rho\mathcal{H}_{\rm F}\end{cases}\qquad\begin{cases}\dot{\mu}^j=\partial_{\sigma_j}\mathcal{H}_{\rm F}\\ \dot{\sigma}_j=-\partial_{\mu^j}\mathcal{H}_{\rm F}\end{cases}\qquad(j=1,2,3) \tag{20}$$

3　逆に場の理論をラグランジュ表現で記述して統一をはかることもできよう．そうするには，電場と磁場の代わりに電気力線と磁力線を用いる．すなわちファラデーの立場である．最近，場の量子論ではファラデー描像への回帰があることを付言しておく．

4　変位$\boldsymbol{\xi}$はオイラー場であることが，$\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_0,t)$と違うことに注意しよう．(7)で$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},t)=\dot{\boldsymbol{Q}}|_{\boldsymbol{x},t}:=\dot{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{Q}^{-1})(\boldsymbol{x},t),t)$とおき，さらに$\rho(\boldsymbol{x},t)$は(6)により与えると$L_{\rm EF}$はラグランジュ表現の$L_{\rm LF}$を**単に**オイラー座標で書き換えただけのものになる．変分を計算するためにはδQからδVを誘導する必要がある．このときオイラー座標とラグランジュ座標を行き来するので〈リー微分〉の技巧が必要になる[6]：$\delta\boldsymbol{Q}|_{\boldsymbol{x},t}=(\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{x}_0,t)-\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_0,t))|_{\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_0,t),t}=\boldsymbol{Q}'(\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{x},t),t)-\boldsymbol{x}$であるから，$\delta\boldsymbol{V}=\partial_t\delta\boldsymbol{Q}+(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)\delta\boldsymbol{Q}-(\delta\boldsymbol{Q}\cdot\nabla)\boldsymbol{V}$，$\delta\rho=-\nabla\cdot(\rho\delta\boldsymbol{Q})$と計算される．ここまで述べておけば，変分$\delta\boldsymbol{Q}$により理想プラズマの運動方程式が得られることの検証は読者に委ねてよかろう．

5　もちろん$\boldsymbol{V}=D_t\boldsymbol{\xi}$と書いて，$L$に含まれる関数の値を$\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\xi}+\boldsymbol{\sigma}$で評価するように約束するという定式化も可能である[6]．

6　ただし，汎関数$\mathcal{F}(u)$に対して$\partial_u\mathcal{F}(u)$はその関数微分を表わす．ハミルトニアン$\mathcal{H}_F$は正準変数（クレブシュパラメタ）の汎関数として連続汎関数ではないが，凸性があるので〈劣微分〉として関数微分を定義できる[8,9]．なお，本解説を通じて汎関数を構成する場は無限遠で十分早く0になるとする（あるいは境界のないコンパクト多様体上で考える）．境界があるとき，どのような境界条件のもとで境界項がうまく消えるかを明示することは難しい．本解説では，この問題を保留して，関数微分は「形式的」な計算だとする．

と書ける[6]．これらが，前記の(14)‐(17)と等価であることを確かめられたい．

2.3 通時的記述の問題

以上で「プラズマ＝運動＋場」という定義が $L = L''_{\mathrm{EF}} + L_{\mathrm{EM}}$ によって定式化され，プラズマの運動は正準方程式(20)で表された．これで理論の骨格は完璧と思いきや，不思議な「欠陥」があることに気づく．正準方程式(20)は運動量のクレブシュ表現(12)すなわち

$$\boldsymbol{P} = \nabla\varphi + \sum_{j=1}^{n} \lambda^j \nabla\sigma_j \qquad (n=3) \tag{21}$$

によって構造が与えられている．$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t)$ は3成分を有するベクトル値関数であるが，クレブシュ表現(21)はこれを7個の関数 $\varphi(\boldsymbol{x},t)$，$\mu^j(\boldsymbol{x},t)$，$\sigma_j(\boldsymbol{x},t)$ $(j=1,2,3)$ によって表現（パラメタライズ）している．場（微分形式）の「表現可能性」は，単純にパラメタの数だけでは判断できないのだが[7]，(21)は明らかに**過剰**な表現だ．もし $j=1$ だけとるとパラメタはちょうど3個だが，そのような $\boldsymbol{P} = \nabla\varphi + \lambda\nabla\sigma$ の〈ヘリシティー〉を計算すると

$$C = \int \boldsymbol{P}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{P})\,\mathrm{d}x = \int \nabla\cdot(\varphi\nabla\lambda\times\nabla\sigma)\,\mathrm{d}x. \tag{22}$$

すなわち $\boldsymbol{P}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{P})$ は完全3次微分形式である．このような $\boldsymbol{P}$ は特殊であることが示される[7]．つまり $j=1$ だけでは不十分である――このように表現されるベクトル場の集合は線形空間でもない．$j=1,2$ ととると任意の3次元ベクトル場 $\boldsymbol{P}$ をパラメタライズできることが示されるが，それぞれのパラメタに独立の境界条件を与えることはできない．したがって(14)は**過剰でありながら削減不可能**である．さらに奇妙なことに，クレブシュ表現(21)で n を任意の数にとり（0でもよい），ラグランジアン(19)にいくつの μ^j, σ_j を取り込んでも，その正準方程式の解は流体運動方程式(14)，(18)を満足する（これらを(12)‐(17)から導くとき n が3であることを使う必要はなかったことから明らかであろう）．

この奇妙な数学的事実――任意数 n のクレブシュパラメタを共役変数とするハミルトン力学系(20)は，それぞれ閉じた力学系であり[8]，その運動は流体運動方程式(14)，(18)を満足する――は，流体運動方程式がもつ「位相的欠陥」の存在を示唆している．その隙間が n に係る「自由度」を生んでいる．流体力学の位相的欠陥とは何かという問題が次節の主題だが，以下の点を指摘してこの節を終わることにしよう．

この解説ではラグランジアン(19)を導くために，流線のラグランジュ表現 $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_0,t)$ とオイラー表現 $\boldsymbol{Q}^{-1}(\boldsymbol{x},t) = \sigma(\boldsymbol{x},t)$ の相対性を用いてクレブシュパラメタ σ_j を誘導した[6][9]．流線とは運動の通時態であるために，そのアイデンティティーを全面的に記憶表象＝初期条件 $\boldsymbol{x}_0$ に帰着する．ここでアイデンティティーとは，個別性として**保持される**もの，すなわち〈保存量〉のことである．初期条件（各流線の出発点 $\boldsymbol{x}_0$）は，各流線上で保存＝記憶されなくてはならない．正準方程式のうち $\dot{\sigma}_j = -\partial_{\mu^j}\mathcal{H}_{\mathrm{F}}$（書き換えると $D_t\sigma_j = 0$）はこのこと（$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{x}_0$ の保存）を意味しているのだ．しかし，理論のなすべきことは〈一般的な保存則〉を発見し，その保存量で運動の**秩序**を描出することである[12]．流線のアイデンティティーは，個別的初期値ではなく，保存則によって構造化（整理しなおし）されなくてはならない．クレブシュパラメタで描いた正準力学は，保存則を初期条件と「混同」することによって，運動が生起する力学空間の構造（欠陥＝非正準性）を見失うのである（そのことが通時的記述を安易にするともいえるのだが）．

3．位相欠陥と渦構造

3.1 一般化したハミルトン力学系

本節の目標は，プラズマの流体モデルがもつ〈保存則〉を研究することで，その定常状態＝平衡の構造（保存量で特徴づけられるはず）を力学空間の構造（保存則を生む原因があるはず）として記述することである．保存則は二つの原因で生じる；一つは〈対称性〉，もう一つは〈位相欠陥〉である．前者はハミルトニアンの構造，後者はポアッソン代数の構造である．

まずこれらの意味を抽象力学系（ハミルトン力学系）を用いて説明しよう[9,13]．ここでは少なくとも一つの保存量 $\mathcal{H}(\boldsymbol{u})$（これをハミルトニアンと呼ぶ）をもつ力学系を考える．$\boldsymbol{u}(t)\in X$ は状態ベクトル（状態空間 X は一般に無限次元の実ベクトル空間とする）であり，$\mathcal{H}(\boldsymbol{u})$ は下に有界な実汎関数（$X\to\mathbf{R}$）とする．この力学系が〈ハミルトン力学系〉であるとは，ハミルトニアン $\mathcal{H}(\boldsymbol{u})$ が保存するように運動が起こることを意味する．何らかの意味で $\mathcal{H}(\boldsymbol{u})$ の勾配ベクトル $\partial_{\boldsymbol{u}}\mathcal{H}$ が計算できるとしよう．$\mathcal{H}(\boldsymbol{u})$ が保存するためには運動 $\partial_t\boldsymbol{u}(t)$ は $\partial_{\boldsymbol{u}}\mathcal{H}$ と**直交**しなくてはならない．したがって，勾配ベクトルをそれに直交する方向へ曲げる作用素 $\mathcal{A}$ があって，運動方程式は

$$\partial_t\boldsymbol{u} = \mathcal{A}\partial_{\boldsymbol{u}}\mathcal{H}(\boldsymbol{u}) \tag{23}$$

の形に書けるはずである．ただしこれが決定論的な運動方程式であるためには写像 $\mathcal{A}$ の値は一意的に定まらなくてはならない．ここで直交ということを数学的に定義しておく必要がある．そのために，ここではベクトル空間 X に内積

7　たとえば3次元ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ が発散をもつとき（$\nabla\cdot\boldsymbol{u}\neq 0$），3次元のベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ をどう選んでも $\boldsymbol{u} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ と表現することはできない．一般論については教科書[9]参照．

8　たとえば $n=0$ とすると $\boldsymbol{P} = \nabla\varphi$，すなわち渦のない流体となる．それはそれで閉じた力学系（一般の渦あり運動のサブクラス）をなすのである[10]．

9　このために $n=3$ を要することが自然に理解できたはずである．n の必要数と σ_j の意味づけに関しては学界に混乱がある．(19)と同型のラグランジアンは，最初にリン[11]によって定式化されたが，3つのスカラー場 σ_j を束縛する理由は，むしろ変分原理の結果に有限な渦度を与えたいという動機によっており，明確な理由が示されていない．そのために，これをエントロピーの保存と結び付けて $n=1$ とする立場や，単に抽象的な場としてヘリシティーの問題から $n=2$ とする立場などがある．

$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$ を定義する（よって X は実ヒルベルト空間である）[9]．X で定義された作用素$\mathcal{A}$が〈反対称作用素〉であるとは

$$(\mathcal{A}\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{a},\mathcal{A}\boldsymbol{b}) \tag{24}$$

なる反対称関係が$\mathcal{A}$の作用しうるすべての$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\in X$ に対して成り立つことをいう．このような $\mathcal{A}$ はベクトルを直交する方向へ曲げる――実際，内積の公理より$(\mathcal{A}\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\mathcal{A}\boldsymbol{a})$，一方反対称性により$(\mathcal{A}\boldsymbol{a},\boldsymbol{a})=-(\boldsymbol{a},\mathcal{A}\boldsymbol{a})$，したがって$(\boldsymbol{a},\mathcal{A}\boldsymbol{a})=0$．$\mathcal{A}$ と内積を用いて〈ポアッソン括弧〉を

$$[\mathcal{G}(\boldsymbol{u}),\mathcal{F}(\boldsymbol{u})]=(\mathcal{A}\partial_u\mathcal{G}(\boldsymbol{u}),\partial_u\mathcal{F}(\boldsymbol{u})) \tag{25}$$

と定義する（$\mathcal{F}(\boldsymbol{u})$ と $\mathcal{G}(\boldsymbol{u})$ は何らかの意味で勾配が計算できる汎関数とする）．$\boldsymbol{u}(t)$ が運動方程式（23）に従って運動するとき，汎関数（ある物理量）$\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(t))$ の時間変化は

$$\begin{aligned}\frac{d}{\mathrm{d}t}\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(t))&=(\partial_t\boldsymbol{u}(t),\partial_u\mathcal{F}(\boldsymbol{u}(t)))\\&=(\mathcal{A}\partial_u\mathcal{H}(\boldsymbol{u}),\partial_u\mathcal{F}(\boldsymbol{u}))\\&=[\mathcal{H}(\boldsymbol{u}),\mathcal{F}(\boldsymbol{u})]\end{aligned} \tag{26}$$

と計算される．ポアッソン括弧の反対称性から$[\mathcal{H},\mathcal{H}]=0$．よって方程式（23）に従う運動は確かに$\mathcal{H}$を保存する．

上記の基本構造（ハミルトニアンとポアッソン括弧）をもつ力学系を（広い意味で）ハミルトン力学系と呼ぶ．具体的な例を見ておこう．

古典力学：最も簡単な反対称作用素は

$$A=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix} \tag{27}$$

である．ハミルトニアンが共役変数$\boldsymbol{u}={}^t(q,p)$ の滑らかな関数として $H(q,p)$ と与えられたとき，(23)は正準運動方程式

$$\frac{d}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{u}=\frac{d}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix}q\\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & I\\ -I & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial_q H\\ \partial_p H\end{pmatrix}=A\partial_u H,$$

ポアッソン括弧はおなじみの$\{a,b\}=(\partial_p a)(\partial_q b)-(\partial_q a)(\partial_p b)$である．

量子力学：量子論も基本的な構造は同じである．ただし，この場合は状態空間を複素化しておく必要がある（波動関数 u の位相はゲージ理論で重要な手掛かりとなる）．量子化したハミルトニアン $H(x,i\partial_x)$ に対して $\mathcal{H}(u)=(Hu,u)/2$，$\mathcal{A}=-i$（これは複素線形空間で最も簡単な反対称作用素）とおくと(23)はシュレディンガー方程式に他ならない．

非線形波動方程式：一般に〈波動方程式〉は，広く非線形の場合も含めて(23)の形式に帰着できる．多くの非線形波動方程式では $\mathcal{A}$ を非線形作用素にする必要がある（$\mathcal{A}$ が線形でも $\mathcal{H}$ が2次形式でないときは非線形になる）．本節の主題は，まさに $\mathcal{A}$ が非線形でしかも「欠陥をもつ」の場合である――この問題は後で解説することにして，まず波動方程式のプロトタイプ

$$\partial_t u=-\boldsymbol{V}\cdot\nabla u \tag{28}$$

で基本的な構造を見ておこう．ここで位相速度を表す$\boldsymbol{V}$は非圧縮ベクトル場（$\nabla\cdot\boldsymbol{V}=0$）とする．$\boldsymbol{V}$ が u あるいは u の微積分に依存するとき(28)は非線形である[10]．$\mathcal{H}=(u,u)/2$，$\mathcal{A}=-(\boldsymbol{V}\cdot\nabla)$ とすれば(28)は(23)の形になる．$\lim_{|\boldsymbol{x}|\to\infty}u(\boldsymbol{x},t)=0$ を仮定して，$\mathcal{A}$が反対称であることを検証されたい．

プラズマのモデル：プラズマの方程式は$\boldsymbol{V}\cdot\nabla$ の形の作用素を複数含む複合的な非線形波動方程式系である．

(a) いろいろな階層のモデルがあるが，まず第2.2項で定式化した基本形からスタートしよう．粒子保存則(14)すなわち

$$\partial_t\rho=-\nabla\cdot(\boldsymbol{V}\rho) \tag{29}$$

と運動量バランスの式(18)をハミルトン方程式(23)の形式に書く[11]．これと場の方程式（マックスウェル方程式）がカレント$(e\rho,e\rho\boldsymbol{V})$ を媒介項として結合している．(18)は

$$\partial_t\boldsymbol{P}=\boldsymbol{V}\times(\nabla\times\boldsymbol{P})-\nabla\Phi \tag{30}$$

と変形できる．ただし$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{V}+e\boldsymbol{A}$ は正準運動量，$\Phi=mV^2/2+h+e\phi$ はエネルギー密度である．状態ベクトルを$\boldsymbol{u}={}^t(\rho,\boldsymbol{P})$ とおくと，

$$\mathcal{H}=\int\rho\left[\frac{(\boldsymbol{P}-e\boldsymbol{A})^2}{2m}+e\phi+\mathcal{E}(\rho)\right]\mathrm{d}x \tag{31}$$

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}0 & -\nabla\cdot\\ -\nabla & -\rho^{-1}(\nabla\times\boldsymbol{P})\times\end{pmatrix} \tag{32}$$

とすればよい．この$\mathcal{A}$が反対称であること，ハミルトン方程式(23)が(29)-(30)を与えること確認されたい．なお，電磁場$(\phi,\boldsymbol{A})$ を0とすれば，これはそのまま中性流体の方程式である．

(b) 電子と陽子からなるプラズマを考えるときは，電子をインデックス$\ell=\mathrm{e}$，陽子を$\ell=\mathrm{i}$で表し，それぞれの密度ρ_ℓ と正準運動量$\boldsymbol{P}_\ell=m_\ell\boldsymbol{V}_\ell\mp e\boldsymbol{A}$ をもって$\boldsymbol{u}_\ell={}^t(\rho_\ell,\boldsymbol{P}_\ell)$ とおき，状態変数$\boldsymbol{u}={}^t(\boldsymbol{u}_\mathrm{e},\boldsymbol{u}_\mathrm{i})$ を定義する．

$$\mathcal{H}=\mathcal{H}_\mathrm{e}+\mathcal{H}_\mathrm{i},\qquad \mathcal{A}=\begin{pmatrix}\mathcal{A}_\mathrm{e} & 0\\ 0 & \mathcal{A}_i\end{pmatrix}$$

とすればよい．

(c) 電子とイオンの質量比によって〈スケール階層〉が生じる．電子の正準運動量$\boldsymbol{P}_\mathrm{e}$ においてメカニカルな成分$m_\mathrm{e}\boldsymbol{V}_\mathrm{e}$ を無視しよう．すると$\boldsymbol{P}_\mathrm{e}=-e\boldsymbol{A}$ となり，電子の運動方程式は場の方程式（$\boldsymbol{A}$ の支配方程式）の顔をしはじめる：

10 たとえば長谷川・三間方程式の場合，一般化渦度を$u=(c-\Delta)\varphi$ と定義して（$c=\rho_s^{-2}$，ただしρ_s はイオン音速に対するジャイロ半径である），$V_x=\partial_y\varphi, V_y=-\partial_x\varphi$ である．$c=0$ とすると2次元非圧縮理想流の渦方程式になる．

11 ここでは$\boldsymbol{P}$ をクレブシュ表現してクレブシュパラメタに関する正準方程式(20)を書くのではなく，$\boldsymbol{P}$ そのものを変数としてハミルトン方程式(23)の形式に書こうというのである．

curl をとって

$$\partial_t \boldsymbol{B} = \nabla \times (\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}} \times \boldsymbol{B}). \tag{33}$$

これとマックスウェル方程式との重複を避けるためには変位電流項を無視して $\nabla \times \boldsymbol{B}/\mu_0 = \boldsymbol{J}$（電流密度）とする．以下 $\boldsymbol{P}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{P}$，$\boldsymbol{V}_{\mathrm{i}} = \boldsymbol{V}$ と書く．イオンと電子の密度は等しいとして ρ で表す．$\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}} = \boldsymbol{V} - \boldsymbol{J}/e\rho$ によって電子流速を決めれば，状態変数は $\boldsymbol{u} = {}^t(\rho, \boldsymbol{P}, \boldsymbol{B})$ のみになる．粒子保存則(29)，運動量バランス(30)と磁場の式(33)をハミルトン方程式の形に書こう．マックスウェル方程式の代わりに(33)を使うので，ハミルトニアンには磁場のエネルギーを加えておく必要がある：

$$\mathcal{H} = \int \left\{ \rho \left[\frac{(\boldsymbol{P} - e\boldsymbol{A})^2}{2m_{\mathrm{i}}} + e\phi + \mathcal{E}(\rho) \right] + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\} \mathrm{d}x.$$

curl の逆作用素（ビオ・サヴァール積分）を curl^{-1} と書くと，

$$\partial_{\boldsymbol{u}} \mathcal{H} = \begin{pmatrix} \partial_\rho \mathcal{H} \\ \partial_{\boldsymbol{P}} \mathcal{H} \\ \partial_{\boldsymbol{B}} \mathcal{H} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi \\ \rho \boldsymbol{V} \\ \boldsymbol{B}/\mu_0 - \mathrm{curl}^{-1}(e\rho \boldsymbol{V}) \end{pmatrix}.$$

よって

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla\cdot & 0 \\ -\nabla & -\rho^{-1}(\nabla \times \boldsymbol{P}) \times & 0 \\ 0 & 0 & \nabla \times [(\boldsymbol{B}/e\rho) \times (\nabla \times \circ)] \end{pmatrix}$$

とおけばハミルトン方程式(23)は(29)‐(30)‐(33)と等価になる．これを〈ホール MHD 方程式〉あるいは〈2 流体 MHD 方程式〉という．

(d) MHD 方程式は，正準運動量 $\boldsymbol{P}$ の式(30)をメカニカル運動量 $m\boldsymbol{V}$ の式に書き換え，磁場の方程式(33)で $\boldsymbol{V}_{\mathrm{e}}$ を $\boldsymbol{V}$ で置き換えたものである（また電気的中性のために $\phi = 0$ とする）．状態変数を $\boldsymbol{u} = {}^t(\rho, m\boldsymbol{V}, \boldsymbol{B})$ とし，

$$\mathcal{H} = \int \left\{ \rho \left[\frac{mV^2}{2} + \mathcal{E}(\rho) \right] + \frac{B^2}{2\mu_0} \right\} \mathrm{d}x, \tag{34}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & -\nabla\cdot & 0 \\ -\nabla & -(m/\rho)(\nabla \times \boldsymbol{V}) \times & (\nabla \times \circ) \times \boldsymbol{B}/\rho \\ 0 & \nabla \times [\circ \times \boldsymbol{B}/\rho] & 0 \end{pmatrix} \tag{35}$$

とおけばよい．ハミルトン方程式(23)がおなじみの MHD 方程式になることを確認されたい．

(e) 非圧縮・一定密度モデルの定式化を述べておこう．∇h は非圧縮条件 $\nabla\cdot\boldsymbol{V} = 0$ をみたすための「修正項」に仕立てる必要がある．これは〈射影作用素〉として定式化される––ベクトル場 $\boldsymbol{u}$ を非圧縮ベクトル場 $\boldsymbol{u}_\sigma$ へ射影するためには，$\Delta\vartheta = \nabla\cdot\boldsymbol{u}$ をみたす ϑ を用いて（ノイマン境界条件 $\boldsymbol{n}\cdot\nabla\vartheta = 0$ を与えれば ϑ は一意的に決まる），$\boldsymbol{u}_\sigma = \mathcal{P}\boldsymbol{u} := \boldsymbol{u} - \nabla\vartheta$ とすればよい[12]．非圧縮の $\boldsymbol{V}$ に対して $\mathcal{P}\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}$ であること，また任意のベクトル場 $\boldsymbol{u}$ に対して $\nabla \times (\mathcal{P}\boldsymbol{u}) = \nabla \times \boldsymbol{u}$ であることに注意しつつ，運動量バランスの式に $\mathcal{P}$ を作用させると $\nabla\Phi$ の項が消える．ρ は力学変数ではなくなり（$\rho = 1$ と規格化し，同時に $\boldsymbol{V}$ を B_0（$\boldsymbol{B}$ の代表値）に対するアルヴェン速度で規格化すればすべての変数が規格化される），h との関数関係を失う（よってハミルトニアンから $\mathcal{E}(\rho)$ が脱落する）．代わりに $\rho^{-1} \to \mathcal{P}$ と置き換える．MHD 方程式の場合について，上記の規格化した変数で非圧縮モデルを書いておく：

$$\mathcal{H} = \int \left\{ \frac{V^2}{2} + \frac{B^2}{2} \right\} \mathrm{d}x. \tag{36}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} -\mathcal{P}(\nabla \times \boldsymbol{V}) \times & \mathcal{P}(\nabla \times \circ) \times \boldsymbol{B} \\ \nabla \times [\circ \times \boldsymbol{B}] & 0 \end{pmatrix}. \tag{37}$$

以下を付け加えて本項を終える．ここで述べた一般的なハミルトン運動方程式(23)はラグランジアンによって表現できるとは限らない．ラグランジアンをもたないハミルトン力学系は〈非正準ハミルトン力学系〉と呼ばれる[13]．また逆にラグランジアンの変分原理が生じる運動方程式はそのままでハミルトン運動方程式(23)の形になるとは限らない（整理して書きなおすことはできても）――ラグランジアン(11)の場合を想起しよう．ラグランジアンとハミルトン運動方程式が**正準**なる関係をもつのは反対称作用素 $\mathcal{A}$ が正則なシンプレクティック形式を表現する場合に限られる[13]．**障害**がおこるのは，作用素 $\mathcal{A}$ が欠陥＝特異性をもつ（正確にいうと同型写像でない）場合であり，これが次項の主題となる．

3.2 カシミール元とカーネル

以下の目的は，ハミルトン力学系の保存量および平衡（定常状態）について，その基本構造（ハミルトニアンとポアッソン括弧）との関係を明らかにすることである．非線形波動方程式やプラズマのいくつかの方程式のハミルトン形式をみると，ハミルトニアンはむしろ自明（エネルギーの単純な表現）であり，方程式の本質的な構造はポアッソン括弧の側に押しつけられている――これらの例では $\mathcal{A}$ は非線形偏微分作用素である．よって，解析の対象は主に $\mathcal{A}$

12　射影作用素 $\mathcal{P}$ は非圧縮ベクトル場の全体集合として定義される部分空間への正射影を与える連続線形写像として定義される．教科書[9] 参照．

13　$\mathcal{A}$ が線形作用素であれば，正準な関係とは何かを具体的に示すことができる．X は可分なヒルベルト空間，$\mathcal{A}$ は $X \to X$ の線形全単射と仮定しよう（たとえば(27)；もし $\mathcal{A}$ がカーネルをもつと，以下の議論には深刻な問題が生じることに注意を喚起しておく）．X にはたかだか加算個の元からなる完全直交基底 $\{e^1, e^2, \cdots\} = \{e_1, e_2, \cdots\}$ を与えることができ，$\boldsymbol{u} = \sum_j u_j e^j$ と分解できる[9]．$\epsilon_j = \mathcal{A}e_j$ とおくと，共役な基底 $\{\epsilon_1, \epsilon_2, \cdots\}$ が定義される．共役空間の内積を $\langle a, b \rangle = (\mathcal{A}^{-1}a, \mathcal{A}^{-1}b)$ と定義すれば，これは完全直交基底であり，$\boldsymbol{u} = \sum_j v^j \epsilon_j$ と分解してもよい．$\mathcal{H}$ が適当な意味で微分可能であれば，$\partial_{\boldsymbol{u}}\mathcal{H} = \sum_j (\partial_{\boldsymbol{u}}\mathcal{H})^j e_j$，$(\partial_{\boldsymbol{u}}\mathcal{H})^j = \partial_{u_j}\mathcal{H} = \lim_{\delta \to 0}(\mathcal{H}(\boldsymbol{u} + \delta e^j) - \mathcal{H}(\boldsymbol{u}))/\delta$ と書くことができ，運動方程式(23)は共役空間で直交分解されて $\dot{u}^j = \partial_{u_j}\mathcal{H}$ $(j = 1, 2, \cdots)$ と表される．このラグランジアンは次のように定式化される．$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{L} = L^{jk}$ と行列表示する（$\dot{v}^j = L^{jk}\dot{u}_k$）．ある $\mathcal{M} = M^{jk}$ によって $\mathcal{L} = \mathcal{M}^* - \mathcal{M}$（すなわち $L^{jk} = M^{kj} - M^{jk}$）とおき，$a^j = M^{jk}u_k$ と定義する．$\sum_j a^j \dot{u}_j dt$ を正準 1 次形式とするラグランジアン $\sum_j a^j \dot{u}_j - \mathcal{H}$ の変分原理からハミルトン方程式 $L^{jk}\dot{u}_k = \partial_{u_j}\mathcal{H}$（すなわち $\mathcal{L}\dot{u} = \partial_{\boldsymbol{u}}\mathcal{H}$）が得られる．

となる．

(26)より，物理量（汎関数）$\mathcal{F}(u)$ がハミルトニアン $\mathcal{H}(u)$ と**交換**する，すなわち$[\mathcal{H}(u),\mathcal{F}(u)]=0$であるとき，$\mathcal{F}(u)$ は保存する．普通，この保存条件はハミルトニアン $\mathcal{H}(u)$ に依存して決まるのだが[14]，$\mathcal{H}(u)$ に依存しない保存量，すなわち

$$[\mathcal{G}(u),C(u)]=0 \qquad (\forall\mathcal{G}(u)) \tag{38}$$

をみたす$C(u)$（$\neq$ 定数）が存在するとき，これを〈カシミール（Casimir）元〉あるいは〈中心元〉という．$C(u)$ を専ら決定づけているのはポアッソン括弧(25)の構造を決める反対称作用素 $\mathcal{A}$ である．実際，(38)は

$$\mathcal{A}\partial_u C(u)=0 \tag{39}$$

と等価である．(39)は$\partial_u C(u)\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A})=\{v;\mathcal{A}v=0\}$ を意味する．集合 $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ を写像$\mathcal{A}$のカーネル（kernel；核）という（一般に $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ は線形部分空間とは限らないが，$\mathcal{A}$が線形作用素であるときは線形部分空間である）．$v\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ をカーネル元と呼ぶことにしよう．あるカーネル元v を見つけたとしても$v=\partial_u C(u)$と書ける「原始関数」$C(u)$ があるとは限らない．

運動$\partial_t u$ は $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ に直交する多様体上に制限される．実際，運動方程式(23)より，$\partial_t u$ は$\mathcal{A}$の値域に含まれなくてはならない．$a=\mathcal{A}b\,(\exists b)$ と書けるとき，$\mathcal{A}$ が反対称であることから，あらゆる$v\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ に対して$(a,v)=(\mathcal{A}b,v)=-(b,\mathcal{A}v)=0$．よって$\mathcal{A}$の値域は $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ に直交する．こうしてみると，カシミール元とは，運動方程式の〈位相欠陥〉つまり軌道が進入できない隙間を「層構造」として表現する保存量だといえる．運動は汎関数$C(u)$ のレベルセット上を経巡る．$C(u)$ は運動の積分曲面（一般に無限次元空間にはめこまれている）を与えるのだ．しかし一般には隙間は「可積分」ではない――$\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ は「層構造」という秩序＝保存量による表現をもつとは限らないのである．

具体的な例でカシミール元とはどのようなものかをみよう．正準運動方程式の(27)やシュレディンガー方程式の$\mathcal{A}=-i$ に対してはカシミール元は存在しない（つまり $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})=\{0\}$，したがって(39)をみたす$C$ は定数のみである）．

波動方程式(28)の場合，カシミール元は〈特性曲面〉に関連して定められる．ここで特性曲面とはベクトル場$\boldsymbol{V}$ の積分曲面のことであり，物理の言葉では不連続面といってもよい．ある関数$\varphi(\boldsymbol{x})$ があって，$\boldsymbol{V}\cdot\nabla\varphi=0$ をみたすとしよう．このとき$\varphi(\boldsymbol{x})=c$（定数）で与えられる曲面（$\varphi$ のレベルセット）が特性曲面である．定義により$\boldsymbol{V}$ は特性曲面に接する（つまり$\boldsymbol{V}$の流線は特性面上にのっている）．このような$\varphi(\boldsymbol{x})$ がみつかると，任意の関数 fについて $f(\varphi)$ は波動方程式(28)の定常解である． つまり$\mathrm{Ker}(\mathcal{A})=\{f(\varphi)\}$[15]．$f$は不連続でもよい――$\boldsymbol{V}\cdot\nabla f(\varphi)=0$ が（超関数の意味で）成り立つ．よって特性曲面は不連続面を与えるのである（今の場合，定常解をみているので不連続面は定在ショックを表す）．$\boldsymbol{V}$ がu と無関係なベクトル場であるなら（すなわち(28)が線形方程式である場合），カシミール元は $f(\varphi)\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ を「積分」して$\int uf(\varphi)\mathrm{d}x$ と与えられる．

こうしてみると，問題は二つある．まず，流線の可積分性（特性曲面の大域的存在）の問題．$\boldsymbol{V}$ が２次元の非圧縮流であるときは，流線は常に積分可能である．よく知られているように，２次元非圧縮流はクレブシュパラメタφ を用いて$\boldsymbol{V}={}^t(\partial_y\varphi,-\partial_x\varphi)$ と書くことができる[7]．これを使うと作用素$\mathcal{A}=-\boldsymbol{V}\cdot\nabla$ は古典力学の関係(27)が定めるポアッソン括弧$\{\ ,\ \}$を用いて$\mathcal{A}=\{\varphi,\ \}$と書ける[16]．したがって，$v\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ は$\{\varphi,v\}=0$と等価，これは$v=f(\varphi)$ と等価であることがわかる（脚注15参照）．以上は$\boldsymbol{V}$ が２次元非圧縮流の場合であるが，３次元以上では一般の$\boldsymbol{V}$ の流線はカオスとなり積分曲面が存在するとは限らない[9]．積分曲面が存在する部分領域があると，そこに台をもつ関数が「隙間」$\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ を発生させるのだが，それは極めて複雑な構造をもつものになるだろう．

つぎに，$\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ の「可積分性」の問題．$\mathcal{A}$ が非線形作用素である場合，カーネル元の積分＝カシミール元を求めることは一般には困難である．たとえばφ がu に依存して$\varphi=\mathcal{K}u$と与えられるとしよう（$\mathcal{K}=(c-\Delta)^{-1}$は自己共役作用素；脚注10参照）．このとき$\mathcal{A}=\{\mathcal{K}u,\ \}$ は非線形作用素である．$\mathrm{Ker}(\mathcal{A})=\{f(\mathcal{K}u)\}$ であるが，$f(\tau)=a\tau$（線形）である場合は積分できて$C(u)=(a/2)(\mathcal{K}u,u)$．しかし一般の非線形関数 $f(\tau)$ と線形作用素$\mathcal{K}$で合成される $f(\mathcal{K}u)$ の「原始関数」を求めることはできない[17]．

もう一つ基本的な例を見ておこう．できるだけシンプルにするために非圧縮中性流体の運動方程式を考える．(36)-(37)で$\boldsymbol{B}=0$とすればよい．念のために書き下そう：

$$\partial_t\boldsymbol{V}=-(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V}-\nabla(V^2/2+h). \tag{40}$$

これをハミルトン形式(23)に書くためには，状態ベクトルを$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{V}$，ハミルトニアンを$\mathcal{H}=\int V^2/2\mathrm{d}x$，反対称作用素を$\mathcal{A}=-\mathcal{P}(\nabla\times\boldsymbol{V})\times$ とおけばよい．$\boldsymbol{v}\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ は

14　これが最初に述べた保存量の第一のカテゴリー，すなわち〈対称性〉によって生じる保存量だ．脚注13のように，運動方程式(23)が共役空間で直交分解されて$\dot{v}^j=\partial_{u_j}\mathcal{H}$（$j=1,2,\cdots$）と書けるとしよう．このとき一つの対称性$\partial_{u_j}\mathcal{H}=0$は一つの保存則$\dot{v}^j=0$を生む（任意の fによって定義される汎関数$\mathcal{F}(v^j)=f(\langle\boldsymbol{u},\epsilon_j\rangle)$ は保存量となる）．

15　厳密にいうと，$\boldsymbol{V}=0$ の領域があると，そこでu は自由になる．よって$\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ は，一つのφ から生成される$\{f(\varphi)\}$ では尽くされない．このような$\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ を「積分」してカシミール元で表わすことは難しい．この問題は，非線形の場合，より深刻になることを注意しておく．

16　この例は，微分作用素$\mathcal{A}$が定義するポアッソン括弧(25)と$\mathcal{A}$を「クレブシュ表現」したポアッソン括弧$\{\varphi,\ \}$の双対性を示す．前者はフーリエ空間の代数構造，後者は座標空間の代数構造を表現しているともいえる．

17　この定式化ではu は渦度，$\mathcal{K}u$ はクレブシュパラメタであるから，$(\mathcal{K}u,u)=(\boldsymbol{V},\boldsymbol{V})/2$ は流れ$\boldsymbol{V}$ のエネルギーに相当する．一方，$\mathcal{H}=(u,u)/2$ はエンストロフィーである．この渦方程式を de-curl して運動方程式に書き直すと，エネルギーとエンストロフィーの役割が反転する（次の例参照）．

$(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{v}=\nabla\vartheta$ ($\exists\vartheta$) を意味する．最も簡単な解は $\boldsymbol{v}=c(\nabla\times\boldsymbol{V})$ (c は定数)．これを「積分」すると(22)でみた〈ヘリシティー〉と呼ばれる保存量

$$C(\boldsymbol{V})=\int(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{V}\,\mathrm{d}x/2 \tag{41}$$

が得られる（自明な定数 c は1/2とした）．これは先の例のカシミール元とは異なる性格のものだ．つまり特性曲面の存在など関係ない．これ以外のカシミール元あるいはカーネル元を構築する一般的な手立てはない．

しかし，$\boldsymbol{V}$ が2次元ベクトルとなると状況は一変する．2次元のときはこれを3次元空間の中にはめこみ，垂直ベクトル $\boldsymbol{e}_\perp$ を用いて $\nabla\times\boldsymbol{V}=(\partial_x V_y-\partial_y V_x)\boldsymbol{e}_\perp=\omega\boldsymbol{e}_\perp$ と書くとわかりやすい．よって $(\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{V}=0$ となるからヘリシティー(41)は自明化する．代わりに，2次元の特殊性（特性曲面の可積分性）のために無限個のカシミール元が発生する．クレブシュパラメタで $\boldsymbol{v}=\nabla\varphi\times\boldsymbol{e}_\perp$ と書くと，$(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{v}=\omega\nabla\varphi$．したがって，$\boldsymbol{v}\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ は $\omega\nabla\varphi=\nabla\vartheta$ ($\exists\vartheta$) と等価であり，これは $\varphi=f(\omega)$ と解くことができる（f は任意関数で，$\vartheta(\omega)=f(\omega)\omega-\int f(\omega)\mathrm{d}\omega$ と計算される）．ただし $\omega=0$ は有限な領域で起こらないと仮定している（脚注15参照）．この非線形解は（先の例とはちがって）積分できて，カシミール元

$$C(\boldsymbol{V})=\int F(\omega)\,\mathrm{d}x=\int F(\nabla\times\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}_\perp)\,\mathrm{d}x \tag{42}$$

が得られる(ただし $F'=f$)[18]．実際，$\partial_V C(\boldsymbol{V})=\nabla f(\omega)\times\boldsymbol{e}_\perp$ と計算されることを確かめられたい．

プラズマの方程式は，複合的な波動方程式だと考えることができる．前項の定式化では，各モデルの主要部はほとんど反対称微分作用素 $\mathcal{A}$ が担っている．波の言葉で言うと $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ は0周波数モードの集合だといえる．上記のように波（アイコナール）が秩序をもつとき，いろいろな0周波数モードが生じて $\mathrm{Ker}(\mathcal{A})$ は大きな集合となる．しかし，アイコナールの秩序に関係ないカシミール元がある．MHD方程式(34)-(35)の場合，$C_\rho=\int\rho\,\mathrm{d}x$，$C_\mathrm{h}=\int\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}x$（磁気ヘリシティー），$C_\mathrm{ch}=\int\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}x$（クロスヘリシティー）の三つがある．これらが保存量であることを確認されたい．また，前項で示した他のプラズマモデルについてカシミール元を計算されたい．

3.3 カシミール元と渦構造

保存量のなかでもカシミール元がとりわけ重要であるのは，次の理由による．運動方程式を決定づけるハミルトニアンを次のように変換してみよう：

$$\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}(u)=\mathcal{H}(u)+\sum_{j=1}^{\nu}\mu_j C_j(u). \tag{43}$$

ここに $\boldsymbol{\mu}=(\mu_1,\cdots,\mu_\nu)$，$\mu_j$ は任意の実定数，$C_j(u)$ はカシミール元 ($j=1,\cdots,\nu$) である．(39)により，ハミルトン方程式(23)はこの変換に対して不変である：

$$\partial_t u=\mathcal{A}\partial_u\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}(u)=\mathcal{A}\partial_u\mathcal{H}(u). \tag{44}$$

したがって，ハミルトニアン $\mathcal{H}(u)$ を $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}(u)$ で置き換えても，運動は変わらない．ハミルトニアン＝エネルギーとカシミール元で構成された $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}(u)$ を〈エネルギー・カシミール関数〉と呼ぶことにしよう．

変換(43)によって，平衡点は多様化する．運動方程式(23)の平衡点は右辺を0とする u であるが，その最も簡単なものはハミルトニアン $\mathcal{H}(u)$ の極値点（ふつうは極小点）すなわち $\partial_u\mathcal{H}(\underline{u})=0$ となる点である．しかし，ほとんどの場合それは自明な解である（前項のいろいろな例をみよ）．しかし，カシミール元で変換されたハミルトニアンすなわちエネルギー・カシミール関数 $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}(u)$ の極値点は様々な〈構造〉をもつ．まずその理由を直観的に説明しよう．多くの例で $\mathcal{H}(u)$ は状態空間 $\to\mathbf{R}$ の基本的な連続写像（代表的にはエネルギーノルム）であるのに対して，カシミール元 $C_j(u)$ は微積分を含む汎関数である（前項の例を見よ）．したがって，平衡条件＝極値条件 $\partial_u\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}(u)=0$ は「微積分方程式」となり，それはパラメタ $\boldsymbol{\mu}$ を「固有値」として含む（$\boldsymbol{\mu}=0$ の解は「基底状態」を表わす）．〈構造〉とは微積分方程式の固有関数である——これが構造を記述する数学の普遍文法だ．

具体的な例を見よう．まず前項で述べた非圧縮中性流体の方程式(40)の場合を検証しよう．平衡は $(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V}=\nabla(V^2/2+h)$ の解である[19]．ハミルトニアン $\mathcal{H}=\int V^2/2\mathrm{d}x$ の極小点は自明な平衡状態 $\boldsymbol{V}=0$．3次元のとき，ヘリシティー(41)を用いてハミルトニアンを変換すると $\mathcal{G}_\mu=\int(V^2-\mu\nabla\times\boldsymbol{V})\cdot\boldsymbol{V}dx/2$．この極値点を形式的に計算すると

$$\partial_V\mathcal{G}_\mu=\boldsymbol{V}-\mu\nabla\times\boldsymbol{V}=0. \tag{45}$$

これは外微分作用素 curl の固有値問題であり，数学的な構造は詳細に解明されている[14]．解は〈ベルトラミ（Beltrami）流〉と呼ばれ，渦の基本形を与える[15]．もちろん，これは定常非圧縮流のなかの極めて特別なものである．しかし，3次元の定常非圧縮流として一般可解性が厳密にわかっているのは，方程式(45)だけである．

2次元の場合は豊かなカシミール元(42)をもつ．これを用いて変換したハミルトニアン $\mathcal{G}_\mu=\mathcal{H}-\mu\int F(\omega)dx$ の極値点を形式的に計算すると（$\mu F'=f$ と書き）

$$\partial_V\mathcal{G}_\mu=\boldsymbol{V}-\nabla f(\omega)\times\boldsymbol{e}_\perp=0. \tag{46}$$

ただし $\boldsymbol{V}=\nabla\varphi\times\boldsymbol{e}_\perp$，$\omega=\nabla\times\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{e}_\perp=-\Delta\varphi$ である．したがって(46)は非線形楕円型偏微分方程式

18 とくに $F(\omega)=\omega^2$ とした場合のカシミール元は〈エンストロフィー〉である．脚注17参照．なお，圧縮性中性流体の場合は，ハミルトン形式は(31)-(32)で $(\phi,\boldsymbol{A})=0$ とすればよい．状態ベクトルは $\boldsymbol{u}={}^t(\rho,m\boldsymbol{V})$ である．この場合はカシミール元は $C(\boldsymbol{u})=\int\rho F(\omega/\rho)\mathrm{d}x$ となる．

19 $\boldsymbol{V}$ を $\boldsymbol{B}$，$V^2/2+h$ を p（圧力）に置き換えれば，これはおなじみのMHD平衡方程式である．したがって以下の議論は（流れがない）MHD平衡の理論と思ってもよい．

$$\varphi = f(-\Delta\varphi) \tag{47}$$

の形に書ける．これを解いて定常渦の様々な構造が得られる．いうまでもなく f のとり方によっては，(47)は様々な分岐解をもつ．その一般的な数学的構造は楕円型偏微分方程式論の未解決問題である．さらに難しいのは，脚注15で述べたように，方程式(47)がどこまで定常解をカバーできるかという問題である．この方程式で表せない定常解とはどのようなものか？平衡方程式は非線形双曲・楕円型といわれる偏微分方程式であり，双曲型の部分はコーシー問題として解かなくてはならない．カシミール元とコーシー問題の関係として興味深い未解決問題である[20]．

プラズマのモデルについても，同様な議論ができる．とくに（３次元）非圧縮モデルにおいて様々なヘリシティーがカシミール元としてみいだされ，それを用いて多様な渦構造が「固有状態」として求められる．たとえば，非圧縮 MHD モデルにおいては

$$\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{B}) = \int \left[(V^2+B^2) - \mu_1 \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \mu_2 2\boldsymbol{V}\cdot\boldsymbol{B} \right] \mathrm{d}x/2,$$

非圧縮ホール MHD モデルにおいては

$$\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{P},\boldsymbol{B}) = \int \{ [(\boldsymbol{P}-\boldsymbol{A})^2 + B^2] - \mu_1 \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \mu_2 \boldsymbol{P}\cdot\nabla\times\boldsymbol{P} \} \mathrm{d}x/2$$

の極値点を形式的に計算すると，その解は curl の固有関数の線形和で与えられる――なぜ curl かというと，ヘリシティーが curl をもとに構成される汎関数だからである[15]．とくに興味深いのはホール MHD の場合である[16,17]：$\partial_{\boldsymbol{P}}\,\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}} = 0$ と $\partial_{\boldsymbol{B}}\,\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}} = 0$ からそれぞれ

$$\begin{cases} \boldsymbol{V} - \mu_2 \mathrm{curl}(\boldsymbol{V}+\boldsymbol{A}) = 0, \\ -\mathrm{curl}^{-1}\boldsymbol{V} + \boldsymbol{B} - \mu_1 \mathrm{curl}^{-1}\boldsymbol{B} = 0 \end{cases} \tag{48}$$

を得る．ただし，$\nabla\times$ を curl と書いた．またここでは長さスケールをイオンスキン長，磁場と速度をアルヴェン単位で規格化している．(48)をまとめると，

$$(\mathrm{curl} - \lambda_+)(\mathrm{curl} - \lambda_-)\boldsymbol{V} = 0$$

となり，$\boldsymbol{B}$ も同じ方程式をみたす．この一般解はベルトラミ固有関数 $(\mathrm{curl} - \lambda_\pm)\boldsymbol{G}_\pm = 0$[14]を用いて

$$\boldsymbol{V}(\mathrm{or}\boldsymbol{B}) = a_+\boldsymbol{G}_+ + a_-\boldsymbol{G}_- \tag{49}$$

と与えられる．前記のように，これは極めて特別な平衡解であるが，３次元の場合に解析的に得られる唯一の厳密解であり，またその単純な表現（２つの固有関数の線形和）にも拘わらず，非常に多様な構造が描出される（たとえば[17-21]参照）．

3.4 安定性

前項では，エネルギー・カシミール関数 $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}$ の極値点を勾配＝０の点として**形式的**に議論したが，この「微分係数」の計算は数学的には問題がある．関数空間＝無限次元線形空間においては，微分係数を安易に考えてはならない．エネルギー・カシミール関数の概念は常微分方程式の微分幾何学的方法による研究で開発された概念であるが[22]，これを偏微分方程式（無限次元の常微分方程式）の理論に移転するときに，まだいろいろ荒っぽいところがある．前項でも述べたように，ハミルトニアン＝エネルギーは滑らかな汎関数として定義されるべきであり，したがってその微分係数はいわゆるフレッシェ微分によって定義できる．しかし，既に述べたように，カシミール元は微積分作用素（とくに curl あるいは curl^{-1}）を含むというのが重要なポイントであり，微分作用素を含むときは不連続な汎関数となる．その微分係数という概念は一般には難しいが，凸性があるならば「変分法」によって「弱い意味の微分」を定義することが可能である[21]．私たちは，平衡点をエネルギー・カシミール関数 $\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{u})$ の極値点として探そうとしているのだが，この汎関数が凸汎関数であるときは，平衡点は極小点である（厳密にいうと，後述の〈強圧性〉を要する）．平衡点の近傍で運動はエネルギー・カシミール関数＝一定という多様体の上に束縛されているのだが，その多様体は極小点を取り囲む閉曲面であるはずだ．したがって，凸汎関数の極小点として与えられる平衡は「安定」である[9,23]．つまり，エネルギー・カシミール関数の凸性がわかると，その変分原理から「安定な平衡点」がみつかるのである．

凸性がない場合の理論は難しい．そもそも勾配 $\partial_u\,\mathcal{G}_{\boldsymbol{\mu}}(\boldsymbol{u})$ の意味づけを慎重に行う必要があり，さらにその値は非線形作用素 $\mathcal{A}$ の定義域に含まれなくてはならない．厳密な理論はこれからの課題である．具体的な問題としては，ケルヴィン・ヘルムホルツ不安定性と変分原理との関係が興味深い．２次元流については，前項で述べたように「豊富なカシミール元」があり，「ほとんどの平衡流」はエネルギー・カシミール関数の変分原理と関係づけられるからである．それらについて，安定性の「必要十分条件」を明らかにしていくことで，生成作用素（非エルミート作用素）のスペクトルとエネルギー・カシミール関数（リアプノフ関数といってもよい）の曲率との関係を無限次元空間で議論することになる．いうまでもなく，流れをもつプラズマの安定性を議論するとき，ケルヴィン・ヘルムホルツ系の様々なモードが問題となるが，その振る舞いは極めて複雑であり（流れが安定化に効いたり不安定化に効いたりするように見える）[24,25]，根底で何が安定性を支配しているのか未だよくわかっていない．

線形理論について付言しておこう．ハミルトン運動方程

20 グラッド・シャフラノフ式の定式化と比べてみよう（脚注19参照）．$\boldsymbol{V} = \nabla\varphi\times\boldsymbol{e}_\perp$，$\nabla\times\boldsymbol{V} = (-\Delta\varphi)\boldsymbol{e}_\perp$ を $(\nabla\times\boldsymbol{V})\times\boldsymbol{V} = \nabla\vartheta$ に代入すると $(-\Delta\varphi)\nabla\varphi = \nabla\vartheta$．これは（$\omega = -\Delta\varphi \neq 0$ のところで）$\nabla\varphi \parallel \nabla\vartheta$ を意味するから，$\vartheta = G(\varphi)$ とおけて，$-\Delta\varphi = g(\varphi)$ なる関係式を得る（$G' = g$）．これを(47)と比べると $g^{-1} = f$ の双対的関係が得られる．問題はこれらが単調関数でない場合であり，連続関数である限り写像度の概念でいけるが[9]，難しいのは不連続な場合（あるいは縮退する場合；脚注15参照）である．

21 厳密にいうと，下半連続な凸汎関数であれば〈劣微分〉という（一般に多価の）微分係数が定義できる[8,9]．

式(23)を一般の平衡点 $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}_0$ の近傍で線形化しよう．微小な変動を $\tilde{\boldsymbol{u}}$ と書く．まず形式的に $\partial_u \mathcal{H}|_{\boldsymbol{u}_0+\tilde{\boldsymbol{u}}} \approx \boldsymbol{v}_0 + H_1\tilde{\boldsymbol{u}}$，$\mathcal{A}|_{\boldsymbol{u}_0+\tilde{\boldsymbol{u}}}\boldsymbol{v} \approx \mathcal{A}_0\boldsymbol{v} + (\mathcal{A}\boldsymbol{v})'\tilde{\boldsymbol{u}}$ と書こう．ハミルトニアンの極小点にある平衡を考えると $\boldsymbol{v}_0=0$ となるが，これはほとんど自明な状態である．一般の平衡解では $\boldsymbol{v}_0 \neq 0$ であるが $\mathcal{A}_0\boldsymbol{v}_0=0$ である．平衡条件に注意して(23)を展開すると，

$$\partial_t \tilde{\boldsymbol{u}} = \mathcal{A}_0 H_1 \tilde{\boldsymbol{u}} + (\mathcal{A}\boldsymbol{v}_0)'\tilde{\boldsymbol{u}} \tag{50}$$

と書ける（線形化可能ということは $\mathcal{H}$ と $\mathcal{A}$ が正則であることを前提としている）．以上の計算においてハミルトニアン $\mathcal{H}$ をエネルギー・カシミール関数 $\mathcal{G}_\mu$ で置き換えてもよい．以下，線形化作用素を H_1 と書くが，これは $\mathcal{G}_\mu$ の線形化だとしよう．

$\mathcal{G}_\mu$ の極小点は $\boldsymbol{v}_0=0$ でありながら自明でない平衡解を与える．$\boldsymbol{v}_0=0$ のとき(50)の右辺第２項＝０となり，安定性は第１項だけで決まる．$\mathcal{A}_0$ は反対称線形作用素であるから，揺動に関するエネルギー保存則 $\mathcal{H}_1(\tilde{\boldsymbol{u}})=(H_1\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{u}})/2=$ 一定が成り立つ．２次形式 $\mathcal{H}_1(\tilde{\boldsymbol{u}})$ が揺動のノルム $\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|=(\tilde{\boldsymbol{u}},\tilde{\boldsymbol{u}})^{1/2}$ に対して〈強圧的〉であるなら，すなわちある正の定数 c があって

$$c\|\tilde{\boldsymbol{u}}\|^2 \leq \mathcal{H}_1(\tilde{\boldsymbol{u}}) \tag{51}$$

が成り立つならば，この平衡は安定である．線形作用素 H_1 がスペクトル分解できるならば，(51)はスペクトルがすべて $c(>0)$ 以上であるとを意味する．これはエネルギー・カシミール関数が（平衡点の近傍で）「あらゆる方向に正の曲率をもつ」ことを意味する．

一般の平衡点に関しては，(50)右辺の第２項を消去することはできない．したがって「揺動のエネルギー」に相当するような保存量は明示的でない．しかし，もとの非線形方程式が保存系であるから，変数の選び方を工夫すれば保存則を作れる可能性がある．一つの方法は，$\tilde{\boldsymbol{u}}=\mathcal{A}_0\tilde{\boldsymbol{v}}$ とおいて揺動を制限することである（第１項で述べたように，このような $\tilde{\boldsymbol{u}}$ は $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}_0)$ に直交する部分空間に制限される）．このとき，$((\mathcal{A}\boldsymbol{v}_0)'\mathcal{A}_0\tilde{\boldsymbol{v}},\tilde{\boldsymbol{w}})=(\tilde{\boldsymbol{v}},(\mathcal{A}\boldsymbol{v}_0)'\mathcal{A}_0\tilde{\boldsymbol{w}})$ なる対称性が示せる[26]．したがって

$$F(\tilde{\boldsymbol{v}})=(\mathcal{A}_0 H_1 \mathcal{A}_0\tilde{\boldsymbol{v}}+(\mathcal{A}\boldsymbol{v}_0)'\mathcal{A}_0\tilde{\boldsymbol{v}},\tilde{\boldsymbol{v}})$$

なる汎関数は対称な２次形式である．この時間微分を計算すると０になることは容易にわかる．この保存量を使って同様な安定性の議論を行うことができる．

４．今後の研究の展望

基礎的な理論を解説することで紙幅が尽きたが，ここで述べた二つの基本戦略（ハミルトニアンの微分形式化によるポアッソン括弧の正準化か，逆にハミルトニアンの素朴化によるポアッソン括弧の特異微分作用素化）の他にも様々な技巧が，とくに線形理論において発展していることを付け加えておこう．一つはラグランジュ表現に寄ってゆく戦略である．運動のラグランジアンには，何らかの意味で流れ $\boldsymbol{V}$ を「運動」――すなわち何かの変数の時間微分――に関連付ける仕組みが含まれていなくてはならない．脚注５にも述べたように，変位ベクトルを使って $\boldsymbol{V}$ を表すのが直観的にもわかりやすい方法であろう．線形理論では流線の変動を微小ラグランジュ変位 $\tilde{\boldsymbol{\xi}}(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_0,t))$ で表すと，$\tilde{\boldsymbol{V}}(\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{x}_0,t))=\partial_t\tilde{\boldsymbol{\xi}}-\mathcal{L}_{\tilde{\boldsymbol{\xi}}}\boldsymbol{V}$（$\mathcal{L}_{\boldsymbol{u}}$ はリー微分）と書ける．問題は「場」の変動であるが，MHD モデルやホール MHD モデルでは，場の方程式は電子の運動方程式が縮退したもので置き換わっているので，$\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ を使って $\tilde{\boldsymbol{B}}$ を表現することができる．$\tilde{\rho}$ も同様である（厳密には，すべての変動が記述できるのではなく，平衡点からの変位によって生じる変動のみを扱うことになる）．こうして場の変動をすべて $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ で表現すれば，運動方程式（$\partial_t\tilde{\boldsymbol{V}}$ の支配方程式）は $\tilde{\boldsymbol{\xi}}$ に関する２階時間微分の方程式になる[27]．これは，ハミルトニアンの表現を構造化する戦略の一つといえよう．

周期運動を含む場合には作用変数を用いてハミルトニアンをスケール階層化することが有効である．これについては，廣田・福本[28,29]による研究が礎になるだろう．

非一様流のストレッチ効果をラグランジュ的に表現するために「流れにのって時間変形していく基底関数」で場を分解する，というアイデアを思いつく――最初に考えたのはケルヴィンである[30]．非エルミート系の過渡現象を理解する（あるいは記述する）ために有効な方法である．MHD 不安定性に対するシヤー流のストレッチ効果に関しては，交換型不安定性やキンクモードの振幅の過渡的変化を記述する振動方程式が定式化される[31-34]．バルーニングモードのストレッチ効果に関する解釈でも，アイコナールにシヤー流の輸送を考慮しておくと，振幅関数の過渡的な変化が表現できる[35]．これらはシヤー流が引き起こす空間的非一様性を時間的非同時性に置き換える変換といえる．したがってラグランジアンに陽な時間依存性が生じる．ストレッチ効果は「抵抗」による減衰として表現でき，作用変数を用いて揺動を「量子化」して扱うためには（波の運動論）位相空間の体積変化を考慮する必要がある[36]．

最後にやや遠く展望をひらくと，物理の理論に妙技といえるものがあるとするならば，それは運動方程式の難しさをハミルトニアンの中に構造化するか，あるいはポアッソン括弧式（反対称作用素）の中に構造化することによって，数学的秩序へ還元することだといってよい．数学は「代数」「幾何」「解析」という三つ分野をもつのだが，ここで「秩序」といっている内容は，このすべてを柱として構築されるものにちがいない．いずれの分野からみても，「流れ」を理解することこそ中心的で永遠のテーマだといえないだろうか．

参 考 文 献

［1］居田克己他：プラズマ・核融合学会誌（小特集）**80**, 289 (2004)；藤澤彰英他：プラズマ・核融合学会誌（小特集）**81**, 971 (2005); S.-I. Itoh, Plasma Fusion. Res. **4**, 038 (2009).
［2］武智　学他：プラズマ・核融合学会誌（解説）**85**, 147 (2009).
［3］Z. Yoshida *et al.*, Plasma Fusion Res. **1**, 008 (2006);

Y. Ogawa *et al.,* Plasma Fusion Res. **4**, 020 (2009).
［4］吉田善章：日本物理学会誌　**58**, 496 (2003).
［5］L.D.ランダウ，E.M.リフシッツ（邦訳：恒藤敏彦）：場の古典論（東京図書，1978）.
［6］Z. Yoshida, *Contemporary Physics (Proc. Internat. Symp., Islamabad, Pakistan 2007)*, Ed. by J. Aslam, F. Hussain and Riazuddin, World Scientific (2008), p. 125.
［7］Z. Yoshida, J. Math. Phys. **50**, 113101 (2009).
［8］H. Brézis, *Opérateurs maximaux monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert* (North-Holland, 1973).
［9］吉田善章：新版応用のための関数解析−その考え方と技法（サイエンス社，2006）.
［10］J. Serrin, *Encyclopedia of Physics* (Springer-Verlag, 1959) p. 125.
［11］C.C. Lin, *Proceedings of International School Physics "Enrico Fermi"* XXI (Academic Press, 1963) p. 93.
［12］吉田善章：非線形とは何か−複雑系への挑戦（岩波書店，2008）；Z. Yoshida, *Nonilnear Scinece −the challenge of complex systems* (Springer, 2010).
［13］P.J. Morrison and J.M. Greene, Phys. Rev. Lett. **45**, 790 (1980); P. J. Morrison, Rev. Mod. Phys. **70**, 467 (1998).
［14］Z. Yoshida and Y. Giga, Math. Z. **204**, 235 (1990).
［15］Z. Yoshida and S.M. Mahajan, J. Math. Phys. **40**, 5080 (1999).
［16］L.C. Steinhauer and A. Ishida, Phys. Rev. Lett. **79**, 3423 (1997).
［17］S.M. Mahajan and Z. Yoshida, Phys. Rev. Lett. **81**, 4863 (1998).
［18］S. Ohsaki *et al.,* Astrophys. J. **559**, L61 (2001).
［19］S.M. Mahajan *et al.,* Phys. Plasmas, **8**, 1340 (2001).
［20］V. Krishan and S.M. Mahajan, Month. Notices Royal Astronom. Soc. **359**, L27 (2005).
［21］S.M. Mahajan and H. Miura, J. Plasma Phys. **75**, 145 (2009).
［22］V.I. Arnold, *Mathematical methods of classical mechanics* (2 nd ed.) (Springer, 1989).
［23］Z. Yoshida *et al.,* J. Math. Phys. **44**, 2168 (2003).
［24］A. Ito *et al.,* Phys. Plasmas **9**, 4856 (2002).
［25］M. Hirota, Z. Yoshida and E. Hameiri, Phys. Plasmas **13**, 022107 (2006).
［26］D.D. Holm *et al.,* Phys. Rep. **123**, 1 (1985).
［27］E. Frieman and M. Rotenberg, Rev. Mod. Phys. **32** (1960), 898.
［28］M. Hirota and Y. Fukumoto, J. Math. Phys. **49**, 083101 (2008).
［29］M. Hirota and Y. Fukumoto, Phys. Plasmas **15**, 122101 (2008).
［30］Lord Kelvin, PHI los. Mag. **24**, 188 (1887).
［31］G.D. Chagelishvili *et al.,* Phys. Fluids **9**, 1955 (1997).
［32］M. Hirota *et al.,* Phys. Plasmas **9**, 1177 (2002).
［33］F. Volponi *et al.,* Phys. Plasmas **7**, 4863 (2000).
［34］T. Tatsuno *et al.,* Phys. Plasmas **8**, 399 (2001).
［35］M. Furukawa and S. Tokuda, Phys. Rev. Lett. **94**, 175001 (2005).
［36］Z. Yoshida, Phys. Plasmas **12**, 024503 (2005).