



2. 相関とスペクトル解析

辻 義之, 田中宏彦, 大野哲靖

名古屋大学大学院工学研究科

(原稿受付: 2009年8月3日)

本章では、計測された時系列データの変動特性を解析するための基本的なツールであるフーリエ変換によるスペクトル解析の基礎について説明する。実験データにスペクトル解析を適用する際に留意すべき点を明らかにする。また相関関数とスペクトルの関係について解説し、スペクトルの理解に資する。クロススペクトルやバイスペクトルなど、さらに進んだ解析手法についても概説する。説明した手法を実際のプラズマ揺動データに適用し、得られた解析結果に対して解釈を与える。

Keywords:

statistical analysis, fluctuation, Fourier transform, spectrum, correlation, scaling, numerical filter

2.1 はじめに

ランダムな変動を解析する統計処理の基本ツールはスペクトルと確率密度関数である。前者はその時間的な変動の特性を明らかにするために不可欠であり、後者からは変動の大きさがどのような割合で存在するかを知ることができる。本章では、まずスペクトルについて解説を行う。

定常な確率変数の時間に関する情報や特定の周期運動の有無を調べるためには、フーリエ級数(変換)を用いた解析が用いられる。スペクトルは時系列の変動として記録された信号をフーリエ級数に展開した際の各係数の大きさ、即ち各周波数の波が持つエネルギーから定義される。確率密度関数は変動の大きさに関する情報を与えるが、時間に関する性質を明らかにすることはできない。スペクトルが時間情報を含むことは、最初はなかなか理解できないかもしれない。これは、スペクトルが周波数空間(もしくは、波数空間)で定義されたものであり、我々が物理現象を直感的に理解するのは実空間だからである。2つの信号がどれくらい似通っているかを定量化する指標に相関関数がある。相関関数は実空間で定義されるが、そのフーリエ変換はスペクトルと等価となることを理解できると、よりスペクトルの理解が進むであろう。

実験などから計測される時系列データからスペクトルを計算するには、いくつかの注意が必要である。それらは有限個数の離散データを取り扱うことから生じるものであり、また、計算を如何に効率よく進めるかが問題となる。本章では、スペクトルに関する基本事項を解説し、さらに進んだ概念として、クロススペクトル、コスペクトル、バイスペクトルについてふれる。具体的なデータ解析例を踏まえながら、流体乱流の解析と対比させ、現象が理解できるようにしたい。解析の対象としたデータは主に、実際にプラズマ乱流中で計測されるイオン飽和電流や浮遊電位

データであり、空間に固定された数点のプロープからの時系列信号や、数値シミュレーションによる離散点での時空間データとした。これらのデータは通常はランダムな変動と呼ばれるが、第1章で触れたように本講座ではランダム変動にある種の統計的性質を仮定して話を進めたい。その性質とは、「定常性」である。自己相関関数を取り扱うときに詳しい定義を述べるが、定常ではない変動(非定常)については、より特殊な解析手法が必要となる。

解析に用いた実験データは、その大半が名古屋大学大学院エネルギー理工学専攻大野研究室に設置されているNAGDIS-IIを用いて計測されたものである。その計測条件に関して最後に付録としてまとめた。

2.2 フーリエ級数とフーリエ変換

2.2.1 定義と具体的な計算方法

フーリエ級数展開とは、周期 T の任意関数 $x(t)$ を三角関数の級数和としてあらわすものである[1]。

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2n\pi t}{T} + b_n \sin \frac{2n\pi t}{T} \right), \quad (1)$$

ここで、各係数は

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos \frac{2n\pi t}{T} dt, \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin \frac{2n\pi t}{T} dt, \end{aligned} \quad (2)$$

で与えられる。オイラーの公式($e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位)を用いると、 $\cos(\theta) = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$, $\sin(\theta) = -(e^{i\theta} - e^{-i\theta})i/2$ となる。この関係式を式(1)に代入すると、

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n e^{i2\pi nt/T} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n e^{-i2\pi nt/T}, \quad (3)$$

$$A_n = \frac{a_n - ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi nt/T} dt \quad (4)$$

$$B_n = \frac{a_n + ib_n}{2} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{i2\pi nt/T} dt,$$

級数展開する際の総和を $-\infty$ から $+\infty$ として、式(3)を1つにまとめると、簡素な表現を得ることができる。

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i2\pi nt/T}, \quad (5)$$

$$C_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi nt/T} dt. \quad (6)$$

上式を複素フーリエ級数という。つまりフーリエ級数展開では、区間 $[-T/2, T/2]$ で定義される任意の時系列データ $x(t)$ は周期 T/n ($n=0, 1, 2, \dots$)の三角関数の波($e^{i2\pi nt/T}$)の和としてあらわされ、その波の振幅は式(6)により与えられる。図1にフーリエ級数展開の概念図を示した。

周期 T が有限の場合には、 T/n は n 次高調波の周期で、その逆数は周期 f_n である。ここで、 $f_n = n/T$ 、 $\delta f = 1/T$ と置いて、式(5)に代入し、 $T \rightarrow \infty$ とすると、

$$x(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi nt/T} dt \right\} e^{i2\pi nt/T} \quad (7)$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta f \left\{ \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i2\pi f_n t} dt \right\} e^{i2\pi f_n t},$$

すなわち、

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df, \quad (8)$$

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt. \quad (9)$$

上式をフーリエ変換と呼び、互いに逆変換の関係にある。

フーリエ級数における周期 T/n の波は、三角関数の合成から

$$a_n \cos \frac{2\pi nt}{T} + b_n \sin \frac{2\pi nt}{T} = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \cos \left(\frac{2\pi nt}{T} - \theta_n \right), \quad (10)$$

となるから、周期 T/n の波の振幅は $\sqrt{a_n^2 + b_n^2} = |C_n|$ 、位相は $\theta_n = \tan^{-1}(b_n/a_n)$ で与えられる。したがって、周期 T/n と周期 T/m の波の位相差($=\theta_n - \theta_m$)はゼロとはならないことに注意しよう。

2.3 スペクトルの定義

フーリエ級数では、任意の時系列信号が三角関数の和として表現できることを見てきた(図1参照)。分解された各周波数の波が、どれくらいのエネルギーを持つのかを知ることが、時系列信号を特徴づける上で有用であり、それがスペクトルである。

フーリエ成分 $X(f)$ は、式(6)、(9)から明らかのように

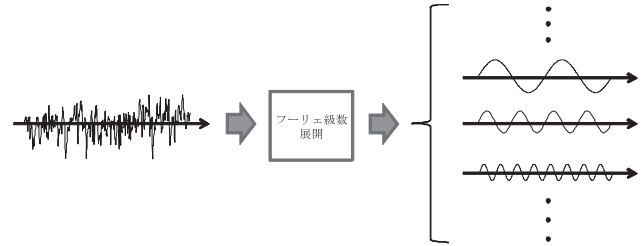


図1 フーリエ級数展開の概念図。

周期 f の波の振幅であり、 $|X(f)|^2$ はその波のエネルギーに対応する。フーリエ係数は、 $[-T/2, T/2]$ の範囲で算出されていることから区間 T を1周期と考え、周期 T での平均エネルギーを用いてパワースペクトル(密度関数)を定義する。

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} |X(f)|^2 \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} X(f) X^*(f) \right\}, \quad (11)$$

ここで、上付き添え字*は複素共役数をあらわす。図2にスペクトルの概念図を示した。縦軸に $P(f)$ 、横軸は周波数である。周波数 f_1 と $f_1 + \delta f$ の波が持つエネルギーは、 $P(f)df$ となり斜線部で示される。各周波数でどれだけ大きなエネルギーをもった波が存在し、それらの総和として全体の変動が構成されていることを理解することができる。すべての周波数からの寄与をあわせると(即ち、スペクトルと横軸で囲まれた部分の面積は)、変動 $x(t)$ の二乗平均値と等しくなる。これについては、後ほど触れる。

2.3.1 スペクトルの計算方法と留意点

実験や観測から得られたランダム信号 $x(t)$ は、有限時間の離散データとして収録される。したがってフーリエ変換(式(9))を行う際には、離散データを扱うことによるいくつかの制約をうける。以下には、スペクトルを計算する上での注意すべき点をまとめる。離散データの個数を N とすると、式(9)の有限離散フーリエ変換は、

$$X(k) = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \exp \left[-i2\pi \cdot \frac{k}{T} \cdot \frac{jT}{N} \right] \cdot \frac{T}{N}, \quad (12)$$

となる。ここで、離散周波数 k は $k=0, 1, 2, \dots, N/2$ 、 $\Delta t = T/N$ 、 $\Delta f = 1/T$ 、 $t = j\Delta t = j(T/N)$ 、 $f = k\Delta f = k/T = k/(N\Delta t)$ となる。ナイキスト周波数(後述)は、 $f_N = N/(2T) = 1/(2\Delta t)$ で与えられる。

(1) 区間 T の選定：ランダム変動では、解析区間 T を1周

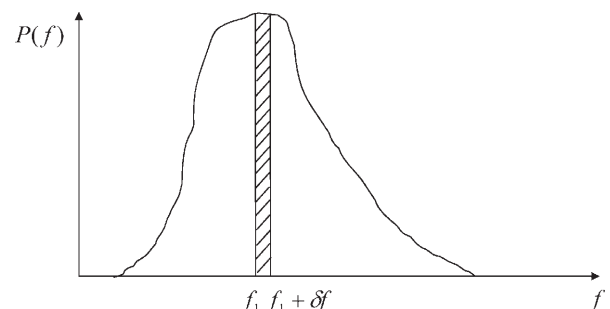


図2 スペクトルへの周波数帯 $[f_1, f_1 + \delta f]$ からの寄与。

期とみなしてスペクトルを計算する。その際に、 $x(t)$ がどれくらいの時間で変動しているかが T を決める指標になる。式(12)から、周波数 f と離散周波数 k の関係は $f=k/T$ となり、最も低周波の変動は $1/T$ となる。つまり、最も周期の長い変動が含まれるように区間 T を設定すればよい。

(2) **最高周波数の制約**：例えば、 $\Delta t=0.2$ sec でサンプリングされた周期 1 sec の波を考える。図 3 の白丸がサンプリング点、黒実線が対象とする波を表す。しかし、離散点の数が少ないと、実際には存在しない周期 $1/4$ sec の波も検知してしまう(波線)。これはエイリアシングとよばれる。また、真の変動を正確に捉えるための最高周波数は、 $f_N=1/(2\Delta t)$ までとなり、これをナイキスト周波数とよぶ。周波数範囲 f はナイキスト周波数より小さいという条件から k の範囲は、 $k \leq N/2$ となる。つまり、フーリエ成分の個数は、総データ数の半分になってしまうので、対象とする変動 $x(t)$ がどれくらいの小さな変動を含むのかによって、 Δt を決める必要がある。

(3) **離散データの収録**：データをパソコンなどを用いて取り込む際には、A/D ボードを用いてアナログデータをデジタル(離散)データに変換する。サンプリング時間 Δt とともに注意したいのは、データ分解能である。A/D ボードの入力が $0 \sim 10$ V で 12 bit の能力を持つ場合には、分解能は $10/2^{12} \approx 0.00244$ V となる。分解能を最大限に利用するために、入力信号を $0 \sim 10$ V 内の範囲で広く使用することである。入力信号の変動が 1 V であるなら 7 V 程度まで増幅してから A/D 変換するとよい。これは高周波でのスペクトルの分解能を改善することにつながる。

(4) **アンサンブル平均とウィンドー**：ランダム変動 $x(t)$ のスペクトルは区間 T で計算される。しかし、 $x(t)$ は周期関数ではないため、時刻の異なる区間 T でスペクトルを計算すると両者は一致しない。通常は時系列データ全体を時間 T の等区間に分割し、各々の区間で計算されたスペクトルをアンサンブル平均して計算される。アンサンブル平均の回数は、数十回程度が目安であるが、計算されるスペクトルが滑らかになるまで行うとよい。つまり、式(11)で定義したスペクトルは、ランダム変動を解析する際には、アンサンブル平均 $\langle \rangle$ を用いて、

$$P(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{T} |X(f)|^2 \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left\langle \frac{1}{T} X(f) X^*(f) \right\rangle, \quad (13)$$

と定義される。データ数が限られている場合には、スペク

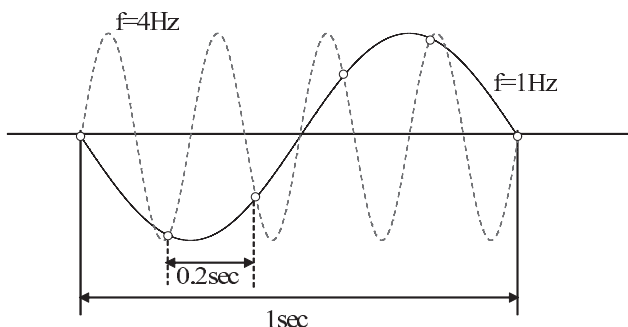


図3 エイリアシングとナイキスト周波数。

トルそのものを平滑化することも可能であるが、経験的にこの方法は推奨できない。

区間 T に限ってフーリエ変換することは、時系列 $x(t)$ に箱型のデータウィンドー $W(t)$ ：

$$W(t) = \begin{cases} 0 & : t < 0 \\ 1 & : 0 \leq t \leq T \\ 0 & : T < t \end{cases} \quad (14)$$

をかけた $x(t)W(t)$ の変換を行うことに相当する。 $W(t)$ のように急激に変化する関数はフーリエ級数で表現することが難しい。つまり、角部のある関数を滑らかな三角関数で近似することが困難であることを想像すればよいであろう。このような場合には、フーリエ級数は角部で振動を起こす(ギブス現象)ことになる。この影響がスペクトルに含まれないようにするために、 $W(t)$ を滑らかにコサイン型に減衰させることが提案されている(図4参照)。コサイン型ウィンドーを用いる場合には、 $x(t)$ の信号の大きさを変えてしまうことになるので、スペクトルの大きさを補正する必要がある。例えば、 $T/10$ 区間をコサイン関数として用いた場合には、スペクトルは $1/0.875$ 倍する必要がある。アンサンブル平均を行う場合には、このようなウィンドーを気にすることはない。

(5) **高速フーリエ変換(FFT)**：膨大なデータを効率よく計算するためには、FFTを用いる。その詳細は、文献([2,3])を参照されたい。FFTはサブルーチンパッケージとして提供されており、用いるプログラム言語にあわせて利用できる。また、その計算アルゴリズムから、データ個数 N が 2^n (n は整数)を満たす必要がある。FFTのサブルーチンでは、 $\Delta t (= T/N)$ を省略した演算

$$A_k + iB_k = \sum_{j=0}^{N-1} x(j) \left[\cos\left(2\pi j \frac{k}{N}\right) + i \sin\left(2\pi j \frac{k}{N}\right) \right], \quad (15)$$

が実行される。したがって、フーリエ係数 $X(k) = X_r(k) + iX_i(k)$ の実数部と虚数部はそれぞれ、 A_k と B_k に T/N を乗じて与えられる。

$$X_r(k) = \frac{T}{N} A_k, \quad X_i(k) = -\frac{T}{N} B_k, \quad (16)$$

式(13)からスペクトルは、

$$P\left(\frac{k}{T}\right) = \frac{T}{N^2} \langle A_k^2 + B_k^2 \rangle = \frac{\Delta t}{N} \langle A_k^2 + B_k^2 \rangle, \quad (17)$$

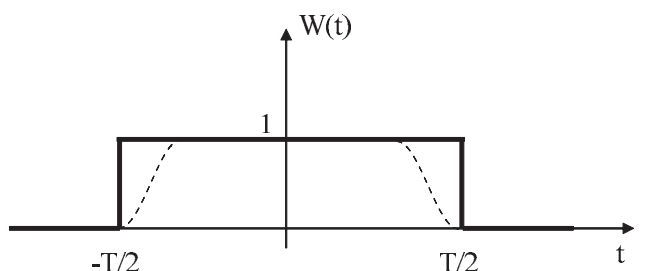


図4 箱型フィルタ(実線)とコサイン関数(波線)。

と与えられる。ここで、 $k/T=f$ である。

(6) **スペクトル計算の誤差**：スペクトルを計算する際に含まれる誤差は、主に有限長さの離散データを用いることに起因する。その詳細については割愛する[1]が、誤差を小さくするためには、まず、(i)データ長さは変動に含まれる大きな周期の数十倍から数百倍とる。これは、式(13)のアンサンブル平均の回数を多くすることに対応する。(ii)A/Dコンバータの分解能を有効に利用する。 $x(t)$ の細かな変動を十分に捕らえられるようにサンプリング周波数を決める。(iii)計測器に含まれるバックグラウンドノイズを小さくする。わずかこれだけのことに留意するだけで誤差は大幅に抑えられる。

(7) **スペクトルの周波数領域**：スペクトルの周波数領域は、 $-\infty < f < \infty$ として扱ってきたが、実験や観測データの解析では $0 < f < \infty$ とするほうが便利である。そこで、スペクトルの大きさを2倍にした $P'(f)=2P(f)$ を定義する場合がある。積分領域が $(-\infty, \infty)$ のスペクトル $P(f)$ をtwo-sided spectrum, $P'(f)$ をone-sided spectrumと呼ぶ[1]。いずれにしても、スペクトルがどの周波数帯で定義されているのか注意する必要がある。

以上、スペクトルを計算する上で、注意すべき点を簡略にまとめた。文章を読むだけでは、なかなか理解が進まないと思うが、実際にプログラムを作成したり、解析をする際の参考としていただきたい。

2.4 相関関数

2.4.1 自己相関

自己相関関数 $C(\tau)$ とスペクトルの関係を知るとスペクトルが変動 $x'(t)$ の時間情報を含むことが、より明確になる。 $x'(t)$ の平均値を μ とすると、変動 $x(t)=x'(t)-\mu$ に対する自己相関関数は以下に定義される：

$$C(\tau) = \overline{x(t)x(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t+\tau) dt. \quad (18)$$

ここで、上付きのバーは時間平均をあらわす。つまり、時刻 t での変動 $x(t)$ が τ だけ離れた時刻 $t+\tau$ における変動 $x(t+\tau)$ とどれくらいの関連があるのかを見積もることができる。ゆるやかに変動する $x(t)$ を想定すると、 τ が小さな場合には $x(t)$ と $x(t+\tau)$ はともに同じ符号を持っているので、両者の積の時間平均はゼロでない値を持つ。しかし、 τ が大きくなると、両者の符号はデタラメに変化するので、その積の時間平均はゼロに近づくことが期待される。 τ をプラスにとれば、自分自身の変動の未来とどれだけの関連をもつのか、マイナスにとれば過去との関連を定量化できることとなる。自己相関とは、己の過去・未来との相関の大きさをあらわしたものである。自己相関関数が t によらず τ のみの関数であるとき、 x は定常確率過程と定義される。本章の最初で、確率過程の「定常性」について触れたが、その定義は自己相関関数によってなされる。 $C(\tau)$ を $\tau=0$ の値で無次元化したものを自己相関係数という。

$$R(\tau) = C(\tau)/C(0) = \overline{x(t)x(t+\tau)/x(t)^2}. \quad (19)$$

したがって、 $R(0)=1$ となり、ランダム変動が時間 τ だけ離れたときの変動とどれだけ大きな相関を持つのかを示す統計量と考えられる。図5にプラズマ乱流中で計測された(付録A参照)、イオン飽和電流の自己相関係数を示す。グラフが振動しているのは、プラズマが周方向に回転していることから、飽和電流もその回転周期に合わせて変化するためである。例えば、三角関数の自己相関は周期的な変動を繰り返す。 τ が大きくなるに従ってその値がゼロに近づくのは、プラズマの回転周期が完全には一定でないため相関が小さくなることによる。自己相関関数は、式(18)から明らかなように偶関数($C(\tau)=C(-\tau)$)であり、 $\tau=0$ において最大値をもつ。自己相関係数が最初に x 軸と交わる時間遅れを τ_0 とする。 τ_0 は、イオン飽和電流の時間変動を特徴付ける時間スケールとなる。 $r=0$ mmと $r=8$ mmを比較すると、前者の τ_0 が大きくなっている。これは、プラズマ中心の変動が外縁に比べて緩やかに変動していることをあらわしている。

いま、 $X_T(\omega)$ を以下のように定義する($\omega=2\pi f$)。

$$X_T(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (20)$$

このとき、式(8)を式(18)に代入すると、

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[\int_{-\infty}^{\infty} X_T(\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega \right] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega\tau} \left[\int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{i\omega t} dt \right] d\omega, \end{aligned} \quad (21)$$

ここで、 $x(t)$ が区間 $[-T/2, T/2]$ 以外ではゼロであることを考慮すると、右辺の積分区間は $[-\infty, \infty]$ に置き換えられる。したがって、自己相関関数とスペクトルの関係が以下のように導かれる。

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi X(\omega) X^*(\omega)}{T} \right] e^{i\omega\tau} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_0^{\infty} S'(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \end{aligned} \quad (22)$$

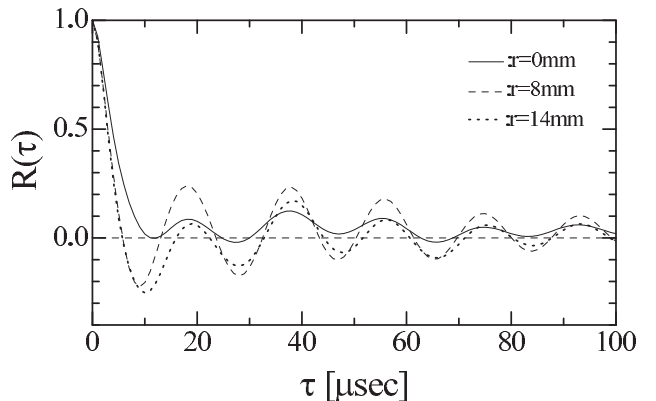


図5 イオン飽和電流の自己相関係数。 r はプラズマ中心からの距離をあらわす。

ここで、 $S(\omega)$ は式(11)に定義したスペクトルの周波数 f を角周波数 $\omega = 2\pi f$ に書き換えたものと等価である。 $S'(\omega)$ は one-sided スペクトルである。また、逆フーリエ変換をおこなえば、スペクトルから自己相関を求めることができる。このような両者の関係を Wiener-Khinchine の公式という[1, 4]。特に $\tau = 0$ の場合には、 $C(0) = \overline{x(t)^2}$ であるから、

$$\overline{x(t)^2} = \int_0^\infty S'(\omega) d\omega, \quad (23)$$

が成り立つ。スペクトルを計算する方法として、相関関数を計算してそれをフーリエ変換する方法がある。FFT アルゴリズムが開発される前には、この方法が用いられていたが、計算に膨大な時間を要する。また、FFT や相関関数を用いずに、全く異なった原理に基づく最大エントロピー法[5]がある。

式(23)は、 $x(t)$ の分散値がスペクトルに関連付けられることを示した重要な式である。図2との対応を考えると、スペクトルと x 軸とで囲まれた面積が分散値に等しくなる。その分散への寄与を周波数ごとに定量化したものがスペクトルと理解することができる。また、式(23)はスペクトルの計算結果をチェックするのに有効である。アンサンブル平均する前に各区間 T でのフーリエ変換の結果を用いて $x(t)$ の分散を計算し、時系列信号から直接に計算した分散と一致することを確認できるようにプログラムに組み込んでおくといよい。

図6には、プラズマ中のイオン飽和電流から計算されたスペクトルを示した。データは図5に示した自己相関に用いたものと同一である。スペクトルには約55 kHzで小さなピークが観察できる。これは、イオン飽和電流がプラズマの回転に伴い、準周期的に揺らいでいることを反映しているためと考えられる。スペクトルピークの大きさは、 $r=8$ mm で最も大きく、外縁や中心部では小さくなっている。自己相関関数の τ が大きなところでの変動の大きさが $r=8$ mm がもっとも大きいことにもよく対応している。

時系列 $x(t)$ が過去とも未来とも無相関の場合には、自己相関は $\tau = 0$ のみ存在する。数学的には、これはデルタ関数

と呼ばれる。デルタ関数のフーリエ変換は定数となるので、スペクトルも一定値となる。つまり、すべての周波数からの寄与が均等であることを意味する。よく知られた例は、白色雑音(ホワイトノイズ)がある。すべての周波数からの寄与が均等に混ざりあうことを“白色”と表現したものと考えられる。自己相関の型は多種多様であるが、しばしば見られるものに指数型がある。 $x(t)$ がマルコフ過程やポワソン分布に関連して生成される場合に観測され、 $C(\tau) = \exp(-a|\tau|)$ とあらわされる。このときスペクトルは、 $P(f) = 2a/(a^2 + 4\pi^2 f^2)$ となる。つまり、低周波では一定値： $P(f) \simeq 2/a$ 、高周波ではべき指数 -2 ($P(f) \propto f^{-2}$) で減衰する。

2.4.2 相互相関関数

相互相関関数は、二つのランダム変動 $x'(t)$ 、 $y'(t)$ の相関の大きさを定量的に特徴づけることができる。平均値を差し引いた変動を $x(t) = x'(t) - \mu_x$ 、 $y(t) = y'(t) - \mu_y$ とすると、自己相関と同様に次のように定義される。

$$C_{xy}(\tau) = \overline{x(t)y(t+\tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t+\tau) dt. \quad (24)$$

$$R_{xy}(\tau) = \frac{C_{xy}(\tau)}{C_x(0)C_y(0)} = \frac{\overline{x(t)y(t+\tau)}}{\sqrt{\overline{x^2}}\sqrt{\overline{y^2}}}. \quad (25)$$

相互相関関数は式(24)から明らかなように、 $C_{xy}(\tau) = C_{yx}(-\tau)$ を満たし、相関係数は $-1 \leq R_{xy}(\tau) \leq 1$ となる。相関係数は、二つの信号が τ の時間遅れをもったときにどれくらいの関連があるのかを定量化した指標である。また、結合確率密度関数(第3章)で説明する期待値 $E[f(x,y)]$ は、 $C_{xy}(0)$ と等価である。

時系列信号 $x(t)$ 、 $y(t)$ のフーリエ変換を $X(\omega)$ 、 $Y(\omega)$ とすると、スペクトルの定義に習い、以下のクロススペクトルが定義される。

$$S_{xy}(\omega) = \left\langle \frac{2\pi}{T} X^*(\omega) Y(\omega) \right\rangle \quad (26)$$

$\tau = 0$ の場合には、相互相関関数との関係が

$$C_{xy}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(\omega) d\omega, \quad (27)$$

と導かれる。つまり、クロススペクトルと相互相関関数は、フーリエ変換、逆フーリエ変換の関係にある。

フーリエ級数展開は時系列信号を三角関数波に分解する(図1参照)が、二つの信号の同一周波数の三角関数波が互いにどれだけの相関をもつかを定量化したものが、クロススペクトルである。相関係数は種々の周波数の変動成分の寄与から構成されたと考え、その周波数帯 $(\omega, \omega + d\omega)$ からの寄与 $S_{xy}(\omega) d\omega$ がクロススペクトルと理解できる。クロススペクトルは一般に複素数であり、 $S_{xy}(\omega) = K_{xy}(\omega) - iQ_{xy}(\omega)$ とあらわすと、 K_{xy} をコスベクトル、 Q_{xy} をクオドスペクトルと呼ぶ。コスベクトルは、相関関数のコサイン変換、クオドスペクトルはサイン変換として計算される。相関係数は実数であるから、式(27)ではコスベクトルの積分が相関係数となる。しかし、慣例的にはコスベクトル、クオドスペク

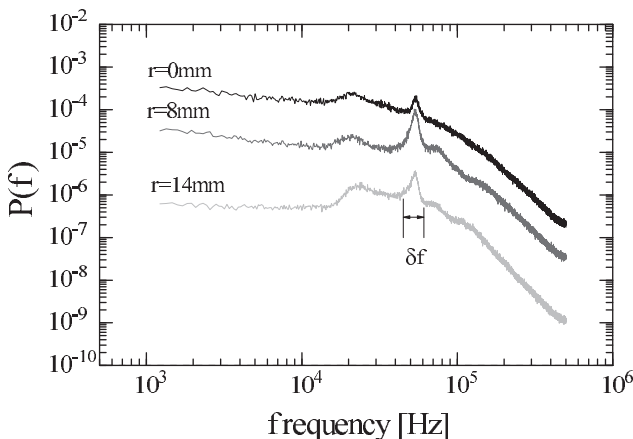


図6 イオン飽和電流のスペクトル。 r はプラズマ中心からの距離をあらわす。グラフが重ならないように、 $r=8$ mm は 1/10 倍、 $r=14$ mm は 1/100 倍してある。

トルに分けて用いることは少なく、クロススペクトルとして用いるようである。本章でも、特別に混乱しない場合には「クロススペクトル」を用いる。

各周波数の変動がどれくらいの相関を持つのかをより定量的に知るためにコヒーレンスが計算される。コヒーレンスは、2つの信号のフーリエ周波数成分の相関係数に相当して、 $0 \leq \text{coh}^2(\omega) \leq 1$ を満たす。

$$\text{coh}^2(\omega) = \frac{|S_{xy}(\omega)|^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)} = \frac{K_{xy}(\omega)^2 + Q_{xy}(\omega)^2}{S_{xx}(\omega)S_{yy}(\omega)}, \quad (28)$$

また、位相の差は $\theta_{xy}(\omega)$ により定量化される。

$$\theta_{xy}(\omega) = \tan^{-1} \left(\frac{Q_{xy}(\omega)}{K_{xy}(\omega)} \right). \quad (29)$$

図7 (a)には、プラズマ乱流中の異なる2点で計測されたイオン飽和電流のクロススペクトルの実部 (K_{xy}) を示す。1つのプローブを中心から2 mmの位置に固定して(固定プローブ)、他のプローブを半径方向に移動させた(移動プローブ)場合で、 Δr は2点間の距離をあらわす。約14 kHzでスペクトルが負に大きくピークを持っていることがわかる。これは、2点でのイオン飽和電流の変動に負の相関があり、それは主に特定の周波数(約14 kHz)によってもたらされていることをあらわしている。つまり、1点での飽和電流が平均値よりも大きな値を示した場合、他の一点では平均値よりも小さな値を示す可能性が大きいことが理解できる。このスペクトルのピークは、 Δr が10 mmよりも小さな場合に顕著であること、それよりも大きい場合には見られないことから、プラズマ中心部での現象に起因していると予想できる。図7 (b)には同一データの位相差 θ_{xy} を示した。スペクトルピークが確認された約14 kHzに注目すると、 Δr が小さな場合には負の位相遅れが存在するが、距離が大きくなるに従って正の位相遅れへと変化することがわかる。位相差は2つの波の時間遅れ $\tau_{xy} = \theta_{xy}/(2\pi f)$ に対応する。つまり、2点間での周波数約14 kHzの波は、半径位置によって時間遅れをもって観測され、それは半径方向へ移動するプラズマの流れがあることを示唆するものである。

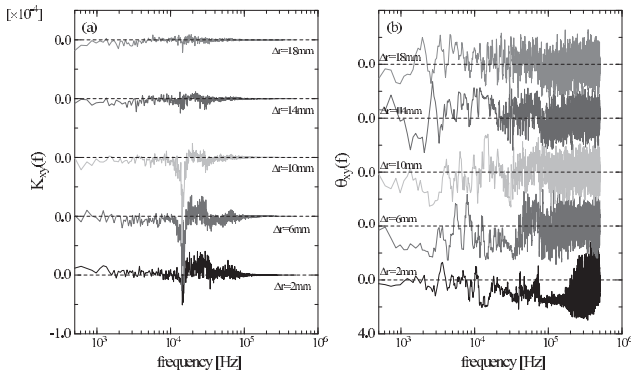


図7 (a) イオン飽和電流のクロススペクトルの実部。(b) イオン飽和電流の位相差。 Δr は2点間の距離をあらわす。

2.4.3 相関に基づく時間スケール

流体乱流の解析でよく用いられる時間スケールとして積分スケールがある。積分スケールは自己相関係数と x 軸とで囲まれる面積として定義される。そもそも、流体乱流中で計測される統計量(速度、圧力、温度など)に相関が存在するのは、乱流中の渦が関係している。1つの渦に含まれれば、計測量は時間的、空間的に何らかの相関をもつことが予想される。ある時間遅れで相関がゼロになることは、それ以上大きな時間スケールの渦が統計的には見いだせないことに相当する。したがって、自己相関係数を積分した T_L は、乱流中の平均的な大きさ(時間・空間)の渦スケールをとって理解されている。

$$T_L = \int_0^\infty R(\tau) d\tau. \quad (30)$$

しかし、図5に示した自己相関係数のように、周期成分が含まれている場合には、上式の積分がうまく収束しない。そのような場合には、式(22)を変形して以下のように算出される[6]。

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow 0} S'(\omega) &= 2 \int_{-\infty}^\infty C(\tau) d\tau = \frac{4}{x(t)^2} \int_0^\infty R(\tau) d\tau \\ &= \frac{4}{x(t)^2} T_L. \end{aligned} \quad (31)$$

自己相関係数は偶関数であるから、 $\tau=0$ での微係数はゼロである。しかし、2階の微分係数 $R''(0)$ は負の値を持ち、ゼロとならない。この結果を利用して、他の時間スケールが定義される。 $\tau=0$ において自己相関係数に接する放物線 $P(r)$ を考える。対称性を考えると、 $P(r) = 1 + R''(0)\tau^2/2$ と置くことができる。いま、時間スケールとして、マイクロスケール T_λ を以下に定義する。

$$T_\lambda = \frac{1}{\sqrt{-R''(0)/2}}. \quad (32)$$

つまりマイクロスケールは、自己相関係数に接する放物線

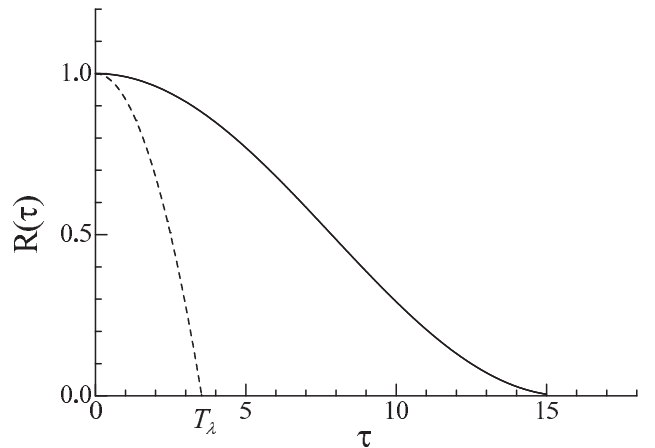


図8 自己相関係数(実線)とマイクロスケールの模式図。波線は自己相関係数に接する放物線、横軸と交わる時間スケールがマイクロスケールに相当する。

が横軸と交わる時間スケールとなる。\$\tau\$ が小さなところでは小さな渦の情報が反映されるから、小さなスケールの代表としてマイクロスケールがよく用いられる。自己相関係数は、時間遅れのみでなく、空間の距離 \$r\$ に対しても同様に定義される。その際に計算される積分スケールやマイクロスケールは、空間スケールとなる。流体乱流では、速度変動の自己相関係数が用いられることが多い。いま、\$x\$ 軸方向の変動速度を \$u\$ とすると、マイクロスケールは簡単な計算から次のように導かれる [7]。

$$\lambda_x = \sqrt{\frac{2u_{\text{rms}}^2}{(\partial u / \partial x)^2}}. \quad (33)$$

ここで、\$u_{\text{rms}}\$ は速度変動の標準偏差値 (root mean square) である。つまり、マイクロスケールは速度の微分値に直接に結びつけて考えることができる。プラズマ乱流でも、観測データから自己相関係数を計算することは容易であり、積分スケールやマイクロスケールも算出できる。これらのスケールがプラズマ乱流の物理とどのように関係するのには実に興味深い。

2.5 スペクトル解析の応用

時系列信号 \$x(t)\$ をフーリエ級数に展開し、スペクトルを計算する方法を説明してきた。時間信号を周波数空間で捉えることは、いくつかの利点と応用を可能にする。本章ではその一例を紹介する。

2.5.1 バンドパスフィルタ

図 6 には、プラズマ乱流中で計測された飽和電流のスペクトルを示した。変動中に周期成分が含まれると、スペクトルにはその周波数に対応してピークが現れ、計測データには約 55 kHz で小さなピークが存在する。物理現象をより深く理解するためには、特定の周波数を取り出したり、逆に除去することが行われる。このような操作をフィルタと呼ぶ。周波数 \$f_1\$ より高い周波数をカットするものがローパスフィルタ、\$f_2\$ よりも低い周波数をカットするものがハイパスフィルタである。両者を組み合わせると、\$f_2 \leq f \leq f_1\$ の周波数帯のみの変動を取り出すことができる。実験データを取り込むデータロガーには、あらかじめこのような電気回路が組み込まれているものが多い。また、数値的にこの操作を行うことも可能である。ランダム変動をいったんフーリエ級数表示して (式 (5)), 注目する周波数帯以外のフーリエ係数をゼロとすればよい。ただし、急激に係数をゼロに変化させることを避けるために重みづけをして滑らかに変化させることもある (図 4 と同様の考え方)。

図 9 には、\$r=6\$ mm において計測されたイオン飽和電流波形 (実線) およびバンドパスフィルタを通した波形 (赤波線) を示した。バンドパスフィルタは、図 6 のピーク周波数まわり \$\delta f\$ の領域に設定してある。このような操作を行うことにより、特定周波数帯の変動を抽出することができる。乱流変動の解析では、速度変動 \$\tilde{u}\$ を時間平均値 (\$U=\bar{u}\$) と変動 \$u'\$ に分解することが行われる；\$\tilde{u} = U + u'\$。これをレイノルズ分解と呼ぶ [7]。速度成分に何らかの周期成分が含まれている場合には、変動成分はさ

らに周期成分 \$u_c\$ と非周期成分 \$u_r\$ に分けられる：\$\tilde{u} = U + u' = U + u_c + u_r\$。これを三成分分解と呼び、周期成分は流動場における大きな構造と関連づけるが可能となり、現象の理解に役立つ。これについては、第 4 章で解説する。

2.5.2 数値微分

離散データとして収録された観測値を微分する必要に迫られることがある。数値解析の本には、中心差分や重みづけをした最小二乗近似式を用いることを説明してある [8]。しかし、フーリエ級数展開を用いると、容易に数値微分を計算できる。式 (5) の両辺を時間で微分すると、

$$\frac{dx(t)}{dt} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n \frac{2\pi n i}{T} e^{i 2\pi n t / T}. \quad (34)$$

つまり、いったん \$x(t)\$ のフーリエ級数展開を作ってしまうと、係数に \$2\pi n i / T\$ を乗じて和をとったものが時刻 \$t\$ における微係数 \$dx/dt\$ を与える。例えば、第 3 章で計算する条件つき統計量 \$\langle x^2 | x = \xi \rangle / \langle x^2 \rangle\$, \$\langle \dot{x} | x = \xi \rangle / \langle \dot{x}^2 \rangle\$ などこの方法を用いて計算したものである。

2.5.3 Pre-Multiplied Spectrum (PMS)

スペクトルをグラフに表示する際には、その周波数帯が非常に大きいので、両対数プロットが用いられる。式 (23) に示したように、スペクトルを周波数で積分した値は、変動の分散値に等しくなる。しかし、対数プロットされた場合には、この分散値への各周波数からの寄与をグラフから正しく読み取ることは難しい。そこで、横軸が対数表示された場合にも、スペクトルと横軸とで囲まれた面積が分散値に比例して対応するように式変形をすると、

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \omega S(\omega) d \log(\omega), \quad (35)$$

となる。ここで、\$S_{\text{PMS}} = \omega S(\omega)\$ を Pre-Multiplied Spectrum (PMS) と定義する。縦軸は通常表示とすると、PMS と横軸との面積が変動の分散値へのその周波数帯からの寄与として把握できる。図 10 は、プラズマ乱流中のイオン飽和電流の PMS を半径からの距離を変えてプロットしたものである。各測定位置において、周波数ピークへの寄与の大きさが明確にわかる。また、高周波では中心から離れるに従って、スペクトルの減衰が顕著であることがわかる。測定点を稠密にとれる場合には、PMS の等値面を書くことができる。図 11 は乱流境界層中で計測された速度変動の PMS を壁からの距離 (\$y\$) に対してプロットした結果である (乱流境界層については 4 章で説明する)。この図からは、壁からどの位置において、どの周波数帯で大きなエネルギーをもった運動が存在しているのかが一目でわかる。流体乱流の研究では、近年この PMS を用いた研究が注目されている [10, 11]。

2.6 相関関数の応用

乱流中の 1 点にプローブを固定し (固定プローブ)、そのまわりに他のプローブを配置して移動させ (移動プローブ)

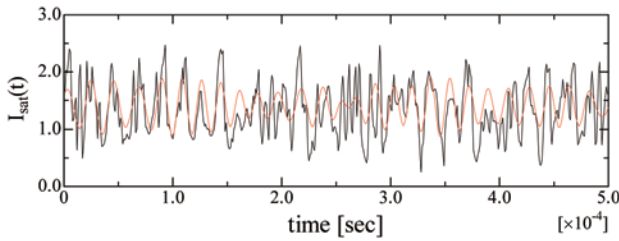


図9 $r=6\text{ mm}$ において計測されたイオン飽和電流波形（実線）およびバンドパスフィルタを通した波形（赤波線）。バンドパスフィルタは、図6のピーク周波数まわり δf の領域に設定してある。

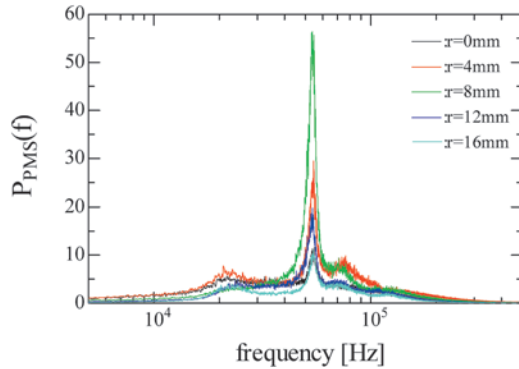


図10 中心からの距離 ($r\text{ mm}$) を変えながら計測されたイオン飽和電流の PMS.

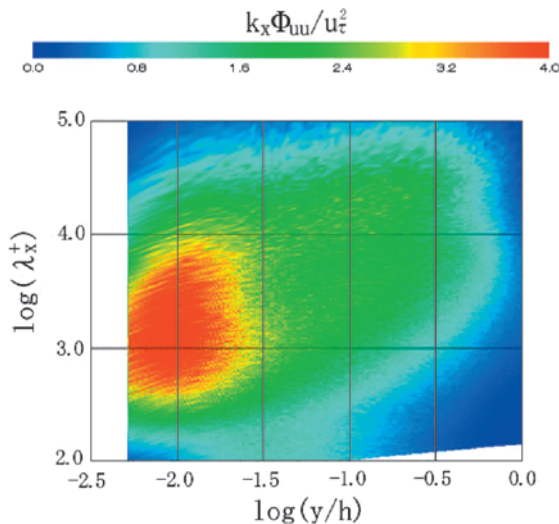


図11 乱流境界層中で計測された速度変動の PMS 等値面。 y は壁からの距離を境界層の厚さ h で無次元化した。また、縦軸は周波数の逆数（すなわち、波数）をとってある。

ブ)、二点相関の等値面を調べることがある。これは、注目した点まわりに、平均的にどれくらいの構造が存在するかを知るために有効である。あくまでも平均的な構造を知るためであり、瞬間的な現象や確率的に小さな事象については、長時間平均をする際に埋もれてしまうので、相関図からは把握することはできない。プローブ計測では時系列データしか得られないが、2点での時間をずらしたり進めたりしながら、空間内での相関の等値面を描くことができる。これらを時空間相関と呼ぶ。位置 (x, y) で観測されるイオン飽和電流の変動（時間平均値を差し引いた値）を

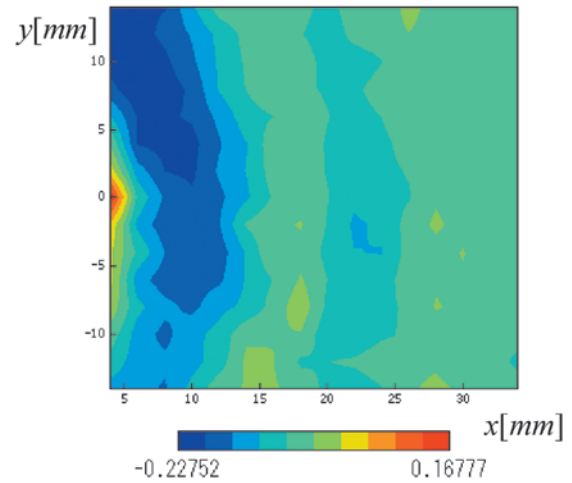


図12 イオン飽和電流の時空間相関 ($\tau=0$) の等値面。計測領域は付録 A を参照のこと。

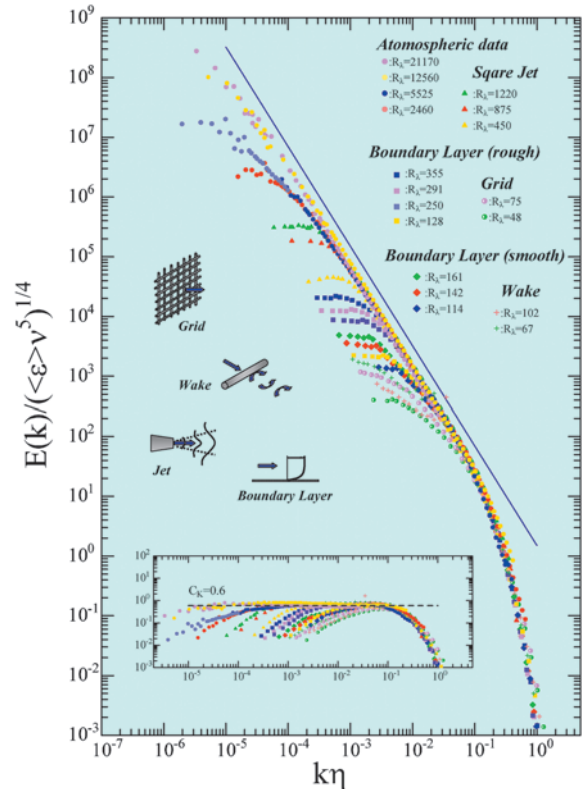


図13 乱流中のエネルギースペクトル[14].

$I_{\text{sat}}(x, y, t)$ と置くと、時空間相関係数は以下のように定義される。

$$R_{\text{isat}}(\tau) = \frac{\overline{I_{\text{sat}}(x, y, t) I_{\text{sat}}(x', y', t + \tau)}}{\sqrt{\overline{I_{\text{sat}}(x, y, t)^2}} \sqrt{\overline{I_{\text{sat}}(x', y', t)^2}}} \quad (36)$$

図12には、 $(x, y) = (2, 0)$ に固定プローブを設置し、移動プローブをその近傍の約 30 mm 四方の領域で移動させながら計測した、時間遅れゼロ ($\tau = 0$) の結果を示した。計測領域については、付録 A を参照されたい。固定プローブと移動プローブが近接している場合には、高い正の相関値が観測されるが、移動プローブが離れると負の相関が観測される。この負の相関の領域では、飽和電流のスペクトルに

顕著なピークが見られ、プラズマが回転もしくは振動していると考えられる。相関の等値面は、注目した点周りにどれくらい相関の大きな領域が広がるのかを把握することができる。相関の大きな領域には、何らかの構造が存在することを予測させる。しかし、これらはあくまでも平均的な描像であることを注意しなければならない。

2.7 流体乱流のスペクトル解析の例

流体乱流の実験や観測では、時系列データの統計性を知るためにスペクトルが広く利用されてきた。その中で、Kolmogorov が提示した乱流の小スケール運動に関する普遍性を描写する概念には、スペクトルが利用されている。

Kolmogorov は単位質量あたりに伝えられる平均的エネルギーと粘性係数 ν が支配パラメータであるとの直感に基づき、次元解析から以下の関係式を導いた[12, 13]。渦のスケールは波数 k [1/m]であらわされ、そのスケールの渦が持つ単位質量あたりの1次元エネルギースペクトル密度 $E(k)$ は、普遍関数 ϕ により記述される

$$E(k)/[u_\eta^2 \eta] = E(k)/[(\epsilon)\nu^5]^{1/4} = \phi(k\eta), \quad (37)$$

ここで、 $u_\eta = (\langle \epsilon \rangle \nu)^{1/4}$ [m/s], $\eta = (\nu^3 / \langle \epsilon \rangle)^{1/4}$ [m]であり、最小渦の速度および長さスケールと考えられている。 $\langle X \rangle$ は X の平均をあらわす。図13には実験より得られたデータを基に計算したスペクトルが表示されている。流体乱流では、乱流がどれだけ発達しているかを示す指標としてレイノルズ数 Re が定義される。レイノルズ数は、慣性力と粘性力の比： $Re = (\text{慣性力}) / (\text{粘性力})$ として定義される無次元数である。流体の持つ粘性力に対して外部から加わる慣性力が大きいと（すなわち、レイノルズ数が大きいと）、流体はより発達した乱流となる。レイノルズ数は長さスケールとしてTaylorのマイクロスケール（ $\lambda \equiv \sqrt{u'^2 / (\partial u / \partial x)^2}$ ：小さな渦をあらわす一つの指標）、速度スケールとして変動速度の標準偏差に基づき、 $R_\lambda \equiv \lambda u' / \nu$ と定義する。室内実験の種類については、図中のポンチ絵が役に立つだろう。大きなスケールを誘起するためには、格子を用いたり（格子乱流）、固体壁上に流れをつくったり（乱流境界層）、ノズルから直接噴出したり（噴流）、障害物をおいたり（後流）している。このようにしてつくられる大きなスケールの渦は、互いにまったく異なった個性を持っていることは容易に想像できよう。しかし、 $k \simeq 1/\eta$ 付近では、スペクトルの形はほぼ同一の曲線上に載っている。つまり、式(37)の関数 ϕ の存在を示唆しており、細かなスケールについての普遍的構造が実現されている。

大きなスケールについてはどうだろうか？ Kolmogorov 仮説に従うと、式(37)の関数 ϕ は、 $\phi(k\eta) = C_k \cdot (k\eta)^{-5/3}$ となる。 $-5/3$ 乗則の成立を期待して、 $k\eta \leq 0.1$ を眺めてみると、残念ながら R_λ が小さな場合にはそれが実現されていない。挿入図は、縦軸： $E(k)/[(\epsilon)^{2/3} \cdot k^{-5/3}]$ であり、 $-5/3$ 乗のべき乗則の範囲では一定値 C_k になる。おおよそ R_λ が300よりも大きくなると、 $C_k \simeq 0.6$ の一定になる領域を見出すことができる。このような普遍性の成り立つ範囲を慣性小領域という。乱流速度変動の普遍性については、

改めてまとめることとしたい。

流体解析では、速度変動の二成分を用いてクロススペクトルが計算される。せん断がある流れ場での流れ方向速度 u とせん断がある軸方向の速度 v を用いると、次元解析から $-7/3$ 乗のべき指数を持つことが予想される。実際に、多くの観測や実験ではその指数が観測されている[15]。慣性小領域よりも小さなスケールでは、流体の粘性によりエネルギーは消散される。このような小スケールでは、速度変動は互いに等方的となり、その相関はゼロとなる。この様子は、コヒーレンスにより理解されよう[15, 16]。慣性小領域では正の値を持ったコヒーレンスは、粘性領域ではゼロ近くを変動する。

2.8 プラズマ乱流のスペクトル解析の例

これまでにランダム変動の二次モーメント（相関関数）のフーリエ変換がエネルギースペクトルとなることをみてきた。確率密度関数は第3章で述べる予定があるが、ランダム変動の特徴づけには、より高次のモーメントを利用することが不可欠である。スペクトルに関しても自然な拡張で、三次相関、四次相関のフーリエ変換として、バイスペクトルやtrispectrumが定義される。

三次相関 $R(\tau_1, \tau_2)$ のフーリエ変換をバイスペクトルと定義する。

$$B(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} R(\tau_1, \tau_2) e^{-i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2, \quad (38)$$

$$R(\tau_1, \tau_2) = \overline{u(t)u(t+\tau_1)u(t+\tau_2)}. \quad (39)$$

$u(t)$ が速度変動などの実数で定常過程とすると、バイスペクトルには ω_1, ω_2 に関するいくつかの対称性が備わっており、それを利用すると、

$$B(\omega_1, \omega_2) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle F(\omega_1)F(\omega_2)F(\omega_3) \rangle}{T}, \quad (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0), \quad (40)$$

$$u(t) = \int_{-T/2}^{T/2} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad (41)$$

となる。 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ の場合には、三次モーメント $\langle u(t)^3 \rangle$ への各周波数 (ω_1, ω_2) からの寄与の大きさを知ることができる。

$u(t)$ の確率分布がガウス分布の場合、三次モーメントはゼロとなる。したがって、バイスペクトルもゼロとなる。また、式(40)からわかるように、バイスペクトルは二つの波の二次的非線形干渉の程度を表すと考えられる。つまり、二つの波が決まると三つ目は自ずと決まることになり、複雑な非線形現象の力学機構を知る手がかりとなる。最近、プラズマ乱流の解析でバイスペクトルが用いられる[17]。

図6に観察されたイオン飽和電流のスペクトルピークが、他の周波数とどのような相互作用があるのかを調べるためにバイスペクトルを計算した（図14）。 ω_3 をピーク周波数55 kHzに固定すると、 $\omega_1 + \omega_2 = 2\pi \times 55$ kHzとなる。したがって、 ω_1 のみ決めれば、 ω_2 は一意に決まる。バ

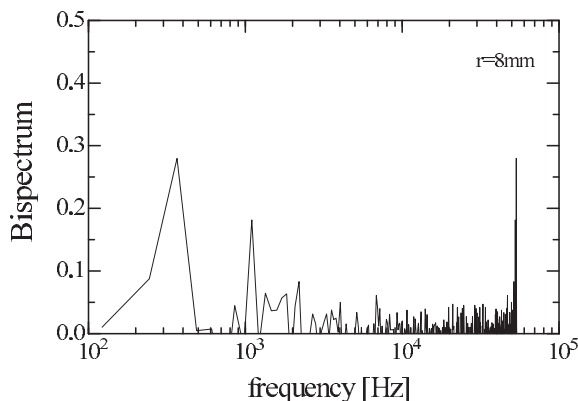


図14 $r = 8 \text{ mm}$ におけるイオン飽和電流のバイスペクトラム. 図6でのピーク周波数 55 kHz に ω_3 を固定した場合.

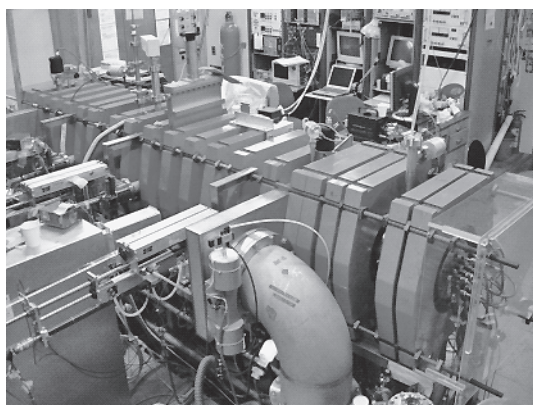
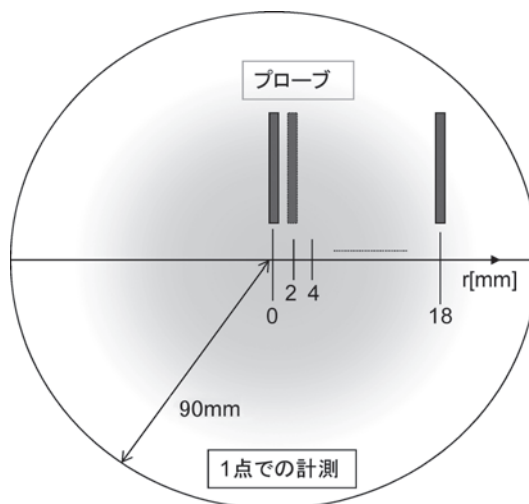


図15 直線型ダイバータ模擬実験装置：NAGDIS-II.

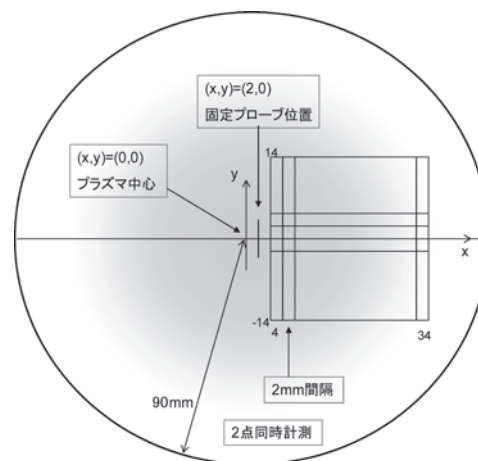
スペクトルは、ピーク周波数あたりの変動と関連があるようであるが、これは図6のスペクトルピークがシャープではなく広がりを持つためと考えられる。一方、 300 Hz 程度の周波数とも関連が示されるが、その物理的解釈は、今後進めていきたい。

付録A：プラズマデータ

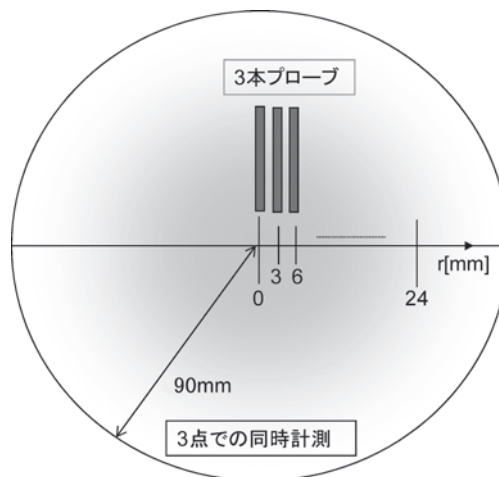
解析に用いたプラズマデータは、名古屋大学工学研究科大野研究室に設置された直線型ダイバータ模擬実験装置NAGDIS-IIを用いて測定された。装置は放電部、プラズマテスト部により構成され全長および内径は、それぞれ約 2.5 m と 0.18 m である。生成される磁場強度は最大で 0.25 T である。プラズマは外部加熱型熱陰極を用いたTP-D型直流放電によって生成される。テスト部における代表的なプラズマパラメータは、ヘリウムプラズマに対して電子密度 $n_e < 10^{20} \text{ m}^{-3}$ 、電子温度 $< 10 \text{ eV}$ である。小口径の電的に浮いた中間電極（内径 20 mm ）と接地された陽極（内径 24 mm ）を用いることで中性ガスのコンダクタンスを下げ、かつ 2000 liter/sec の排気が可能で2台の大容量複合ターボ分子ポンプを用いてプラズマテスト部を排気することで放電部圧力が数百 mTorr 程度であるのに対して、プラズマテスト部圧力は数 mTorr という高い中性ガス圧力差を実現している。これにより、安定したプラズマ源によって非接触再結合プラズマに関する実験を行うことが可能で



図A-1 装置断面内でのプローブ配置1.



図A-2 装置断面内でのプローブ配置2.



図A-3 装置断面内でのプローブ配置3.

ある。計測プローブは直径 0.4 mm のタングステン棒を先端だけ出し、セラミックでコーティングしたものを使用している。探針計測ではバイアス電圧 $\sim 100 \text{ V}$ をかけてイオン飽和電流を測定、これにより密度を計測した。サンプリング周波数は 1 MHz である。

データは以下の3つの条件で計測を行った。

- (1) 1点での電位および密度の同時計測 半径90 mmの円筒管装置内に圧力4 m Torrでプラズマが封入してある。このプラズマの電位および密度の時間変化を、静电プローブを用いて計測した。装置断面の中心を原点として、半径方向の位置を r とすると、測定箇所は中心から2 mmずつ、 $r=20$ mmまで計10点、サンプリング周期は1 μ sec、計測点数は 10^6 である。
- (2) 平面格子上で2点同時計測 2つのプローブを用いたプラズマ密度の同時計測を行った。装置中心を原点として、水平方向に x 軸、垂直方向に y 軸をとる。このとき、1つのプローブを $(x, y)=(2, 0)$ に設置して、他のプローブを格子上で2 mm間隔で移動させて、固定プローブと同時に全240点計測した。サンプリング周期は1 μ sec、計測点数は 5×10^4 である。
- (3) 三点での密度の同時計測 3つのプローブを互いに3 mm離して設置し、3点のプラズマ密度の同時計測を行った。プローブ位置は $r=0$ mmから $r=24$ mmまで、3 mm刻みで4セットの計測をおこなった。(1)プローブは $r=0, 3, 6$ mmに設置、(2)プローブは $r=6, 9, 12$ mmに設置、(3)プローブは $r=12, 15, 18$ mmに設置、(4)プローブは $r=18, 21, 24$ mmに設置した。サンプリング周期は1 μ sec、計測点数は 10^5 である。

参考文献

- [1] 日野幹雄：スペクトル解析（朝倉書店，1989）第17刷。
- [2] *Numerical Recipes in FORTRAN 77*, 2nd Edition (Cambridge University Press, 1992).
- [3] *Numerical Recipes in C* [日本語版] (技術評論社，1988)。
- [4] 日野幹雄編集：スペクトル解析ハンドブック（朝倉書店，2004）。
- [5] 常盤野和男，大友詔雄，田中幸雄：最大エントロピー法による時系列解析（北海道大学図書刊行会，2002）。
- [6] O.J. Hinze, *Turbulence*, (McGraw-Hill Classical Textbook Reissue Series, 1975).
- [7] S.B. Pope, *Turbulent Flow* (Cambridge Univ. Press., 2000).
- [8] 桑原邦郎，河村哲也：流体計算と差分法（朝倉書店，2005）。
- [9] 河合勇太，辻 義之，久木田 豊：日本機械学会論文集（B編），72, 915 (2006).
- [10] J. Jimenez, Alamo Del and O. Flores, *J. Fluid Mech.* **505**, 179 (2004).
- [11] N. Hutchins, I. Marusic, *J. Fluid Mech.* **579**, 1 (2007).
- [12] *Kolmogorov in Perspective*, History of Mathematics, vol.20, American Mathematical Society, (2000).
- [13] K.R. Sreenivasan and R.A. Antonia, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **29**, 435-472, (1997).
- [14] パリティ乱流特集号 17, No.10, (2002).
- [15] S. Saddoughi and S.V. Veeravalli, *J. Fluid Mech.* **268**, 333 (1994).
- [16] A.S. Monin and A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics*, volume 2, Cambridge, MA: MIT Press, (1975).
- [17] T. Yamada, S.-I. Itoh *et al.*, *Nature Physics* **4**, 721 (2008).