



1. プラズマ衝撃波の基礎物理

1.3 衝撃波から見たプラズマの特性

大澤 幸治

名古屋大学

(原稿受付：2006年11月7日)

高温プラズマにおける衝撃波を理解するうえで必要な基礎的事柄を述べる。最初に、地球大気と比較しながら、プラズマ中の二体衝突（クーロン衝突）の特徴を説明し、高温プラズマでは衝突が極端に少ないことを示す。次に、高温プラズマを記述する様々なモデル、すなわち、ブラソフ（Vlasov）方程式（運動論的方程式）、（一流体の）磁気流体力学、二流体モデル、および三流体モデルについて概観する。さらに、具体例として、磁場に対して直角に伝播する磁気音波の線形分散関係式がこれらのモデルでどのような形となるかを説明する。

Keywords:

high-temperature plasma, Coulomb collision, Vlasov equation, magnetohydrodynamics, two-fluid model, three-fluid model, magnetosonic wave, dispersion relation

1.3.1 はじめに

プラズマの強い流れがあると、それが周囲の媒質と衝突する場所で衝撃波が生ずる。太陽から流れ出るプラズマ流（太陽風）が秒速400-500 kmの速さで地球磁気圏でぶつかる場所にバウショックとよばれる衝撃波ができることはよく知られている。超新星爆発で高密度・高速の物質が星間空間のプラズマの中で膨張していくときにも大規模な衝撃波が球殻状にでき、その衝撃波の後方には広大な高温プラズマ領域が形成される。1.3節では、大学の学部学生や大学院初級学生のために、高温プラズマ中の衝撃波を理解するうえで必要となる基礎的事項について述べ、1.4節で非線形波動と衝撃波について述べる。

1.3.2 高温プラズマにおける粒子衝突

2つの粒子の衝突を考えよう。それら2つの粒子が中性粒子（それぞれの半径を a と b とする）であるなら、その散乱断面積 σ は

$$\sigma \sim \pi(a+b)^2, \quad (1)$$

程度である。これは直観的にも明らかであろう。粒子間の距離が $a+b$ より長ければ、2つの粒子はほとんど相互作用なしに通り過ぎると思ってよい。しかし、両者がそれより近づこうとすると強い斥力が働く。一方、2つの粒子が電荷 q_1 と電荷 q_2 を持つ荷電粒子であるならば、粒子間距離 r がそれぞれの粒子半径の和 $a+b$ より十分に大きくても、2つの粒子は力を及ぼしあう。それらの間に働くクーロン力の大きさ F は

$$F \sim \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (2)$$

である。荷電粒子同士は遠距離相互作用を行う。

散乱の結果、曲げられる角度 α は粒子間の距離（正確にいうと衝突径数 ρ ）が大きいほど小さくなる（図1参照）。一方の粒子が原点に静止しているとして、他方の粒子（質量 m ）が1回の衝突で 90° 以上曲げられる散乱断面積は

$$\sigma \sim \pi\rho_\perp^2, \quad (3)$$

と書くことができる。ここで、無限遠における粒子 m の速度を v_0 とおいて、 ρ_\perp は

$$\rho_\perp = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 m v_0^2}, \quad (4)$$

である。これは次のように書き直すことができる

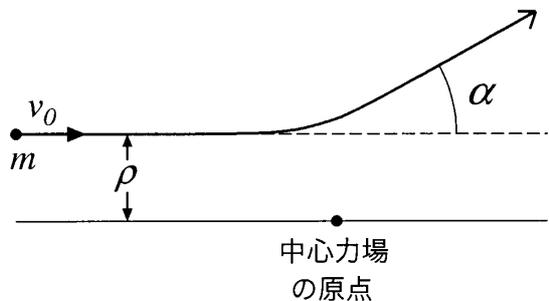


図1 中心力場における質量 m の粒子の軌道。 v_0 は無限遠における速度、 ρ は衝突径数、 α は散乱角度。

$$\frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 \rho_{\perp}} = m v_0^2. \quad (5)$$

すなわち、粒子同士が最接近したときにポテンシャルエネルギーが（無限遠における）運動エネルギーと同じ程度になるようであるならば、 90° 程度曲げられる。ここで、散乱断面積は v_0^4 に逆比例することに注意しよう。 v_0 が大きくなると σ は急激に小さくなる。高速で走る荷電粒子の散乱断面積は非常に小さく、他の荷電粒子に非常に接近しないと 90° 以上曲げられないのである。

荷電粒子の散乱は原子物理学の歴史にも重要な意味を持つ。20世紀の初頭では、原子の中で正電荷は一樣に広がって存在しているという見方が有力であった。しかし、Rutherfordは1911年に荷電粒子の散乱の式を導き、アルファ線を金属箔にあてて散乱させる実験をその理論と比較して、原子の中で正の電荷が中心部に局在していると結論した。実験では高速のアルファ線で後方に散乱されるものがあるが、そのような散乱は、正電荷が原子の大きさ程度に広がっているのでは難しく、極く狭い領域に集中していなければ起こらないのである。

荷電粒子の集まりであるプラズマの中の散乱も上記のクーロン散乱の集合として捉えることができる。高温プラズマでは1回の衝突で 90° 以上曲がるよりも、小角散乱の積み重ねで 90° 以上曲がる確率のほうが高く、それを考慮するとプラズマ中での散乱断面積は

$$\sigma \sim \pi \rho_{\perp}^2 \ln \Lambda, \quad (6)$$

と書くことができる[1]。ここで、 $\Lambda \sim \lambda_D / \rho_{\perp}$ (λ_D はデバイ長)、 $\ln \Lambda$ はクーロンロガリズムとよばれる。高温プラズマでは大体 $\ln \Lambda = 10 \sim 20$ 程度である。

高温プラズマのもう一つの特徴は、粒子間の衝突頻度が極端に小さいということである。

比較のためにまず地球大気を見てみよう。地表付近の大気では分子の個数が $2.7 \times 10^{19} \text{ cm}^{-3}$ 、平均自由行程が $\sim 7 \times 10^{-6} \text{ cm}$ である。ちなみに、音波の速度は $3.3 \times 10^4 \text{ cm s}^{-1}$ 程度であるから、2,000 Hzの音波の波長は $\lambda = 17 \text{ cm}$ である。平均自由行程は音波の1波長よりもずっと短い。地球大気は非常に衝突頻度が高く、平均自由行程の短い気体である。

プラズマ中の電子の平均自由行程 l_m は式(6)より

$$\frac{l_m}{\lambda_D} \sim \frac{1}{n\sigma} \frac{1}{\lambda_D} \sim a \frac{n\lambda_D^3}{\ln \Lambda}, \quad (7)$$

と書くことができる（無次元量とするために平均自由行程をデバイ長 λ_D で割っている）。ここで、 $v_0 \sim v_{Te}$ （電子の熱速度）とおいた。数値係数 a は 10^2 のオーダーである。上の式には $n\lambda_D^3$ という量が現れているが、これは高温プラズマでは非常に大きな値

$$n\lambda_D^3 \gg 1, \quad (8)$$

となる。平均自由行程 l_m は非常に長い。

高温プラズマとは定量的にいえば、粒子1個の平均的運

動エネルギー（ $\sim T$ ）が粒子間の平均距離 r_0 のポテンシャルエネルギー（ $\sim e^2/4\pi\epsilon_0 r_0$ ）よりもずっと大きい

$$T \gg \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_0}, \quad (9)$$

ということである。式(9)より直接式(8)を導くことができる。具体的に、 $n \sim 10^8 \text{ cm}^{-3}$ 、 $T \sim 100 \text{ eV}$ では（これは太陽コロナのパラメータである）、 $\lambda_D \sim 0.7 \text{ cm}$ で、 $n\lambda_D^3 \sim 3 \times 10^7$ であり、平均自由行程は $l_m \sim 10^{14} \lambda_D$ という巨大な量となる。

熱速度よりもずっと大きな速度を持つ粒子があったとしても、地球大気中では平均自由行程 $\sim 7 \times 10^{-6} \text{ cm}$ 程度動く間にその速さはすぐに大部分失われ、熱速度程度になってしまうであろう。しかし、太陽コロナ中では100万 km 走っても衝突をせず、そのまま惑星間空間に脱出する可能性が極めて高い。

平均自由行程のこの大きな差は、大気中の衝撃波と高温プラズマ中の衝撃波との本質的な違いをもたらす。衝突が無視できるほど少ない高温プラズマを無衝突プラズマとよび、その中での衝撃波を無衝突衝撃波（collisionless shock wave）とよぶ。

1.3.3 運動論的方程式と流体的方程式

粒子の位置 \mathbf{x} と速度 \mathbf{v} に関する分布関数 $f_j(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ (j は粒子種を表す)の変化は Boltzmann 方程式

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_j}{m_j} \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial f_j}{\partial t} \right)_c, \quad (10)$$

で記述される。右辺が衝突による分布関数の変化を表す。地球大気のような衝突頻度の高い気体は右辺の衝突項の寄与が大きく、一方、無衝突プラズマでは、衝突項をゼロとおいたブラソフ方程式

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{x}} + \frac{q_j}{m_j} \left(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \cdot \frac{\partial f_j}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (11)$$

が使われる[2, 3]。これらは運動論的方程式ともよばれる。式(10)または式(11)をマクスウェル(Maxwell)方程式と組み合わせればプラズマの振る舞いがわかる。しかし、多くの場合、それを解くのは解析的にも数値的にもむずかしいので、より扱いやすい流体方程式がよく用いられる。

流体方程式に現れる密度は

$$n_j(\mathbf{x}, t) = \int f_j d\mathbf{v}, \quad (12)$$

速度は

$$\mathbf{v}_j(\mathbf{x}, t) = \int \mathbf{v} f_j d\mathbf{v} / n_j(\mathbf{x}, t), \quad (13)$$

で与えられる。式(10)より、連続の式

$$\frac{\partial n_j}{\partial t} + \nabla \cdot (n_j \mathbf{v}_j) = 0, \quad (14)$$

および運動方程式

$$m_j n_j \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \right) \mathbf{v}_j = n_j q_j (\mathbf{E} + \mathbf{v}_j \times \mathbf{B}) - \nabla p_j - \sum_k m_j n_j \nu_{jk} (\mathbf{v}_j - \mathbf{v}_k), \quad (15)$$

を得る。ただし、分布関数がマクスウェル分布に近いとして圧力 p_j の形などを単純化している。右辺の最後の項は他の粒子種 k との衝突による運動量変化を表す。 ν_{jk} は粒子種 j と k との衝突周波数である。圧力 p_j には、例えば、断熱圧縮の式

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_j \cdot \nabla \right) p_j = -\gamma_j p_j \nabla \cdot \mathbf{v}_j, \quad (16)$$

を用いれば方程式は閉じる。ここで γ_j は比熱比である。

電子と1種類のイオンから構成されるプラズマではそれぞれに対する(すなわち2組の)式(14)-(16)とマクスウェル方程式とを組み合わせる理論を組み立てることができる。これを二流体モデル (two-fluid model) とよぶ。

二流体モデルをさらに単純化して、プラズマを1つの流体として記述するのが(一流体の)磁気流体力学 (Magnetohydrodynamics; MHD) である[4]。MHDでは質量密度を ρ とおいて、運動方程式が

$$\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p, \quad (17)$$

の形になる。さらに、電場と速度は

$$\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} = 0, \quad (18)$$

の関係を満たす。(これは Ideal MHD で、右辺に抵抗の効果を入れるのが Resistive MHD である。) MHD が取り扱うのは、ジャイロ周波数より低周波でジャイロ半径より長波長の現象である。また、式(18)より、有名な「磁力線の凍結」という性質が導かれる。磁力線の凍結とは、簡単にいえば「磁力線とプラズマが一緒に動く」というものであるが、数学的には「プラズマ中のある面積 S を貫く磁束は時間的に一定である」、

$$\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \text{const}. \quad (19)$$

と表現される。面積 S はプラズマの動きにつれて変わるし、 \mathbf{B} も変化するが、面積 S を貫く磁束は一定である。

1.3.4 MHD, 二流体, 三流体モデルから見た線形磁気音波

振幅のごく小さい線形の磁気音波を MHD, 二流体, および三流体モデルから見てみよう。ただし、簡単のために磁場に直角に伝播する波を考える。

理想 MHD で最も基本的な物理量はアルヴェン速度

$$v_A = \frac{B_0}{(\mu_0 \rho)^{1/2}}, \quad (20)$$

である。デバイ長, ジャイロ半径, ジャイロ周波数, プラズマ周波数などは理論の中に入っていない。MHD における磁気音波の線形分散式は

$$\omega = v_A k, \quad (21)$$

で与えられる(簡単のため、プラズマの圧力は無視した)。 ω と k は正比例の関係にあり、位相速度 ω/k は波数 k に依らず一定である。

二流体モデルでの分散式は

$$\omega = \frac{v_A k}{(1 + c^2 k^2 / \omega_{pe}^2)^{1/2}}, \quad (22)$$

である。長波長では

$$\omega = v_A k \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega_{pe}^2} \right), \quad (23)$$

と近似できる。分散曲線は $ck/\omega_{pe} \sim 1$ で折れ曲がり、 $k \rightarrow \infty$ で低域混成周波数

$$\omega = \sqrt{|\Omega_e| \Omega_i}, \quad (24)$$

となる。波数 k が大きくなるにつれて位相速度は小さくなる。

次に、三流体モデルとして電子と2種類のイオンを含むプラズマを考えよう。DTプラズマで、DとTを別々のイオン流体として扱えば、三流体モデルである(核融合生成物をも含めるとイオン種はもっと増える)。宇宙プラズマでは水素(H)が主成分であるが、ヘリウム(He)も数密度で1割程度存在する。他にもC, O, Feなど、多種類の重イオンが含まれるが存在量が少ないので、流体としての振る舞いを理解するうえではHとHe(と電子)の三流体モデルで多くの場合は十分であろう。H-Heプラズマでの磁気音波の分散式を図2で示す。2種イオンプラズマでは磁気音波は2つのモードに分裂する(低周波モードと高周波モードとよぶことにする)[5]。低周波モードの共鳴周波数($k \rightarrow \infty$ での周波数) ω_{-r} と、高周波モードのカットオフ周波数($k=0$ での周波数) ω_{+0} は、HとHeのジャイロ周波数 Ω_H, Ω_{He} と以下のような大小関係である。

$$\Omega_{He} < \omega_{-r} < \omega_{+0} < \Omega_H. \quad (25)$$

次の波数領域で

$$(m_e/m_i)^{1/2} \ll c^2 k^2 / \omega_{pe}^2 \ll 1, \quad (26)$$

高周波モードの分散式は

$$\omega = v_h k \left(1 - \frac{c^2 k^2}{2\omega_{pe}^2} \right), \quad (27)$$

の近似形で書くことができる[6]。ここで、 v_h は次式で定義される。

$$v_h = v_A \left[1 + \frac{\omega_{pa}^2 \omega_{pb}^2}{\omega_{pe}^4} \Omega_e^2 \left(\frac{1}{\Omega_H} - \frac{1}{\Omega_{He}} \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (28)$$

この速度 v_h はアルヴェン速度より少し速いが、1種イオン

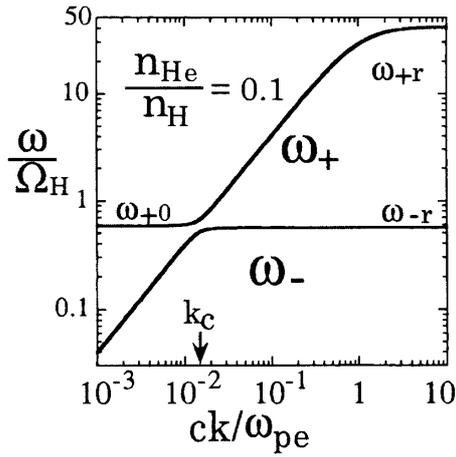


図2 H-He プラズマにおける直角磁気音波の線形分散式.

プラズマではアルヴェン速度に帰着する. 式(27)は v_h を v_A と置き換えれば式(23)と一致する. これはこの波の非線形の振る舞いを理解するうえで大事なことである.

高周波モードの共鳴周波数 ω_{+r} は低域混成周波数式(24)のオーダである. 一方, 不等式(25)からわかるように, 低周波モードの共鳴周波数 ω_{-r} や高周波モードのカットオフ周波数 ω_{+0} はイオンジャイロ周波数のオーダである. したがって, 高周波モードの周波数領域は低周波モードの周波

数領域よりも $\sim (m_i/m_e)^{1/2}$ 倍広い. 不等式(26)で $(m_e/m_i)^{1/2}$ が出てくるのはそれに由来する.

1種イオンプラズマであっても, ブラソフ方程式を用いた運動論的理論における分散式は多数のイオンサイクロトロン波の集合となる. これは複雑なので, これ以上述べない[7].

以上の準備をしておいて, 次節では非線形の波(孤立波と衝撃波)について述べる.

参考文献

- [1] M.N. Rosenbluth, W.M. MacDonald and D.L. Judd, Phys. Rev. **107**, 1 (1957).
- [2] S. Ichimaru, *Basic Principles of Plasma Physics, A Statistical Approach* (Benjamin, Massachusetts, 1973).
- [3] F.F. Chen, *Introduction to Plasma Physics and Controlled Fusion* (Plenum, New York, 1984).
- [4] H. Alfvén and C.-G. Fälthammer, *Cosmical Electrodynamics*, (Clarendon Press, Oxford, 1963).
- [5] S.J. Buchsbaum, Phys. Fluids **3**, 418 (1960).
- [6] M. Toida, Y. Ohsawa and T. Jyounouchi, Phys. Plasmas **2**, 3329 (1995).
- [7] T.D. Kaladze, D.G. Lominadze and K.N. Stepanov, Soviet Physics-Technical Physics **17**, 196 (1972).