解説

プラズマ計測のためのトモグラフィ解析法

岩間尚文，大舘　暁[1)]
大同工業大学情報学部情報学科，[1)]核融合科学研究所

（原稿受付：2006年４月４日）

From the standpoint of data analysis, the computerized tomographic imaging of plasma is reviewed. In starting with the mathematical formulation of the image reconstruction from projections, a variety of numerical methods useful for sparse-data tomography in plasma experiments are taken up and classified into a few categories of techniques for regularizing the ill-conditioned least-squares solution of the linear equation: (1) the series expansion model fitting, (2) the penalty function minimization of Tikhonov-Phillips and nonlinear one of maximum entropy, and (3) modifications with the Fisher information and the Hopfield neural network. Basic concepts of composing plasma images with basis functions a priori chosen and numerically generated, and the filtering of Wiener type and its statistical optimizations of Akaike and Wahba are explained instructively in regarding successful results and by exhibiting undergoing works of plasma imaging in nuclear fusion research.

Keywords:
plasma imaging, tomography, Fourier-Bessel, Tikhonov-Phillips, maximum entropy, Fisher information, Hopfield, AIC, GCV

1．はじめに

トモグラフィとは断層撮像のことである．J. Radon（1887－1956）の有名な論文[1]から始まり，コンピュータ時代になって G. Hounsfield（1919－2004）& A. Cormack（1924－1998）によって実現した計算によるトモグラフィを CT（Computed Tomography または Computerized Tomography）という．これをプラズマの物理量について空間的な様子と時間変化を可視化し，プラズマ研究に生かそうという試みが1980年頃から先端的な計測研究として意欲的に進められた．EU の大型トカマク JET で行われた中性子ならびに軟 X 線放射型の CT[2,3]を筆頭にして，計測の原理，検出器の開発，データ解析法の工夫，そして撮像されたプラズマの挙動に関する物理研究と，豊富な CT 研究が行われた．それらすべてが貴重な財産となっている．

この解説はそのなかのデータ解析法に焦点を当てる．定式化から出発して，計算法のなかに流れる本質的なものを紹介することによって，すべての計算法を見通す体系的な「わかる」解説を意図している．また，核融合研究が新しい段階に入ったいま，高温プラズマ計測の新しい成果を実例として取り上げる．CT のデータ解析をテーマとした本誌の解説が２つあるが[4]，その後の研究成果を入れて今日的にまとめたい．また，CT撮像と対比される電子サイクロトロン放射（ECE）のイメージングについては，最近の解説[5]を参照されたい．

Numerical Methods of Tomography for Plasma Diagnostics
IWAMA Naofumi and OHDACHI Satoshi
corresponding author's e-mail: n-iwama@daido-it.ac.jp

2．プラズマ CT 撮像の特徴

核融合プラントにおいて，核融合反応によって発生する中性子の放射強度分布の計測は非常に重要である．Fig. 1

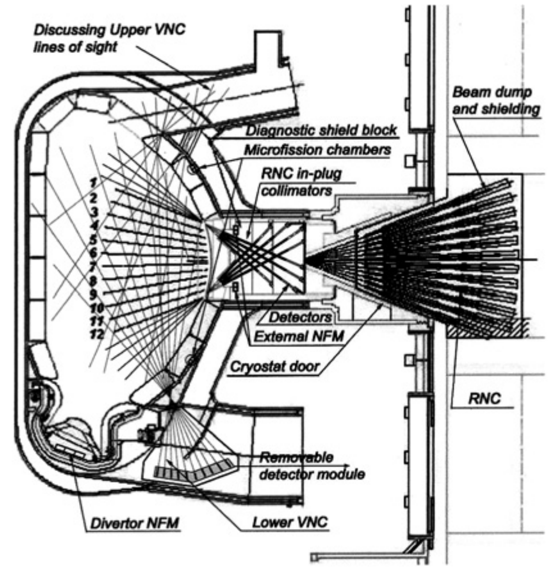

Fig. 1　Arrangement of ITER neutron diagnostic systems integrated from several toroidal plans: 12-channel and two 4-channel radial neutron cameras (RNC), and vertical neutron cameras (VNC) at four different positions in one poloidal plane are under consideration. NFM is the acronym of the neutron flux monitor (from Ref. [6]).

は，国際熱核融合実験炉 ITER に取り付けるべく設計が進められているそのための撮像系である．トカマクの１ポロイダル平面に，水平方向に３個のピンホールカメラ（計20チャンネル），垂直方向には底部にカメラ１個(10チャンネル）を置き，さらに頭部３カ所に下向きのカメラを設置する可能性が検討されている．JET と比べて何倍か強い中性子放射と長時間運転に対して，放射の遮蔽にかかわる様々な制約に打ち勝って十分なコリメーションを実現すべく，開発研究が国際共同でなされている[6].

プラズマの CT 撮像系をもう一つ見てみよう．Fig. 2は核融合科学研究所の大型ヘリカル装置 LHD に取り付けられたボロメータカメラの視線配置である[7]．２個の観測窓を巧みに利用して，ヘリカルプラズマを斜めに切る特別な１断面に２個のファンビームカメラが固定されている．プラズマは平衡状態であれば，おむすび形の磁気面の内側にほぼ閉じ込められる．一つのカメラ視野はさらに20本の細い扇形の帯に分かれている．そして，伝送路の出口に置かれた20チャンネルの高速フォトダイオード・ラインセンサの各素子が１本の帯内からの放射を受け，その強度が電気信号に変えられる．そういう２個のカメラ視野が縦・横にプラズマ領域をほぼ覆って交錯している．このカメラ系を使って，全部で40個の信号値から各時刻における放射強度の２次元空間分布を画像として求めることになる．

このように，プラズマの CT 撮像系は観測窓の制限が強い．画面の周辺部では，視線が一方向にしか通らないという意味の情報不足は常にある．検出器の SN 比が低いことも多い．そのような観測事情において，投影データから物理計測の目的に見合う分解能と信頼度を出し得るか．これが情報処理に課せられたテーマである．

3．像再構成の定式化

この問題は Fig. 3 のように図式化できる．いま，放射強度分布を画像と考えて，画像の領域を K 個の画素（pixel）に分割すれば，各画素における画像の値すなわち放射強度 f_k $(k=1,2,\cdots,K)$ が未知数である．プラズマ像がない所は最初から画像領域からはずした方がよい．しかし，プラズマ像のある所は画像領域に含まれていないといけない．

いま，第 m 検出器の出力 g_m が未知数とどのような物理関係にあるかを数式で表現したとき，次のような線形結合であったとする．

$$\sum_{k=1}^{K} h_{mk} f_k = g_m \qquad (m=1,2,\cdots,M) \tag{1}$$

ここで h_{mk} は第 k 画素の値 f_k の出力 g_m への貢献度を表わす定数とする．これは検出器の数 M だけの式からなる K 元線形方程式である．与えられた問題は素朴である．行列を使えば，

$$H\boldsymbol{f} = \boldsymbol{g} \tag{1'}$$

と書ける．H は h_{mk} を要素とする係数行列，$\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{g}$ はそれぞれ f_k, g_m を成分とする K 次元，M 次元の縦ベクトルである．

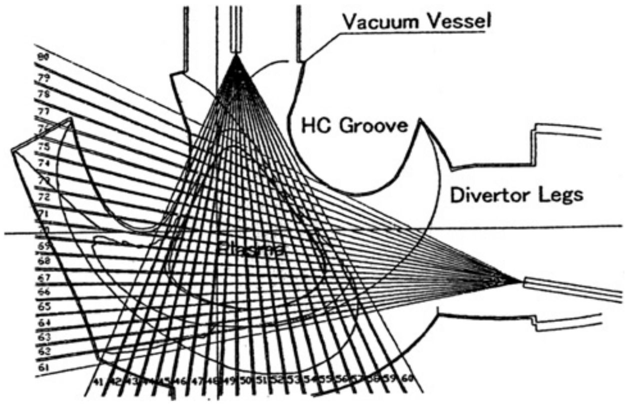

Fig. 2　Layout of a pair of 20-channel bolometer cameras installed at Port 4-O and Port 3.5-U viewing a semitangential cross section of LHD.

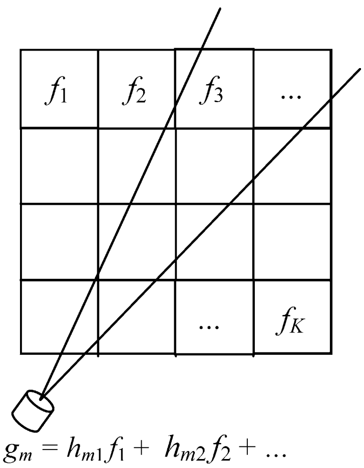

Fig. 3　Pixellation of plasma region and the field of view of a detector for 2D computerized tomography.

CT の分野では，検出器出力 g_m を投影(projection)，行列 H を投影行列，方程式を解いて画像$\{f_k\}$を求めることを像再構成（image reconstruction）という．また，以上のような放射型 CT に対して，プラズマ(一般には object)の外から電磁波などを入射して透過信号から像を出すのを透過型 CT という．

さて，一般に，未知関数 $f(\boldsymbol{r})$ と観測量 $g(\boldsymbol{q})$ の関係が既知関数 $h(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ を介して次のような積分変換に表現できるとき，第１種 Fredholm 型の逆問題という．

$$\int_D h(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}) f(\boldsymbol{r}) d\boldsymbol{r} = g(\boldsymbol{q}) \tag{2}$$

D は $f(\boldsymbol{r})$ の定義域である．ここで，$\boldsymbol{q}$ の離散値 $\boldsymbol{q}_m$ において観測値 $g(\boldsymbol{q}_m)$ $(m=1,2,\cdots,M)$ が得られたとき，各 m に対して左辺の積分を和で近似すれば(１)式の形の線形方程式になる．電波望遠鏡などホログラフィックな逆問題やぼけた光学像の鮮明化（deconvolution）など，物理計測においてこの種の逆問題は豊富である．$h(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$ が直線の積分路を示すデルタ関数のとき，(２)式の積分変換は Radon 変換と呼ばれ，CT の数理の原点となる[8,9].

さて，CT においては，画素数は２次元的に増えるのに対

して検出器数は1次元的にしか増えないので，式の数Mが未知数の数Kより圧倒的に少ないことが多い．(1)式はひどく横長（解不定）の線形方程式になる．また，一つの検出器出力に寄与するのはその視野内にある画素だけであるから，視野が狭い限りは係数h_{mk}の大部分が0，行列Hは疎行列である．各行のK個の要素のうち0でないのはM個ぐらいに過ぎない．

係数h_{mk}の評価はもちろん物理的な考察による．放射型CTであれば，円錐形の視野と放射の球面的な伝搬とが相殺して，検出器出力が放射強度分布の線積分で近似できるという基本関係の上に，複数の画素を含むほど視野に幅があればそのことも考慮する．また，複数のコーンビーム型カメラで3次元CTを行う場合は，立体の画素boxelに対して評価するなど，かなり労力のかかる作業といえる．

4．逆問題におけるデータへのフィッティングと誤差の増幅

さて，横に長い線形方程式(1)に取り組もう．無限にある解のなかに真の画像があるはずである．画素数Kを強いて減らして検出器の数Mと同じにすれば解は求まるが，そのようなことをしなくても，解不定の方程式に対して，解が満たすべき制約条件を持ち込んで解を一意化するとともに，真の解に近づく方法が築かれている．

このとき，大事なことは誤差への対応である．系統的な誤差は努力して除いたとしても，雑音的な誤差は残る．(2)式の左辺が$f(\boldsymbol{r})$に対して積分的であれば，逆変換は$g(\boldsymbol{q})$に何らかの微分的な演算を施すであろうが，観測データの微分は危険である．データにたとえ微小であっても雑音があると，その微分値は正負に大きく振動する．

逆問題における誤差の大きな現れは，線形方程式(1)が悪条件になることに対応する．一般に，線形方程式において，係数行列を特異値分解して得られる特異値の最大値と最小値の比κを条件数という．CTのような逆問題ではκが大きく，計算機イプシロンの逆数を越えるほどになる．そして，おおざっぱな評価として，右辺の誤差$\delta\boldsymbol{g}$や係数行列の誤差δHがκ倍ぐらいに増幅されて$\boldsymbol{f}$の変動$\delta\boldsymbol{f}$になる[10]．そのような性質の数理問題に取り組むのであるから，Hの物理評価，その前提になるカメラ取り付けの精度，感度の較正は極めて重要である．「やってみる」実験家の賭けがここにある．

もう少し考えてみよう．誤差のある$\boldsymbol{g}$およびHに対して左右両辺の差が小さいほど良いかというと，必ずしもそうではない．$\boldsymbol{g}$およびHに忠実に過ぎると，それらの誤差が$\boldsymbol{f}$に大きく現れる．両辺の差を大きく保てば，$\boldsymbol{f}$は不忠実になって誤差の影響を受けにくくなるが，解の本当の構造を失う．いま，体系的な数理の財産を取り込むために，系統的な誤差は排除できたとしよう．雑音的な誤差の増幅を防ぐには，解法のなかに雑音除去のフィルタを入れる．フィルタリングを弱めると，両辺が接近して解の構造が正しく現れる方向になるが雑音は増幅され，逆に強めると，両辺が離れて雑音に鈍感になるが本当の構造を失う危険が増す．「雑音の消去と構造の再現」という互いに矛盾する傾向の間に最適な妥協点をさがすWiener式の統計学的処理の出番である．境界値との一致（等号の成立）をめざす電磁界設計のようないわば物理の逆問題に対して，計測の逆問題（情報処理の逆問題）の重要な特徴がこの点にある．

CTの標準解法[8]であるフィルタ補正逆投影法においては，平行ビーム投影のデータを微分するときにShepp-Logan型といった低域フィルタを入れて，エッジを含む人体画像に対してフィルタ特性を調整する．フーリエ断面定理を利用するフーリエ変換法においては，平行ビーム投影の1次元フーリエ変換を束ねて2次元逆フーリエ変換する際に高い空間周波数成分の切り落としを入れる．どちらにしても，受信信号にはいつも雑音がある通信理論の延長として，雑音的な$\delta\boldsymbol{g}$への対策である．

5．最小2乗法ーWiener情報処理の出発点ー

Wienerの情報処理は最小2乗法から出発する．(1)式両辺の差の2乗平均$\varepsilon^2 \equiv \|H\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|^2/M$を最小化する$\boldsymbol{f}$をもって再構成像とする($\|\cdot\|$はベクトルのノルム)．この平均2乗誤差（残差の2乗平均）を$\boldsymbol{f}$の各成分f_kで微分して0と置くと，次の正規方程式が得られる[11]．

$$(H^T H)\boldsymbol{f} = H^T \boldsymbol{g} \tag{3}$$

ここでH^TはHの転置である．式の数は未知数の数Kと同じで，係数行列$H^T H$はK次正方である．

右辺の$H^T\boldsymbol{g}$は，CTが実現する前から「逆投影」と呼ばれていた「およその画像（ひとまずの画像）」に相当する．$\boldsymbol{g}$に左から施す演算H^Tは，視線上の画素に重みh_{mk}に合わせて投影値g_mを再分配する作業(h_{mk}が等しければ等分配）をすべての視線に行うことを表わす．電波望遠鏡であれば，測定された複素相関データの欠損部を0と置いて逆フーリエ変換して得られる汚れた天体画像（dirty map）が$H^T\boldsymbol{g}$である．よって，逆行列$(H^T H)^{-1}$を$H^T\boldsymbol{g}$に左から施せば（(3)式を解けば)，「ぼけ」ないし「汚れ」が取れて画像$\boldsymbol{f}$が求まる．しかし，式不足の$M<K$のときこの逆行列が存在しない．$H^T H$はランク落ちして，(3)式はやはり解不定である．$M \geqq K$ならば解が一意であるが，方程式(3)の係数行列$H^T H$の特異値（固有値）はHの特異値の2乗であるから，条件数κも2乗になって悪条件は強まる[11]．

このような線形方程式において，誤差の増幅を抑えつつ解を決めることを正則化（regularization）という．一致を要求する強い規制regulationに対して，制約条件を満たす範囲で自由を許す規制である．正則化法は，求める画像にモデル関数を導入する方法と，画素値を素直に未知数にしたまま制約条件を入れるmodel-freeな方法に大別される．プラズマのCT撮像のために試された諸解法を見るときこの分類は有意義である．本解説では，正則化法の基本的なものを見てみよう．

6．基本的な像再構成法1

6.1　級数展開（モデル当てはめ）による正則化

逆問題のための画像モデルとして，数理的にまとまって

美しいのは級数展開である．（2）式において画像 $f(\boldsymbol{r})$ が次のように基底関数 $b_n(\boldsymbol{r})$ の線形結合で表現できるものとしよう．

$$f_{\mathrm{model}}(\boldsymbol{r})=\sum_{n=1}^{N} a_n b_n(\boldsymbol{r}) \tag{4}$$

完備な直交基底系を用いて項数 N を無限大にすれば，任意の $f(\boldsymbol{r})$ についてこの展開は可能である．もしも $b_n(\boldsymbol{r})$ が番号 n の増加とともに空間的に低周波の画像から高周波の画像になるのであれば，（4）式はプラズマ画像の一種のスペクトル分解であり，有限項数 N での打ち切りは低域フィルタである．空間的に広帯域の雑音を減らすことができよう．基底系の完備直交性は必須ではない．正値に持ち上がった正弦・余弦関数列でもよいし，スプライン関数でもよい．磁気面にかかわる扱いやすい基底系が見つかれば好都合であろう．基底系 $\{b_n(\boldsymbol{r})\}$ がプラズマ画像に適していれば，係数 a_n は n の増加とともに速く減衰し，雑音除去は効果的になる．

上式の $f_{\mathrm{model}}(\boldsymbol{r})$ を（2）式の $f(\boldsymbol{r})$ に代入すると，関係式

$$g_{\mathrm{model}}(\boldsymbol{q})=\sum_{n=1}^{N} a_n B_n(\boldsymbol{q}),$$

$$B_n(\boldsymbol{q})=\int_D h(\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})\, b_n(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{r} \tag{5}$$

がただちに得られる．CT に則していうと，上式の $B_n(\boldsymbol{q})$ は基底 $b_n(\boldsymbol{r})$ の投影であり，$g_{\mathrm{model}}(\boldsymbol{q})$ は新しい基底系 $\{B_n(\boldsymbol{q})\}$ を用いて展開された投影 $g(\boldsymbol{q})$ のモデルである．求める画像の級数モデルが線形な積分変換を通して投影の級数モデルを生む，という関係である．（4），（5）式を位置座標 $\boldsymbol{r}$ について離散化すれば，

$$\boldsymbol{f}_{\mathrm{model}}=\sum_{n=1}^{N} a_n \boldsymbol{b}_n,\quad \boldsymbol{g}_{\mathrm{model}}=\sum_{n=1}^{N} a_n H\boldsymbol{b}_n \tag{6}$$

となる．もし（5）式による $b_n(\boldsymbol{r})$ の積分変換 $B_n(\boldsymbol{q})$ が解析的に求まれば，それを標本化した画像ベクトルを（6）式の $H\boldsymbol{b}_n$ に用いればよい．このことから，級数展開法は「解析学的方法」，画素値 $\boldsymbol{f}$ をそのまま未知数とする model-free な方法は「代数学的方法」と呼ばれることがある．

さて，このように得られた級数モデル $\boldsymbol{g}_{\mathrm{model}}$ を投影データ $\boldsymbol{g}$ に最小2乗フィットするよう係数 $\{a_n\}$ を決めれば，それを $\boldsymbol{f}_{\mathrm{model}}$ に用いて画像 $\boldsymbol{f}$ の推定値 $\hat{\boldsymbol{f}}$（再構成像）が求まる．もしも（4）式の基底系が適切で，画素数 K はもちろんデータ数 M よりも更に少ない項数 N で未知画像 $f(\boldsymbol{r})$ をよく表わし得るのであれば，N 個の a_n を未知数とする正規方程式は（3）式と比べてずっと規模が小さく，良条件になろう．正規方程式の解 $\{a_n\}$ はデータ $\boldsymbol{g}$ に関して線形であり，計算量は小さい．

解の基底系がデータの基底系を生む，という関係は第1種 Fredholm 型逆問題において一般に成り立つ．CT においては画像の直交展開が投影の直交展開を生む Cormack [12]の級数が有名である．プラズマ撮像においては，画像領域を円内とする Fourier-Zernicke 展開を用いると，円の境界付近で増大する Zernicke 多項式のために大きなアーチファクト（偽の像）が出る．境界で 0 に減衰する現実のプラズマに合わないモデルを用い，しかもその境界領域に視線が乏しいためである．プラズマの外側に投影値 0 の仮想的な多数の視線を設ける防止策もあるが，0 値データも含めた最小2乗フィッティングという単純な拡張はデータを given とするデータ解析にとって美しくない．プラズマ CT 撮像の標準的な級数モデルは，境界に零点を持つ Bessel 関数列を用いる長山[13]の Fourier-Bessel 展開である．Fig. 4 に示されたパターンを重ね合せてプラズマ画像がつくられる．

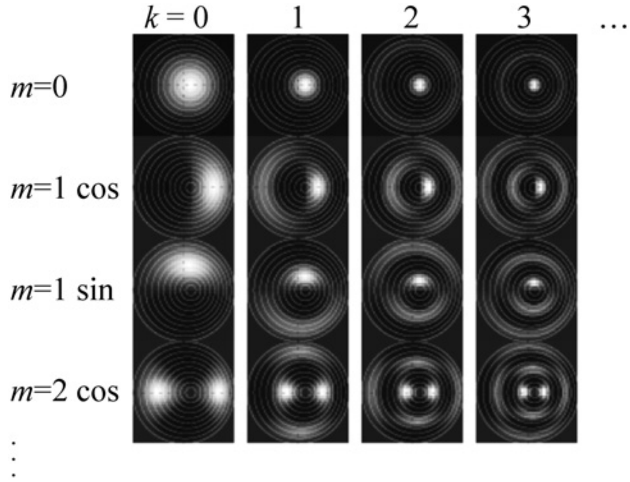

Fig. 4 Fourier-Bessel bases $J_m(\lambda_m^{k+1} r)\exp(im\theta)$ with overlapping display of the magnetic surfaces of TEXTOR tokamak.

6.2 MHD 不安定性における級数モデルの成功

Fourier-Bessel 展開を用いて，トカマクにおけるプラズマ閉じ込めが結局のところバルーニング不安定性に支配されることを突き止め，鋸歯状波振動の物理に踏み込むという画期的な成功が得られた．Fig. 5 は米国プリンストン大学の大型トカマク TFTR において中性粒子ビーム入射（NBI）加熱を行ったときに起こるプラズマ崩壊の様子である．長山の数年間にわたる一連の論文のうち，記念すべき最初の論文[14]に掲載された等高線の線画に色をつけ，軟 X 線放射 CT 断層像と電子サイクロトロン放射（ECE）信号の回転マッピング[5]による断層像とを図示した．ポロイダル面内でプラズマの高温部が風船状に形成されて壊れる様子がわかる．Shafranov シフトしたプラズマの剛体回転を仮定して，1回転周期にわたるカメラ信号を用いて投影データを補充し，2方向カメラでは出がちな画像歪みをなくしたことが効いた[15]．弱磁場側に局在させたテスト分布を用いて，多チャンネル信号および CT 画像の数値シミュレーションを行うことで，再構成画像の信頼度を高めている．

最近の成果は，京大理学部の小型トカマク WT-3において，トーラスに沿って Fig. 6 のように 3 カ所に 5 カメラ撮像系を設置し，崩壊時のプラズマを同時撮像して，理論的に可能性が指摘されたトロイダル方向の構造（局所的に起こる磁気再結合）が初めて検証されたことである[16]．こ

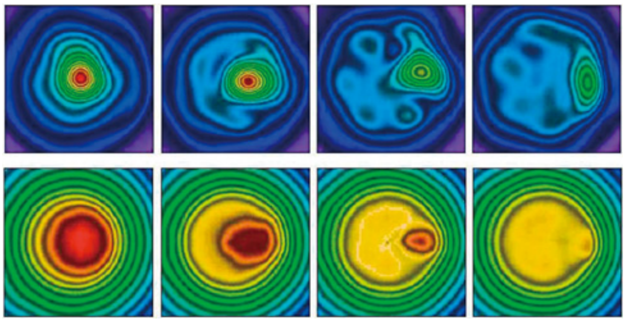

Fig. 5 Time evolution of the soft X-ray CT image (upper) and the ECE image (lower) in TFTR tokamak during a sawtooth crash (at times A, D, H, I from left to right in Fig. 2 in ref. [14] with the same contour mapping; 3.39 ms before the crash (A) , 0.27 ms (H) and 0.33 ms (I) after the start of the crash (D) (presented by Y. Nagayama).

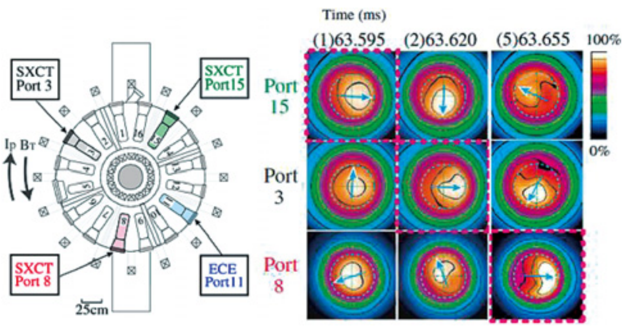

Fig. 6 Toroidal positions of three soft X-ray CT cameras and an ECE radiometer in WT-3 tokamak, and the time evolution of CT images at three ports; the arrows show the shift directions of the kink mode in a straight plasma model (from ref. [16]).

の例ではポロイダル面内のカメラの数を増やし，プラズマの剛体回転を仮定していない．

6.3 赤池情報量規準による級数モデルの最適化

ここで重要なことは，どのようなモデルを用いるのがよいかである．物理からして像を表現しやすいと思われる級数モデルであれば，項数が少なくてすむ．このモデルの良さ・悪さを判断する物差しが統計学から提供されている．次式の赤池情報量規準 AIC（Akailke Information Criterion）である．

$$\mathrm{AIC}(N) = M \ln \hat{\varepsilon}^2 + 2(N+1) + \mathrm{const.} \qquad (7)$$

ここで，$\hat{\varepsilon}^2$ は達成された平均 2 乗誤差（残差の 2 乗平均値）

$$\hat{\varepsilon}^2 = \frac{1}{M}\left\|H\hat{\boldsymbol{f}} - \boldsymbol{g}\right\|^2 \qquad (8)$$

である．データ数 M による平均の割り算を右端の定数項にまわして，ln の中は残差の 2 乗和としてもよい．N は項数（未知数である係数の数）である．この AIC(N) が小さいモデルほど良いというのが最小 AIC 規準である．

一つの級数モデルを採用したとき，N が大きいほど級数モデル $g_{\mathrm{model}}(\rho)$ はデータ $\boldsymbol{g}$ にフィットするので，$\hat{\varepsilon}^2$（したがって（7）式の右辺第 1 項）は N の増加とともに単調減少し，再構成像 $\hat{\boldsymbol{f}}$ は単純過ぎるものから徐々に形を得るが，雑音を含むデータにフィットし過ぎると像に雑音が表面化する．このフィットし過ぎが，右辺第 2 項 $2(N+1)$ の増加による AIC(N) の再上昇になる．その結果，AIC 最小の N が最適な低域フィルタリング（最適な再構成像）を与える．プラズマ像に適した型の級数を用いるほど，小さな N で小さい $\hat{\varepsilon}^2$ を与えて，AIC(N) の最小値は減衰し，再構成像はもっと良いに違いない．モデルは級数でなくても，何か N 個の未知パラメータを含む関数モデルを用いて最小 2 乗法で未知パラメータの値を決めるとき，解を非線形最適化計算で求める場合も含めて，異なるモデルで得られる再構成像の比較を（7）式で行ってよい．

ところで，実験家の間に「AIC(N) が最小値を取りにくい」という声がある．（7）式は，各データ値には互いに独立な平均値 0 の正規雑音が加わっていると仮定して得られている．したがって，再構成像を得たとき，少なくとも，投影データにおける残差が雑音的でないといけない．また，得られる解（再構成像）が真の解（プラズマ像）に近いとみなしたテイラー展開によって得られているから，悪条件な逆問題に用いると働かなくなる可能性が隠れているようにも見える．例えば，非円形断面のプラズマに対して，Fourier-Bessel 展開のような円を定義域とする級数モデルを用いれば，プラズマ像を良く表現するための項数 N は増えて，正規方程式はそれだけ悪条件に向かう．その結果，「AIC(N) が最小値を取りにくい」「Fourier-Zernicke 展開を使えばなおさら」ということが筆者の経験にもある．AIC を使うには，「相当に良いモデルで相当に良い画像をつくれている範囲で」ということになろう．AIC のこの自己矛盾的な言わば純真さを robust にする研究が統計学分野で行われてはいる．実用的には，非円形断面に対応できる座標変換など級数展開の工夫がもっと追求されてよい．

視線欠損のある撮像系には，広い台を持つ基底を用いる方がよい．スプライン関数におけるような局所的な台を持つ基底を用いると，視線欠損した領域に局在する基底の係数決定が悪条件の意味で不安定になる．

モデル当てはめ法の新しい話題に，竹田・馬による多層パーセプトロンの collocation 法がある．シグモイド関数が重なった複雑で柔らかい非線形関数モデルを独特に用いて，人工衛星の電波による透過型の電離層 CT に初めて信頼できる画像を出すことに成功した．地平方向に視線がひどく欠落した撮像条件において，多数のニューロンの間の結合係数と各ニューロンのバイアス（活性化のしきい値）が未知パラメータになる[17]．

7. 基本的な像再構成法 2

7.1 ペナルティ関数による正則化

級数展開法は平均 2 乗誤差 ε^2 の最小化から出発して，投影データへのフィッティング度を表すその最小値 $\hat{\varepsilon}^2$ を項数によって最適化することに行き着いた．項数の調整はスペクトル解析における低域フィルタの調整であり，再構成像の滑らかさにかかわる．

いま，姿勢を変えて，平均 2 乗誤差がある値 ε^2 であって欲しいという制約のもとに，最も滑らかな画像を採用する

ものとしよう．雑音を含むデータに同じだけフィットできる２つの画像があって，一方は滑らかで他方はギザギザっぽいのであれば，滑らかな方に軍配を上げたい，数理・物理を学んだ者の気持ちであろうか．オッカムの原理というより精神というべきであろう．物理的な根拠などないが，そうやってみようというデータ処理の試みである．AICも実際，この気持ちを表している．（７）式において，$\hat{\varepsilon}^2$ 値が同じであれば，N が小さい方，すなわち滑らかな画像が良いとされる．そのようなものと考えてみようということであるから，実際には失敗に終わることもある．鋭い折れ曲がりを持つ解に対して最小AIC規準によるフィルタリングを施すと，解がなまるというようなことが起こり得る．後述の最大エントロピー法にしても本質的に「やってみる」なのである．

さて，画像 $\boldsymbol{f}$ の粗さ（滑らかさの逆）を評価するペナルティ関数を $P(\boldsymbol{f})$ とすると，我らオッカムの制約付き最小化はラグランジュ関数

$$\Lambda_\gamma(\boldsymbol{f})=\gamma P(\boldsymbol{f})+\frac{1}{M}\|H\boldsymbol{f}-\boldsymbol{g}\|^2 \tag{9}$$

の最小化になる．正則化理論の習慣にしたがって，未定乗数 $\gamma\,(>0)$ を $P(\boldsymbol{f})$ の方につけた．重み γ が大きいほど，$\Lambda_\gamma(f)$ において第１項が重要になるから，$P(\boldsymbol{f})$ の小さい滑らかな（強く正則化された）画像が $\Lambda_\gamma(\boldsymbol{f})$ 最小の解 $\hat{\boldsymbol{f}}$ になる．そのため，γ は正則化パラメータと呼ばれる．そして，$\hat{\varepsilon}^2=\varepsilon^2$ となる γ 値に対する $\hat{\boldsymbol{f}}$ がこの制約付き最小化問題の解である．この像再構成法は，像を構成するパラメータが画素数 K だけあるので，級数展開法と比べてデータに柔軟にフィットできよう．画像領域の形も矩形や円形と限らず任意であり，非円形断面のプラズマによい．

関数 $P(\boldsymbol{f})$ に何を使うかによって方法が分かれる．再構成像もそれによって異なる．model-free とは未知パラメータが画素値そのものということであって，$P(\boldsymbol{f})$ がモデルのようなものである．また，検出器の雑音の２乗平均値を ε^2 とすればよいかというと，必ずしもそうでないと経験的にいわれる．とすれば，最適な γ 値を決める規準が必要になる．

7.2　Tikhonov-Phillips 正則化法と最小 GCV 規準

画像 $f(\boldsymbol{r})$ またはその導関数の２乗積分

$$\int_D f(\boldsymbol{r})^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},\ \int_D|\nabla f(\boldsymbol{r})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},\ \int_D|\nabla^2 f(\boldsymbol{r})|^2\,\mathrm{d}\boldsymbol{r},\ldots\ldots \tag{10}$$

（またはこれらの線形結合）をペナルティ関数に用いるのを，ソ連の数学者の名を取ってTikhonov正則化という．特にラプラシアン $\nabla^2 f(\boldsymbol{r})$ を用いるとき，これを数値計算に最初に用いたUSA研究者の名を取って Phillips 正則化という．このとき，Cormack 展開に匹敵する美しい関係が得られる．

ペナルティ関数を K 次正方の微分演算子 C を用いて $P(\boldsymbol{f})=\|C\boldsymbol{f}\|^2$ と近似すると，$\Lambda_\gamma(\boldsymbol{f})$ を最小化する $\boldsymbol{f}$ は次式となる．

$$\hat{\boldsymbol{f}}=(H^TH+M\gamma C^TC)^{-1}H^T\boldsymbol{g} \tag{11}$$

（３）式と比較すると，H^Tg に左から掛けることによりぼけ，汚れ取りを行うべきであった演算子 $(H^TH)^{-1}$ の中に $M\gamma C^TC$ が加わっている．特に $f(\boldsymbol{r})$ の２乗積分を用いる場合は $C=I$（単位行列）なので $C^TC=I$ であり，悪条件な行列 H^TH の対角要素に正値 $M\gamma$ が加わるので，行列の良条件化が効果的になされる．

ここで特異値分解 $HC^{-1}=U\Sigma V^T$ を導入すると，もっとわかる式になる[18]．

$$\hat{\boldsymbol{f}}=\sum_{i=1}^{p}w_i(\gamma)\frac{\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}_i}{\sigma_i}C^{-1}\boldsymbol{v}_i,\quad w_i(\gamma)=1/(1+M\gamma\sigma_i^{-2}) \tag{12}$$

これは画像 $C^{-1}v_i$ を基底とする級数展開である．$(\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}_i)/\sigma_i$ は係数，$w_i(\gamma)$ は低域フィルタの関数である．$\{u_i\}$，$\{v_i\}$ は行列 U，V の列ベクトルでそれぞれ正規直交系，σ_i は特異値で降順に並ぶ正値 $(\sigma_1\geq\sigma_2\geq\cdots\geq\sigma_p>0)$ であり，カメラ配置と演算子 C で決まる行列 HC^{-1} をライブラリーを使って特異値分解してみると，これら画像を構成するツールが生成される．$p=\min(M,K)$ であり，CT 撮像では $p=M$ と思ってよい．

一例として，JülichのトカマクT装置TEXTORの軟X線接線方向撮像について，生成された基底 $C^{-1}\boldsymbol{v}_i$ と合成された画像を Fig. 7 と Fig. 8 に示す[19]．経験的に，基底 $C^{-1}\boldsymbol{v}_i$ は番号 i とともに空間的に緩やかな画像から変化の速い画像になる．大きい番号 i において，画素毎に正負が変わるほど高周波的になれば，基底系として有効である．投影データ $\boldsymbol{g}$ のための基底 $\boldsymbol{u}_i$ も同様である．基底の投影が投影の基底になることを意味する関係 $H(C^{-1}\boldsymbol{v}_i)=\sigma_i\boldsymbol{u}_i$ も成立する．

(12)式において，内積 $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}_i$ は $\boldsymbol{g}$ の $\boldsymbol{u}_i$ 成分であり，これを σ_i で割ったのがいわばフーリエ空間における解である．それを係数に用いる像の合成（実空間への逆変換）が(12)式である．そのとき，$w_i(\gamma)$ は σ_i の単調減少のために番号 i とともに減衰する．H したがって HC^{-1} が悪条件のとき，大きい番号 i における特異値 σ_i は０に近い．そのような番号 i において，成分 $\boldsymbol{g}\cdot\boldsymbol{u}_i$ が雑音 dominant であれば，また，σ_i，$\boldsymbol{u}_i$，$\boldsymbol{v}_i$ が H の雑音的な誤差 δH にかかわるものであれば，それらが σ_i による割算で大きく増幅される．それらをフィルタ関数 $w_i(\gamma)$ が切り落とす．正則化パラメータ $\gamma\,(>0)$ が大きいほど，$w_i(\gamma)$ は i の増加とともに速く減衰し，フィルタリングが強まる．「正則化のメカニズムが見えた」というべき鮮やかな関係である．

低域フィルタのパラメータ γ の最適値を決めるツールとして，G. Wahba の次の GCV（Generalized Cross Validation，一般化交差検証）がある．

$$\mathrm{GCV}(\gamma)=\frac{\hat{\varepsilon}^2}{\left[1-\dfrac{1}{M}\displaystyle\sum_{i=1}^{p}w_i(\gamma)\right]^2} \tag{13}$$

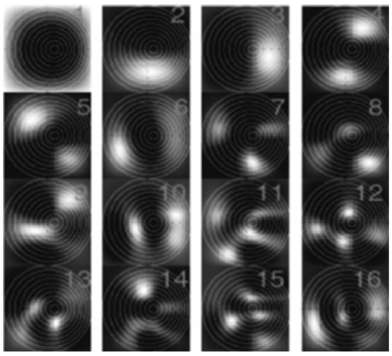

Fig. 7　Bases $C^{-1}v_i$ of plasma image generated by the singular value decomposition of HC^{-1} (C: Laplacian operator) for soft X-ray tangential CT in the poloidal plane of the TEXTOR tokamak (illustrated for i=1, 2, … , 16).

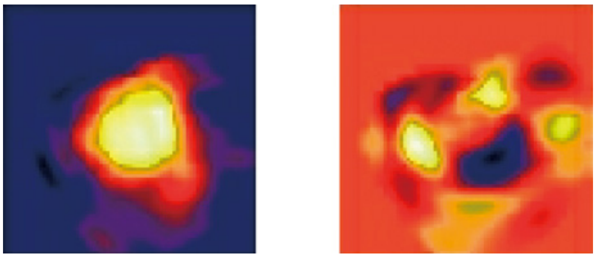

Fig. 8　Reconstructed images of the stationary (left) and fluctuation (right) components of the TEXTOR plasma using the bases $C^{-1}\boldsymbol{v}_i$ (i=1~100), which are shown in Fig. 7. In the dynamic ergodic divertor experiment, the MHD fluctuation mode of m= 2 is recognized. Image at the upper-left corner is missing from the geometry of the measurement.

赤池の最終予測誤差 FPE（Final Prediction Error）にヒントを得た Cross Validation という量にある変換を加えたもので，これが小さいほど良いと考える．γ が減少するとフィルタリングが弱まって，$\hat{\varepsilon}^2$ は単調減少するが，分母の減少によって GCV(γ) は再上昇する．その間の最小点を与える γ 値が最適である．「やってみる」データ解析の本質に照らして正確に言えば，“GCV 最小”の意味で最適である．

γ 値の最適化は，データへのフィッティングの最適化である．GCV は悪条件な線形方程式 $\boldsymbol{Hf}=\boldsymbol{g}$ の Tikhonov 正則化のためにまさに考えられたもので，AIC と比べると，経験的にかなり確実に働くように見える．また，ラプラシアン演算子はプラズマ撮像に極めて効果的である．同程度の $\hat{\varepsilon}^2$ 値に対して，$C=I$ の場合よりもずっと滑らかなプラズマらしい画像が得られる．分解能を落とさない平滑化という超分解的な効果である[18]．

なお，AIC と違って，異なる C，異なる $P(\boldsymbol{f})$ の間で GCV 値の比較はできない．そのように使いたければ，理論的にはある弱点をもつ Cross Validation に戻らないといけない．

(11)式からして既に明らかなように，(12) 式の $\hat{\boldsymbol{f}}$ は $\boldsymbol{g}$ に関して線形である．撮像系と演算子 C で決まる行列 HC^{-1} を特異値分解してしまえば，多チャンネル信号として得られる投影データ $\boldsymbol{g}$ の入れ替えに対して，すなわちプラズマ像の時間変化の追跡において，級数展開法と同じく高速である．特異値分解を QR 分解（Gram-Schmidt 直交化の離散版）で置き換えて，分解自体を高速化する試みもある[20]．

また，級数展開法において，展開係数 $\{a_n\}$ を求める正規方程式が悪条件であれば，a_n の 2 乗和をペナルティ関数に用いて正則化すると効果的である．解 $\{a_n\}$ は $\boldsymbol{g}$ に対して線形で，かつ正則化パラメータ γ の最適化に GCV が使える．

7.3　非線形正則化

(1)最大エントロピー法とその高速アルゴリズム

ペナルティ関数として，次のような画像 $\boldsymbol{f}$ の非線形関数（いわば負エントロピー）を用いるとき，最大エントロピー法（Maximum Entropy Method，MEM）と呼ばれる．

$$P(\boldsymbol{f})=\sum_{k=1}^{K} f_k \ln f_k \tag{14}$$

スペクトル解析との形式的な対応から $-\ln f_k$ の和を用いることもある．このとき，ラグランジュ関数 $\Lambda_\gamma(\boldsymbol{f})$ を最小化する $\boldsymbol{f}$ を何らかの反復解法（非線形最適化計算）で求めることになる．だから一般に計算量が大きいが，対数関数のため画像の正値が保証される．線形解法では，視線欠損の大きい領域（例えばプラズマの周辺部）に負値が発生しやすく，画像の滑らかな連結のために視線のある領域までプラズマ像の歪みが生ずることがある．そのようなときも，最大エントロピー法は負値を許さない非線形効果によって安心できる画像を出す傾向があり，その意味で視線欠損に強い．

しかし，(14)式のペナルティ関数は，Tikhonov 正則化の $C=I$（いわば最小エネルギー法）のときと同じく，隣接画素の間の粗さ・滑らかさを直接に評価するのではなく，凸関数の性質に頼った弱い正則化であるため，画像はギザギザになる*1．画素値を離散化した量子を想定してそれを分配する「場合の数」とか，ベイズ推定論的な解釈とかもあるが，最大エントロピー法の有効性を本当に説明できるようには思えない．論はあっても，結局はそのように考えて「やってみる」の域を出ていない．このような非線形正則化においては，基底系による展開・合成およびフィルタリングという像再構成のからくりは隠れて見えない．

最大エントロピー法は，1970年代から電波望遠鏡の画像合成のために研究され，フーリエ変換をベースにする標準解法（CLEAN 法）の限界を破るものとして，大きな関心を呼んだ．画像が大規模（例えば $K=512\times512$）であるだけに，非線形最適化のアルゴリズムが研究のテーマであった．最急降下法の弱点を補う Skilling の“Powerful MEM”[21]が知られているが，非線形最適化といえばニュートン法こそ王様である．(14)式の $P(\boldsymbol{f})$ を用いた $\Lambda_\gamma(\boldsymbol{f})$ の最小化に適用すると，対数関数のおかげで，反復解の収束性について「ニュートン法から離れる理由がない」といえるほど有利な性質が見てとれる．しかし，反復解を求めるのに大規模なヤコビアン行列（K 次正方）の逆という越え難い計算の壁にぶつかる．Cornwell *et al.* [22]はここに近似を入れて，収束の速さを犠牲にして解を求める近似ニュートン

＊1　Fig. 11 左のようなプロファイルになる．Fig. 9 では色表示の平滑化のために明瞭ではない．

法を考えた．その近似を改善する研究も行われている．

このMEM研究に対して，プラズマ計測からの貢献はデータが少ない（$M \ll K$ でかつ M が絶対的に小さい）撮像条件を生かした高速アルゴリズムである．von der Lindenら[23]は M 個の未定乗数を新たに導入し，それらを未知数とする最小化問題に変換して画像 $\boldsymbol{f}$ を求める方法を考え，Garchingのヘリカル装置W7-ASの軟X線CTに用いた．これとは別に，細田・岩間ら[24,25]はある行列公式を用いて，ニュートン法を小規模な M 元線形方程式を解いて正直に実行する方法を考え，太陽観測衛星「ようこう」の硬X線望遠鏡の画像合成に用いた．少数データの逆問題のためのMEMとして決定打ともいうべき提案である．Fig. 9は後者のアルゴリズムを用いて，Fig. 2の撮像系で得られたプラズマ崩壊前後のLHDプラズマの画像である．

また，このMEM解析において，正則化パラメータ γ を小さくして，残差の2乗平均値 $\hat{\varepsilon}^2$ が検出器雑音の2乗平均値よりも小さくなるまでデータに過剰フィットさせた方が，再構成像に物理的に見てよい構造が現れる．von der Lindenらはベイズ推定論的考察から，細田・岩間らは最小GCV規準を近似的に用いて，それぞれにこの傾向を説明している．

(2)最大エントロピー法の変形

最大エントロピー法の変形例を紹介しよう．最大エントロピー法は正則化が弱く，画像がギザギザになる．しかし，微分演算子 C を使って $\boldsymbol{f}=C^{-1}\boldsymbol{x}$ と置き，微分された画像 $\boldsymbol{x}$ についてエントロピーを定義すれば，画像 $\boldsymbol{f}$ の変化が強調されて評価されるため正則化が強まる．(11)式を $\boldsymbol{x}$ について解いた上で，それを $\boldsymbol{f}$ に変換する．文献[23]は積分演算 $C^{-1}\boldsymbol{x}$ をpreblurと呼んでいる．

もう一つの変形例は最小クロスエントロピー法である．(14)式の負エントロピーを次式のKullback情報量に置き換える．

$$P(\boldsymbol{f})=\sum_{k=1}^{K} f_k \ln(f_k/e\phi_k) \tag{15}$$

ここで，$\boldsymbol{f}_o=(\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_K)^T$ はモデル画像である．このとき，$P(\boldsymbol{f})\geq 0$ かつ $\boldsymbol{f}=\boldsymbol{f}_o$ のときのみ $P(\boldsymbol{f})=0$ という性質があり，$P(\boldsymbol{f})$ は画像 $\boldsymbol{f}$ とモデル画像 $\boldsymbol{f}_o$ との一種の距離である．データ $\boldsymbol{g}$ に平均2乗近似せよという制約のもとに，この距離の意味でモデル画像に最も近いものを求める．$\boldsymbol{f}_o$ を高さ e^{-1} の一様画像とすれば最大エントロピー法であり，ボルツマンの統計力学も同じ数理を用いている．例えば，プラズマ領域の外側に視線不足によるアーチファクトが生じるとき，その領域で0になる画像を $\boldsymbol{f}_o$ とすれば，再構成像は改善される．再構成像を見込みのモデル画像に引き込み過ぎないように，$\boldsymbol{f}_o$ の形は一般性ある範囲にとどめなければいけない[23]．

(3)最小Fisher情報量法

ペナルティ関数 $P(\boldsymbol{f})$ として

$$\int_D \left[|\nabla f(\boldsymbol{r})|^2 / f(\boldsymbol{r}) \right] \mathrm{d}\boldsymbol{r} \tag{16}$$

を離散表現したものを用いれば，$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ が0に減衰するプラズマ周辺領域でペナルティが大きくなり，正則化が強まる．$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ で割ったため(9)式の $\Lambda_\gamma(\boldsymbol{f})$ は $\boldsymbol{f}$ に関して非線形になるので，適当な最適化計算の反復を非線形な条件 $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})>0$ をもう一つ加えて行う．(16)式が統計学のFisher情報量と形式的に似ているので，Minimum Fisher Information(MFI)法と呼ばれ，Lausanneの小型トカマクTCVで最初に用いられた[27]．

Fig. 10はLHDのボロメータCTにおいて，$\nabla^2 f(\boldsymbol{r})$ の2乗積分を用いるPhillipsの線形正則化と，$\nabla^2 f(\boldsymbol{r})$ の2乗を(16)式のように $f(\boldsymbol{r})$ で割った非線形正則化を比較したもので，不純物としてチタンペレットを入射したときの画像である．広がっていた線形正則化のプラズマ像が，投影データには同じようにフィットしながらピークの高い局在した像に変わっている．磁気島のどの場所に打ち込むかによって不純物の動きの違いがわかるほどに，画像が改善される．

(4) Hopfieldニューラルネット法

ニューロンが相互に結合した閉じた系は，結合係数にある対称性があると，初期状態から最終状態へ自ら変化するとき，エネルギー関数と呼ぶべき量が常に減少して最小値に到達する[28]．画素数だけのニューロンを設けて，(9)式の $\Lambda_\gamma(\boldsymbol{f})$ がそのエネルギー関数になるよう系をつくり，系のダイナミックスをコンピュータ上でシミュレート

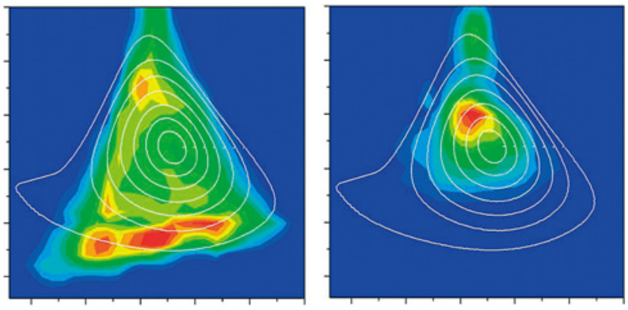

Fig. 9　MEM images of bolometer CT in a transient phase of plasma collapse of LHD: Shot 31721, t=3.00 s (left), t=3.61 s (right); pixellation of K=32×32. Magnetic surfaces are also plotted. The peak value of the right image is higher than that of the left image by a factor of 1.4 (from ref. [26]).

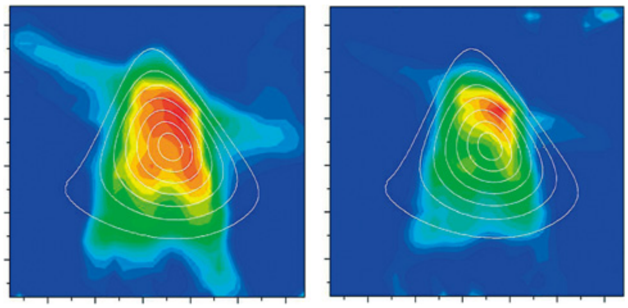

Fig. 10　Bolometer CT images of LHD plasma by the Phillips method (left) and by its modification of MFI (right) in a pellet (Ti) injection experiment; Shot 64880, t=2.0 s. The peak value is raised by a factor of 1.5 with MFI (from ref. [26]).

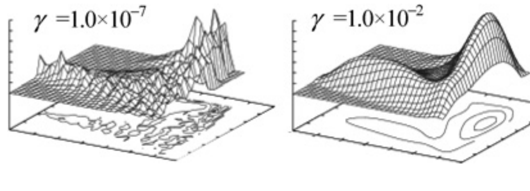

Fig. 11 Change of the reconstructed image of Hopfield neural network with the regularization parameter γ (with the Laplacian operator after 500 iterations; bolometer CT of LHD plasma, Shot 31721, t=2.0 s).

すれば，最終状態において各ニューロンの出力を画素値とする再構成像が得られる．

Tikhonov-Phillips 正則化であれば，行列 $-(2/M))(H^TH+M\gamma C^TC)$ の要素をニューロン間の結合係数にし，ベクトル $(2/M)H^T\boldsymbol{g}$（すなわち逆投影）の要素を各ニューロンのバイアスに与えて，適当な初期状態から走らせる．このとき，ニューロンに内在するシグモイド関数によって画素値は正値化される．数学的には，シグモイド関数を介して非線形になったラグランジュ関数の最小化を最急降下法で行うことと等価である．

Fig. 11 は LHD のボロメータ・データから得られた再構成像である．ラプラシアン演算子を用いて，正則化パラメータ γ によって MEM 的な正値画像の滑らかさを調整できる．最小クロスエントロピー法的なモデル画像も，ニューラルネットの基本構成を変えることなく容易に導入できる．

ここで事実上の収束を得るために，500回もの反復を行っていることに注意しよう．非線形最適化において，ニュートン法はふつう反復 7 ～ 8 回，慎重に収束判定を厳しくしても十数回で終わるのに対して，最急降下法はこのように探索能力が弱い．しかし，画像の規模が大きくなるとニュートン法は数値計算的に苦しくなる．１変数問題ならば x 軸との交点を求める作業が画素数だけの未知数の線形方程式を解く作業になり，反復のたびに逆問題を解くことに等しい．それと比べると最急降下法は，反復 1 回の計算量が少なく，かつ，画像が大規模であることを気にしない．結局，ニュートン法と最急降下法のどちらが速くて実用的かは問題による．

8．その他の像再構成法と今後の発展

以上，最小 2 乗法・フィルタリングという Wiener 情報処理の基本に立って，像再構成法の主なものを概観した．最後に，やや本筋からはずれるが実際的には有効なもの，特徴あるものをを補足しつつ，データ解析法の発展について述べる．

その代表は ART（Arithmetic Reconstruction Technique）である．医用 CT の初期に大規模画像にも使える解法として活躍した．方程式 $H\boldsymbol{f}=\boldsymbol{g}$ の成立をめざして，左辺の $H\boldsymbol{f}$ を求め（いわば順方向計算），右辺との差を見て解を修正する作業を繰り返す．収束性の保証はろくになく，得られた解が数学的にどのようなものかわからないが，実用的に良い画像が得られ，プログラミングは簡単である．阪大レーザ核融合の爆縮現象を撮像する超高速の 3 次元 CT にこれが使われた[29]．また，$P(\boldsymbol{f})=\|\boldsymbol{f}\|^2$ とする Tikhonov 正則化の解を求める反復計算法もある[30]．プラズマ撮像では微分演算子を入れると効果的であろう．この種の反復計算では，反復のなかで画素値 f_k に負が出れば 0 と置く操作を入れて画像を正値にできる．負値置き換えの繰り返しに落ち着いて，不自然な折れ曲がりが画像に出かねないが．

プラズマ撮像に使われた特徴ある再構成法として Gerchberg- Papoulis 反復法がある．投影データの欠損部をまずは値 0 として CT の標準解法で像を求め，一般的な制約に照らしてその像を修正し，その投影をもって欠損部を補完する．そして，この操作を繰り返す．データ欠損にどこまで強いか明らかではないが，標準解法が使える[31]．

また，ポジトロン放射型 CT（PET）のための有力解法である natural pixel 法が，ITER をめざす軟 X 線放射型 CT のための設計研究に使われている[32]．Fig. 12 のような各検出器の広がった受信パターンを基底に用いて，それらの重ね合わせとして画像を表現する級数展開法である．受信パターンの広がりを考慮しつつ，検出器をどこまで多く配置したとき医用 CT の解法が使えるようになるかという観点で調べられている．

医用 CT と比べたプラズマ CT 撮像の一つの際立った特徴は，高速に変化する像の撮影という点にある．投影データは多チャンネル時間信号として得られる．各時刻における像再構成ではなく，“空間 2 次元および時間”の像再構成が追求されてよいだろう．時間方向の相関（信号の予測可能性・滑らかさ）を取り込んだフィルタリング（正則化）が研究されるべきである．そのような試みはいまだ限られている．しかし，最近の動向として，時間×空間の 2 次元データ値をそのまま行列とみなして特異値分解し，得られた空間基底 $\{\boldsymbol{v}_i\}$ のそれぞれについて像再構成を行うと，プラズマの定常成分と揺動成分に分けて画像を得るというような，独特のパターン認識的な効果が出る[4]．Fig. 8 はそのようにして得られた．

空間 3 次元あるいは“空間 2 次元および時間”の大規模なプラズマ画像に対して，ニュートン法や Tikhonov 正則化で使う行列の分解を追求する正攻法の研究がなされてよい．PET など医用 CT のために大規模な特異値分解を行っ

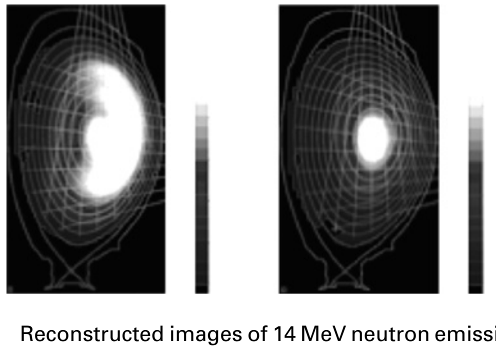

Fig. 12 Reconstructed images of 14 MeV neutron emission CT in the T_2 gas puff experiment: the initial shape 150 ms after the puff, when the tritium density is hollow (left), and the highly-peaked shape after 750 ms (right) once the tritium density has fully relaxed (from ref. [33]).

た論文があるし，数値計算学の研究は進んでいる．最急降下法的な攻め方を行ってみたいのであれば，最近はやりの前処理付き共役勾配法が可能性を秘めている．投影行列 H が疎であることを利用して，0との積・和を省略する高速化もなされてよい．

その他，ベクトル・トモグラフィや面積分値からの3次元CTなど計測の物理がらみで重要なもの，魅力的なものがいくつかあるが，逆問題としての数理の本質は同じである．

9．おわりに

書き終えてみると，そのほか色々あった像再構成法が脳裏に浮かぶ．磁気面に沿った像の一様性を仮定して，線形方程式の逆進代入のように外側から像を求める方法もあった．磁気面量的な仮定を持ち込めば，Radon 変換よりも良条件なアーベル変換に実質的に移る．角度 θ についてフーリエ展開，半径 r について model-free の正則化という攻め方がもちろんある．JET の中性子放射型 CT で主として使われたのはこの方法であった．プラズマ CT 計測が始まって四半世紀．素晴らしい魅力をもって始まって，大きな蓄積がなされた．そのなかで基本的なことは書いたように思う．数理の本質を大事にして，具体的な解法において creative でありたいものである．

JET の2003年実験は素晴らしい．重水素とトリチウムによる核融合反応で発生する中性子放射のダイナミックな動きをとらえ，同時に発生する α 粒子・D イオンの閉じ込めの様子を同じコリメータを用いた γ 線放射型 CT で撮像した．文献[33,34]などのカラー画像を見ると，撮像技術の高さと核融合研究の今後を知る者はハッブル望遠鏡の画像を超えるすごみさえ覚える．

自然科学研究機構の連携研究プロジェクトに「イメージングの科学」が取り上げられ（http://www.nins.jp/imaging-science.htm），画像計測研究の新しい波が起こっている．若い研究者の関心は高い．この解説のなかにその息吹きを感じていただければ幸いである．

謝辞

執筆にあたって，多くの方々から資料の提供を受けた．なかでも，核融合科学研究所の長山好夫教授からバルーニング不安定性の記念すべき画像のカラー版を，同じく劉儀 JSPS 研究員からボロメータの最新の画像をご提供いただいた．皆さんに心から感謝したい．

参 考 文 献

[1] S. Gindikin and P. Michor, *75 Years of Radon Transform* (International Press, Boston, 1992).
[2] R.S. Granetz, P. Smeulders *et al.,* Nucl. Fusion **28**, 457 (1988).
[3] F.B. Marcus *et al.,* Nucl. Fusion **33**, 1325 (1993).
[4] 岩間尚文：核融合研究 **68**, 586 (1992); ibid. **74**, 1310 (1998).
[5] 長山好夫，間瀬　淳：核融合研究 **81**, 337 (2005).
[6] A.V. Krasilnikov, M. Sasao *et al.,* Nucl. Fusion **45**, 1503 (2005).
[7] B.J. Peterson *et al.,* Plasma Phys. Control. Fusion **45**, 1167 (2003).
[8] A.C. Kak and M. Slaney, *Principle of Computerized Tomographic Imaging* (SIAM, Philadelphia, 2001).
[9] F. Natterer, *The Mathematics of Computerized Tomography* (SIAM, Philadelphia, 2001).
[10] 武者利光，岡本好夫：逆問題とその解き方（オーム社，東京，1992）.
[11] 中川 徹，小柳義夫：最小2乗法による実験データ解析（東大出版会，東京，1982）.
[12] A.M. Cormack, J. Appl. Phys. **34**, 2722 (1963); *ibid.* **35**, 2908 (1964).
[13] Y. Nagayama, J. Appl. Phys. **62**, 2702 (1987).
[14] Y. Nagayama *et al.,* Phys. Rev. Lett. **3**, 3527 (1991).
[15] Y. Nagayama, Rev. Sci. Instrum. **65**, 3415 (1994).
[16] S. Yamaguchi *et al.,* Plasma Phys. Control. Fusion **46**, 1163 (2004).
[17] X.F. Ma *et al.,* J. Geophys. Res. **110**, A05308 (2005).
[18] 寺崎奈緒美，岩間尚文，細田陽介：電子情報通信学会論文誌 **J81-D-II**, 93 (1998).
[19] S. Ohdachi *et al.,* Plasma Sci. Technol. **8**, 45 (2006).
[20] T. Tsuji, Y. Hosoda and N. Iwama, *Proc. of XXIV ICPIG,* Warsaw (1999) vol. 2, p. 59.
[21] S.F. Burch *et al.,* Comput. Vis. Graph. Image Process. **23**, 113 (1983).
[22] J. Cornwel and K.F. Evans, Astron. Astrophys. **143**, 77 (1985).
[23] K. Ertl, W. von Linden *et al.,* Nucl. Fusion **36**, 1477 (1996).
[24] Y. Hosoda *et al., Proc. XXV ICPIG,* Nagoya (2001) vol. 4, p. 213.
[25] 岩間尚文，細田陽介ら：大同工大紀要 **41**, 105 (2005).
[26] Y. Liu, B.J. Peterson and N. Tamura, *private communication.*
[27] M. Anton *et al.,* Plasma Phys. Control. Fusion **38**, 1849 (1996).
[28] J.J. Hopfield, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **81**, 3088 (1984).
[29] 陳延偉：阪大工学部博士論文，1990年1月.
[30] G.T. Herman, *Image Reconstruction from Projections* (Academic Press, Orlando, 1980).
[31] A.L. Balandin *et al.,* SPIE **1843**, 68 (1991).
[32] L.C. Ingesson *et al.,* Plasma Phys. Control. Fusion **42**, 161 (2000).
[33] K.-D. Zastrow *et al.,* Plasma Phys. Control. Fusion **46**, B 255 (2004).
[34] A. Murari *et al.,* Nucl. Fusion **45**, S195 (2005).

用語解説

ラドン変換　Radon Transform

法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ と座標の原点からの距離 p で指定される直線に沿った２次元画像 $f(\boldsymbol{r})$ の線積分

$$g(p,\boldsymbol{n})=\int_D \delta(p-\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{r})f(\boldsymbol{r})\,\mathrm{d}\boldsymbol{r}$$

を，数学者 J. Radon の名を取って，$f(\boldsymbol{r})$ のラドン変換という．ここで，$\delta(\cdot)$ はデルタ関数，D は $f(\boldsymbol{r})$ の定義域である．トモグラフィの標準解法であるフィルタ補正逆投影法およびフーリエ変換法の出発点になる関係式である．

正則化　Regularization

線形方程式の左辺の係数や右辺の定数がわずかに変化しただけで解が大幅に変化するとき，また，解が不定のときも含めて，線形方程式は悪条件（ill-conditioned）であるとか不適切(inadequate)であるという．このとき，解が満たすべき一般的な制約を与えて解を安定化させることを正則化という．求める関数の積分変換をデータに最小２乗フィットさせる計測の逆問題において，正規方程式の解を求めるときに使われる．代表的な正則化法として，解が有限級数で表わせると仮定する方法，解の２乗積分やエントロピーが最小とか最大とかの条件を与える方法の２つがある．

赤池情報量規準　Akaike Information Criterion(AIC)

統計モデルの良し悪しを判定するための指標として，赤池弘次氏によって1971年に導入された．AIC＝－２×ln（最大尤度)＋２×（パラメータ数）と定義され，AIC が小さいほうが良いモデルとされる．測定データを統計的に説明するときに，モデルのパラメータ数を増していけば測定値をよりよく説明できるわけだが，測定値のノイズなどによる変動に対してフィットし過ぎる可能性もある．測定値が正規分布に従うとき，AIC の第１項は（データ数）×ln（残差２乗和）と評価でき，モデルの当てはめの程度を示す．第１項に著しい差がないときには，第２項が作用して，より少ないパラメータを用いたモデルが良いモデルと判断される．

特異値分解　Singular Value Decomposition（SVD）

階数 r の任意の $n\times m$ の実行列 A は $A=U(n\times r)\Sigma(r\times r)V^T(r\times m)$ という形に分解される．ここで U，V は正規直交ベクトルを列ベクトルに持つ行列，Σ は特異値 $\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_r$ を対角要素に持つ対角行列である．$A^TA=(U\Sigma V^T)^T(U\Sigma V^T)=V\Sigma^T\Sigma V^T$ であるから A の特異値は A^TA の固有値の平方根に等しく，V の列ベクトルは A^TA の固有ベクトルになる．同様に U の列ベクトルは AA^T の固有ベクトルである．特異値分解は一対の正規直交基底系を生成しつつ主要な成分を得る計算のツールであり，一般逆行列，最小２乗法，主成分分析などに多くの応用を持つ．

最大エントロピー法　Maximum Entropy Method（MEM）

誤差を含む不完全なデータから情報エントロピーを用いて背後の未知量を推定する方法の一つ．観測されたデータの確率分布の情報エントロピーが最大になるように未知量を推定する．スペクトル解析その他，多くの分野に応用されているが，トモグラフィや電波望遠鏡では画像の値 f_i を確率分布に対応させたエントロピー $H=-\sum_i f_i\ln(f_i)$ を最大にする条件で逆変換を行なう一連の手法をさす．

いわ　ま　なお　ふみ
岩 間 尚 文

1945年愛知県東海市生まれ．愛知県横須賀高校卒業，1972年名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了．名大，新設の富山県立大，現在名古屋市南にある大同工業大学情報学部の教授．新生私立大学のために奮闘している．科学におけるヨーロッパの豊かな先進的計画性にはかなわない．人間社会のつくりが違う．数理情報のプロになったので，個人的には負ける気がしないが．自分がつかんだ価値あるものを若い人たちに伝えたいと思っている．

おお　だち　さとし
大 舘 暁

1965年東京生まれ，1989年早稲田大学物理学科卒業，1994年東京大学理学系研究科物理学専攻単位取得退学．同年より核融合科学研に就職してプローブ計測，軟Ｘ線揺動計測などを行なう．1998年頃より高速度接線Ｘ線カメラ計測をはじめ，トモグラフィ計測の難しさ，面白さがわかりかけてきたところ．子供のころから SF が好きで核融合推進の宇宙機を作りたかったのですが，現状は「千里の道も一歩からはじまる」というところでしょうか．