



ジャイロ運動論

洲 謙 英 雄

(核融合科学研究所・総合研究大学院大学)

Gyrokinetic Theory

SUGAMA Hideo

National Institute for Fusion Science, Graduate University for Advanced Studies, Toki 509-5292, Japan

(Received 26 December 2002)

Abstract

The gyrokinetic theory is a basic framework for describing microinstabilities, turbulence, and resultant anomalous transport in magnetically confined plasmas. This article reviews basic governing equations of the gyrokinetic theory, namely, gyrokinetic equations for the gyrocenter distribution function, the electrostatic potential, and the magnetic vector potential, based on Lagrangian and Hamiltonian formulation. In this formulation, conservation laws for the magnetic moment, the phase space volume, and the total energy are rigorously treated.

Keywords:

gyrokinetic equation, Lagrangian and Hamiltonian formulation, microinstability, turbulence, anomalous transport

1. はじめに

プラズマは多数の荷電粒子（電子およびイオン）と電磁場が電磁的相互作用を通して不安定性、波動、輻射、拡散、乱流などの物理的に興味深い様々な現象を見せてくれる研究対象である。この解説記事で紹介するジャイロ運動論は、プラズマのこのようなすべての物理過程を取り扱うものではないが、特に核融合研究に関連した磁場閉じ込めプラズマにおける微視的不安定性、乱流、異常輸送を記述するための基本的なモデルとして導出され、それにかかわる多くの理論およびシミュレーション研究が長年にわたってなされてきている。

殆どすべての磁場閉じ込めプラズマ実験で観測される粒子・熱輸送は古典および新古典輸送理論 [1-4] (静かな電磁場中を動く荷電粒子間の Coulomb 衝突に基づくプ

ラズマ輸送理論) の予測を遙かに上回り異常輸送として核融合研究の当初より知られていた。異常輸送はプラズマ中の様々な微視的不安定性の作り出す乱流（特に密度や温度の勾配に駆動される不安定性が産み出すドリフト波乱流）に起因するものと考えられている [5-9]。磁場閉じ込めプラズマの中の一つの特徴的周波数と微視的空間スケールとして、磁場中での荷電粒子の旋回(ジャイロ)運動からジャイロ(サイクロトロンもしくは Larmor)周波数 Ω とジャイロ半径 ρ が与えられるが、ドリフト波乱流では、その典型的な周波数が Ω に比べずっと小さく、また磁力線垂直方向に ρ と同程度以下の小さな波長を有する揺らぎに対しては位相混合の効果(有限 Larmor 半径効果)が重要となってくる。このような有限 Larmor 半径効果や Landau 減衰、また $E \times B$ ドリフトや磁場の勾

author's e-mail: sugama@nifs.ac.jp

配および曲率による粒子のドリフト (∇B - 曲率ドリフト) と波との相互作用などの運動論的效果を正しく記述することができ, しかもジャイロ運動のような速い時間スケールについて平均化もしくは粗視化することにより従来の Vlasov 方程式よりも取り扱いやすくなったものがジャイロ運動論の方程式であり, 先ず静電揺動に対する線形の式が1968年に Rutherford & Friemar [10] および Taylor & Hastie [11] によって独立に発表され, ドリフト波等の線形微視的不安定性の分散関係やモード構造に関する理論・数値解析に広く応用された。

1980年代に入って, 電磁揺動の効果を取り入れたもの [12, 13] やまた非線形ジャイロ運動論の方程式 [14] が導かれ, さらに Lagrangian・Hamiltonian による定式化 [15, 16] の下にリー変換法 [17] とよばれる微分幾何学的手法を用いた精度の高いジャイロ運動論の方程式の導出法が示され, 対称性や保存則をより厳密に取り扱えるようになった [18-21]。また, 急速な計算機性能の発達に伴い, 1980年代後半より非線形ジャイロ運動論の方程式を第一原理としてプラズマ乱流・異常輸送の直接数値シミュレーションの研究が始まり, 現在ではトラスプラズマ全領域を扱うため並列計算機による非常に大規模なシミュレーションが精力的に行われている [22-32]。また, 計算時間や記憶容量を少なくするため, ジャイロ運動論の方程式の速度モーメントを取ることにより得られる流体モデル方程式即ちジャイロ (Landau) 流体モデルが考案され, それを用いた乱流シミュレーションも行われている [33-40]。

ジャイロ運動論の方程式が最初に導かれたときはバルーニング表示 [41, 42] において再帰的方法と呼ばれる摂動展開法が用いられたが [10, 11], ところが最近では, 巨視的な磁気流体力学的 (MHD) 揺動も含んだより広範な波長・周波数の領域へのジャイロ運動論の拡張を容易にするために, 系統的かつエレガントな Lagrangian・Hamiltonian 定式化とリー変換法 (これも摂動法の一つである) [17] を用いることが多くなってきた [43-47]。従来では紹介されることが少なかった後者の方法に沿って, 本解説記事ではジャイロ運動論の基本原則を説明していくことにしよう。ただし, リー変換法の理解には, 解析力学・相対論等の数理物理にも広く用いられる微分幾何学 [16, 48, 49] の修得が必要であり, ここでは紙数の制限によりその詳細を微分形式などの微分幾何的記法を用いて説明することは避けるが, その代わりにジャイロ運動論の基本方程式系の導出過程を概観し, 得られた方程式系の物理的な意味や性質そして応用について説明する。

まずは次節においてジャイロ運動論の方程式よりも一般的な Vlasov 方程式から出発しよう。

2. Vlasov-Maxwell 系

これからは簡単化のため無衝突の場合だけを考えることにしよう。実際, 異常輸送をもたらすと考えられる微視的乱流の特徴的な周波数に比べて衝突周波数はかなり小さい。プラズマを構成する粒子に対する運動論の方程式は, 無衝突のとき次のような Vlasov 方程式で表される。

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{x} \cdot \nabla + \dot{v} \cdot \frac{\partial}{\partial v} \right) f(x, v, t) = 0 \quad (1)$$

ここで, $f(x, v, t)$ は時刻 t における 6 次元位相空間上の粒子分布関数であり, 粒子の位置 x と速度 v の時間発展はニュートンの運動方程式により決定される。

$$\dot{x} = v, \quad m\dot{v} = e \left[E(x, t) + \frac{1}{c} v \times B(x, t) \right] \quad (2)$$

ここで, $\dot{\quad} \equiv d/dt$ は時間微分を表し, 粒子の質量 m と電荷 e において, 粒子の種類を表す添字は省略してある。(2) を通して荷電粒子の運動に作用する電磁場 E, B はまた以下の Maxwell 方程式

$$\begin{aligned} \nabla \times E &= -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, & \nabla \cdot B &= 0 \\ \nabla \times B &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial E}{\partial t}, & \nabla \cdot E &= 4\pi\rho \end{aligned} \quad (3)$$

の中の電荷密度 $\rho \equiv \sum_a e_a \int f_a d^3v$ と電流密度 $\mathbf{j} \equiv \sum_a e_a \int f_a v d^3v$ を通して粒子運動により影響されるため, プラズマには粒子と場の相互作用による様々な集団現象が現れる。

(1)-(3) からなる方程式系では, 特に異常輸送に関連したドリフト波等の微視的乱流のみならず, サイクロトロン波や光速の電磁波等, 非常に大きな範囲の異なる時間・空間スケールの現象がすべて記述されるが, その分だけ, 解析的にも数値的にも直接解くことが非常に困難なものとなっている。それに比べてジャイロ運動論が対象とする時間・空間スケールの範囲はより限定的なものであり (Fig. 1 参照), したがって Vlasov-Maxwell 系に含まれていくつかの物理現象は見過ごされることになる。例えば, 光速の電磁波のような速い波は扱わず, それに対応して Maxwell 方程式 (3) 中の Maxwell の変位電流の項 $c^{-1} \partial E / \partial t$ は無視される。また後に詳しく示さ

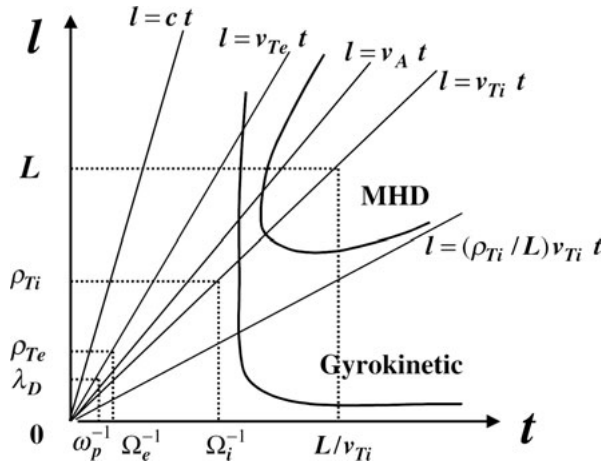


Fig. 1 Region of validity of gyrokinetic theory compared with that of MHD in terms of the time scale t and the spatial scale l . Here, L represents the equilibrium scale length, ρ_{Ti} (ρ_{Te}) is the ion (electron) thermal gyroradius, λ_D is the Debye length, ω_p is the plasma frequency, Ω_i (Ω_e) is the ion (electron) gyrofrequency, v_{Ti} (v_{Te}) is the ion (electron) thermal velocity, v_A is the Alfvén velocity, and c is the light speed. Thick curves represent the boundary of region of validity.

れるように、サイクロトロン波のようにジャイロ周期 $\Omega^{-1} = (eB/mc)^{-1}$ 以下の時間スケールを持つ現象も無視され、それに伴って分布関数のジャイロ位相に関する依存性を消去することにより、Vlasov 方程式の場合よりも低次元の位相空間上で扱うことのできるジャイロ運動論的(もしくはジャイロ運動論的 Vlasov)方程式が導かれることになる。次節では、ジャイロ運動論に入る前の準備段階として、ドリフト運動論および guiding-center 変数について説明しよう。

3. ドリフト運動論と Guiding-center 変数

磁場中において粒子が示すジャイロ運動の周期 $\Omega^{-1} = (eB/mc)^{-1}$ やジャイロ半径 $\rho = v_{\perp}/\Omega$ が、それぞれ、電磁場 E, B の変化する時間スケール ω^{-1} および空間スケール L に比べて極めて小さい場合、即ち、

$$\frac{\omega}{\Omega} \sim \frac{\rho}{L} \sim \epsilon_D \ll 1 \quad (4)$$

が成り立つ場合、いわゆるドリフト近似が可能となる。本節ではジャイロ半径 ρ 程度以下の波長を持つ電磁場の揺動が存在しない場合を仮定している。ドリフト近似では、ジャイロ周期や半径程度の時空間スケールにおける物理量の平均を取り粗視化することによって、位相空間の次元を一つ減らすと同時に消えた次元の座標変数に共

役な運動量が断熱不変量となるため、運動方程式(ドリフト方程式)の積分が元々の Newton 方程式(2)に比べて、大変楽になる。(4)において時空間スケールの小さな比を表す ϵ_D はドリフトパラメータと呼ばれ、摂動展開パラメータとして用いられる。

ドリフト近似の理論即ちドリフト運動論では位相空間変数は (x, v) から guiding-center 変数 $Z = (X, U, \mu, \xi)$ に変換される。

$$T_D: (x, v) \rightarrow Z = (Z^i)_{i=1, \dots, 6} = (X, U, \mu, \xi) \quad (5)$$

ここで、guiding-center 変数は

$$\begin{aligned} X &= x - \rho, \quad U = v_{\parallel}, \quad \mu = mv_{\perp}^2/(2B), \\ \xi &= \tan^{-1}(v \cdot e_1/v \cdot e_2) \end{aligned} \quad (6)$$

で与えられる(Fig. 2 参照)。 X は guiding-center の位置、 $\rho \equiv b \times v/\Omega$ はジャイロ半径ベクトル、 $v_{\parallel} = v \cdot b$ および $v_{\perp} = v - v_{\parallel} b$ はそれぞれ磁力線に関して平行方向および垂直方向の速度成分を表す。 $(e_1, e_2, b \equiv B/B)$ は各点 x において正規直交基底ベクトルをなすとし、 ξ はジャイロ運動の位相を表す。 μ は磁気モーメントであり断熱不変量となる。(6)の変換式において定義される guiding-center 変換 $T_D = T_D[B]$ は当然のことながら磁場配位に依存する。(6)において、 ϵ_D に関して高次の補正量の記載は省略してある。また、電場 E の大きさは、 $E \times B$ ドリフト速度の大きさが熱速度よりはずっと小さく、 ∇B - ドリフトや曲率ドリフトの速度と同程度であると仮定されている。

Littlejohn[50, 51, 52]は Hamiltonian や Lagrangian による荷電粒子の運動の表現形式にリー変換[17]と呼ばれる微分幾何学的手法を用いることによって ϵ_D に関する

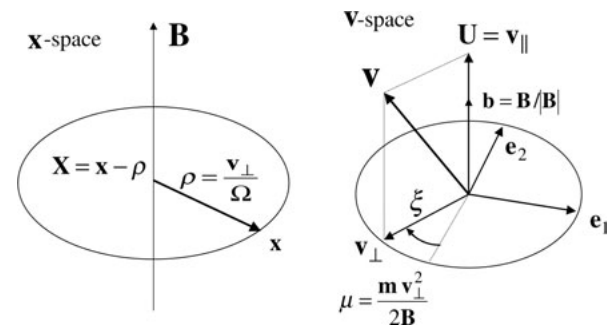


Fig. 2 Transformation from particle variables (x, v) to guiding-center variables $Z = (X, U, \mu, \xi)$ in the absence of electromagnetic fluctuations. Here, the gyrophase ξ is defined such that $d\xi/dt = \Omega = eB/(mc) > 0$ for the positive charge $e > 0$. Higher-order correction terms in ϵ_D are omitted.

高次のオーダーも含めた guiding-center 変数への変換式を系統的に与える方法を示した．この方法の利点は，原理的に ε_D に関する任意の次数のオーダーまで真に保存される磁気モーメントを正確に求めることができ，また途中で摂動展開を打ち切っても guiding-center 変数に対するドリフト運動方程式が厳密に位相空間体積の保存 (Liouville の定理) やエネルギー保存則 (定常場の場合) [15, 16] を満足するようになっているところにある．

ドリフト運動論における Lagrangian, Hamiltonian や運動方程式の具体的な表式はここでは示さないが，それらは次節のジャイロ運動論における Lagrangian (13), Hamiltonian (15) および運動方程式 (26) - (29) において微視的揺動成分をゼロとおくことにより直ちに得られる．ドリフト運動方程式により記述される guiding center の軌道が Coulomb 二体衝突により散乱される過程を基にしてプラズマ輸送を記述するのが新古典輸送理論 [24] であり，トーラス磁場配位のように非一様ではあるが与えられた静かな場の下での粒子・熱輸送係数を予測することができる．一方，プラズマ乱流・異常輸送を考える場合，微視的揺動電磁場が粒子軌道に影響すると同時に揺動電磁場自身が粒子の運動から産み出され，粒子と場の時空間分布をセルフ・コンシステントに決定しなければならない．次節では，そのようなプラズマ粒子と揺動電磁場に対する支配方程式系をジャイロ運動論を基に解説しよう．

4. ジャイロ運動論の基本方程式系

4.1 Gyrocenter 変数と運動方程式

前節ではドリフト運動論について述べたが，ジャイロ運動論では，ドリフト運動論では考慮されなかった微視的電磁場の揺動が存在する場合を取り扱う．電磁場の中における荷電粒子の運動を導く変分原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ における Lagrangian L は次式で与えられる [52]．

$$\begin{aligned} L &= \mathbf{p} \cdot \dot{\mathbf{x}} - H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \\ &= \left[m\mathbf{v} + \frac{e}{c}(\mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1) \right] \cdot \dot{\mathbf{x}} - \left(\frac{1}{2} m v^2 + e\phi_1 \right) \\ &= \left(m\mathbf{v}_0 + \frac{e}{c}\mathbf{A}_0 \right) \cdot \dot{\mathbf{x}} - \left(\frac{1}{2} m \left| \mathbf{v}_0 - \frac{e}{mc}\mathbf{A}_1 \right|^2 + e\phi_1 \right) \quad (7) \end{aligned}$$

ここで ϕ_1 は静電ポテンシャルであり，磁場は $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_1$ のように平衡磁場 $\mathbf{B}_0 = \nabla \times \mathbf{A}_0$ と揺動成分 $\mathbf{B}_1 = \nabla \times \mathbf{A}_1$ の和で表せるとし，同様にベクトルポテンシャル $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \mathbf{A}_1$ も平衡成分 \mathbf{A}_0 と揺動成分 \mathbf{A}_1 からなるとした．ジャイロ運動論では，

$$\frac{e\phi_1}{mv^2} \sim \frac{e|\mathbf{A}_1|}{mcv} \sim \varepsilon_G \ll 1 \quad (8)$$

のようなオーダーリングを用いる．ここで，微量を表すパラメータ ε_G を新たに導入することによって，ジャイロ運動論が取り扱う揺動振幅の大きさの程度を示したが，通常は $\varepsilon_G \sim \varepsilon_D$ と仮定される．また，電磁揺動の特徴的な周波数は，ドリフトオーダーリング (4) の場合と同様，ジャイロ周波数 Ω に比べて極めて小さいものとする．(7) において

$$\mathbf{v}_0 = [\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}_0]/m = \mathbf{v} + (e/mc)\mathbf{A}_1 \quad (9)$$

(\mathbf{p} は粒子の正準運動量) とおいた．さて，前節と同様にまず guiding-center 変数 $\mathbf{Z} = (X, U, \mu, \xi)$ を定義するのであるが，その場合に変換式 (6) に現れる速度 $\mathbf{v} = [\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}]/m$ および磁場 \mathbf{B} の代わりに，それぞれ， $\mathbf{v}_0 = [\mathbf{p} - (e/c)\mathbf{A}_0]/m = \mathbf{v} + (e/mc)\mathbf{A}_1$ および平衡磁場 \mathbf{B}_0 を用いることにする．図式的に表すと，

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \xrightarrow{\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + (e/mc)\mathbf{A}_1} (\mathbf{x}, \mathbf{v}_0) \xrightarrow{T_D[B_0]} \mathbf{Z} = (X, U, \mu, \xi) \quad (10)$$

となる．ここで \mathbf{v} の代わりに \mathbf{v}_0 を用いる理由は，(7) からわかるように，この guiding-center 変数 $\mathbf{Z} = (X, U, \mu, \xi)$ を独立変数として用いることにより $L(\mathbf{Z}, \dot{\mathbf{Z}}, t) = \Gamma(\mathbf{Z}) \cdot \dot{\mathbf{Z}} - H(\mathbf{Z}, t)$ の形をした guiding center の運動に対する Lagrangian において， (ϕ_1, \mathbf{A}_1) で表される電磁揺動の効果を見かけ上 Hamiltonian 部分 $H(\mathbf{Z}, t)$ の中だけに押し込めることができ，すぐ後に示す gyrocenter 変数 $\bar{\mathbf{Z}} = (\bar{X}, \bar{U}, \bar{\mu}, \bar{\xi})$ への変換を正準 (canonical) 変換 [15, 16] によって行うことが可能になるからである (Fig. 3 参照)．

さて，微視的電磁揺動の存在により，guiding-center 変数の中の磁気モーメント μ はもはや保存されなくなる．それゆえ， ε_G を摂動展開パラメータとして再びリー変換の方法を用い，guiding-center 変数 $\mathbf{Z} = (X, U, \mu, \xi)$ から新たな変数 $\bar{\mathbf{Z}} = (\bar{X}, \bar{U}, \bar{\mu}, \bar{\xi})$ への変換

$$T_G: \mathbf{Z} = (X, U, \mu, \xi) \rightarrow \bar{\mathbf{Z}} = (\bar{X}, \bar{U}, \bar{\mu}, \bar{\xi}) \quad (11)$$

を行い，電磁揺動の存在下でも $\bar{\mu}$ が保存されるようにする (Fig. 3 参照)．ここでは，Brizard [21] に倣い，guiding-center 変数 $\mathbf{Z} = (X, U, \mu, \xi)$ と区別するために， $\bar{\mathbf{Z}} = (\bar{X}, \bar{U}, \bar{\mu}, \bar{\xi})$ を gyrocenter 変数， T_G を gyrocenter 変換と呼ぶ． $T_G = I + \mathcal{O}(\varepsilon_G)$ と見なされ， $\varepsilon_G \rightarrow 0$ の極限で T_G は恒等変換 I に収束する．Guiding-center 変数による表現では微視的揺動の空間変数に含まれるジャイロ半径 ρ

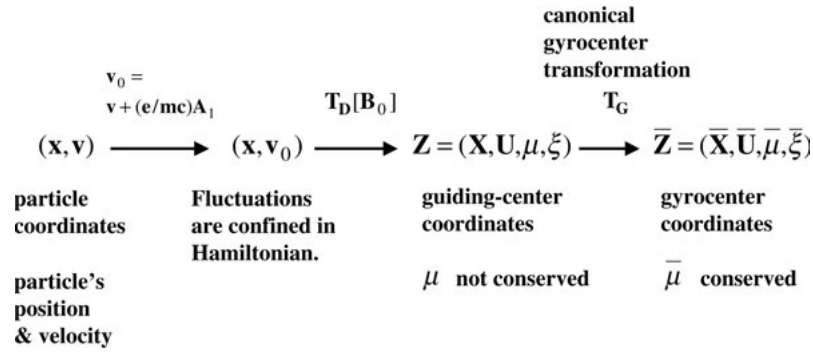


Fig. 3 Transformation from particle variables (\mathbf{x}, \mathbf{v}) to gyrocenter variables $\bar{\mathbf{Z}} = (\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{U}}, \bar{\mu}, \bar{\xi})$ in the presence of electromagnetic fluctuations.

クトルを通して Hamiltonian はジャイロ位相に依存する。 $\bar{\mu}$ が保存されるためには、このジャイロ位相に関する依存性を gyrocenter 変換によって消し去らなければならない。この目的を満足する T_G として、前述のように Poisson 括弧の形を保存する変換 (正準変換 [15, 16]) となるものを採用することができ、gyrocenter 変数 $\bar{\mathbf{Z}}$ への変換式は次のような形を取る。

$$\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z} + \{\tilde{S}_1(\mathbf{Z}, t), \mathbf{Z}\} + \mathcal{O}(\varepsilon_G^2) \quad (12)$$

ここで、 \tilde{S}_1 は $\mathcal{O}(\varepsilon_G)$ のオーダの正準変換のための母関数であり後に (19) で与えられる。また、Poisson 括弧 $\{\cdot, \cdot\}$ の gyrocenter 変数による表現も (20) - (22) で示される。

以下では、 ε_D および ε_G に関して 1 次のオーダまで考慮した gyrocenter 変換によって得られた結果を示そう。Gyrocenter 変数では、単一荷電粒子に対する Lagrangian は次式で与えられる。

$$L = \frac{e}{c} \mathbf{A}^* \cdot \dot{\bar{\mathbf{X}}} + \frac{mc}{e} \frac{\dot{\bar{\mu}}}{\bar{\mu} \bar{\xi}} - H \quad (13)$$

ここで、

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_0(\bar{\mathbf{X}}) + \frac{mc}{e} \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{X}}) \quad (14)$$

は平衡磁場に対するベクトルポテンシャル \mathbf{A}_0 と平衡磁場方向の単位ベクトル $\bar{\mathbf{b}} \equiv \mathbf{B}_0/B_0$ の gyrocenter 位置 $\bar{\mathbf{X}}$ における値から定義される。また、Hamiltonian H は次式で表される。

$$H = \frac{1}{2} m \bar{\mathbf{U}}^2 + \bar{\mu} B_0(\bar{\mathbf{X}}) + e \langle \phi \rangle \quad (15)$$

Hamiltonian H の中に現れる ϕ は電磁揺動のポテンシャル ϕ_1 と A_1 より

$$\phi(\mathbf{Z}, t) = \phi_1(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}, t) - \frac{1}{c} \mathbf{v}_0(\bar{\mathbf{Z}}) \cdot \mathbf{A}_1(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\boldsymbol{\rho}}, t) \quad (16)$$

によって定義される。ここで、

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{\rho}} &\equiv \bar{\boldsymbol{\rho}}(\bar{\mathbf{Z}}) \equiv \mathbf{b}(\bar{\mathbf{X}}) \times \mathbf{v}_0(\bar{\mathbf{Z}}) / \Omega(\bar{\mathbf{X}}) \\ \mathbf{v}_0(\bar{\mathbf{Z}}) &\equiv \bar{\mathbf{U}} \bar{\mathbf{b}}(\bar{\mathbf{X}}) - [2\bar{\mu} B_0(\bar{\mathbf{X}}) / m]^{1/2} \\ &\quad \times [\sin \bar{\xi} \mathbf{e}_1(\bar{\mathbf{X}}) + \cos \bar{\xi} \mathbf{e}_2(\bar{\mathbf{X}})] \end{aligned} \quad (17)$$

および $\Omega(\bar{\mathbf{X}}) = eB_0(\bar{\mathbf{X}}) / mc$ であり、(15) において、

$$\langle \dots \rangle \equiv \frac{1}{2\pi} \int \dots d\bar{\xi} \quad (18)$$

は、ジャイロ運動の位相 $\bar{\xi}$ に関する平均を表す。特に注意しておかなければならないのは、(9) で示したように (17) の \mathbf{v}_0 は真の粒子速度 \mathbf{v} と $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v} + e\mathbf{A}_1/(mc)$ という関係で結ばれており、 $A_1 \neq 0$ のとき $\mathbf{v}_0 \neq \mathbf{v}$ となる。前にも触れたが、このような \mathbf{v}_0 を用いることにより、guiding-center 変数による表現では $e\dot{\bar{\boldsymbol{\rho}}} \equiv e(\dot{\phi} - \langle \dot{\phi} \rangle)$ の形で Hamiltonian の中だけに電磁揺動に由来する $\bar{\xi}$ 依存性が残り、それを取り除くため、(12) の形の正準 gyrocenter 変換 T_G の母関数 \tilde{S}_1 として、

$$\tilde{S}_1(\bar{\mathbf{Z}}, t) = \frac{e}{\Omega(\bar{\mathbf{X}})} \int \tilde{\phi}(\bar{\mathbf{Z}}, t) d\bar{\xi} \quad (19)$$

が用いることができる。ただし、上式に含まれる積分定数は $\langle \tilde{S}_1 \rangle = 0$ の条件より決定されるものとする。因みに (13) より、 $(e/c)\mathbf{A}^* = (e/c)\mathbf{A}_0 + m\bar{\mathbf{U}}\bar{\mathbf{b}}$ および $(mc/e)\bar{\mu}$ はそれぞれ $\bar{\mathbf{X}}$ および $\bar{\xi}$ に共役な運動量であると見なされる。

(13) の Lagrangian に伴って、gyrocenter 変数 $\bar{\mathbf{Z}} =$

$(\bar{X}, \bar{U}, \bar{\mu}, \bar{\xi})$ のそれぞれの成分間の Poisson 括弧 $\{\bar{Z}_i, \bar{Z}_j\}$ が以下のように与えられる . [以下の結果は (13) で示した Lagrangian L に対応し, ϵ_D に関して 1 次のオーダーまで考慮した結果で, 成分間の Poisson 括弧が 0 ではないもののみを記してある . 2 次のオーダーまで含めた場合の結果については例えば [45] を参照せよ .]

$$\{\bar{X}, \bar{X}\} = \frac{c}{eB_{\parallel}^*} \mathbf{b}(\bar{X}) \times \mathbf{l} \quad (20)$$

$$\{\bar{X}, \bar{U}\} = \frac{\mathbf{B}^*(\bar{X})}{mB_{\parallel}^*(\bar{X})} \quad (21)$$

$$\{\bar{\xi}, \bar{\mu}\} = \frac{e}{mc} \quad (22)$$

(20) において, ベクトル \mathbf{b} と単位テンソル \mathbf{l} との積で表されたテンソル記号 $\mathbf{b} \times \mathbf{l}$ は, 任意のベクトル \mathbf{a}_1 と \mathbf{a}_2 に対して, $\mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{l}) \cdot \mathbf{a}_2 \equiv \mathbf{a}_1 \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{a}_2)$ となるものとして定義される . また, $\nabla \equiv \partial/\partial\bar{X}$ と解釈して,

$$\mathbf{B}^* \equiv \nabla \times \mathbf{A}^*, \quad B_{\parallel}^* \equiv \mathbf{B}^* \cdot \mathbf{b} \quad (23)$$

を定義した . 前にも述べたように, 磁気モーメント $\bar{\mu}$ に関連して, gyrocenter 変数による表現では, Lagrangian L や Hamiltonian H , それに変数間の Poisson 括弧の表式の中から, ジャイロ位相 $\bar{\xi}$ に対する依存性が消えていることに注意しよう .

さて, gyrocenter 変数表現における運動方程式は変分原理 $\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt = 0$ より Euler-Lagrange 方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\bar{Z}}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \bar{Z}} = 0 \quad (24)$$

により与えられる . あるいは, Hamiltonian H と Poisson 括弧を用いれば, 上式と同等なものとして,

$$\frac{d\bar{Z}}{dt} = \{\bar{Z}, H\} \quad (25)$$

が得られる . (15) と (20) - (22) を用いて, (25) を成分ごとに具体的に書き下すと gyrocenter 運動方程式は以下のようになる .

$$\frac{d\bar{X}}{dt} = \frac{1}{B_{\parallel}^*} \left[\left(\bar{U} + \frac{e}{m} \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial \bar{U}} \right) \mathbf{B}^* + c\mathbf{b} \times \left(\frac{\bar{\mu}}{e} \nabla B_0 + \nabla \langle \phi \rangle \right) \right] \quad (26)$$

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = - \frac{\mathbf{B}^*}{mB_{\parallel}^*} \cdot [\bar{\mu} \nabla B_0 + e \nabla \langle \phi \rangle] \quad (27)$$

$$\frac{d\bar{\mu}}{dt} = 0 \quad (28)$$

$$\frac{d\bar{\xi}}{dt} = \Omega + \frac{e^2}{mc} \frac{\partial \langle \phi \rangle}{\partial \bar{\mu}} \quad (29)$$

以上の運動方程式において, 微視的電磁揺動の効果はすべて $\langle \phi \rangle$ の中に含まれている . (16) の定義からわかるように, ϕ がジャイロ半径 ρ 程度の波長を持つ揺動の空間変化やそれに伴うジャイロ位相依存性を含むが, 平均化操作 $\langle \dots \rangle$ により, 結局 (26) - (29) の右辺には, ジャイロ位相 $\bar{\xi}$ に対する依存性が一切含まれない . これは, 磁気モーメントの保存 $d\bar{\mu}/dt = 0$ とともに gyrocenter 運動方程式の重要な特徴である . ところで (6) の後に述べたような平衡電場 E の大きさに対するオーダーリング ($E \times B$ ドリフト速度 $\sim \nabla B$ - 曲率ドリフト速度) の下では, 平衡電場 E に対するポテンシャル (その空間変化スケールはジャイロ半径よりもずっと大きい) も ϕ の定義における ϕ_1 の中に含めて考慮することができることを断っておこう .

さて, 電磁場の微視的揺動部分が存在しない場合は, guiding-center 変数と gyrocenter 変数は一致し, $\phi_1 = \phi(X)$ (長波長成分のみを持つ平衡電場に対する静電ポテンシャル) および $A_1 = 0$ となる . この場合, $\bar{Z} = (\bar{X}, \bar{U}, \bar{\mu}, \bar{\xi}) \rightarrow \mathbf{Z} = (X, U, \mu, \xi)$ および $\langle \phi \rangle \rightarrow \phi(X)$ の置き換えを行うことにより, (26) - (29) は直ちに guiding-center 運動方程式に帰着する . そこで \mathbf{B}^* や B_{\parallel}^* に含まれる $\mathcal{O}(\epsilon_D)$ の項を考慮して, (26) を ϵ_D に関して $\mathcal{O}(\epsilon_D)$ まで Taylor 展開することにより, guiding-center の速度は磁力線方向に関して平行方向成分 U を持ち, 垂直方向成分は ∇B , 曲率, $E \times B$ ドリフトからなるというよく知られた結果を容易に確かめることができる . Gyrocenter 速度に対する電磁揺動の主要な効果は $c\mathbf{b} \times \nabla \langle \phi \rangle / B$ なる形のドリフト速度の中に含まれ, これが磁力線を横切るプラズマ粒子や熱の乱流 (異常) 輸送をもたらす .

4.2 ジャイロ運動論的 Vlasov 方程式

さて, 粒子分布関数について考えよう . 元々の位相空間変数 (x, v) を用いた場合の時刻 t における位相空間上の粒子分布関数 $f(x, v, t)$ は, 位相空間体積要素 $d^3x d^3v$ の中に含まれる粒子の数 $f(x, v, t) d^3x d^3v$ で与えられるものとして定義される . $f(x, v, t) \equiv F(\bar{Z}, t)$ とおくことによって, gyrocenter 変数による分布関数 $F(\bar{Z}, t)$ を定義する . また, $d^3x d^3v = D(\bar{Z}) d^6\bar{Z}$ により定義される gyrocenter 変数での Jacobian $D(\bar{Z})$ は

$$D(\bar{\mathbf{Z}}) = \frac{B_{\parallel}^*(\bar{\mathbf{Z}})}{m} \quad (30)$$

よって与えられる．したがって， $d^6\bar{\mathbf{Z}}$ に対応する位相空間体積要素中の粒子数は， $D(\bar{\mathbf{Z}})F(\mathbf{Z}, \bar{\mathbf{t}})d^6\bar{\mathbf{Z}}$ である．無衝突プラズマに対する Vlasov 方程式 (1) は gyrocenter 変数による表現では次のように書かれる．

$$\begin{aligned} \frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{\bar{\mathbf{Z}}, H\} \cdot \frac{\partial F}{\partial \bar{\mathbf{Z}}} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{X}}} + \frac{d\bar{U}}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{U}} + \frac{d\bar{\mu}}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} + \frac{d\bar{\xi}}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{\xi}} \right) \\ &\quad \times F(\bar{\mathbf{X}}, \bar{U}, \bar{\mu}, \bar{\xi}, t) = 0 \quad (31) \end{aligned}$$

ここで， $d\bar{\mu}/dt = 0$ であり，かつ (26)，(27) および (29) の右辺には，ジャイロ位相 $\bar{\xi}$ に対する依存性が現れなかったことを思い起こそう．すると， F のジャイロ位相に関する平均部分 $\langle F \rangle$ とそれからのずれ $\tilde{F} \equiv F - \langle F \rangle$ は個別に， $d\langle F \rangle/dt = 0$ および $d\tilde{F}/dt = 0$ を満足することが容易にわかる．ところが，ジャイロ運動論のオーダリングでは，ジャイロ周波数に比べて遙かにゆっくりとした時間変動を仮定し， $d\tilde{F}/dt \sim \Omega \partial \tilde{F} / \partial \xi$ となり， $\tilde{F} = 0$ であると考えられる．あるいは，初期条件として $\tilde{F} = 0$ を仮定すると任意の時刻で $\tilde{F} = 0$ が成立する事が (31) よりわかる．したがって，以後，分布関数 $F = F(\bar{\mathbf{X}}, \bar{U}, \bar{\mu}, t)$ は $\bar{\xi}$ に依存しないものとする．こうして，ついに以下のようなジャイロ運動論的 Vlasov 方程式が得られる．

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{X}}} + \frac{d\bar{U}}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{U}} \right) F(\bar{\mathbf{X}}, \bar{U}, \bar{\mu}, t) = 0 \quad (32)$$

上式において， $d\bar{\mathbf{X}}/dt$ と $d\bar{U}/dt$ はそれぞれ (26) と (27) で与えられる．ジャイロ運動論的 Vlasov 方程式 (32) は (x, v) 変数における Vlasov 方程式 (1) に比べて，独立変数の数が $\bar{\xi}$ のぶんだけ 1 つ減り，しかも $\bar{\mu}$ に関する微分演算子を含まないため， $\bar{\mu}$ は定数パラメータとして入っているだけである．この事実によってジャイロ運動論的 Vlasov 方程式 (32) では解析的な取り扱いや数値シミュレーションを行う場合の負担が遙かに軽減されるのであって，正にこの目的のためにこれまで苦労して gyrocenter 変数変換を行ってきたのである．このように分布関数の計算が楽になったことの代償は，gyrocenter 変数自身の定義が guiding-center 変数に比べて複雑になったことにより支払われている．(12) および (19) で見たように gyrocenter 変換の定義には揺動電磁場の情報が不可欠であり，微視的揺動の存在により gyrocenter 変数は

guiding-center 変数から変位して見える (次節参照)．

Hamiltonian 形式で運動方程式が与えられたことにより，次式に示すように Liouville の定理即ち位相空間の体積の保存則が厳密に成り立つことがわかる．

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{Z}}} \cdot \left(D \frac{d\bar{\mathbf{Z}}}{dt} \right) = \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \cdot \left(D \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{U}} \cdot \left(D \frac{d\bar{U}}{dt} \right) = 0 \quad (33)$$

(32) と (33) より，以下のようにジャイロ運動論的 Vlasov 方程式を保存形式で表すこともできる．

$$\frac{\partial (DF)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \cdot \left(DF \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{U}} \cdot \left(DF \frac{d\bar{U}}{dt} \right) = 0. \quad (34)$$

4.3 ジャイロ運動論的 Poisson-Ampère 則

以上では粒子分布関数が満たすジャイロ運動論的 Vlasov 方程式について説明してきたが，その中に現れる電磁場を決定するための条件を与えて初めてセルフ・コンシステントな閉じた基本方程式系が完成する．電磁場に対する条件は，ジャイロ運動論では Poisson 方程式と Ampère の法則で与えられる．(11) と (12) で表された gyrocenter 変換 $\bar{\mathbf{Z}} = T_G(\mathbf{Z})$ より gyrocenter 変数表示での分布関数 $F(\bar{\mathbf{Z}}, t)$ から guiding-center 変数表示における分布関数が $F(T_G(\mathbf{Z}), t) = F(\mathbf{Z}, t) + \{\tilde{S}_1, F\} + \mathcal{O}(\varepsilon_G^2)$ のように与えられる．また (6) および (9) を考慮すると，粒子の位置 x ，時刻 t における粒子数密度及び粒子束密度はそれぞれ $n(x, t) = \int d^6\mathbf{Z} D(\mathbf{Z}) \delta^3[\mathbf{X} + \rho_a(\mathbf{Z}) - x]$ $F(T_G(\mathbf{Z}), t)$ および $\Gamma(x, t) = \int d^6\mathbf{Z} D(\mathbf{Z}) \delta^3[\mathbf{X} + \rho_a(\mathbf{Z}) - x] F(T_G(\mathbf{Z}), t) [v_0(\mathbf{Z}) - (e/mc) A_1(x, t)]$ により与えられる．ここで， $\int d^6\mathbf{Z} \equiv \int_V d^3\mathbf{X} \int_{-\infty}^{\infty} dU \int_0^{\infty} d\mu \int_0^{2\pi} d\xi$ である．以上を考慮して電荷密度・電流密度を評価することにより，静電ポテンシャル ϕ_1 に対するジャイロ運動論的 Poisson 方程式

$$\begin{aligned} \nabla^2 \phi_1(x, t) &= -4\pi \sum_a e_a \int d^6\mathbf{Z} D_a(\mathbf{Z}) \delta^3[\mathbf{X} + \rho_a(\mathbf{Z}) - x] \\ &\quad \times [F_a(\mathbf{Z}, t) + \{\tilde{S}_{a1}(\mathbf{Z}, t), F_{a0}(\mathbf{Z})\}] \quad (35) \end{aligned}$$

およびベクトルポテンシャル A_1 に対するジャイロ運動論的 Ampère 法則

$$\nabla^2 A_1(x, t) = -\frac{4\pi}{c} [j_T(x, t) - j_0(x, t)] \quad (36)$$

が導かれる．ここでは，これまで省略していた粒子種を表すための下付添字 a を必要な場所に付け加えている． $j_0 = -(c/4\pi) \nabla^2 A_0$ は平衡磁場による電流を表す．ただ

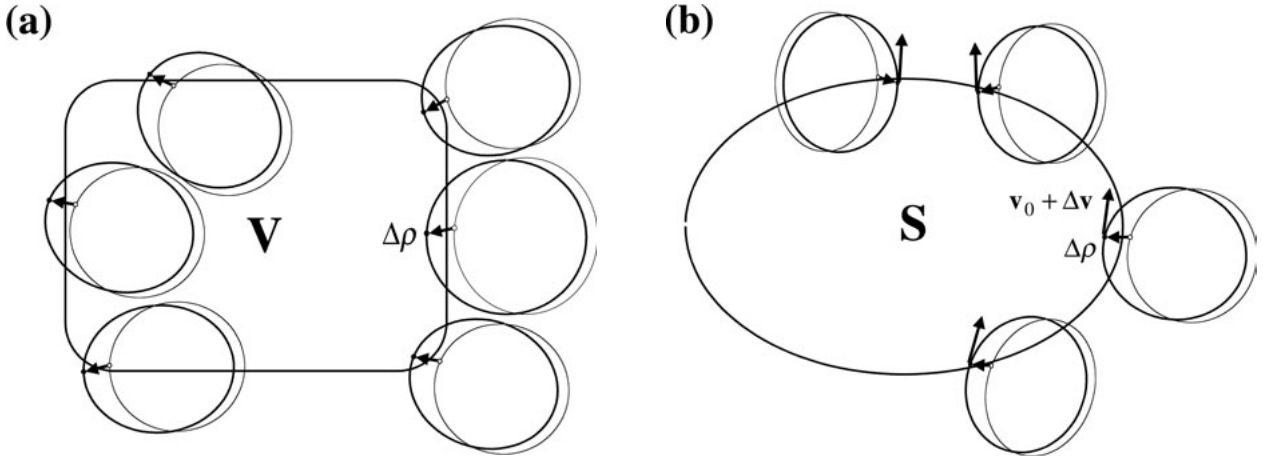


Fig. 4 (a) Gyrokinetic polarization and (b) gyrokinetic magnetization and parallel-flow correction. In (a), the number of particles in the volume V is changed by the displacement $\Delta\rho$ of the particle position due to the electromagnetic fluctuations. In (b), the particle flux crossing the surface S is changed by the displacement $\Delta\rho$ and the variation $\Delta\mathbf{v} = (\Delta v_{\parallel})\mathbf{b} + \Delta\mathbf{v}_{\perp}$ of the particle velocity due to the electromagnetic fluctuations.

し, Coulomb ゲージ条件 $\nabla \cdot \mathbf{A}_0 = \nabla \cdot \mathbf{A}_1 = 0$ を用いている. (35) の右辺は電荷密度の (-4π) 倍 $[= -4\pi \sum_a e_a n_a(\mathbf{x}, t)]$ を表し, また (36) の右辺において $\mathbf{j}_T \equiv (4\pi)^{-1} \nabla \times (\nabla \times \int d^3x' \mathbf{j}' / |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|)$ は全電流密度 \mathbf{j} の非圧縮 (ソレノイダル) 部分を表し, \mathbf{j} は

$$\begin{aligned} \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) \equiv & \sum_a e_a \int d^6Z D_a(\mathbf{Z}) \delta^3[\mathbf{X} + \rho_a(\mathbf{Z}) - \mathbf{x}] \\ & \times \left[F_a(\mathbf{Z}, t) \mathbf{v}_{0a}(\mathbf{Z}) - F_{a0}(\mathbf{Z}) \frac{e_a}{m_a c} \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) \right. \\ & \left. + \{ \tilde{S}_{a1}(\mathbf{Z}, t), F_{a0}(\mathbf{Z}) \} \mathbf{v}_{0a}(\mathbf{Z}) \right] \quad (37) \end{aligned}$$

により与えられる. Debye 長より大きな波長の揺動を扱う場合は, (35) の左辺は無視され, いわゆる準中性条件 $\sum_a e_a n_a(\mathbf{x}, t) = 0$ に帰着する. ジャイロ運動論では, 光速で伝搬する電磁波を取り扱わず Maxwell の変位電流を無視しているが, (36) に示したジャイロ運動論的 Ampère 法則はいわゆる Darwin モデル [53] に対応している. (35) および (37) において F_{a0} は分布関数の平衡部分を表し, F_{a0} には Maxwellian 分布関数が仮定されることが多い. $(F_a - F_{a0}), \tilde{S}_{a1}$ および $(e_a/m_a c) \mathbf{A}_1$ は $\mathcal{O}(\epsilon_G)$ の量であり, (35) と (37) において $\mathcal{O}(\epsilon_G^2)$ の量は無視されている.

(35) および (37) における $\{ \tilde{S}_{a1}, F_{a0} \}$ の項は後に述べるように微視的電磁揺動に伴う分極および磁化に関する. 分極や磁化の計算に F_a の代わりに F_{a0} を用いた (いわゆる線形分極・線形磁化の近似) のは, ジャイロ運動論的 Vlasov 方程式の導出において ϵ_G の 1 次のオーダーまでしか取らなかったことと, 後に示す全エネルギー保存

との整合性を取るためであり, ジャイロ運動論的 Poisson-Ampère 則に, 非線形分極・非線形磁化も含めて考えるには, ϵ_G の 2 次のオーダーまで考慮したジャイロ運動論的 Vlasov 方程式を求める必要がある [45].

(35) および (37) の右辺の積分では積分変数として guiding-center 変数 \mathbf{Z} を用いてジャイロ半径や粒子速度が定義されているが, それらは gyrocenter 変数 $\bar{\mathbf{Z}}$ を使って定義したジャイロ半径や粒子速度からは変化して見える. それらの変化分は $\mathcal{O}(\epsilon_G)$ の精度で

$$\begin{aligned} \rho_{S1} &= \rho(\mathbf{Z}) - \rho(\bar{\mathbf{Z}}) = -\{ \tilde{S}_1, \rho \} \\ \mathbf{v}_{S1} &= \mathbf{v}_0(\mathbf{Z}) - \mathbf{v}_0(\bar{\mathbf{Z}}) = -\{ \tilde{S}_1, \mathbf{v}_0 \} \end{aligned} \quad (38)$$

で与えられる. (38) を用いると, (35) の右辺の第 2 項で表される密度の変化分は $-\nabla \cdot \mathbf{P}$ のような形のジャイロ運動論的分極 (polarization) 密度として表すこともできる. ここで, \mathbf{P} は電磁揺動による gyrocenter から観た粒子位置の変位 $\Delta\rho = \rho_{S1}$ に伴うジャイロ運動論的分極ベクトルであり,

$$\mathbf{P} = \int dU d\mu d\xi \frac{B}{m} F_0 \Delta\rho(\mathbf{X} = \mathbf{x} - \rho) \quad (39)$$

で定義される [Fig. 4(a) 参照]. 粒子位置の変位 $\Delta\rho$ と同様に電磁揺動により粒子速度は $-(e/mc) \mathbf{A}_1$ と (38) の \mathbf{v}_{S1} との和 $\Delta\mathbf{v} = -(e/mc) \mathbf{A}_1 + \mathbf{v}_{S1}$ だけ gyrocenter から観測して変化したように見える. この粒子位置と速度の変化分を使って (37) の右辺の最後の 2 項を書き下すことができるが, これらは最終的に電磁揺動による平衡磁場方向の粒子フラックスの変化

$$\int dU d\mu d\xi \frac{B}{m} \left[\frac{eA_{\parallel}}{mc} \frac{\partial F_0}{\partial U} + e\tilde{\psi}_{X=x-\rho} \frac{1}{B} \frac{\partial F_0}{\partial \mu} \right] U \mathbf{b} \quad (40)$$

とジャイロ運動論的磁化 (magnetization) による粒子フラックス $\nabla \times \mathbf{M}_G$ の和で表されることが示される [Fig. 4 (b) 参照]. ここで, \mathbf{M}_G はジャイロ運動論的磁化ベクトルで,

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_G = & \int dU d\mu d\xi \frac{B}{m} \frac{v_{\perp}^2}{2\Omega} \mathbf{b} \frac{1}{B} \frac{\partial F_0}{\partial \mu} \sum_{k_{\perp}} \exp \left[i \int^x k_{\perp} \cdot d\mathbf{x} \right] \\ & \times e \left(\frac{k_{\perp} v_{\perp}}{2\Omega} \right)^{-1} \left\{ J_1 \left(\phi_{k_{\perp}} - \frac{U}{c} A_{\parallel k_{\perp}} \right) + J_1 \frac{v_{\perp}}{c} \frac{B_{\parallel k_{\perp}}}{k_{\perp}} \right\} \quad (41) \end{aligned}$$

によって定義され, $J_n = J_n(k_{\perp} v_{\perp} / \Omega)$ は n 次の Bessel 関数を表す. (41) では, 5.2 節で説明されるパルレーニグ表示を用いた.

4.4 エネルギー保存・その他

以上で, ジャイロ運動論においてプラズマ粒子分布関数と揺動電磁場決定するための基本方程式であるジャイロ運動論的 Vlasov 方程式 (32), ジャイロ運動論的 Poisson 方程式 (35) およびジャイロ運動論的 Ampère 法則 (36) が与えられた. これらの基本方程式系は非線形であり, 一般に解析的な解を求めることは極めて困難であるが, これらが持つ 1 つの重要な特徴は, 系全体のエネルギーに相当する厳密な保存量 E_{total} が存在することである.

$$\begin{aligned} E_{\text{total}} = & \sum_a \int d^6 \bar{\mathbf{Z}} D_a(\bar{\mathbf{Z}}) \left(F_a(\bar{\mathbf{Z}}, t) \left[\frac{1}{2} m_a |v_{0a}(\bar{\mathbf{Z}})|^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{e_a}{c} v_{0a}(\bar{\mathbf{Z}}) \cdot \mathbf{A}_1 \right] + F_{a0}(\bar{\mathbf{Z}}) \frac{e_a^2}{2\Omega_a(\bar{\mathbf{X}})} \right. \\ & \left. \left[\left\{ (\tilde{\phi}_1)_a d\tilde{\xi}, (\tilde{\phi}_1)_a \right\} - \frac{1}{c^2} \left\{ (\mathbf{v}_0 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1)_a d\tilde{\xi}, (\mathbf{v}_0 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1)_a \right\} \right] \right) \\ & + \frac{1}{8\pi} \int_V d^3 \mathbf{x} \left(|\nabla \phi_1(\mathbf{x}, t)|^2 + |\nabla \times [\mathbf{A}_0(\mathbf{x}) + \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t)]|^2 \right) \quad (42) \end{aligned}$$

ただし, $(\phi_1)_a = \phi_1(\bar{\mathbf{X}} + \rho_a(\bar{\mathbf{Z}}), t)$, $(\mathbf{v}_0 \cdot \tilde{\mathbf{A}}_1)_a = \mathbf{v}_{0a}(\bar{\mathbf{Z}}) \cdot \mathbf{A}_1(\bar{\mathbf{X}} + \rho_a(\bar{\mathbf{Z}}), t)$ とおいた. 上式の 1 ~ 2 行目, 4 行目はそれぞれ運動エネルギー [$\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ の項は無視されている] と電磁場のエネルギーを表すことがすぐわかるが, gyrocenter 変数表示では揺動電磁場による分極や磁化に伴うエネルギーが 3 行目に現れている. この全エネルギー保存則は粒子運動の方程式のみならず電磁場に対する方程式 (35) と (36) の両方を導くことができるような Lagrangian を用い, それが時間に陽に依存しないことと

Noether の定理より証明される [45].

5. 線形ジャイロ運動論

5.1 定常成分と揺動成分への分解

前節で示したジャイロ運動論的 Vlasov 方程式 (32) の右辺にここまで無視していた衝突項を考慮するとジャイロ運動論的 Boltzmann 方程式が得られる.

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} = & \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\bar{\mathbf{X}}}{dt} \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{X}}} + \frac{d\bar{U}}{dt} \frac{\partial}{\partial \bar{U}} \right) F(\bar{\mathbf{X}}, \bar{U}, \bar{\mu}, t) \\ = & C(F) \quad (43) \end{aligned}$$

衝突がある場合もジャイロ運動論的 Poisson 方程式 (35) とジャイロ運動論的 Ampère 則 (36) は変わらず成り立つ. 衝突項 $C(F)$ の厳密な表式を得るには Landau 衝突項 [4] を gyrocenter 変数で表現する必要があり, そのときジャイロ半径から定まるドリフトパラメータ ε_D と揺動振幅の大きさを示すパラメータ ε_G による展開における最低次のオーダーのものを取りことにする (現実には, より簡単な衝突モデルを用いることが多い). 衝突におけるエネルギー保存 $\sum_a \int d^6 \bar{\mathbf{Z}} D(\bar{\mathbf{Z}}) C_a(F) \left[\frac{1}{2} m_a |v_{0a}(\bar{\mathbf{Z}})|^2 - (e_a/c) v_{0a}(\bar{\mathbf{Z}}) \cdot \mathbf{A}_1 \right] = 0$ [運動エネルギーの $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ の項は無視されている] が満足されることにより, 系全体のエネルギー保存則 (42) は衝突がある場合でもそのまま成立することがわかる.

さて, (43) 中の分布関数 F は系のサイズの空間変化スケールを持つ定常成分と磁力線に対して垂直方向にジャイロ半径程度の短波長を持つ揺動成分の両方を含むものであったが, ここでそれぞれの部分への分解を行うことは新古典輸送および乱流・異常輸送を個別に取り扱うことに対応し, 輸送理論の基本的枠組みを理解する上でも有益である [54, 55]. ここからは, ε_D と ε_G とは同程度とし, $\varepsilon_D \sim \varepsilon_G \sim \varepsilon$ とおく. (26) - (29) の後で述べたように, $\phi_1(\bar{\mathbf{X}} + \rho, t) = \Phi(\bar{\mathbf{X}}) + \varphi_1(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\rho}, t)$ とおいて, ϕ_1 が長波長を持つ平衡電場に対応する静電ポテンシャル Φ と微視的揺動ポテンシャル φ_1 の和からなると考えることができる. これに対応して, (15) の Hamiltonian H を次のように定常部分 H_0 と揺動部分 H_1 に分解する.

$$H(\bar{\mathbf{Z}}, t) = H_0(\bar{\mathbf{Z}}) + H_1(\bar{\mathbf{Z}}, t)$$

$$H_0(\bar{\mathbf{Z}}) = \frac{1}{2} m \bar{U}^2 + \mu B_0(\bar{\mathbf{X}}) + e\Phi(\bar{\mathbf{X}})$$

$$H_1(\bar{\mathbf{Z}}, t) = e \left\langle \varphi_1(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\rho}, t) - \frac{1}{c} v_0(\bar{\mathbf{Z}}) \cdot \mathbf{A}_1(\bar{\mathbf{X}} + \bar{\rho}, t) \right\rangle \quad (44)$$

同様に分布関数 F も、巨視的定常部分 F_0 と微視的揺動部分 F_1 に分解する。

$$F(\bar{\mathbf{Z}}, t) = F_0(\bar{\mathbf{Z}}) + F_1(\bar{\mathbf{Z}}, t) \quad (45)$$

上式を(43)に代入し、その定常部分と揺動部分に分解すると、

$$\{F_0, H_0\} = C(F_0) \quad (46)$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \{F_1, H_0\} + \{F_0, H_1\} = C(F_1) \quad (47)$$

を得る。ただし、ここでは簡単のため揺動に関して2次の非線形項は無視しており、また(47)の右辺の $C(F_1)$ は線形衝突演算子を表すものとする。(46)および(47)はそれぞれ新古典輸送理論の基本方程式である(定常)ドリフト運動論の方程式及び微視的不安定性解析の基礎となる(線形)ジャイロ運動論の方程式を表す。

ここからは、位相空間独立変数として、 $\bar{\mathbf{Z}} = (\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathbf{U}}, \bar{\mu}, \bar{\xi})$ の代わりに $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mu}, \bar{\xi})$ をとる。ただし、 $\bar{\mathcal{E}}_0 = H_0(\bar{\mathbf{Z}})$ とする。以下、 $\partial/\partial\bar{\mathbf{X}}, \partial/\partial\bar{\mu}$ 等の偏微分演算子も $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mu}, \bar{\xi})$ を独立変数として定義されるものとする。定常分布関数 F_0 をさらに $F_0 = F_{00} + F_{01}$ のように $\mathcal{O}(\varepsilon^0)$ と $\mathcal{O}(\varepsilon^1)$ の部分に分けて、(46)は最低次で $\{F_{00}, H_0\} = C(F_{00}) = 0$ が成り立つとする。ここで、 $\{\bar{\mathcal{E}}_0, H_0\} = \{\bar{\mu}, H_0\} = 0$ であり、 $\{F_{00}, H_0\} = \{\bar{\mathbf{X}}, H_0\} \cdot \partial F_{00} / \partial \bar{\mathbf{X}} = \bar{\mathbf{U}} \cdot \partial F_{00} / \partial \bar{\mathbf{X}} + \mathcal{O}(\varepsilon)$ となることを考慮すると、トータスプラズマでは、 F_{00} は密度、温度を磁気面関数とする Maxwell 分布関数により与えられることがわかる。 F_{01} は分布関数の定常成分の Maxwellian 分布からのズレを表し、(46)の $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の式、即ち線形ドリフト運動論の方程式により決定され、粒子、熱等の新古典輸送フラックスやブートストラップ電流はこの F_{01} より計算される。

さて、(47)を文献等でより知られた形にするため、

$$F_1(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mu}, t) = H_1 \frac{\partial F_0}{\partial \bar{\mathcal{E}}_0} + h \quad (48)$$

のようにおき、これを(47)の左辺に代入し、 $\{\partial F_0 / \partial \bar{\mathcal{E}}_0, H_0\} \simeq \bar{\mathbf{U}} \cdot (\partial^2 F_0 / \partial \bar{\mathbf{X}} \partial \bar{\mathcal{E}}_0) = \mathcal{O}(\varepsilon)$ に注意し、 $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ は無視することによって、

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \{h, H_0\} = C(F_1) - \frac{\partial H_1}{\partial t} \frac{\partial F_0}{\partial \bar{\mathcal{E}}_0} - \{\bar{\mathbf{X}}, H_1\} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \bar{\mathbf{X}}} \quad (49)$$

を得る。これが、通常よく用いられる形の線形ジャイロ運動論の方程式である(後にバレーニグ表示を用いて、これをより見慣れたものにする)。同様に、(48)を(35)

および(36)に代入し、

$$\{\bar{S}_1, F_0\} = e\bar{\psi} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{\mathcal{E}}_0} + \frac{1}{B_0} \frac{\partial}{\partial \bar{\mu}} \right) F_0 + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \quad (50)$$

を考慮して、 $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の微視的揺動成分だけ抜き出して表すと、ジャイロ運動論的 Poisson 方程式およびジャイロ運動論的 Ampère 則はそれぞれ以下ようになる。

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi_1(\mathbf{x}, t) = & -4\pi \sum_a e_a \int d^3\mathbf{X} d\mathcal{E}_0 d\mu d\xi \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{B_0}{m_a^2 |U|} \\ & \delta^3(\mathbf{X} + \rho_a - \mathbf{x}) \left[e_a \varphi_1(\mathbf{x}, t) \frac{\partial F_{a0}}{\partial \bar{\mathcal{E}}_0} + e_a \left\{ \varphi_1(\mathbf{x}, t) \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{U}{c} A_{1\parallel}(\mathbf{x}, t) - \left\langle \varphi_1(\mathbf{X} + \rho_a, t) - \frac{v_0}{c} \cdot \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \rho_a, t) \right\rangle \right\} \right. \\ & \left. \times \frac{1}{B_0} \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mu} + h_a(\mathbf{X}, \mathcal{E}_0, \mu, t) \right] \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A}_1(\mathbf{x}, t) = & -\frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int d^3\mathbf{X} d\mathcal{E}_0 d\mu d\xi \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{B_0}{m_a^2 |U|} \\ & \times \delta^3(\mathbf{X} + \rho_a - \mathbf{x}) \left[\mathbf{U} \mathbf{b} \left\{ e_a \left(\varphi_1(\mathbf{x}, t) - \frac{U}{c} A_{1\parallel}(\mathbf{x}, t) \right. \right. \right. \\ & \left. \left. - \left\langle \varphi_1(\mathbf{X} + \rho_a, t) - \frac{v_0}{c} \cdot \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \rho_a, t) \right\rangle \right\} \right. \\ & \left. \times \frac{1}{B_0} \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mu} + h_a(\mathbf{X}, \mathcal{E}_0, \mu, t) \right\} \\ & + v_{0\perp} \left\{ -e_a \left\langle \varphi_1(\mathbf{X} + \rho_a, t) - \frac{v_0}{c} \cdot \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \rho_a, t) \right\rangle \right. \\ & \left. \times \frac{1}{B_0} \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mu} + h_a(\mathbf{X}, \mathcal{E}_0, \mu, t) \right\} \right] \quad (52) \end{aligned}$$

(49), (51) および (52) が閉じた線形ジャイロ運動論の方程式系を表す。ところで、ここまでは分布関数 F を表現するためのジャイロ運動論的独立変数として $(\bar{\mathbf{X}}, \bar{\mathcal{E}}_0, \bar{\mu}, \bar{\xi})$ を用いてきたが、ここで通常よく用いられる $(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \xi)$ を独立変数とした場合の分布関数 $f(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \xi)$ の表式を求めておこう。ただし、 \mathbf{X} は gyrocenter ではなく guiding-center の位置ベクトル、 $\mathcal{E} = \frac{1}{2}mv^2 + e\Phi(\mathbf{X})$ および $\mathcal{M} = mv_{\perp}^2/2B_0(\mathbf{X})$ であり、 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 - e\mathbf{A}_1/(mc)$ を用いると、 $(\mathcal{E}, \mathcal{M})$ と (\mathcal{E}_0, μ) の差は $\mathcal{O}(\varepsilon)$ で以下ようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 & \equiv \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = -\frac{e}{c} \mathbf{v}_0 \cdot \mathbf{A}_1 \\ \mu_1 & \equiv \mathcal{M} - \mu = -\frac{e}{cB} \mathbf{v}_{0\perp} \cdot \mathbf{A}_1 \quad (53) \end{aligned}$$

(45), (48) と (53) を使って $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ の誤差を無視すると、

$$f(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \xi, t) = F_0(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}) + \delta f(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \xi, t) \quad (54)$$

となり, ここで,

$$\begin{aligned} \delta f(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \xi, t) &= F_1 + \{\tilde{S}_1, F_0\} - \varepsilon_1 \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} - \mu_1 \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{M}} \\ &= e\varphi_1(\mathbf{X} + \rho, t) \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathcal{E}} + e \left\{ \varphi_1(\mathbf{X} + \rho, t) - \frac{U}{c} A_{\parallel}(\mathbf{X} + \rho, t) \right. \\ &\quad \left. - \left\langle \varphi_1(\mathbf{X} + \rho, t) - \frac{v_0}{c} \cdot \mathbf{A}_1(\mathbf{X} + \rho, t) \right\rangle \right\} \frac{1}{B_0} \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathcal{M}} \\ &\quad + h(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, t) \end{aligned} \quad (55)$$

である. 後で示すように, バルーニング表示を用いると, (49), (51), (52) および (55) が再帰的方法で導かれる線形ジャイロ運動論の基本方程式系 [12, 13] と完全に一致することがわかる.

5.2 バルーニング表示における線形ジャイロ運動論的方程式系

歴史上最初に導かれたジャイロ運動論的方程式は線形のものであり [10, 11], その導出には, 前節で述べた Lagrangian・Hamiltonian の定式化に基づいたリー変換法が用いられたのではなく, 再帰的方法とバルーニング表示 [41, 42] が用いられた. このバルーニング表示に基づく線形ジャイロ運動論的方程式系は実際にプラズマ微視的不安定性の線形解析等で非常によく用いられ各教科書にも引用されているものであり [41], これらと全く同じものが Lagrangian・Hamiltonian の定式化に基づく線形化によって得られた (49), (51) および (52) のバルーニング表示によって得られることをここで示しておくことは両導出法に矛盾が無い (あるいは Lagrangian・Hamiltonian の定式化の方が再帰的方法よりもより広い範囲で適用でき, 前者が後者を包含している) ことを意味し非常に有意義であると思われる.

さて, バルーニング表示では, トーラス配位のような磁場閉じ込めプラズマ中の揺らぎ [その空間依存性を例えば $Q(\mathbf{x})$ で表すことにする] が磁力線垂直方向には短い波長 $k_{\perp}^{-1} \sim \rho$, 磁力線平行方向には長い波長 $k_{\parallel}^{-1} \sim L$ を持つとして, 次のような形を仮定する [41, 42].

$$Q(\mathbf{x}) = Q_{k_{\perp}}(\mathbf{x}) \exp \left[i \int^{\mathbf{x}} \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \right] \quad (56)$$

これは一種の WKB 近似であり, 指数関数部分が ρ 程度の波長を持つ磁力線垂直方向の速い振動を表し, その位

相部分 (eikonal と呼ばれる) $\int^{\mathbf{x}} \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ は $\nabla \int^{\mathbf{x}} \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{x})$ を満足するものとして定義され, 磁力線垂直方向波数ベクトル $\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{x})$ は一般に \mathbf{x} に依存し $|\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{x})| \rho \sim 1$ であり $\nabla \times \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{x}) = 0$ が成り立つ. また, $\mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{x})$ や $Q_{k_{\perp}}(\mathbf{x})$ の空間変化スケール長は L [(4) 参照程度で, その中の独立変数 \mathbf{x} を $\mathbf{X} = \mathbf{x} + \rho$ に置き換えても $\mathcal{O}(\varepsilon)$ の差しか生じないことに注意しよう. (56) に倣って,

$$\begin{aligned} \varphi_1(\mathbf{x}, t) &= \phi_{k_{\perp}}(\mathbf{x}, t) \exp \left[i \int^{\mathbf{x}} \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \right] \\ A_1(\mathbf{x}, t) &= A_{k_{\perp}}(\mathbf{x}, t) \exp \left[i \int^{\mathbf{x}} \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} \right] \\ \delta f(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \xi, t) &= \delta f_{k_{\perp}}(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \xi, t) \exp \left[i \int^{\mathbf{X}} \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} \right] \\ h(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, t) &= h_{k_{\perp}}(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, t) \exp \left[i \int^{\mathbf{X}} \mathbf{k}_{\perp}(\mathbf{X}) \cdot d\mathbf{X} \right] \end{aligned} \quad (57)$$

とおくと (55), (49), (51) および (52) より, それぞれ,

$$\begin{aligned} \delta f_{k_{\perp}}(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, \xi, t) &= e\phi_{k_{\perp}} e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \rho} \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathcal{E}} \\ &\quad + e \left[\left(\phi_{k_{\perp}} - \frac{U}{c} A_{\parallel k_{\perp}} \right) e^{i\mathbf{k}_{\perp} \cdot \rho} \right. \\ &\quad \left. - \left\{ J_0 \left(\phi_{k_{\perp}} - \frac{U}{c} A_{\parallel k_{\perp}} \right) + J_1 \frac{v_{\perp}}{c} \frac{B_{\parallel k_{\perp}}}{k_{\perp}} \right\} \right] \\ &\quad \times \frac{1}{B_0} \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathcal{M}} + h_{k_{\perp}}(\mathbf{X}, \mathcal{E}, \mathcal{M}, t) \end{aligned} \quad (58)$$

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\mathbf{b} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} + \mathbf{k}_{\perp} \cdot \mathbf{v}_d \right) h_{k_{\perp}} \\ &= C(F_{1k_{\perp}}) - \left(e \frac{\partial F_0}{\partial \mathcal{E}} \frac{\partial}{\partial t} + i \frac{c}{B} \mathbf{b} \times \mathbf{k}_{\perp} \cdot \frac{\partial F_0}{\partial \mathbf{X}} \right) \\ &\quad \times \left\{ J_0 \left(\phi_{k_{\perp}} - \frac{U}{c} A_{\parallel k_{\perp}} \right) + J_1 \frac{v_{\perp}}{c} \frac{B_{\parallel k_{\perp}}}{k_{\perp}} \right\} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} k_{\perp}^2 \phi_{k_{\perp}} &= 4\pi \sum_a e_a \int d^3X d\varepsilon d\mathcal{M} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{2\pi B_0}{m_a^2 |U|} \\ &\quad \times \left[e_a \phi_{k_{\perp}} \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathcal{E}} + e_a \left\{ \phi_{k_{\perp}} - \frac{U}{c} A_{\parallel k_{\perp}} - J_0 \left(J_0 \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. \times \left(\phi_{k_{\perp}} - \frac{U}{c} A_{\parallel k_{\perp}} \right) + J_1 \frac{v_{\perp}}{c} \frac{B_{\parallel k_{\perp}}}{k_{\perp}} \right) \right\} \frac{1}{B_0} \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathcal{M}} + J_0 h_a \right] \end{aligned} \quad (60)$$

$$k_{\perp}^2 A_{\parallel k_{\perp}} = \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int d^3X d\mathcal{E} d\mathcal{M} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{2\pi B_0}{m_a^2 |U|} \\ \times U \left[e_a \left\{ \phi_{k_{\perp}} - \frac{U}{c} A_{\parallel k_{\perp}} - J_0 \left(J_0 \left(\phi_{k_{\perp}} - \frac{U}{c} A_{\parallel k_{\perp}} \right) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + J_1 \frac{v_{\perp}}{c} \frac{B_{\parallel k_{\perp}}}{k_{\perp}} \right) \right\} \frac{1}{B_0} \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathcal{M}} + J_0 h_a \right] \quad (61)$$

$$-k_{\perp} B_{\parallel k_{\perp}} = \frac{4\pi}{c} \sum_a e_a \int d^3X d\mathcal{E} d\mathcal{M} \sum_{\sigma=\pm 1} \frac{2\pi B_0}{m_a^2 |U|} v_{\perp} J_1 \\ \times \left[- \left\{ J_0 \left(\phi_{k_{\perp}} - \frac{U}{c} A_{\parallel k_{\perp}} \right) + J_1 \frac{v_{\perp}}{c} \frac{B_{\parallel k_{\perp}}}{k_{\perp}} \right\} \frac{1}{B_0} \frac{\partial F_{a0}}{\partial \mathcal{M}} + h_a \right] \quad (62)$$

が得られる。ここで、 $A_{\parallel k_{\perp}} \equiv A_{k_{\perp}} \cdot \mathbf{b}$ および $B_{\parallel k_{\perp}} \equiv \mathbf{i}(k_{\perp} \times A_{k_{\perp}}) \cdot \mathbf{b}$ とおいた。(58)-(62)が、最もよく用いられるバルーニング表示での線形ジャイロ運動論の基礎方程式系である[12,13,41]。

静電近似では、揺動磁場のベクトルポテンシャル $A_{k_{\perp}} = A_{\parallel k_{\perp}} \mathbf{b} + \mathbf{i} B_{\parallel k_{\perp}} k_{\perp} \times \mathbf{b} / k_{\perp}^2$ が無視され、(59)と(60)が静電ポテンシャル $\phi_{k_{\perp}}$ と揺動分布関数を決定するための閉じた線形方程式系をなす。近年、プラズマ異常輸送をもたらす微視的不安定性としてイオン温度勾配不安定性(ITGモード)[56-64]、捕捉電子不安定性(TEMモード)[65]や電子温度勾配不安定性(ETGモード)[29,31]の線形解析がよく行われているが、静電近似が用いられることが多い。 $A_{k_{\perp}}$ を含めた電磁的な微視的不安定性としては、運動論的バルーニングモード[66]がよく研究されているが、低ベータ値(ベータ値=プラズマ圧力/磁気圧)の場合 $B_{\parallel k_{\perp}}$ を無視して、 $A_{k_{\perp}} = A_{\parallel k_{\perp}} \mathbf{b}$ と仮定されることがよくある。

6. 微視的乱流シミュレーション

非線形ジャイロ運動論的方程式系(32),(35)および(36)あるいは非線形項を付加した(59)と(60)-(62)に基づいて、前節で述べたITG,TEM,ETGモード等の微視的不安定性が成長して作り出される乱流状態の直接数値シミュレーションの研究が近年精力的に行われ、実験で観測される揺動スペクトルや異常輸送係数の値と比較し得る結果を出すようになってきている[30]。

ジャイロ運動論的方程式の数値シミュレーションには、 δf 法と呼ばれる計算スキームを用いて分布関数の揺動部分を粒子軌道に沿った積分により求めるジャイロ運動論的粒子シミュレーション[22,29]やまた分布関数を

位相空間上の格子点や関数展開によって離散化しその時間発展を計算するVlasov(もしくはEulerian)シミュレーションがある[31,67,68]。また、計算時間や記憶容量が少なくてもすむよう、ジャイロ運動論的方程式の速度モーメントを取ることににより得られる流体モデルを用いたジャイロ流体シミュレーションも行われる[33]。ただし、ジャイロ流体モデルでは、無衝突系において閉じた流体方程式系を得るため高次モーメント流体変数を低次モーメントで表すための関係式(クロージャーモデル)[34,40]を仮定しなければならない(衝突性プラズマに対して確立されたBraginskii 2流体方程式[1]に比べると無衝突系や少衝突系に対するジャイロ流体モデルあるいは運動論的流体モデルは未だ完成されたものとは言い難いが、それ自体非常に興味深く多くの研究がなされており、その詳細を述べるには新たに独立した解説記事が必要と思われる)。

これらの微視的乱流シミュレーションでは、Hモード[69,70]や内部輸送障壁(ITB)[71,73]等のプラズマ閉じ込め改善現象に関連して、シアを持った $E \times B$ フロー(あるいはゾナルフロー)の生成・減衰の物理機構の研究が盛んに行われている[28,74,76]。本記事では、プラズマフロー速度や揺動周波数がそれぞれ熱速度やジャイロ周波数に比べて十分小さいという従来のオーダリングに基づいたジャイロ運動論を解説してきたが、イオン熱速度と同程度の高速フローが存在する場合[77,81]やジャイロ周波数と同程度の高周波揺動の場合[43,45,82,83]も取り扱えるジャイロ運動論的方程式も導かれている。また、ジャイロ運動論によって記述される高温プラズマに特徴的な運動論的效果が、MHDモードのような巨視的不安定性に与える影響もジャイロ運動論的シミュレーションによって調べられるようになってきた[43,84]。

7. 終わりに

ここまで、磁場閉じ込めプラズマの微視的不安定性・乱流を支配する第一原理としてのジャイロ運動論的Vlasov-Poisson-Ampère方程式系の解説を現代的なLagrangian・Hamiltonianによる定式化とリー変換法を用いた導出法に基づいて行ってきた。これらは、プラズマ乱流・異常輸送の直接数値シミュレーションのための基本方程式系として非常に実用的であるのみならず、その導出過程において発展してきた数学的手法や物理的概念はそれ自体魅力的で美しい理論形式を提供していることを強調しておきたい。このようにジャイロ運動論はすでに

にかなりよく体系化されているいるが，適用し得る周波数や波長の範囲の拡張，支配方程式系の導出原理の更なる一般化やより高精度の運動論的流体モデルの構築等の研究が現在も引き続き行われている．こうしたジャイロ運動論の理論的研究の進展が，新たな解析的手法やシミュレーション技法の発達に結びつくことによりプラズマ乱流・異常輸送理論の発展に寄与することが大いに期待される．

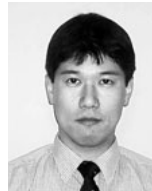
謝辞

本解説記事の執筆にあたって有益なコメントをいただいた京都大学エネルギー科学研究科の若谷誠宏教授，核融合科学研究所の藤堂 泰助教授，渡邊智彦助教授，伊藤公孝教授，日本原子力研究所の井戸村泰宏博士，徳田伸二博士に感謝いたします．本稿の作成は文部科学省科学研究費基盤研究(C ¥ 12680497)の援助により遂行されました．(本稿の完成後，恩師若谷誠宏先生の突然の訃報が届きました．ここに深く哀悼の意を表するとともに，心からご冥福をお祈りいたします．)

参考文献

- [1] S.I. Braginskii, in *Reviews of Plasma Physics*, edited by M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1965) Vol. 1, p. 205.
- [2] F.L. Hinton and R.D. Hazeltine, *Rev. Mod. Phys.* 42, 239 (1976).
- [3] S.P. Hirshman and D.J. Sigmar, *Nucl. Fusion* 21, 1079 (1981).
- [4] R. Balescu, *Transport Processes in Plasmas* (2 vols.) (North-Holland, Amsterdam, 1988).
- [5] P.C. Liewer, *Nucl. Fusion* 25, 543 (1985).
- [6] 伊藤公孝，伊藤早苗：核融合研究 57, 280 (1987).
- [7] J.W. Connor and H.R. Wilson, *Plasma Phys. Control. Fusion* 36, 719 (1994).
- [8] W. Horton, *Rev. Mod. Phys.* 71, 735 (1999).
- [9] 岸本泰明：プラズマ・核融合学会誌 76, 1280 (2000).
- [10] P.H. Rutherford and E.A. Frieman, *Phys. Fluids* 11, 569 (1968).
- [11] J.B. Taylor and R.J. Hastie, *Plasma Phys.* 10, 479 (1968).
- [12] T.M. Antonsen, Jr. and B. Lane, *Phys. Fluids* 23, 1205 (1980).
- [13] P.J. Catto, W.M. Tang and D.E. Baldwin, *Plasma Phys.* 23, 639 (1981).
- [14] E.A. Frieman and L. Chen, *Phys. Fluids* 25, 502 (1982).
- [15] H. Goldstein, *Classical Mechanics* (2nd ed., Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1980). (邦訳, H. ゴールドスタイン著, 瀬川富士・矢野 忠・江沢康生訳：古典力学, 吉岡書店, 1983).
- [16] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, New York, 1978). (邦訳, V.I. アーノルド著, 安藤韶一・蟹江幸博・丹羽敏雄訳：古典力学の数学的方法, 岩波書店, 1980).
- [17] J.R. Cary, *Phys. Rep.* 79, 129 (1981).
- [18] D. H.E. Dubin, J.A. Krommes, C. Oberman and W.W. Lee, *Phys. Fluids* 26, 3524 (1983).
- [19] T.S. Hahm, W.W. Lee and A. Brizard, *Phys. Fluids* 31, 1940 (1988).
- [20] T.S. Hahm, *Phys. Fluids* 31, 2670 (1988).
- [21] A.J. Brizard, *J. Plasma Phys.* 41, 541 (1989).
- [22] W.W. Lee, *J. Comput. Phys.* 72, 243 (1987).
- [23] W.W. Lee and W.M. Tang, *Phys. Fluids* 31, 612 (1988).
- [24] S.E. Parker, W.W. Lee and R.A. Santoro, *Phys. Rev. Lett.* 71, 2042 (1993).
- [25] R.D. Sydora, *Phys. Scr.* 52, 474 (1995).
- [26] A.M. Dimits, T.J. Williams, J.A. Byers and B.I. Cohen, *Phys. Rev. Lett.* 77, 71 (1996).
- [27] Y. Kishimoto, T. Tajima, W. Horton, M.J. LeBrun and J.-Y. Kim, *Phys. Plasmas* 3, 1289 (1996).
- [28] Z. Lin, T.S. Hahm, W.W. Lee, W.M. Tang and R.B. White, *Science* 281, 1835 (1998).
- [29] Y. Idomura, M. Wakatani and S. Tokuda, *Phys. Plasmas* 7, 2255 (2000).
- [30] A.M. Dimits *et al.*, *Phys. Plasmas* 7, 969 (2000).
- [31] F. Jenko, W. Dorland, M. Kotschenreuther and B.N. Rogers, *Phys. Plasmas* 7, 1904 (2000).
- [32] 矢木雅敏，井戸村泰宏，渡邊智彦：プラズマ・核融合学会誌 77, 525 (2001).
- [33] G.W. Hammett, M.A. Beer, W. Dorland, S.C. Cowley and S.A. Smith, *Plasma Phys. Control. Fusion* 35, 973 (1993).
- [34] G.W. Hammett and F.W. Perkins, *Phys. Rev. Lett.* 64, 3019 (1990).
- [35] Z. Chang and J.D. Callen, *Phys. Fluids B* 4, 1167 (1992).
- [36] W. Dorland and G.W. Hammett, *Phys. Fluids B* 5, 812 (1993).
- [37] M.A. Beer and G.W. Hammett, *Phys. Plasmas* 3, 4046 (1996).
- [38] N. Mattor and S.E. Parker, *Phys. Rev. Lett.* 79, 3419 (1997).
- [39] H. Sugama, T.-H. Watanabe and W. Horton, *Phys. Plasmas* 8, 2617 (2001).
- [40] H. Sugama, T.-H. Watanabe and W. Horton, *to be published in Phys. Plasmas* 10 (2003).
- [41] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, *Plasma Confinement* (Addison-Wesley, Redwood City, California, 1992) p. 123, p. 298.
- [42] R.L. Dewar and A.H. Glasser, *Phys. Fluids* 26, 3038 (1983).

- [43] H. Qin, W.M. Tang and G. Rewoldt, Phys. Plasmas 5, 1035 (1998).
- [44] H. Qin, W.M. Tang, W.W. Lee and G. Rewoldt, Phys. Plasmas 6, 1575 (1999).
- [45] H. Sugama, Phys. Plasmas 7, 466 (2000).
- [46] A.J. Brizard, Phys. Plasmas 7, 4816 (2000).
- [47] S. Wang, Phys. Rev. E 64, 056404 (2001).
- [48] 松島与三：多様体入門（裳華房，1965）。
- [49] 大森英樹：力学的な微分幾何（日本評論社，1980）。
- [50] R.G. Littlejohn, J. Math. Phys. 20, 2445 (1979).
- [51] R.G. Littlejohn, Phys. Fluids 24, 1730 (1981).
- [52] R.G. Littlejohn, J. Plasma Phys. 29, 111 (1983).
- [53] A.N. Kaufman and P.S. Rostler, Phys. Fluids 14, 446 (1971).
- [54] H. Sugama and W. Horton, Phys. Plasmas 2, 2989 (1995).
- [55] H. Sugama, M. Okamoto, W. Horton and M. Wakatani, Phys. Plasmas 3, 2379 (1996).
- [56] 洲鎌英雄，矢木雅敏：プラズマ・核融合学会誌 76, 1007 (2000).
- [57] W. Horton, M. Wakatani and A.J. Wooton, *Ion Temperature Gradient Driven Turbulent Transport* (American Institute of Physics, New York, 1994).
- [58] L.I. Rudakov and R.Z. Sagdeev, Sov. Phys.-Dokl. 6, 415 (1961).
- [59] F. Romanelli, Phys. Fluids B 1, 1018 (1989).
- [60] J.Q. Dong, W. Horton and J.Y. Kim, Phys. Fluids B 4, 1867 (1992).
- [61] M. Kotschenreuther, G. Rewoldt and W.M. Tang, Comp. Phys. Comm. 88, 128 (1995).
- [62] H. Sugama, Phys. Plasmas 6, 3527 (1999).
- [63] G. Rewoldt, L.-P. Ku, W.M. Tang and W.A. Cooper, Phys. Plasmas 6, 4705 (1999).
- [64] T. Kuroda, H. Sugama, R. Kanno and M. Okamoto, J. Phys. Soc. Jpn. 69, 2485 (2000).
- [65] M.A. Beer and G.W. Hammett, Phys. Plasmas 3, 4018 (1996).
- [66] R.A. Santoro and L. Chen, Phys. Plasmas 3, 2349 (1996).
- [67] T.-H. Watanabe, H. Sugama and T. Sato, J. Phys. Soc. Jpn. 70, 3565 (2001).
- [68] T.-H. Watanabe and H. Sugama, Phys. Plasmas 9, 3659 (2002).
- [69] F. Wagner and the ASDEX team, Phys. Rev. Lett. 49, 1408 (1982).
- [70] R.R. Groebner, K.H. Burrell and R.P. Seraydarian, Phys. Rev. Lett. 64, 3015 (1990).
- [71] Y. Koide, M. Kikuchi, M. Mori *et al.*, Phys. Rev. Lett. 72, 3662 (1994).
- [72] F.M. Levinton *et al.*, Phys. Rev. Lett. 75, 4417 (1995).
- [73] E.J. Strait *et al.*, Phys. Rev. Lett. 75, 4421 (1995).
- [74] K. Itoh, Plasma Phys. Control. Fusion 38, 1 (1996).
- [75] M. Wakatani, Plasma Phys. Control. Fusion 40, 597 (1998).
- [76] P.W. Terry, Rev. Mod. Phys. 72, 109 (2000).
- [77] M. Artun and W.M. Tang, Phys. Fluids B 4, 1102 (1992).
- [78] M. Artun and W.M. Tang, Phys. Plasmas 1, 2682 (1994).
- [79] A.J. Brizard, Phys. Plasmas 2, 459 (1995).
- [80] T.S. Hahm, Phys. Plasmas 3, 4658 (1996).
- [81] H. Sugama and W. Horton, Phys. Plasmas 5, 2560 (1998).
- [82] L. Chen and S.T. Tsai, Phys. Fluids 26, 141 (1983).
- [83] L. Chen and S.T. Tsai, Plasma Phys. 25, 349 (1983).
- [84] 内藤裕志，松本太郎，藤堂 泰，堀内利得：プラズマ・核融合学会誌 77, 547 (2001).



す が ま ひ で お
洲 鎌 英 雄

核融合科学研究所大型ヘリカル研究部理論
・データ解析研究系助教授・総合研究大学
院大学数物科学研究科核融合科学専攻助教
授(併任)。1989年京都大学工学研究科電気
工学第二専攻博士課程修了(工学博士)。主な研究分野は核融
合プラズマにおける微視的不安定性，新古典・乱流異常輸
送。