

解説

Tsallis の非加法的統計力学と純電子プラズマ

阿部 純 義
(筑波大学物理学系)

Tsallis' Nonextensive Statistical Mechanics and Pure-Electron Plasma

ABE Sumiyoshi

Institute of Physics, University of Tsukuba, Ibaraki 305-8571, Japan

(Received 31 October 2001)

Abstract

Boltzmann-Gibbs statistical mechanics is known to exhibit fundamental difficulties when a system under consideration contains long-range interactions. Tsallis' nonextensive statistical mechanics offers a consistent theoretical framework for treatment of such a system. In this article, an approach to statistically describing pure-electron plasma based on the Tsallis entropy is reviewed and related problems are discussed.

Keywords:

Tsallis' nonextensive statistical mechanics, pure-electron plasma, 2-dimensional Euler turbulence, maximum entropy principle, minimum enstrophy model

1. はじめに

Boltzmann-Gibbs 統計力学は、系の相互作用が短距離力であること、記憶効果が無視できること、エルゴード性や混合の条件がよく満たされていることを前提とする。また、系の相空間も通常の Euclid 的なものであって、階層性などのような非自明な構造をもたない場合が想定されている。さらに、熱力学的極限の存在が重要であるが、このことは相互作用の短距離性の条件と不可分である。

しかしながら、近年複雑系に対する理解が徐々に進むとともに、これらの条件を仮定する Boltzmann-Gibbs 理論がチャレンジを受けるようになってきた。多くの複雑系においては、部分が全体に本質的に結びついているため、部分を取り出してその性質を調べることにより系全体について知るといった伝統的な還元主義的立場はうまく機能しないであろう（部分が全体に大きく影響すると

author's e-mail: suabe@sfb.so-net.ne.jp

いう点は長距離相互作用の系にも見られる特徴であることに注意する[1])。また、複雑性はエルゴード性や混合の条件がよく成立していると思われるカオス的な領域の「縁」で発生する特徴でもあるため、これらの条件が十分には満たされないことになる。また、複雑系に関連して我々にとって特に興味深いのは、いわゆる準平衡状態あるいは非平衡定常状態と呼ばれる状態である。このような呼ばれ方をする理由は、そのような状態が系の典型的な微視的力学的時間スケールに比べて極めて長い時間保たれることによる。これはある種の緩和状態と見なせるであろう。そのような状態に対して統計力学的にアプローチするためには、通常理論の枠組みを拡張する必要があるように思われる。そこで注目されている一つの理論体系が Tsallis 統計力学である[2, 3]。

Tsallis 統計力学の重要な特徴は、それが非加法的なエントロピー[4]に基づく最大エントロピー原理によって

定式化され、理論自体がスケール不変性をもっているという点である。Tsallis エントロピーと呼ばれるこの量の性質が、種々の非線形力学系(写像)に関してここ2, 3年よく研究されてきた(例えば, [5-7]とその中の参考文献を参照のこと)。これらの研究の動機は、通常の統計的な Boltzmann-Shannon エントロピーと力学系の Kolmogorov-Sinai エントロピーとの関係に対応するものを Tsallis エントロピーに関して見出し、理論の基礎づけを与えることにあった。そこで明らかになってきたことは、Tsallis エントロピーの非加法性の度合いを表す指数 q が臨界アトラクタと呼ばれるカオスの縁にあるアトラクタの多重フラクタル構造から決定されるということであった[8]。これは、実際 Tsallis 統計力学が、開放複雑系についてはその非平衡定常状態を、また閉じた非加法的系についてはその準平衡状態を記述し得る理論であることを示唆している。さらに、Tsallis エントロピーを最大にするような確率分布形をもつ例が多く見つかったことも、この理論の現象論的な支持を与えている[2]。

本稿では、純電子プラズマの物理における Tsallis 統計力学の「可能な役割」について解説する。純電子プラズマという系は電気的中性条件をもたないため Coulomb 力が遮蔽されずに長距離力として残り、統計学的には非加法的な系である。最近実験的研究が発展し、この系の呈する興味深い振る舞いが直接観測されるようになった。それらの振る舞いの中で統計力学が対象とすべきものは何か、というのは実は難しい問題である。Tsallis 統計力学によるアプローチが成功しているように思われる部分も確かにあるが、一方そのような議論への批判もまた存在する。本稿では、中立な立場を取りつつ純電子プラズマと Tsallis 統計力学の問題を論じたい。以下において、まず Tsallis 統計力学の理論形式を簡単に要約する。次に、Tsallis 統計力学が純電子プラズマにどのように応用されたかを紹介する。この応用に対する批判の議論も紹介する。

2. Tsallis 統計力学の基本的枠組み

Tsallis 統計力学の骨格をなすものは、Tsallis エントロピー[4]

$$S_q[p] = \frac{k}{1-q} \sum_{i=1}^W [(p_i)^q - p_i] \quad (1)$$

である。ここで、 p_i は系が i 番目の状態を取る確率であり、 W は状態の総数である。 q は正の実数で、エントロピー指数と呼ばれる。この量が「エントロピー」と呼ば

れる理由は、すべての $q > 0$ に対して凹性をもつこと、非負であること、および H 定理を満たすことによる。 $q \rightarrow 1$ の極限では、明らかに通常の Boltzmann-Shannon エントロピー $S[p] = -k \sum_{i=1}^W p_i \ln p_i$ に収束する。以下簡単のために Boltzmann 定数 k が 1 という単位で議論を進めることにする。

Boltzmann-Shannon エントロピーに対しては、その一意性を保証する Shannon-Khinchin の公理系というものがあるが、Tsallis エントロピーに対する公理系も最近提出された[9]。それは以下のようなものである。

[I] $S_q[p] = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W)$ はすべての変数 $\{p_i\}_{i=1,2,\dots,W}$ について連続であり、等確率 $p_i = 1/W$ ($i = 1, 2, \dots, W$) の場合に最大値をとる；

[II] 複合系 (A, B) について、その全エントロピーは $S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B|A) + (1-q)S_q(A)S_q(B|A)$ (2)

という合成則を満たす。ただし、 $S_q(B|A)$ は A に関する情報が与えられた場合の B の条件付きエントロピーである；

[III] $S_q(p_1, p_2, \dots, p_W, p_{W+1}=0) = S_q(p_1, p_2, \dots, p_W)$ 。これらを満たす量 S_q が式(1)の Tsallis エントロピーであることが証明される。Shannon-Khinchin 公理系は[II]で $q \rightarrow 1$ とした場合である。

[II]は重要である。もし部分系 A, B が統計的に独立であるとすると、 $S_q(B|A) = S_q(B)$ となり、したがって擬加法性と呼ばれる関係式

$$S_q(A, B) = S_q(A) + S_q(B) + (1-q)S_q(A)S_q(B) \quad (3)$$

が成立する。加法性が成り立つのは、明らかに $q \rightarrow 1$ の場合だけである。 q の 1 からのずれは、 S_q の非加法性の度合いを表している。

少し抽象的な議論になってしまったが、Tsallis エントロピーがしっかりした情報理論的な基礎をもっていることを感じ取っていただけたと思う。

さて、統計力学を構築するにあたり、物理量 Q の期待値の定義を与えなければならない。これは一見自明のことのように思われるが、実は3年ほど前まで紆余曲折があった。現在正しい定義と思われているのは、規格化された q -期待値[10]というもので、

$$\langle Q \rangle_q \equiv Q_q = \sum_{i=1}^W P_i^{(q)} Q_i \quad (4)$$

$$P_i^{(q)} \equiv \frac{(p_i)^q}{\sum_{j=1}^W (p_j)^q} \quad (5)$$

のように与えられる。ここで、 $P_i^{(q)}$ は p_i に付随したエスコート分布 [11] と呼ばれる確率分布である。 Q_i は確率変数としての物理量 Q の i 番目の状態における値である。

規格化条件と物理量の q -期待値に関する拘束条件の下で Tsallis エントロピーを最大にするような確率分布は、汎函数

$$\Phi_q [p; \alpha, \beta] = S_q [p] - \alpha \left(\sum_{i=1}^W p_i - 1 \right) - \beta \left(\sum_{i=1}^W P_i^{(q)} Q_i - Q_q \right) \quad (6)$$

に対する停留条件から求められる。ただし、 α 、 β は Lagrange の未定乗数である。 p_i についての変分を計算することにより、次のような規格化された定常確率分布 [10]

$$p_i = \frac{1}{Z_q(\beta^*)} e_q [-\beta^* (Q_i - Q_q)] \quad (7)$$

が得られる。ただし

$$Z_q(\beta^*) = \sum_{j=1}^W e_q [-\beta^* (Q_j - Q_q)] \quad (8)$$

は、一般化された分配関数と呼ばれる。 $e_q(x)$ は

$$e_q(x) = \begin{cases} [1 + (1-q)x]^{1/(1-q)} & (1 + (1-q)x > 0) \\ 0 & (1 + (1-q)x \leq 0) \end{cases} \quad (9)$$

と定義される q -指数関数である。また、

$$\beta^* \equiv \frac{\beta}{\sum_{i=1}^W (p_i)^q} \quad (10)$$

このように、Tsallis 統計力学はエントロピーと期待値の定義の拡張に対する 2 つの仮定からなる理論なのである。

ところで、式 (7) は

$$p_i = \frac{1}{\tilde{Z}_q(\tilde{\beta})} e_q(-\tilde{\beta} Q_i) \quad (11)$$

という形に書き換えることができる。ただし、

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta^*}{1 + (1-q)\beta^* Q_q} \quad (12)$$

$$\tilde{Z}_q(\tilde{\beta}) = \sum_{i=1}^W e_q(-\tilde{\beta} Q_i) \quad (13)$$

である。式 (11) の形の分布は、実は $\tilde{\beta}$ を Lagrange 未定乗数として、規格化されていない q -期待値すなわちエスコート分布 (5) の分母をもたない $(p_i)^q$ での期待値を用いた場合 [12] に得られるものと形式的には同じ形をしている。次節で述べる純電子プラズマの解析には、規格化されていない q -期待値を使った理論が用いられる。

Tsallis 分布について、以下の性質に注目する。まず $q > 1$ の場合、式 (11) は

$$p_i = \frac{A}{(1 + Q_i/Q_0)^s} \quad (14)$$

$$s = \frac{1}{q-1} > 0, \quad Q_0 = \frac{s}{\tilde{\beta}}, \quad A = \frac{1}{\tilde{Z}_q(\tilde{\beta})} \quad (15)$$

すなわち Zipf-Mandelbrot のべき則的分布になっている。一方 $0 < q < 1$ の場合には、定義式 (9) からわかるように

$$Q_i^{\max} = \frac{1}{(1-q)\tilde{\beta}} \quad (16)$$

で切断される。また、 $q \rightarrow 1$ の極限で一般化された分配関数と Tsallis 分布とがそれぞれ通常の分配関数と指数関数的分布に帰着されることは明らかであろう。

Tsallis 統計力学から熱力学を定式化することができる。物理量 Q として、系のハミルトニアン H を取る。その規格化された q -期待値 $U_q = \langle H \rangle_q$ を、一般化された内部エネルギーとする。ただし、 q -期待値は最大 Tsallis エントロピー分布に関して計算する。このとき、

$$\frac{\partial S_q}{\partial U_q} = \beta \quad (17)$$

が成り立つことが示される。このことは、 U_q と β が通常の熱力学の場合とまったく同じように Legendre 変換の変数の対であることを示唆している。しかし重要なのは、熱力学第ゼロ法則から定義される物理的温度は式 (17) の逆数ではない、という点である。温度の逆数は、実は式 (10) の β^* である [13, 14]。この物理的温度を用いて熱力学的 Legendre 変換構造を確立することができる [15, 16]。それによって、非加法的な系に対する種々の熱力学的関係式が導かれる。それらが通常の加法的な系に対する熱力学的関係式と形式的に同じであることも示さ

れる。

Tsallis エントロピーとそれに基づく非加法的統計力学は驚くほど多様な問題に適用されてきた。それは、自己重力系から量子エンタングルメント、さらにはタンパク質の構造の研究にまで及ぶ。包括的な論文リストは[17]から入手できる。

3. 純電子プラズマの統計力学に向けて

3.1 純電子プラズマ

電氣的に中性でないプラズマは Coulomb の長距離力が遮蔽されないため、通常の熱力学的極限が収束しない非加法的な系である。したがって、中性プラズマとは異なる統計的性質をもつと考えられる。正イオンを含まず電子のみから成る純電子プラズマは種々の側面から興味深く、目下その実験的研究が注目を集めている。

Huang と Driscoll[18]は、Fig. 1に示されているような装置で実験を行った。円筒形の導体壁（断面半径 $R_w = 3.05$ cm、長さ 20 cm）の中を約 10^{-10} Torr の高真空にする。一端のタングステンフィラメントから電子をたくさん注入する。典型的な密度としては、半径 2 cm 長さ 20 cm の空間に 1×10^7 個/cm³ 程度である。これらの電子に円筒の中心軸に垂直な向きをもつ電場と中心軸方向の磁場を作用させて閉じ込める。この外部からの電場と磁場によって、電子は円筒内で乱流的なドリフト運動を行う。円筒の他端に置かれたコレクタによって、電子を中心軸からの距離に応じて計数する。中心軸方向に z 座標軸を取ると、理想的な軸対称性をもつ場合の純電子プラズマの運動学は、案内中心の電子密度 $n = n(\mathbf{r}, t)$ ($\mathbf{r} \equiv (x, y)$) に対する方程式

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla n = 0 \quad (18)$$

および電場のポテンシャル $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ が満たすべき Poisson 方程式

$$\Delta \phi = 4\pi e n \quad (e \text{ は素電荷}) \quad (19)$$

によって決定される。ただし、ドリフト速度は

$$\mathbf{v} = \frac{c}{B_z} \mathbf{e}_z \times \nabla \phi = c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} \quad (c \text{ は真空中の光速}) \quad (20)$$

で与えられる（以下、 e と c を 1 とおく）。これらの表式を、二次元の非圧縮非粘性流体の渦度 $\omega = \omega(\mathbf{r}, t) = \mathbf{e}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{u})$ に対する Euler の方程式

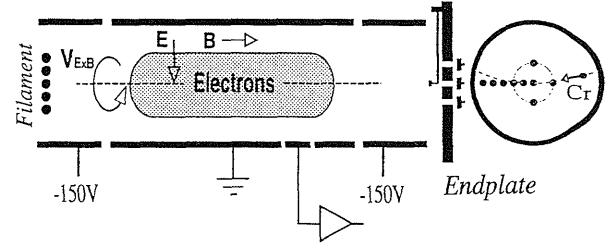


Fig. 1 Schematic of the experimental apparatus of Huang and Driscoll.

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \omega = 0 \quad (21)$$

および流れ関数 $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ の方程式

$$-\Delta \psi = \omega \quad (22)$$

と速度場の式

$$\mathbf{u} = -\mathbf{e}_z \times \nabla \psi \quad (23)$$

と比較すると、電子密度と渦度、電場のポテンシャルと流れ関数、という対応関係の下で両者が数学的にまったく同型であることがわかる。二次元流体の実験の実験においては、非粘性という条件を実現するのはあまり簡単ではない。この意味で、軸対称性をもつ純電子プラズマは、衝突による散逸効果はやはり避けられないものの、ある程度の時間スケールでは良い近似で二次元 Euler 乱流の実験の場を提供する。散逸が優勢になるのは、 $10^3 \sim 10^4$ s 程度の長時間スケールである。

ドリフト速度(20)が $\mathbf{v} = \mathbf{e}_z \times \nabla \phi$ となるように磁場の強さを規格化すると、式(18)は

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + [n(\mathbf{r}, t), h(\mathbf{r}, t)] = 0 \quad (24)$$

と書き換えられる。ここで、ハミルトニアンはポテンシャル

$$h = -\phi(\mathbf{r}, t) \quad (25)$$

であり、また Poisson 括弧は

$$[a(\mathbf{r}, t), b(\mathbf{r}, t)] = \frac{\partial a(\mathbf{r}, t)}{\partial x} \frac{\partial b(\mathbf{r}, t)}{\partial y} - \frac{\partial a(\mathbf{r}, t)}{\partial y} \frac{\partial b(\mathbf{r}, t)}{\partial x} \quad (26)$$

で定義される。すなわち x と y は形式的に正準共役な変数になり、 xy 平面は相空間と見なされる。式(24)を場の

Hamilton 形式で

$$\frac{\partial n(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \{H[n], n(\mathbf{r}, t)\} = 0 \quad (27)$$

と書く。ここでのハミルトニアンは

$$\begin{aligned} H[n] &= -\frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r} n(\mathbf{r}, t) \phi(\mathbf{r}, t) \\ &= -\frac{1}{2} \iint d^2\mathbf{r} d^2\mathbf{r}' n(\mathbf{r}, t) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') n(\mathbf{r}', t) \end{aligned} \quad (28)$$

であり、場の Poisson 括弧は

$$\{A, B\} = \int d^2\mathbf{r} n(\mathbf{r}, t) \left[\frac{\delta A}{\delta n(\mathbf{r}, t)}, \frac{\delta B}{\delta n(\mathbf{r}, t)} \right] \quad (29)$$

で定義される。ただし、括弧 $\{, \}$ は式(26)で与えられている。式(28)中の G は Poisson 方程式(19)の Green 関数

$$\Delta G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 4\pi\delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (30)$$

である。

このような理想化された系は無数個の Casimir 不変量をもつ。実際、 f を任意の解析的な関数であるとすると、

$$\int d^2\mathbf{r} f(n) \quad (31)$$

の形の量はハミルトニアン(28)との Poisson 括弧がゼロになる。したがって、それを生成する量

$$\xi_m = \frac{1}{m} \int d^2\mathbf{r} \left(\frac{n}{n_0} \right)^m \quad (m = 1, 2, 3, \dots) \quad (32)$$

は、すべて不変量になる(ここで、 n_0 は被積分関数を無次元にするための適当な基準分布であるが、以下簡単のために $n_0 = 1$ として議論する)。 ξ_1 は全電子数であり、完全に保存される量である。 n は流体力学での渦度に対応するが、渦度の自乗の体積積分(二次元流体では面積積分)は、特にエンストロフィという名称をもつ。このため純電子プラズマにおいても、 ξ_2 をエンストロフィと呼ぶ。二次元 Euler 乱流に関しては、エンストロフィが最小である状態へ系が緩和することが経験的に知られている。これは、いわゆる渦の「選択的崩壊」の考えによれば、全エネルギーをほぼ一定に保ちながらエンストロフィが小さなスケールに向かってカスケードする傾向にある、ということに起因する[19]。純電子プラズマにおいても、最小エンストロフィ模型を考えることは何らかの意味をもつと期待される。また現実には、 m が大きく

なると ξ_m の不変性はより悪くなることが知られている。

散逸がない理想的な場合には、もちろんエネルギー(28)も不変量である。軸対称系でもう一つ重要な不変量は、角運動量

$$L[n] = \int d^2\mathbf{r} r^2 n(\mathbf{r}, t) \quad (33)$$

である(x と y が正準共役であるため、 x および y 方向の運動量がそれぞれ $-y$ と x になる)。

3.2 実験結果

Huang と Driscoll の実験結果を Fig. 2 に示す。横軸は円筒の中心軸からの距離 R を円筒半径 R_w で割って無次元化した円柱座標の動径 $r = R/R_w$ であり、また縦軸は電子の注入時刻 $t = 0$ から 5 ms 経過した後での中心軸上の電子数密度に関して規格化された電子数密度を表している。 \times と \square は、それぞれ測定によって得られた $t = 0$ の初期分布および $t = 5$ ms での分布のデータである。 \square で表されている分布が、有限の r の値で切断されていることに注目していただきたい。

一方、Fig. 3 は電子数密度の時間発展に関するデータである。横軸は電子注入時からの経過時間であり、縦軸は中心軸上での密度の値である。 $t = 5$ ms に代表される

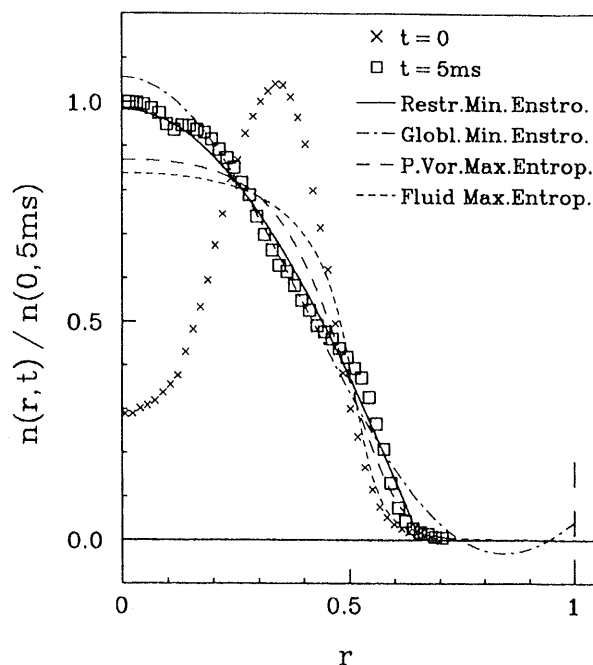


Fig. 2 Measured radial profiles of the electron density of the initial ($t = 0$) and metaequilibrium ($t = 5$ ms) states with theoretical predictions of the minimum enstrophy model and the ordinary maximum entropy principle.

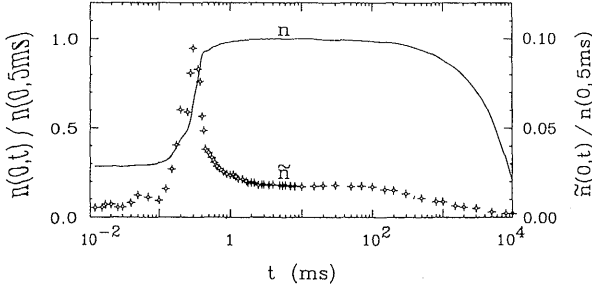


Fig. 3 Time evolution of the measured central mean density n and the level of fluctuation \tilde{n} .

分布がいかに長時間生き残る準平衡状態を表しているかがわかるであろう。

Fig. 2に戻るが、このデータで注意すべき点は、□のプロットが振動的な振る舞いをしていることである。この分布の振動は、プラズマ中に大きなスケールをもつコヒーレントなスパイラルが自発的に組織化されることによると考えられる ([20]とその中の参考文献を参照のこと)。このようなコヒーレントな構造自体は、以下の我々の統計力学的な考察の対象ではない。我々が注目したいのは、むしろコヒーレントな構造をささえる、背景にあるランダムな電子の統計的性質である。しかし、実際にはコヒーレントな構造と背景とが複雑に結合しているため、両者を分離して考えることは厳密には難しいであろう。

3.3 最小エンストロフィ模型 vs 最大 Boltzmann-Shannon エントロピー原理

文献[18]において、著者達は実験的に観測された準平衡分布を理解するために、二次元 Euler 乱流の研究でしばしば用いられる最小エンストロフィ模型と通常最大のエンストロピー原理について検討した。

まず最大エンストロピー原理では、汎函数

$$\Phi[n; \alpha, \beta, \lambda] = S - \alpha \zeta_1 - \beta H - \lambda L \quad (34)$$

の n に関する停留条件を解くことになる。ここで、Boltzmann-Shannon エントロピー S は

$$S = - \int d^2r n \ln n \quad (35)$$

であり、 α, β, λ は Lagrange 未定乗数、 H と L は式(28)と(33)で与えられている。停留条件は

$$n \sim \exp(-\lambda r^2 + \beta \phi) \quad (36)$$

という形の解によって満たされる。文献[18]の結論は、

この形の解では実験的に得られた準平衡分布を説明できない、ということであった。

そこで最小エンストロフィ模型が考えられた。この場合は、汎函数

$$\Psi[n; \alpha, \beta, \lambda] = \zeta_2 - \alpha \zeta_1 - \beta H - \lambda L \quad (37)$$

の停留条件を求めることになる。ただちに

$$n + \beta \phi = \alpha + \lambda r^2 \quad (38)$$

が得られる。最小エンストロフィ模型の特徴は、 n と ϕ がこのように線形の関係になるという点である。式(38)の両辺に二次元 Laplace 演算子を作用させて、さらに式(19) ($e \equiv 1$) を用いれば、

$$\Delta n + 4\pi\beta n = 4\lambda \quad (39)$$

となる。この方程式の軸対称解は Bessel 関数を用いて簡単に求められる。しかし、ここで大きな困難が生じる。そのような解 n は、円筒壁付近で負の値を取ってしまうのである。これはまったく受け入れ難い欠点である。この困難を回避するために、「制限された最小エンストロフィ模型」なるものが提案された[18]。この方法は要するに、分布がゼロ点を切るところでその分布を強制的に切断する、というものである。こうして得られるのが、Fig.2の中の実線で示されている解であり、確かにデータをよく再現しているように見える。しかし、分布の強制的切断という処方はいかに人為的過ぎるであろう。

3.4 最大 Tsallis エントロピー原理

Boghosian [21] は、 $0 < q < 1$ なるエンストロピー指数をもつ Tsallis 統計力学では上述のような分布の切断が必然的に現われることに注意した(式(16)参照)。そこで、汎函数

$$\Phi_q[n; \alpha', \beta', \lambda'] = S_q - \alpha' \zeta_q - \beta' H_q - \lambda' L_q \quad (40)$$

で特徴づけられる最大 Tsallis エントロピー原理を考察した。ここで、

$$S_q = \frac{1}{1-q} \int d^2r (n^q - n) \quad (41)$$

$$\zeta_q = \frac{1}{q} \int d^2r n^q \quad (42)$$

$$H_q = -\frac{1}{2} \iint d^2r d^2r' n^q(\mathbf{r}) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') n^q(\mathbf{r}') \quad (43)$$

$$L_q = \int d^2r r^2 n^q \quad (44)$$

である。式(41)は、式(1)の連続的な確率変数の場合への拡張になっている(ただし、簡単のために次元のスケールを1としている)。“ q 次のエンストロフィ” ζ_q は、本質的には Tsallis エントロピーの一部である。拘束される量がすべて Tsallis 統計力学において基本的な量 n^q で書かれていることに注意する (H_q と L_q は「規格化されていない q -期待値」の形になっている。したがって第2節でふれたように、「規格化された q -期待値」を用いた場合とは Lagrange 未定乗数の再定義と類似の処方によって関係づけられる。しかし、以下において未定乗数はパラメータなので、議論に実質的な違いは生じないであろう)。汎函数(40)の n に関する停留条件から

$$\frac{n^{1-q} - q}{q(q-1)} + \beta' \phi_q = \frac{\alpha'}{q} + \lambda' r^2 \quad (45)$$

が導かれる。ただし、 ϕ_q は

$$\phi_q(\mathbf{r}) = \int d^2 \mathbf{r}' G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') n^q(\mathbf{r}') \quad (46)$$

で定義される量であり、したがって方程式

$$\Delta \phi_q = 4\pi n^q \quad (47)$$

の解である。一般化された密度を

$$\rho_q(\mathbf{r}) = \int d^2 \mathbf{r}' \delta^{(2)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') n^q(\mathbf{r}') = n^q(\mathbf{r}) \quad (48)$$

で定義すれば、式(45)と(46)はそれぞれ

$$\frac{\rho_q^{(1-q)/q} - q}{q(q-1)} + \beta' \phi_q = \alpha' + \lambda' r^2 \quad (49)$$

$$\Delta \phi_q = 4\pi \rho_q \quad (50)$$

と書き換えられる。式(49)の両辺に二次元 Laplace 演算子を作用させることにより、

$$\frac{1}{q(q-1)} \Delta \rho_q^{(1-q)/q} + 4\pi \beta' \rho_q = 4\lambda' \quad (51)$$

を得る。

さて、式(49)の一般化された密度に対する方程式で

$$q = \frac{1}{2} \quad (52)$$

とおくと、 $\rho_{1/2}$ は最小エンストロフィ模型の式(38)と本質的に同じ形になることがわかる。すなわち、 $\rho_{1/2}$ と

$\phi_{1/2}$ が線形の関係になる。さらに、このとき最大 Tsallis エントロピー状態は、方程式(45)から

$$n \sim e_{1/2}(-\lambda' r^2 + \beta' \phi_{1/2}) \quad (53)$$

であり、分布の切断も自然に理解される。したがって、 $n^{1/2}$ を基本量として用いた Tsallis 統計力学の枠組みから最小エンストロフィ模型と同形の方程式が導かれ、しかも Huang と Driscoll が便宜的に導入した分布関数の切断という人為的操作も不要になるわけである。ただし、実験データと比べるべき量は、Tsallis 統計における $\rho_{1/2}$ すなわち $n^{1/2}$ となることに注意する。つまり、観測される確率分布はエスコート分布なのである。

4. Brands-Chavanis-Pasmanter-Sommeria の批判

上述の Boghosian の議論は、最近批判的に検討された。Brands-Chavanis-Pasmanter-Sommeria (BCPS)[22] は、Miller[23] やその他の人々によって導入された二次元乱流の渦の統計理論との類推を用いて批判を展開した。この理論では、基本的な量は渦度そのものではなく、以下で定義されるような幾何学的密度である。まず、渦が存在する(相)空間 (x, y) を微小な正方格子に分割する。渦度が σ 付近の値をもつような微小正方形の総数を $g(\sigma)$ とする(σ は、渦度レベルと呼ばれる)。これに対応する微小正方形の数密度を $n(\mathbf{r}, \sigma)$ と書くと、明らかに

$$\int d^2 \mathbf{r} n(\mathbf{r}, \sigma) = g(\sigma) \quad (54)$$

である。また、流体が非圧縮性であることから

$$\int d\sigma n(\mathbf{r}, \sigma) = 1 \quad (55)$$

を各点 \mathbf{r} で要請する。渦度 ω 自身は、

$$\omega(\mathbf{r}) = \int d\sigma \sigma n(\mathbf{r}, \sigma) \quad (56)$$

で与えられるとする。

二次元乱流と軸対称純電子プラズマとの同型性から、このような理論を後者に援用すると、考えるべき Tsallis エントロピーはもはや式(41)ではなく

$$\hat{S}_q = \frac{1}{1-q} \int d^2 \mathbf{r} \int d\sigma [n^q(\mathbf{r}, \sigma) - n(\mathbf{r}, \sigma)] \quad (57)$$

となる。ここでの σ は、いわば“電子数密度レベル”と

いうことになるであろう。BCPSは、最も簡単な近似として、2つのレベル $\sigma=0,1$ という場合について考察した。 σ に関する積分を和に置き換えれば、式(55)に対応して

$$n(r,0)+n(r,1)=1 \quad (58)$$

となり、また電子数密度レベルの一般化された密度に関する(規格化されていない) q -期待値は

$$\nu_q(r) \equiv p^q(r) = \int d\sigma \sigma n^q(r,\sigma) \Rightarrow n^q(r,1) \quad (59)$$

と書かれる。したがって、式(57)は

$$\begin{aligned} \hat{S}_q &= \frac{1}{1-q} \int d^2r [n^q(r,0) + n^q(r,1) - 1] \\ &= \frac{1}{1-q} \int d^2r [(1-p)^q + p^q - 1] \end{aligned} \quad (60)$$

と表されることになる。同様に、式(42) - (44)も

$$\hat{\xi}_q = \frac{1}{q} \int d^2r [(1-p)^q + p^q] \quad (61)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_q &= -\frac{1}{2} \iint d^2r d^2r' \{ [1-p(r)]^q + p^q(r) \} \\ &\quad \times G(r,r') \{ [1-p(r')]^q + p^q(r') \} \end{aligned} \quad (62)$$

$$\hat{L}_q = \int d^2r r^2 [(1-p)^q + p^q] \quad (63)$$

となる。このような形式においては、汎函数

$$\hat{\Phi}_q[p; \hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\lambda}] = \hat{S}_q - \hat{\alpha} \hat{\xi}_q - \hat{\beta} \hat{H}_q - \hat{\lambda} \hat{L}_q \quad (64)$$

の p に関する停留条件からでは、どのような q の値を取ってみても、 p のベキ乗とポテンシャル

$$\hat{\phi}_q(r) = \int d^2r' G(r,r') \{ [1-p(r')]^q + p^q(r') \} \quad (65)$$

との間に線形の実現することは不可能であることは明らかであろう。すなわち、電子数密度レベルというものを導入した最大 Tsallis エントロピー原理から最小エントロピー模型に相当する分布を導くことはできない。以上が、BCPSの批判の本質的な部分である。

5. おわりに

以上、Tsallis 統計力学に基づく純電子プラズマへのアプローチとそれに対する批判についてみてきた。この問題の難しさは、結局は乱流の理解の難しさに帰着され、

それは19世紀以来の課題なのである。純電子プラズマの統計力学も、まだほとんどわかっていない、というのが偽らざる現状である。

BCPSのように、二次元乱流での渦度レベルに対応する量を導入した統計理論を用いると、Tsallis 統計力学も満足すべき結果を与えないことは確かである。しかしながら、渦度レベルを導入した二次元乱流の統計理論も、実はそれほど成功し確立された理論ではないことに注意する必要があるであろう。また式(58)からも明らかなように、このアプローチでは確率変数が位置変数 r ではなく電子数密度レベル σ になってしまっている。

Boltzmann-Gibbs的なアプローチが定性的にも定量的にもうまくいかないことはわかっている。この事実は、通常エルゴード性の破れとして解釈されている。この意味で、Tsallis的なアプローチには依然として期待できる面が残されている。純電子プラズマの統計力学が今後の発展が待たれる重要な物理を含んでいるのは確かである。

参考文献

- [1] G. Nicolis and I. Prigogine, *Exploring Complexity: An Introduction* (W.H. Freeman, New York, 1989); (邦訳)G.ニコリス, I.プリゴジン「複雑性の探究」安孫子誠也, 北原和夫共訳(みすず書房, 1993).
- [2] 包括的な講義録を集めたものとしては, S. Abe and Y. Okamoto eds., *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications* (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001).
- [3] 日本語による解説としては, 阿部純義, 月刊「数理科学」連載(2000年1~4月号).
- [4] C. Tsallis, *J. Stat. Phys.* **52**, 479 (1988).
- [5] M.-C. Firpo and S. Ruffo, *J. Phys. A* **34**, L511 (2001).
- [6] V. Latora, A. Rapisarda and C. Tsallis, e-print cond-mat/0103540.
- [7] V. Latora, M. Baranger, A. Rapisarda and C. Tsallis, *Phys. Lett. A* **273**, 97 (2000).
- [8] M.L. Lyra and C. Tsallis, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 53 (1998).
- [9] S. Abe, *Phys. Lett. A* **271**, 74 (2000).
- [10] C. Tsallis, R.S. Mendes and A.R. Plastino, *Physica A* **261**, 534 (1998).
- [11] C. Beck and F. Schlögl, *Thermodynamics of Chaotic Systems: An Introduction* (Cambridge University Press, Cambridge, 1993).
- [12] E.M.F. Curado and C. Tsallis, *J. Phys. A* **24**, L69 (1991); *Corrigenda* **24**, 3187 (1991) and **25**, 1019 (1992).
- [13] A.K. Rajagopal, *Nonextensive Statistical Mechanics and Its Applications*, S. Abe and Y. Okamoto eds.,

- (Springer-Verlag, Heidelberg, 2001) p.99.
- [14] S. Abe, *Physica A* **269**, 403 (1999).
 - [15] S. Abe, S. Martínez, F. Pennini and A. Plastino, *Phys. Lett. A* **281**, 126 (2001).
 - [16] S. Abe, *Physica A* **300**, 417 (2001).
 - [17] <http://tsallis.cat.cbpf.br/TEMUCO.pdf>
 - [18] X.-P. Huang and C.F. Driscoll, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 2187 (1994).
 - [19] C.E. Leith, *Phys. Fluids* **27**, 1388 (1984).
 - [20] 際本泰士：日本物理学会誌 **56**, 253 (2001).
 - [21] B.M. Boghosian, *Phys. Rev. E* **53**, 4754 (1996).
 - [22] H. Brands, P.H. Chavanis, R. Pasmanter and J. Sommeria, *Phys. Fluids* **11**, 3465 (1999).
 - [23] J. Miller, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2137 (1990).

著者紹介



あべ すみよし
阿部純義

筑波大学物理学系助教授。1958年生
まれ。1986年日本大学大学院理工学研
究科博士課程修了，理学博士。フンボ
ルト財団奨励研究員，日本大学理工学
部をへて，2001年8月より現職。主な研究分野は統計力
学および量子論の基本的問題。趣味は旅，テニス，読書
などいろいろ。近況：最近，大型スピーカーを入手，音
楽に耳を傾けつつアイラ産シングルモルトなどを少々。