

核融合反応率に対する解析曲線の当てはめ

渡辺 二太, 赤尾 英毅¹⁾
(核融合科学研究所, ¹⁾日本電気株式会社)

Analytical Curve Fitting for Maxwellian Reactivities

WATANABE Tsuguhiko and AKAO Hideki¹⁾
National Institute for Fusion Science, Toki 509-5292, Japan
¹⁾NEC Corporation, Tokyo 108-0023, Japan
(Received 20 January 1998/Accepted 11 June 1998)

Abstract

Analytical expressions for Maxwellian reactivities are shown for D³He, DT and DD fusion reactions. The temperature range for curve fitting is 1 to 10³ keV.

Keywords:

DD reactivities, DT reactivity, D³He reactivity

1. 序

核融合反応を伴っている核融合炉プラズマの挙動を流体モデルで解析するときには、マクスウェル分布で平均された核融合反応率

$\langle\sigma v\rangle$: σ は核融合反応断面積を示す (1)

を温度で表す関数表式が必要となる。Hively [1]は、Miley [2]のデータをもとに核融合反応率の解析的表式を導いている(7種の関数形をテストし、誤差評価を行う)。しかしながら、この論文ではプラズマの温度が

$1 \leq T \leq 80$ (keV) (2)

の範囲にあることを前提としている。近年のプラズマ保持性能の向上、あるいは、中性粒子入射加熱、高周波加熱等による高エネルギーイオンの混在等を考慮するとともに高温領域にまで拡張した核融合反応率が必要である。よってここでは、IAEAのINDC (International Nuclear Data Committee) 発行の核データファイル[3]にデータが

corresponding author's e-mail: wata@nifs.ac.jp

存在する

$1 \leq T \leq 10^3$ (keV) (3)

の全領域で当てはめ可能な解析曲線表式を導いた。INDC発行の核データファイル (THE AEP (Alternate Energy Physics Program) BARNBOOK DATALIB) は、軽原子核間の核反応断面積 (全断面積、微分断面積、核融合反応率) のデータを多数の文献、資料から包括的に集め、統一的な形式に取りまとめたものである。このデータのヘッダーファイルには核反応種類、出典のほか、推奨データにはそれを明記する記号が付されている。D³He, DT および DD の核融合反応断面積に関する推奨データはヘッダーファイル部で ECPL-82 と記述されているもので、米国のローレンスリバモア国立研究所 (LLNL) が取りまとめたデータである[4]。当論文ではこのデータを使用する。ただし、実際上の重要性を考慮して、温度が1 keV 以下のデータについては使用しない。

D³He および DT 核融合反応については、核融合反応

率にピーク値が存在することを考慮して,

$$\langle \sigma v \rangle = \exp \left[x_1 - \frac{x_2}{T^{x_5}} + \frac{x_3}{T + x_4} \right] \quad (4)$$

の曲線を当てはめた.

DD 核融合反応については, $T \leq 10^3$ (keV) の領域に核融合反応率のピーク値が存在しないことを考慮して,

$$\langle \sigma v \rangle = \exp \left[x_1 - \frac{x_2}{T^{x_5}} + \frac{x_3 T}{(T^2 + x_4)^2} \right] \quad (5)$$

の曲線を当てはめた.

上記に現れる x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 のパラメータは, INDC [3] のデータ $\langle \sigma v \rangle(T_i)$ との差の2乗和 $E(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ が最小になるように定めた. たとえば, DD 核融合反応に対しては,

$$E(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{137} \left[\ln \left(\langle \sigma v \rangle(T_i) - \left(x_1 - \frac{x_2}{T_i^{x_5}} + \frac{x_3 T_i}{(T_i^2 + x_4)^2} \right) \right) \right]^2 \quad (6)$$

となる. T_i は, $T_1 = 1, T_2 = 1.02, T_3 = 1.22, \dots, T_{137} = 1,000$ で INDC [3] にデータが存在する温度である. E を最小とする係数 x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 を求めるために非線形連立方程式

$$0 = \frac{\partial E}{\partial x_j}, (j = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (7)$$

を数値的に解いた. このとき使用した計算機プログラムは, デルタ関数法を使って多変数連立方程式の近似根を自動探索する[5]サブルーチンプログラム reserch_nd と, 近似根をニュートン法で確定するサブルーチンプログラム newton_nd である. これらはともに, Fortran90 のモジュール module delfmthd に組み込まれている. 連立方程式を解く際の収束判定条件には方程式(7)の相対残差が 10^{-8} 以下となることを指定した.

第2節に $D^3\text{He}$ および DT 核融合反応の核融合反応率について記す. 第3節に DD 核融合反応の核融合反応率について記す. 第4節はまとめて当てられる.

2. $D^3\text{He}$ および DT 核融合反応の核融合反応率

$D^3\text{He}$ および DT の核融合反応は次式で表現される.

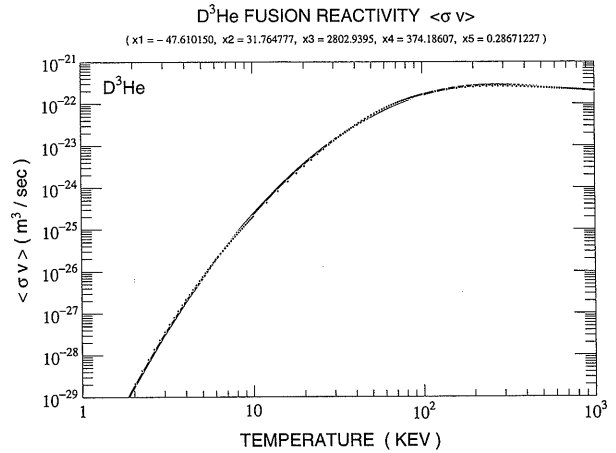
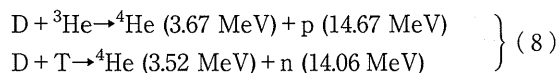


Fig. 1 Maxwellian fusion reactivity for $D^3\text{He}$. Solid line expresses the analytical expression given by Eq.(9) with coefficients (10) deduced from the INDC's data [3] (shown by small dots).

プラズマの温度が上昇するとき, $D^3\text{He}$ および DT 核融合反応の核融合反応率はピーク値をとった後, 緩やかな減少に転ずる. よってこれらに対しては, 次式を当てはめよう.

$$\langle \sigma v \rangle = \exp \left[x_1 - \frac{x_2}{T^{x_5}} + \frac{x_3}{T + x_4} \right] \quad (9)$$

$D^3\text{He}$ 核融合反応に対する計算結果は次のようになる (温度は keV, 核融合反応率は m^3/sec の単位で表す).

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -47.6101500072032 \\ x_2 &= 31.7647772245972 \\ x_3 &= 2802.93951496279 \\ x_4 &= 374.186068136729 \\ x_5 &= 0.286712265913130 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

INDC [3] のファイルに記されているデータと解析曲線の関係を Fig. 1 に記す.

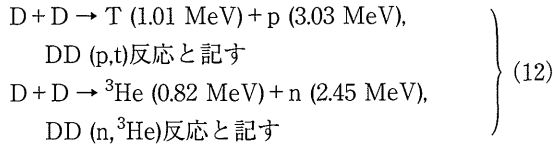
DT 核融合反応に対する計算結果は次のようになる (温度は keV, 核融合反応率は m^3/sec の単位で表す).

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -48.9580809680824 \\ x_2 &= 18.1155080330636 \\ x_3 &= 895.149425658926 \\ x_4 &= 135.888636700177 \\ x_5 &= 0.366290140624939 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

INDC [3] のファイルのテーブルに記されているデータと解析曲線の関係を Fig. 2 に記す.

3. DD 核融合反応の核融合反応率

DD 核融合反応は2種ある.



この2種の反応は $1 \leq T \leq 10^3$ (keV) の領域に核融合反応率のピーク値を持たない. よってここでは両者に対して次式の解析曲線を当てはめよう.

$$\langle \sigma v \rangle = \exp \left[x_1 - \frac{x_2}{T^{x_3}} + \frac{x_3 T}{(T^2 + x_4)^2} \right] \quad (13)$$

計算結果は次のようになる (温度は keV, 核融合反応率は m^3/sec の単位で表す).

DD (p,t) 反応の核融合反応率

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -49.1789720673151 \\ x_2 &= 15.3267580380585 \\ x_3 &= -4168271.58512757 \\ x_4 &= 36677.9694366768 \\ x_5 &= 0.365303247159742 \end{aligned} \right\} (14)$$

INDC [3] のファイルに記されているデータと解析曲線の関係を Fig. 3 に記す.

DD (n, ${}^3\text{He}$) 反応の核融合反応率

計算結果は次のようになる (温度は keV, 核融合反応率は m^3/sec の単位で表す).

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -48.9931165228571 \\ x_2 &= 15.6125104498645 \\ x_3 &= -430753.061085177 \\ x_4 &= 16887.3131502532 \\ x_5 &= 0.363023326564475 \end{aligned} \right\} (15)$$

INDC [3] のファイルのテーブルに記されているデータと解析曲線の関係を Fig. 4 に記す.

4. あとがき

当論文で導いた核融合反応率の解析曲線が INDIC [3] のデータをどの程度追従しているのかを相対誤差の形で表現しよう. 相対誤差を次式で定義する.

$$\text{相対誤差} = \frac{\text{INDICのデータ}}{\text{解析曲線の核融合反応率}} - 1 \quad (16)$$

相対誤差と温度の関係を Fig. 5 に示す.

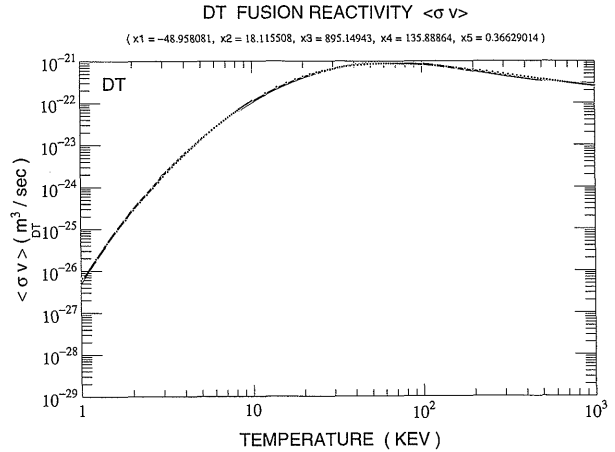


Fig. 2 Maxwellian fusion reactivity for DT. Solid line expresses the analytical expression given by Eq.(9) with coefficients (11) deduced from the INDIC's data [3] (shown by small dots).

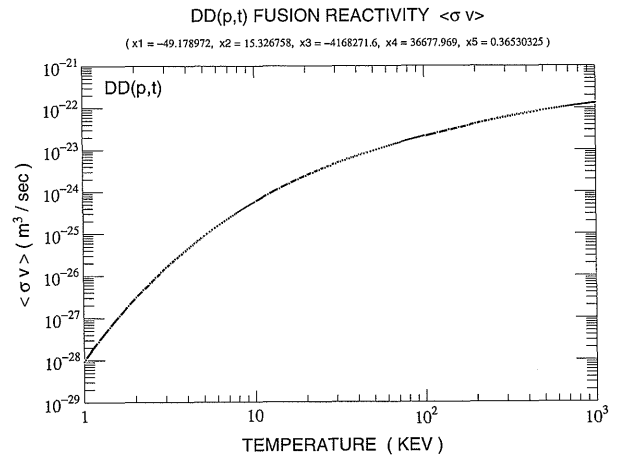


Fig. 3 Maxwellian fusion reactivity for DD (p,t). Solid line expresses the analytical expression given by Eq.(13) with coefficients (14) deduced from the INDIC's data [3] (shown by small dots).

核融合反応率が温度とともに単調増加を示す DD 反応に対しては相対誤差がほぼ全温度領域で 5 % 以下となっている. 核融合反応率が途中の温度で極大値を持つ $D^3\text{He}$, DT 反応に対しては相対誤差の最大は 10 % ~ 15 % 程度となっている.

前節では解析曲線のパラメータの計算結果の全桁を表示した. 相対誤差が 5 % 以上もあるからとの立場から, たとえば, 計算結果の数値の 4 桁目を四捨五入して 3 桁の数値で解析曲線を表せば, 相対誤差がほぼ正負の両方に均等に振り分けられている状況は崩れる. たとえば DT

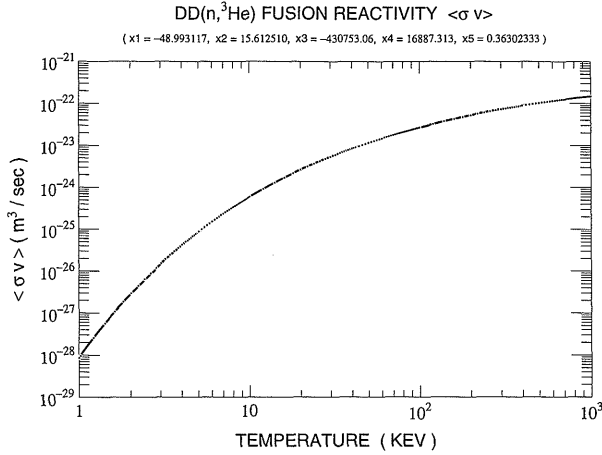


Fig. 4 Maxwellian fusion reactivity for DD (n³He). Solid line expresses the analytical expression given by Eq.(13) with coefficients (15) deduced from the INDC's data [3] (shown by small dots).

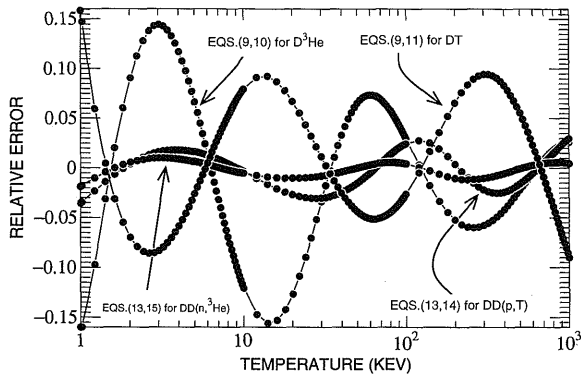


Fig. 5 Relative error of the analytical expressions for the fusion reactivity. Relative error is defined by Eq.(16).

反応に対しては, 3桁の数値で表現した解析曲線の最大誤差は2%程度増加する。

解析曲線のパラメータを決定する方程式は非線形方程式なので, 解が一意であるとは限らない。たとえば, DD (p,t) 反応に対しては, 方程式(7)の解として,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -48.9753572429516 \\ x_2 &= 15.5581911413457 \\ x_3 &= 1090.63464807660 \\ x_4 &= 132.539413563864 \\ x_5 &= 0.344454458739586 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

の数値も出力される。ただしこの数値を用いた解析曲線の最大相対誤差は5%程度となり, (14)を用いた場合と比べると2倍程度大きくなっている。

より一層高精度の核融合反応率のデータが用意され, それへの解析曲線の当てはめが要求されるなら, 対応は容易であろう。もっとも簡単な拡張としては

$$\langle \sigma v \rangle = \exp \left[x_1 - \frac{x_2}{T^{x_5}} + \frac{x_3}{T^{x_6} + x_4} \right],$$

for D³He, DT reaction (18)

$$\langle \sigma v \rangle = \exp \left[x_1 - \frac{x_2}{T^{x_5}} + \frac{x_3 T^{x_6}}{(T^2 + x_4)^2} \right],$$

for DD reaction (19)

が考えられる。当論文で使用した計算機プログラム (デルタ関数法を使って多変数連立方程式の近似根を自動探索する[5]サブルーチンプログラム `reserch_nd` と, 近似根をニュートン法で確定するサブルーチンプログラム `newton_nd`) を使えば解は見つかるであろう。

たとえば, INDC [3]のDTデータに対して上記の解曲線をあてはめれば,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= -42.8827140635095 \\ x_2 &= 40.51928137521254 \\ x_3 &= 354.7717965330966 \\ x_4 &= 14.44741863663688 \\ x_5 &= 0.1717706131205190 \\ x_6 &= 0.5639403229377115 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

の結果が得られ, 解曲線(18)の最大誤差は5%程度にまで低下する (Fig. 6 参照)。

ここで, Miley [2]のデータをもとに導かれた Hively [1]の結果と当論文の結果を簡単に比較しておこう。Miley [2]のデータは, 論文中でも断っているように, 反応断面積の精度評価については今後の研究に期待しているものであること, INDC 発行の核データファイルは Miley [2]のデータも参照の上, 推奨されているものであることなどから, INDC のデータファイル[3]を基準として採用しよう。Hively [1]の結果は, 利用可能温度の上限を 80 keV と断っているが, 当論文との比較のため機械的に 1 MeV の温度領域にまで適用する。これに伴い, Hively [1]は 80 keV 以上で大誤差となるのでここでは, 相対誤差の定義を

$$\text{相対誤差} = 1 - \frac{\text{解析曲線の核融合反応率}}{\text{INDCのデータ}} \quad (21)$$

で与える。(相対誤差が微少なときは定義(16))と実質

的に同一である). DT 反応に対する相対誤差の比較を Fig. 6 に示す. 当論文の公式は式 (18) に係数 (20) を採用したものであり, Hively の公式は論文[1]の中で推奨している公式 S_5 である. Hively の公式 S_5 は, 80 keV 以下の温度では Miley のデータとの相対誤差は 0.0116 以下と記しているので Fig. 6 に示されている, 最大では 0.08 に達する相対誤差は Miley のデータと INDC のデータの相違であろう. たとえば, (温度が 80 keV 以下の領域で) 最大誤差となる温度 1 keV のときは,

$$1 - \langle \sigma v \rangle_{\text{Miley}} / \langle \sigma v \rangle_{\text{INDC}} = 1 - \frac{0.54835 \times 10^{-26}}{0.59435 \times 10^{-26}} \approx 0.077$$

と辻褄が合う.

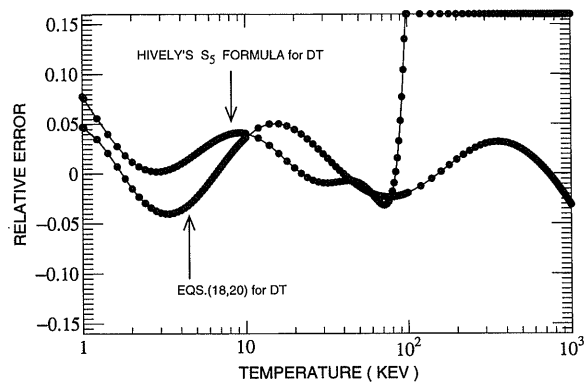


Fig. 6 Relative error of the analytical expressions for the DT fusion reactivity. Relative error of expression Eq.(18) with coefficients Eq.(20) and relative error of the Hively's formula S_5 [1] are shown. Relative error is defined by Eq.(21).

プラズマの温度が 80 keV 以下ならば, Hively の公式 S_5 でも, 当論文で導いた解析曲線でも実質的な差はないであろう. しかしながら多項式近似を基本としている Hively の公式 S_5 は, 80 keV を超える温度では直ちに利用不可となる.

謝辞

核融合科学研究所富田幸博助教授には核融合反応率に関する文献[1,3]を教えてくださいました. 核融合科学研究所等々力二郎教授には δ 関数法による非線形連立方程式の根の自動探索法 (δ 関数法) の構築に際して様々に議論していただきました. 核融合科学研究所理論データ解析研究系主幹岡本正雄教授には著者の一人 (渡辺) の研究活動の後ろ盾をしていただいています. また, 東海大学の高山一男名誉客員教授は表面磁場による $\beta=1$ プラズマの保持の研究を通じて当論文の直接的動機 (D^3He 核融合反応率の解析的表現の必要性) を与えてくれました.

参考文献

- [1] L.M. Hively, Nucl. Fusion **17**, 873 (1977).
- [2] G.H. Miley, H. Towner and N. Ivich, University of Illinois Report C00-2218-17 (1974).
- [3] R. Feldbacher, Nuclear Reaction Cross Sections and Reactivity Parameter Library and Files, INDC(AUS)-12/G, vers.1 (IAEA International Nuclear Data Comittee, 1987).
- [4] The LLNL Evaluated Charged-Particle Data Library, IAEA-NDS-56 (1983).
- [5] 渡部二太, 赤尾英毅: 京都大学数理解析研究所講究録 **1040**, 1 (1998).