解説

流体不安定と慣性核融合（2）

高　部　英　明

（大阪大学レーザー核融合研究センター）

（1997年1月30日受理）

Hydrodynamic Instabilities and Intertial Confinement Fusion (2)

TAKABE Hideaki

Institute of Laser Engineering, Osaka University, Suita 565, Japan

(Received 30 January 1997)

Abstract

This is the second part of a three-part review on hydrodynamic instabilities and inertial confinement fusion. Linear and nonlinear evolutions of Rayleigh-Taylor (R-T) and Richtmyer-Meshkov (R-M) instabilities are discussed with a focus on the present status of theoretical understandings. The statistical model of bubble competition and the modal model for multi-mode instabilities are explained. The linear stability analysis of R-T instability at the ablation front is reviewed by starting with the flame instability (Landau-Darrieus instability). The physical mechanisms of ablative stabilization are discussed within the framework of a theoretical point of view.

Keywords:

hydrodynamic instability, Rayleigh-Taylor instability, nonlinear evolution, ablative stabilization, bubble dynamics, supernova explosion, turbulent mixing

前回は，レーザー爆縮実験における流体力学的不安定性の重要性を，爆縮実験のデータとシミュレーション結果との比較を中心に説明した．さらに，アブレーション面でのレーリー・テーラー（R-T）不安定に関する最近の実験や乱流混合に関する実験の紹介をした．引続き，第2部では，第4節で流体不安定の線形・非線形現象の理論解析を紹介し，不安定が単一モードと多モードの場合での違いや，それらの解析法について説明する．第5節では，レーザーによるターゲット加速時のアブレーション面での R-T 不安定の理論解析の説明をし，噴出安定化の物理機構に関する最近の理論研究を紹介する．

4．流体不安定の線形・非線形発展

たとえば，水と空気の界面や，空気とヘリウムの界面などの安定性を考えよう．表面張力や粘性は無視する．この場合 R-T 不安定の成長率は（1）式で与えられる．ここでは，通常の理想流体における R-T 不安定および R-M 不安定の線型成長から非線型発展へのシナリオについて理論的に考察する．

4-1　線形理論

いまさら線形理論を解説するまでもない．たとえば文献[71]に各種の流体不安定の線型解析が示されている．ここでは Fermi[8]の方法に従い R-T 不安定の固有モードに対するラグランジアンを求めてみよう[88]．

いま，流体は非圧縮の渦なし流とすると，速度ポテンシャル φ は

$$\Delta\varphi=0$$

を満たす．ここで，Fig.19のように界面が正弦波状に歪んでいるとして，$\varphi=\varphi_0(t,z)e^{ikx}$ と置く．すると上式よ

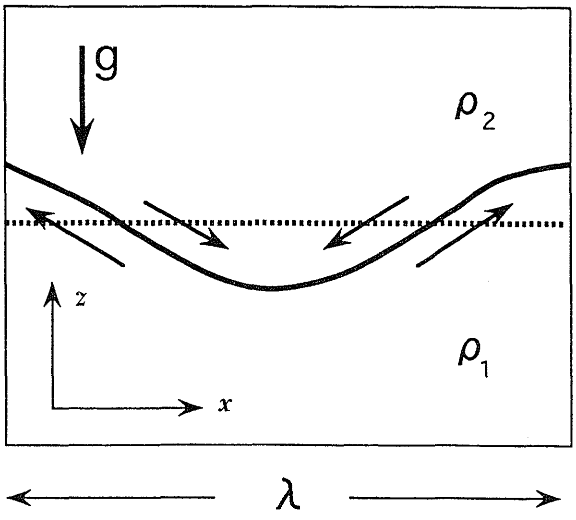

Fig. 19 Schematics of perturbed interface in gravitation.

り $\varphi=\varphi_0(t)\exp[\pm k|z|+ikx]$ と求まる．流体の擾乱運動は界面の上下でせいぜい k^{-1} の幅しか広がらないことがわかる．界面の z 座標を $Z(x,t)=\xi_0(t)\cos(kx)$ と置き，$u=\nabla\varphi$ を用いて一波長（$\lambda=2\pi/k$）あたりの運動エネルギー T を計算すると

$$T=\int_0^\lambda \mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\rho u^2 \mathrm{d}z=\frac{\lambda}{4k}(\rho_1+\rho_2)\dot{\xi}_0^2 \tag{5}$$

と求まる．ここでは $\dot{\xi}$ は ξ_0 の時間微分を示す．また，ポテンシャル・エネルギーの変化量 U は

$$U=-g\int_0^\lambda \mathrm{d}x\int_{-\infty}^{\infty}[\rho(x,z,t)-\rho_0(z)]\mathrm{d}z$$

$$=-g(\rho_2-\rho_1)\frac{\lambda}{4}\xi_0^2 \tag{6}$$

と求まる．ここで $\rho(x,z,t)$ は Fig.19のように界面が変形した時の密度分布であり，$\rho_0(z)$ は $\xi_0=0$ の時の密度分布である．ξ_0 を一般座標としラグランジアン $L=T-U$ を作ることにより ξ_0 に対する以下の運動方程式を得る

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\xi_0=\gamma^2\xi_0 \tag{7}$$

ここで γ は(1)式で与えられた γ と一致する．$\gamma^2>0$ のとき，つまり，$\rho_2>\rho_1$ の条件下で不安定となり，ξ_0 は $\exp(\gamma t)$ に比例して成長する．これが R-T 不安定である．

R-T 不安定は，上の力学モデルから明らかなように，界面の歪みにより解放される重力エネルギーが界面近傍の流体の運動エネルギーに変換される過程である．単位波長当たりの運動エネルギーが(5)式のように λ^2 に比例するのに対し，ポテンシャル・エネルギーは λ に比例する．この結果，k が大きい場合，歪運動をする流体の量が減少し，実効的に“軽く”なるため，大きい成長率で不安定が進行することとなる．

界面が有限の拡がりを持ち，その幅を L とし，密度が ρ_2 から ρ_1 に連続的に変化している場合を考えよう．この場合，不安定領域が L の幅を持つため，$kL\gg1$ の短波長じょう乱の場合は領域 L の中のみで流体運動が誘起される．これは(5)式の k^{-1} を L で置き代えるに等しく，その結果 $kL\gg1$ の極限で

$$\gamma=\left(\alpha_A g/L\right)^{1/2} \tag{8}$$

となる．これが密度の有限変化長効果であり，(1)と(8)を内挿した公式として

$$\gamma=\left(\alpha_A\frac{kg}{1+kL}\right)^{1/2} \tag{9}$$

が求まる．(2)式の第一項は $\alpha_A=1$ とした場合の(9)式に対応する．

R-M 不安定は，衝撃波により界面に瞬時に重力（慣性力）が印加される場合の不安定である．不安定に伴う流体運動が非圧縮であると仮定すると，R-T と同様の解析が可能で，方程式は(7)のままで $g=\varDelta U\delta(t)$ とすればよいことになる．ここで，$\delta(t)$ はデルタ関数，$\varDelta U$ は衝撃波通過後の界面の速度である．以下 $\varDelta U$ は正，つまり衝撃波は Fig.19で下から上へ伝搬するとする．このとき，流体には上から下へ慣性力が働く．

(7)式を積分すると

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\xi_0=\alpha_A^* k\varDelta U\xi_0^*(t=0) \tag{10}$$

と求まる．ここで＊を付けて，衝撃波により流体が圧縮される効果を導入した．α_A^* は衝撃波通過後の Atwood 数を示す．

$\xi_0^*(t=0)$ は衝撃波による圧縮効果を考慮した初期じょう乱振幅の値で，初期振幅を η_0，衝撃波により圧縮されたそれを η_0^* とすると，

$$\xi_0^*(t=0)=\begin{cases}\frac{1}{2}(\eta_0^*+\eta_0) & (\alpha_A<0\text{ の場合})\\ \eta_0^* & (\alpha_A>0\text{ の場合})\end{cases} \tag{11}$$

で与えられる[81,85]．

R-M 不安定は，(10)式のように一定速度で振幅が成長する不安定であり，R-T 不安定と異なり，α_A の正負にかかわらず不安定である．$\alpha_A<0$ の場合には振幅を反転させて成長することに注意する．R-M 不安定の発生機構は渦度に対する方程式において，渦の生成項より

定性的に理解される[13]．渦度方程式には Baloclinic 項と呼ばれる $\nabla\rho\times\nabla P$ に比例した渦の生成項がある．衝撃波による ∇P が歪んだ界面における $\nabla\rho$ と平行でないため $\nabla\rho\times\nabla P\neq 0$ となり渦が界面に生成される．これが周りの流体運動を誘導し，歪が成長することとなる．

4-2　単一モードの非線形発展

ポテンシャル流を仮定し，Fig.19の界面の z 座標を $Z(x,t)$ とすると，$Z(x,t)$ に対する支配方程式を摂動展開して三次の項まで求めると[89]

$$Z(x,t)=a_1\cos(k\,x)-\frac{1}{2}k\,a_1^2\cos(2kx)+k^2a_1^3\left[\frac{3}{8}\cos(3kx)-\frac{1}{4}\cos(kx)\right]+O(k^3a_1{}^4) \tag{12}$$

となる．ここで初期条件は $Z(x,t=0)=a_0\cos(\mathrm{kx})$ であり，$a_1=a_0\exp(\gamma t)$ は線形成長を示す．(12)式の右辺第一項は線形解，第二項は二次の非線形による2倍高調波発生を示す．この符号が負であることから歪の上部は扁平になり，下部は突き出ることがわかる．これが bubble-spike 構造の発生を示す．(12)式右辺第三項は3次の非線形性を示す．鉤括弧第二項は $\cos(kx)$ に比例し，符号が負であることから不安定成長の飽和を与えることがわかる．

非線形性は $ka_1=1$，つまり擾乱の振幅 ξ が $\xi=0.1\lambda$ 程度に成長すると重要となり，界面が正弦波型状からずれ，Fig.20のように bubble-spike 構造が現れ[90]，成長も飽和していく．実際，$k\xi=O(1)$ まで成長すると，摂動計算は意味を失う．この発展した非線形状態を扱うため，bubble（本論文では bubble の訳として「泡」と「バブル」を同じ意味で使っている）の部分に対する力学モデルを考えてみよう．

密度 ρ_1 の泡は重い流体 ρ_2 を押しのけながら上昇していく．当然，泡上方の重い流体は泡の上昇に伴う力を受ける．今，力を受ける流体の体積を V，泡の見込み面積を S とすると，以下のニュートン方程式が求まる[91]．

$$\rho_2 V\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-\rho_2u^2S+(\rho_2-\rho_1)g\,V \tag{13}$$

(13)式の右辺第1項は泡の上昇を抑える阻止力（drag force）を示し，第2項は浮力（buoyancy）を示す[83]．(13)式で u は泡の上昇速度である．

R-T 不安定の発達した非線形段階では，泡の上昇は(13)式の右辺の二つの力がつり合うことにより決まり，速度は一定となる．$V/S=\lambda$ 程度であることを使うと，

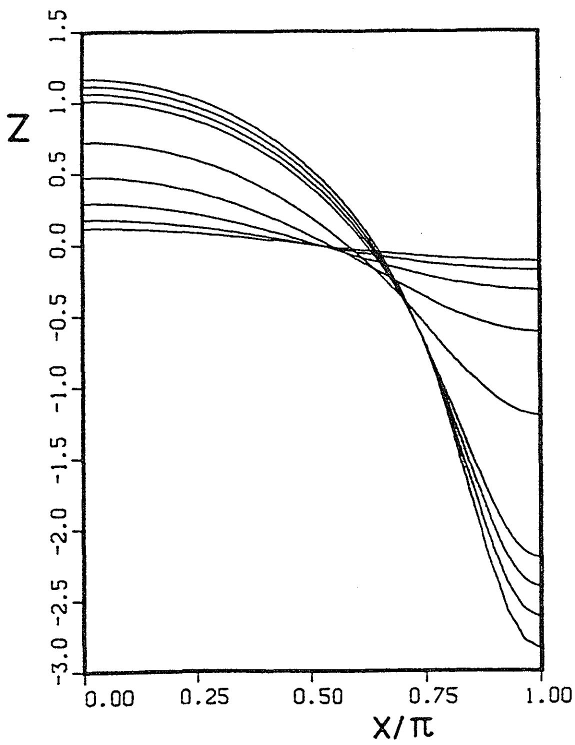

Fig. 20 Bubble-spike evolution of single-mode R-T instability.

この泡の上昇速度 U_B は

$$U_\mathrm{B}\approx\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_2}g\lambda\right)^{1/2} \tag{14}$$

と求まる．$\rho_2\gg\rho_1$ の極限で(14)式は Davies-Taylor の式[10]となる．詳しい計算によると，(14)式の λ を泡の半径 R で置き代えた表式で，(14)式には係数 A が付き，2-D の泡でその係数 $A=1/2$，3-D の泡で $A=2/3$ である[83]．

(14)式より，大きいサイズの泡（λ 大）ほど上昇速度が大きくなる．これは，(13)式で明らかなように浮力が泡の体積に比例するのに対し，重い流体を押しのけることにより受ける阻止力が表面積に比例することによる．さらにこのことが泡の形状を球形にする効果として働く．

スパイクの下降に対する支配方程式を求めるには，スパイクに働く阻止力は軽い流体による力であるから，(13)式の右辺第1項の ρ_2 を ρ_1 で置き換えればよい．すると，スパイクの成長速度 U_S として

$$U_\mathrm{S}\approx\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1}g\lambda\right)^{1/2} \tag{15}$$

と求まる．ただし，$\rho_2\gg\rho_1$ の極限（たとえば水を空気

が支える場合）では(15)式の値に近づくまでに(13)式の左辺と右辺第二項がつり合うことになる．これは，$U_S=gt$ の自由落下の解を与えることに注意．

R-M 不安定に対する2次の摂動解は Haan の式[84]を解くことにより計算され，擾乱の成長速度は

$$U(t)=U_0(1\pm\alpha_A{}^* kU_0t) \tag{16}$$

と求まる[91]．ここで U_0 は R-M 不安定の線形解であり，(10)式の右辺を示す．(16)式で正符号はスパイク，負符号はバブルに対応する．バブルの速度の減衰とスパイク速度の増大が見られる．

充分時間がたった時の漸近的振舞が(13)式より求まる．R-M 不安定では $g=0$ であり，(13)式は初期に与えられたバブルとスパイクの成長速度が阻止力により減衰していく解を与える．R-M 不安定の場合の泡の上昇速度 U_B は(13)式を $g=0$ として解くことにより

$$U_B=c_B\frac{\lambda}{t} \tag{17}$$

となる．ただし，無次元係数 c_B は V/S の評価の問題で，$\alpha_A=1$ のポテンシャル流による解析では $c_B=(3\pi)^{-1}=0.1$ であり，この値は $\alpha_A\geqq 0.5$ の範囲で妥当である[91]．α_A が小さいときは $c_B=0.15$ となる．Fig.21に $\lambda=1$ cm で(16)式の U_0 が1 cm/ms の場合のバブルとスパイクの速度の時間変化を示す[91]．図中，各実線は Atwood 数 $A(\equiv\alpha_A)$ を1, 0.9, 0.5, 0.2とした場合の結果を示す．右上の図はスパイクの速度を示す．スパイクの速度も漸近的には λ/t に比例し，α_A 依存性も含めると

$$U_S\approx\frac{2\alpha_A}{1-\alpha_A}\frac{\lambda}{t} \tag{18}$$

と与えられる[91]．

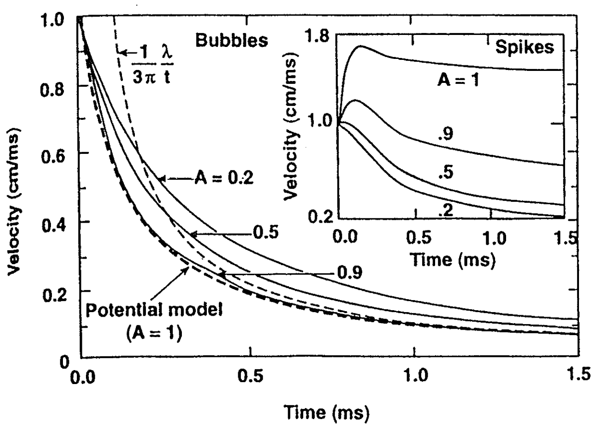

Fig. 21 Single-mode R-M bubble and spike velocities for different Atwood numbers (A's) [91].

4-3　多モードの非線形発展(Ⅰ)―泡の統計力学―

a．2つの泡の競合

Layzer[93]は，半無限の円柱を上昇する泡のダイナミックスをポテンシャル流モデルを用いて解析した．これを2つの泡が存在する場合に拡張し，泡同士の競合(bubble competition)問題が調べられた[92]．これは泡の先端近傍の形状を

$$Z(x,t)=Z_{0,i}(t)+Z_{1,i}(t)\,(x-x_i)^2$$

と近似し，$i=1,2$の2つの泡の $Z_{0,i}$, $Z_{1,i}$ に対する運動方程式をベルヌーイの方程式より導出することにより行われた．

$q=\lambda_1/\lambda_2$ を2つの泡の波長（サイズ）の比とし，小振幅の2つの泡を初期に与え解いた結果，それぞれの泡の速度がたとえば Fig.22のように変化することがわかった[94]．Fig.22は $q=1.03$, $g=1$, バブル間の距離が1の場合である．まず，それぞれの擾乱は線形な R-T 不安定により成長し（$t<2$），その後，(14)式の飽和速度に達する．飽和した後，$t=t_1$ 辺りから泡同士の相互作用が始まり，大きい泡は成長し上昇速度を速め，小さい泡は呑み込まれ $t=t_2$ で下降に転じる．

実際には泡同志が融合し $\lambda=\lambda_1+\lambda_2$ の泡が新たに生成される．この融合もしくは合体に要する時間 τ は $\tau\simeq t_2-t_1$ で定義され，その逆数は合体速度(merger rate) $\omega(=1/\tau)$ と呼ばれる．これは R-T 不安定の場合

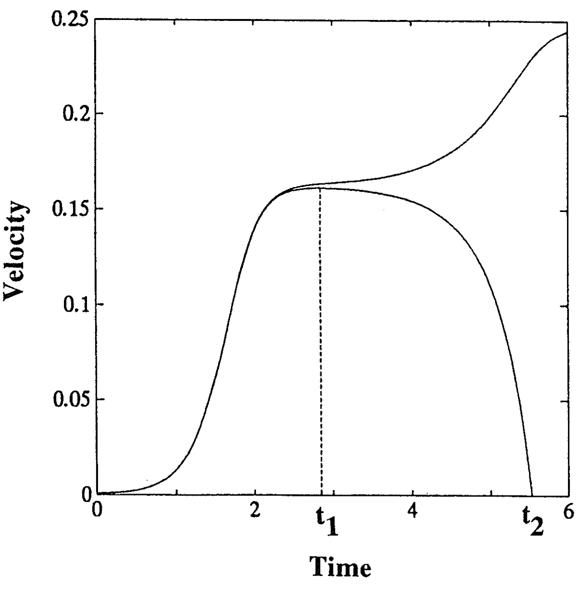

Fig. 22 Bubble velocities for two bubbles in a channel length $L=1$ with $g=1$ for case with $q=1.03$ [94].

$$\omega(\lambda_1,\lambda_2)=f(\alpha_A)\left(\frac{g}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{1/2}\omega_0{}^{RT}(\lambda_1/\lambda_2) \tag{19}$$

と与えられる[94,91]．ここで $\omega_0^{RT}(q)$ は無次元関数で，数値計算の結果，Fig.23の右上の図の実線（R-T の場合）のようになることがわかった[94]．また，(19)式で $f(\alpha_A)=[\alpha_A(1+\alpha_A)/2]^{1/2}$ である．

R-M 不安定の場合についても同様の泡の競合が見られ，その合体速度は

$$\omega(\lambda_1,\lambda_2)=\frac{1}{t}\omega_0{}^{RM}(\lambda_1/\lambda_2) \tag{20}$$

であった[94]．無次元関数 $\omega_0{}^{RM}(q)$ を Fig.23の右上の図に点線で示した．R-M 不安定の場合，ω の Atwood 数依存性はほとんどない．

b．乱流混合領域の広がり

R-T や R-M 不安定が充分発展した段階では，泡の競合を繰り返しつつ，大きな泡が形成され，スパイクの先端と泡の先端で囲まれる混合領域の幅が時間と共に成長していく．このような泡の競合の考え方は Sharp-Wheeler モデル[95]と呼ばれ，文献[96]や，繰り込み群の手法を用いた研究[97]を経て発展してきた．

今，たくさんの泡が存在し，その分布関数を $g(\lambda,t)$ とする．$g(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda$ は波長が $(\lambda,\lambda+\mathrm{d}\lambda)$ の間にある泡の数を示す．全泡の数を $N(t)=\int_0^\infty g(\lambda,t)\mathrm{d}\lambda$ として，泡と泡の二体相関を取り込んだ以下の支配方程式を得る[98]．

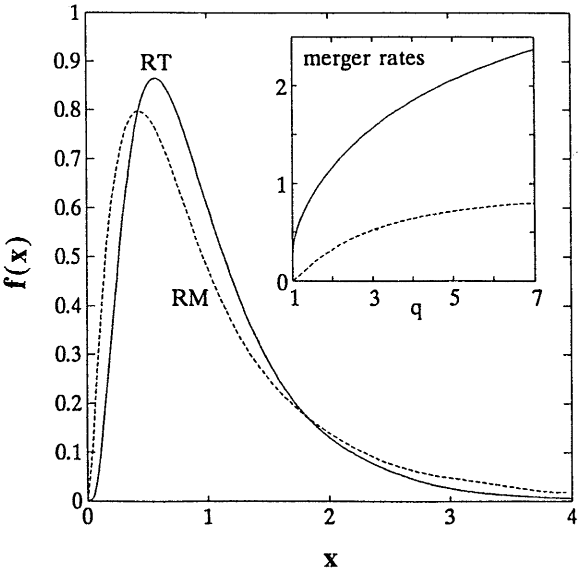

Fig. 23 Scale invariant bubble size distributions for R-T and R-M instabilities. Dimensionless merger rates, ω_0 (q), are also shown for the two instabilities [94].

$$N(t)\frac{\partial}{\partial t}g(\lambda,t)=-2g(\lambda,t)\int_0^\infty g(\lambda',t)\,\omega(\lambda',\lambda)\,\mathrm{d}\lambda' + \int_0^\lambda g(\lambda',t)g(\lambda-\lambda',t)\,\omega(\lambda',\lambda-\lambda')\,\mathrm{d}\lambda' \tag{21}$$

ここで ω は(19)または(20)式で与えられた泡の融合速度である．(21)式の右辺の第一項は λ の泡が λ' の泡と融合して $g(\lambda,t)$ が減少する泡の削減項であり，第二項は λ' と λ-λ' の泡が融合して λ の泡が作られる泡の生成項である．

(21)式に任意の初期条件 $g(\lambda,t=0)$ を入れ，ω として R-T の場合は(19)式，R-M の場合は(20)式を使うことにより分布関数の時間発展が求まる．ランダムは初期分布から出発すると充分時間が経過した段階で scale-invariant（一種の自己相似性のこと）な分布となり $g(\lambda,t)$ が

$$g(\lambda,t)=\frac{N(t)}{\langle\lambda(t)\rangle}f(\lambda/\langle\lambda(t)\rangle) \tag{22}$$

の形に収れんする．ここで $\langle\lambda\rangle=\frac{1}{N}\int_0^\infty \lambda g(\lambda)\mathrm{d}\lambda$ は平均波長である．数値計算の結果求まった(22)式の $f(x)$ の形を Fig.23に示す[94]．R-T，R-M ともに分布がせまいことに注意．(22)式の分布関数を(21)式に代入し，λをかけて $(0,\infty)$ 区間での λ 積分を行うことにより

$$\frac{\mathrm{d}\langle\lambda\rangle}{\mathrm{d}t}=\langle\omega\rangle\langle\lambda\rangle \tag{23}$$

が求まる．ここで $\langle\omega\rangle$ は ω の平均値である．

R-T 不安定の場合，ω に(19)式を代入し，$\langle\omega\rangle\sim(g/\langle\lambda\rangle)^{1/2}$ であることに注意して(23)式を積分すると

$$\langle\lambda\rangle^{RT}=C_{RT}gt^2 \tag{24}$$

と求まる．ここで C_{RT} は定数．この $\langle\lambda\rangle$ を(14)式の λ に代入することにより泡の平均上昇速度 $\langle u\rangle$ が求まる．これにより，乱流混合領域のバブル部分の幅 h_B は

$$\frac{\mathrm{d}h_B}{\mathrm{d}t}=\langle u\rangle \tag{25}$$

を解いて求まる．同様の手続きを(15)式を用いてスパイク部についても行うことにより R-T 不安定によるバブルの幅 $h_B{}^{RT}$ とスパイクの幅 $h_S{}^{RT}$ として

$$\mathrm{h}_B^{RT}=\alpha_B\,gt^2,\quad \mathrm{h}_S^{RT}=\alpha_S\,gt^2 \tag{26}$$

と求まる．詳しい計算よると $\alpha_B=0.05\alpha_A$ と求まり（α_A は Atwood 数），（4）式の二次元の場合の関係式が理論的に導出される．また，$\alpha_S/\alpha_B=[(1+\alpha_A)/(1-\alpha_A)]^{1/2}$ と近似的に与えられる．ただし，$\alpha_A=1$ 近辺ではこの値より小さくなっている[91]．

R-M 不安定では，(20)式の ω を(23)式に代入して

$$\langle \lambda \rangle^{\mathrm{RM}} = C_{\mathrm{RM}} t^{\theta_{\mathrm{B}}} \tag{27}$$

となる．ここで C_{RM} は次元も持つ定数であり，$\theta_{\mathrm{B}} = \langle \omega_0^{\mathrm{RM}} \rangle = 0.4$ である．(27)式の $\langle \lambda \rangle$ を(17)式の λ に代入し，(25)式を R-M の場合について解くことによりR-M の乱流混合によるバブル部分の幅 $h_{\mathrm{B}}^{\mathrm{RM}}$ が求まり，同様のことをスパイクについて行うことによりスパイクの幅 $h_{\mathrm{S}}^{\mathrm{RM}}$ が求まる．

$$h_{\mathrm{B}}^{\mathrm{RM}} = \lambda_0 (u_0 t/\lambda_0)^{\theta_{\mathrm{B}}}$$
$$h_{\mathrm{S}}^{\mathrm{RM}} = \lambda_0 (u_0 t/\lambda_0)^{\theta_{\mathrm{S}}} \tag{28}$$

ここで $\theta_{\mathrm{B}} = 0.4$，$\theta_{\mathrm{S}} = 0.4$ ($\alpha_{\mathrm{A}} = 0$ の極限で)，$= 1$ ($\alpha_{\mathrm{A}} = 1$ の極限で) であり[91]，λ_0 は初期じょう乱の特長的な波長，u_0 は(10)式の右辺で定義される線形成長速度である．R-M の乱流混合では，R-T の場合と異なり，混合領域の幅の時間発展が初期条件に依存することに注意．

最後に，平均的なバブルのサイズ $\langle \lambda \rangle$ と h_{B} の関係を示すと

$$h_{\mathrm{B}} = b \langle \lambda \rangle \tag{29}$$

となる．R-T では $b = 0.5/(1+\alpha_{\mathrm{A}})$，R-M では $b = 0.26\text{-}0.35$ であり，混合幅と同程度の大きさのバブルが最も多く存在することがわかる．

これまで，重力（慣性力）g が一定の場合の R-T と，g がデルタ関数で与えられる R-M 不安定による乱流混合について述べたが，一般に g は時間の関数となる．重力 g が $g \propto t^{\beta}$ の場合について上と同様の議論が行われている[89]．$\beta > -2$ では R-T 的であり，初期条件に無関係に h_{B} が決まる．これに対し，$\beta < -2$ では R-M 的となり，h_{B} は初期条件に依存することになる．

4-4　多モードの非線形発展(Ⅱ)―モード展開法―

色々な波長の擾乱（多モード）が存在する場合，不安定界面の座標 $Z(x,y)$ をフーリエ分解し，各フーリエ成分の時間発展を解いて混合領域の幅の時間発展を調べる．このような解析法をモード展開法（modal model）と呼んでいる．まずモード間結合を陽に取扱わない Haan の飽和モデル[33]を説明し，その後，さらにモード間結合を取り込んだ最近のモデル[99]について説明する．

a．Haan の飽和モデル

単一モードの不安定性はその振幅 ξ_{k} が $\eta = 0.1$ 程度で

$$\xi_{\mathrm{k}} = \eta \lambda \tag{30}$$

にまで成長すると非線形性が働き成長速度が飽和する．その後，泡の部分は一定速度で上昇することは先に説明した．多モードが密に混在する場合は，それぞれのモードが(30)式を満たすまで線形成長するのではなく，波数空間の $\boldsymbol{k}$ の周りの多数のモードは互いに相関があり，集団として飽和することになる．3次元の場合，波数空間 (k_x, k_y) で $\boldsymbol{k}$ の周りの半径 εk 程度の領域のモードが集団で(30)式の条件を満たすと考える．ただし，$0 < \varepsilon < 1$．今，x, y 方向に $L \times L$ の拡がりを持つ界面を考えると，波数 $\boldsymbol{k}$ の実効的な振幅 σ_{k} は

$$\sigma_{\mathrm{k}}^2 = \left(\frac{L}{2\pi}\right)^2 \int \mathrm{d}k_{\mathrm{x}}' \int \mathrm{d}k_{\mathrm{y}}' |Z_{\mathrm{k't}}|^2 \tag{31}$$

となる．ここで積分範囲は $|\boldsymbol{k}'-\boldsymbol{k}| < \varepsilon k$ である．(31)式の積分を実行することにより

$$\sigma_{\mathrm{k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \varepsilon k |Z_{\mathrm{k}}| \tag{32}$$

と求まる．多モードによる $\boldsymbol{k}$ 周りの実効的な振幅 ξ_{k} が $\xi_{\mathrm{k}} = \sqrt{2} \sigma_{\mathrm{k}}$ で与えられるとして，(32)式の σ_{k} を(30)式に代入し，求まる $|Z_{\mathrm{k}}|$ を飽和開始振幅 S_{k} であるとすると

$$S_k = \nu \frac{1}{Lk^2}, \qquad \nu = \frac{2\pi^{3/2}}{\varepsilon} \eta \tag{33}$$

と求まる．球面上の擾乱については，その半径を R_0 とし，球波数 ℓ を用いて $k = \ell / R_0$ であることから

$$S_{\mathrm{k}} = \nu \frac{R_0}{\ell^2} \tag{34}$$

となる．もし，$\eta \simeq (2\pi)^{-1}$，$\varepsilon = 1/4$ を代入すれば $\nu = 7$ となる．Haan は ν を調整パラメータと考え，Read の実験[62]を再現する ν を求め，$\nu = 4$ とした．

(33)式の飽和振幅は(30)式のそれに比べ $\nu/(kL)$ 程度小さい．短波長 $kL \gg 1$ では非常に小さい振幅で飽和することとなる．

Haan は，波数 k の擾乱の振幅 Z_{k} が(33)式の値に達した後は，半経験的な式

$$Z_{\mathrm{k}}(t) = S_{\mathrm{k}} \{1 + \ln[Z_{\mathrm{k}}^{\mathrm{lin}}(t)/S_{\mathrm{k}}]\} \tag{35}$$

に従って成長を続けるとした．ここで $Z_{\mathrm{k}}^{\mathrm{lin}}(t)$ は線形成長の振幅で，成長率 γ_{k} が一定の時は $Z_{\mathrm{k}}^{\mathrm{lin}}(t) = Z_{\mathrm{k}}(t=0) \exp(\gamma_{\mathrm{k}} t)$ で与えられる．(35)式より，飽和後は振幅 Z_{k} が一定速度

$$v_{\mathrm{k}} = \gamma_{\mathrm{k}} S_{\mathrm{k}} \tag{36}$$

で成長することがわかる．

Haan は，混合領域の幅 h はバブルの幅 h_B とスパイクの幅 h_S の和で与えられるとし，それぞれ

$$\sigma^2=\sum_k |Z_k|^2$$
$$h_B=\sqrt{2}\sigma \qquad (37)$$
$$h_S=\sqrt{2}\sigma(1+\alpha_A)$$

の関係で与えられるとした．

Haan の飽和モデルに従えば，短波長モードほど成長速度は速いが，早く飽和するため，$|Z_k|^2$ のスペクトルは時間とともにピークの位置を短波長から長波長へ移動する．これが見かけ上，逆カスケードとして現れ Read の実験[12]を再現することを可能としている．

同様の議論を 2-D の擾乱振幅 $Z(x)$ についても行おう．これは，2-D のシミュレーションとの比較上必要である．2-D の場合(31)式の波数空間での積分を一重積分とするだけで充分で，

$$S_k^{2\text{-}D}=\eta\left(\frac{2\pi^3}{\varepsilon L k^3}\right)^{1/2} \qquad (38)$$

となる．2-D シミュレーションとの比較から $\varepsilon=0.25$ で $\eta=0.063$ が妥当な値であることがわかった[99]．$\ell=L/\lambda$ とし，初期に $v_0(\ell)\propto\ell^{-5/4}$ の連続スペクトルの速度擾乱をフラットな海面に与え R-T 不安定の2-D のシミュレーションを行い，Haan の飽和モデルと比較した．Fig.24に 4 つのモードの時間発展を示す[99]．図で点線が2-D の結果，実線が Haan の飽和モデルの結果である．良い一致が見られる．

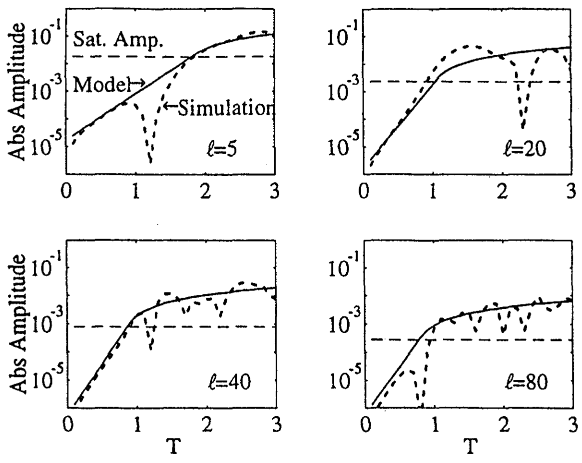

Fig. 24 Temporal evolution of four different modes for $l^{-5/4}$ spectrum as predicted by Haan's model (solid lines) compared to 2-D simulation results (dotted lines). The Haan's saturation amplitude (horizontal dashed lines) agrees well with that observed in the simulation [99].

b．モード間結合

飽和モデルでは，モード間結合の効果は陽には取り扱われていない．初期擾乱のスペクトルが波数空間で局在していたり，成長率 γ の k 依存性が強い場合などでは，飽和が起こる前にモード間結合が重要となる．特に，短波長同志のモード間結合による長波長モードの生成，その後の成長は前に説明した泡の競合そのものであり，充分発展した非線型段階で重要となる．Read の実験[12]や Youngs のシミュレーション[11]で見られた逆カスケード現象は，本質的にモード間結合による波数空間でのエネルギー流れに対応する．

Haan は非圧縮性を仮定し，速度ポテンシャルに対する式 $\Delta\phi=0$ とベルヌーイの方程式 $\partial\phi/\partial t-u^2/2-gz=P/\rho$ を用いて，界面の変位 $Z(x,y)$ のフーリエ成分 Z_k に対する支配方程式を二次の精度で導出した[84]．

$$\ddot{Z}_k=\gamma_k^2 Z_k+\alpha_A k\sum_{k_2}\Big[\ddot{Z}_{k_2}Z_{k'_2}(1-\hat{\boldsymbol{k}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{k}})$$
$$+\dot{Z}_{k_2}\dot{Z}_{k'_2}\Big(\frac{1}{2}-\hat{\boldsymbol{k}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{k}}-\frac{1}{2}\hat{\boldsymbol{k}}_2\cdot\hat{\boldsymbol{k}}'_2\Big)\Big] \qquad (39)$$

ここで，$\boldsymbol{k}_2'=\boldsymbol{k}-\boldsymbol{k}_2$ であり，$\hat{\boldsymbol{k}},\hat{\boldsymbol{k}}_2,\hat{\boldsymbol{k}}'_2$ はそれぞれ $\boldsymbol{k},\boldsymbol{k}_2,\boldsymbol{k}'_2$ の単位ベクトルである．

(1)式の成長率を持つ古典流体の場合について(39)式を解くと，モード間結合による長波長モードの成長が見られ，Read の実験[12]ではモード間結合が本質的な役割を担うことが確認された．しかし，レーザー爆縮の場合，噴出安定化のため爆縮時間中での線形成長が小さく，初期擾乱の振幅を充分小さくした高利得爆縮ではモード間結合は重要とならない，と Haan は結論した[84]．ところが，モード間結合が重要かどうかは，初期擾乱の振幅とスペクトル形状に依存しており，一般にレーザー爆縮では Haan の言う弱非線形の扱いで良いという結論にはならない．実際，現在の爆縮実験では第 2 節で述べたように，かなり発達した混合状態になっていると思われる．

そこで，振幅が充分発展した段階でも(39)式が使えるようにモデルの改良が行われた[99]．(39)式に含まれていない三次以上の高次の非線形効果を取り込むために，$|Z_k|>S_k$ の領域で Haan の飽和モデルを用いた．さらに2-D シミュレーションとの比較から，飽和後の Z_k の発展について次の 2 つの条件を課した．

(1)飽和後の Z_k の発展は(39)式で $|\boldsymbol{k}_2|,|\boldsymbol{k}'_2|<|\boldsymbol{k}|$ の長波長からのモード結合のみ考慮する．飽和後は(39)

式の第1項は無視する．したがって，短波長成分は，飽和後は長波長成分の同士の非線形相互作用のみを受けることになる．

（2）　飽和後の振幅は飽和時の振幅を Z_k^{sat}，その速度を $\dot{Z}_k^{sat}$ として

$$|Z_k| < \left| Z_k^{sat} + \dot{Z}_k^{sat}(t - t_k^{sat}) \right| \tag{40}$$

の制限を受ける．ここで t_k^{sat} は飽和の時刻を示す．(40)式の制限条件によりモードの成長速度は飽和時の速度を越えないことになる．

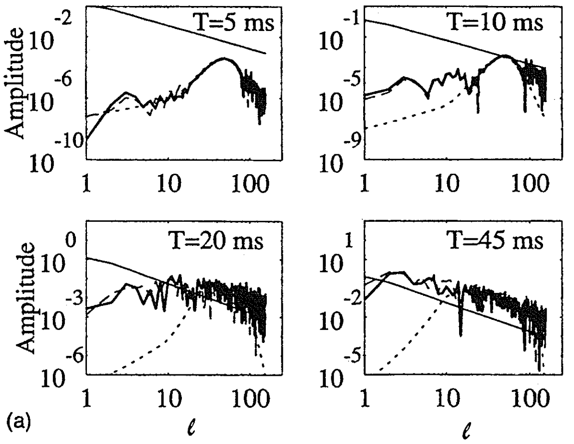

Fig. 25 Temporal evolution of perturbation spectrum for “classical fluid” configuration. 2-D simulation (bold full line), Haan’s model (dotted line), and Ofer’s model with mode-coupling (dashed line), saturation amplitude (solid straight line) [89].

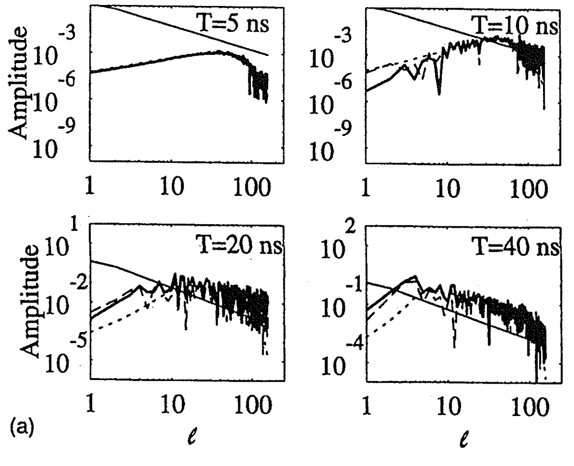

Fig. 26 Same as Fig.25, but for ICF-like reduced R-T growth case. Mode coupling is not essential compared to the case of Fig. 25 [89].

上記（1），（2）の条件を課し，(39)式を解いた．飽和後のモード間結合で位相の変化（Z_k の符号の反転）が起こり，これが泡同志の競合に重要であることがわかった．

Fig.25にReadの実験[12]に対応する場合の計算結果を示す[89]．図は，2-Dシミュレーション（実線），モード結合を考慮していないHaanの飽和モデル（点線）と上記のモデル（長点線）で得られた$|Z_k|$のスペクトルの時間変化を示す．図中，上方の実線（直線）は(38)式の S_k を示す．Haanのモデルではモード間結合による逆カスケードが見られないのに対し，Oferらの改良モデル[99]はシミュレーション結果を良く再現することがわかる．

レーザー核融合の高利得爆縮を模擬した初期条件，R-T不安定の成長率（シミュレーションでは，噴出安定化の効果を有限メッシュ効果による不安定の数値安定化で模擬している[99]）の場合についてFig.26に示す[89]．この場合，Haanの結論[84]と同様飽和効果は本質的ではあるが，モード間結合はそれほど重要でないことがわかる．

Haanに始まった多モードでの飽和モデルは，モード間結合を加え，Oferらによる改良を経て，ほぼ完成の域に達したと言える．今後，球形状や圧縮性，アブレーション効果やさらには時間的に変化する重力や爆縮の効果等を取り込んでいくことが残された課題である．

5．アブレーション面での流体不安定

ターゲット爆縮における加速相では，アブレーション面でR-T不安定が起こる．Fig.27(a)に加速相での密度，温度分布を示す[6]．図で密度の最大値点がアブレーション面で，カットオフ面近傍で吸収されたレーザーエネルギーが電子熱伝導により高密度側（左方）へ運ばれ，物質の加熱・膨張を引き起こす．電子熱伝導係数が $T^{5/2}$ に比例していることから温度・密度の分布はFig.27(a)のように急峻な構造となる．アブレーションで発生する外方への流体運動のロケット作用でアブレーション面は内方（Fig.27(a)で左方）へ加速され，この時の慣性力が外方へ向いているためアブレーション面はR-T不安定となる．

しかし，第4節で扱ったような通常の流体界面でのR-T不安定と異なり，アブレーション面では流体の圧縮性や熱伝導効果，加えて不安定面を横切って流体流れが存在することから，不安定性の様子がかなり変わってくる．実際，すでに述べたように，アブレーション面

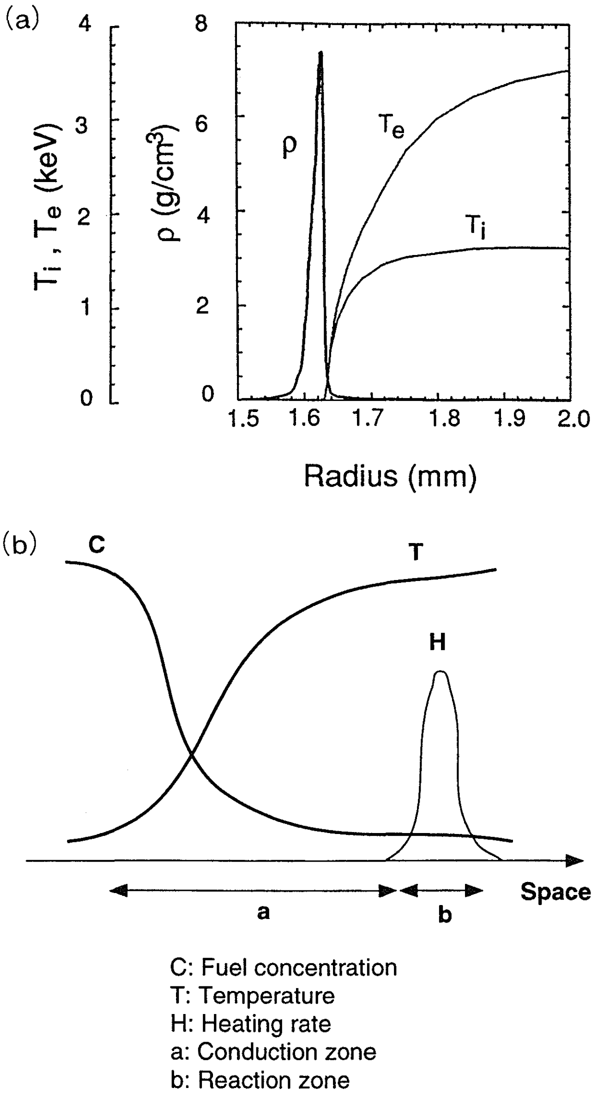

Fig. 27 (a) Typical profiles of density and ion and electron temperatures in laser acceleration phase.
(b) Schematics of conventional deflagration wave structure of slow combustion wave.

での R-T 不安定は噴出安定化のため(2)式の成長率となる．もし，噴出安定化がなければ，そして，成長率が(1)式の古典的なものであれば，固体密度の数千倍の圧縮などとうてい不可能であり，ICF は概念として成立しなくなる．

一般に，化学反応等により形成されるデフラグレーション波は Fig.27(b)のような構造を持つ．科学反応が起こりエントロピーが増大する反応領域の幅を b とすると，その前方には熱伝導による幅 a の予備加熱領域が形成される．温度は a から b の領域に単調に増大する．無次元量 Ze$=a/b$ は Zel'dovich 数と呼ばれ，通常の化学反応では Ze$=10$ 程度である．レーザーの場合，レーザー加熱が化学反応による熱の発生に対応する．R-T 不安定解析の際，擾乱の波数 k として，$ka \ll 1$ の場合，ディフラグレーションは不連続面として近似的に取り扱うことができるが，その逆では，構造をしっかり議論する必要がある．

本節では，たとえば化学反応や核反応により界面を通してエントロピーが増大し，密度が低下するディフラグレーション波（弱い燃焼波[100]）の波面の安定性から議論を始める．さらに，波面に重力も加わり，熱伝導に伴う有限幅の構造を持つディフラグレーション波[101]の安定解析に話を進める．何故，ディフラグレーション波先端のアブレーション面における R-T 不安定の成長率が(2)式で与えられるのかについて，最近の理論研究を紹介する．

5-1　燃焼波面の安定性

レーザーや X 線による加熱とそれによるエントロピー増大を化学反応によるエントロピーの増大を見なせば，アブレーション面の安定性は，燃焼波面（火炎面）の安定性の議論と通ずる．燃焼波には 2 種類あり[100]，燃焼波面を横切って密度が上昇するデトネーション（爆轟波）と密度が低下するディフラグレーション（弱い燃焼波）がある．ここでは後者を扱う．

弱い燃焼波面は流体力学的に不安定であり．それは発見者の名を冠して Landau-Darrieus (L-D) 不安定と呼ばれている[102]．燃焼波面の幅が不安定の波長 λ に比べ充分狭いとして波面を不連続面で置き代え，上下流での物理量の接続条件より成長率 γ に対する分散関係式を求めると

$$\left(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_1}\right)\gamma^2+2k\gamma+k^2(u_1-u_2)+gk\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right)=0 \tag{41}$$

と求まる．(41)式の $g=0$ の場合の導出は文献[103]にある．ここで，u_1, u_2 は波面に乗った系での上流，下流の流速である．(41)式より g の有無にかかわらず，$u_1<u_2$ $(\rho_1>\rho_2)$ で不安定，$u_1>u_2$ $(\rho_1<\rho_2)$ では安定であることがわかる．$g=0$ の場合の不安定 $(u_1<u_2)$ を L-D 不安定という．g を含む場合の不連続面安定性のより詳細な議論が文献[104]でなされている．

$u_1 \ll u_2$ の条件下で(41)式を解くと，その近似解として

$$\gamma=(k^2u_1u_2+\alpha_A kg)^{1/2}-ku_1 \tag{42}$$

と求まる．これが，R-T 不安定を伴う L-D 不安定の成長率である．$g=0$ とし，さらに近似すると

$$\gamma = k(u_1 u_2)^{1/2} \tag{43}$$

と求まる．このL-D不安定の物理機構は文献[102]にわかりやすく説明されている．

一般に火炎面は不安定であり，波面の面積は不安定の成長とともに増大し,結果として化学反応が促進される．これを乱流燃焼といい，燃焼波面はフラクタルな構造を取る[105]．化学反応の促進が限界を越えると，ディフラグレーションから発する圧縮波が衝撃波となり未燃焼部を圧縮・加熱する．この加熱による温度上昇が発火温度を越えると，今度は衝撃波面で化学反応が起こるデトネーションとなる．

このような遅延形のデトネーション波の形成は，通常の爆発現象に見られるだけでなく，Ia型の超新星爆発モデルの1つ（delayed detonation model）として採用されている[106]．白色矮星内での核燃焼波のフラクタル次元を考察し，燃焼速度の増大率が計算されている[107]．それによると，不安定波面の擾乱の最長波長を $\ell_{\max}$ 最短波長を $\ell_{\min}$ としたとき，燃焼波面の実際の面積は一次元球対称な場合の面積を A とし，波面のフラクタル次元を D（>2）とすると

$$A' = \left(\frac{\ell_{\max}}{\ell_{\min}}\right)^{D-2} A \tag{44}$$

と増大する．その結果，核反応が促進され，燃焼波面の実効的な伝搬速度 v_{eff} は1-Dでの伝搬速度を v_{cond} として

$$v_{\mathrm{eff}} = v_{\mathrm{cond}} \left(\frac{\ell_{\max}}{\ell_{\min}}\right)^{D-2} \tag{45}$$

と増大する．この速度が音速を越えるとディフラグレーションからデトネーションへと遷移する．

宇宙の重元素の起源はIa型の超新星爆発によるといわれている．核燃焼が非常に遅いディフラグレーションでは十分な量の鉄等の重元素が生成される前に星を構成する物質が飛散してしまう．初めからデトネーションだと星の物質がすべて鉄に変わってしまい，宇宙の元素祖成を説明できない.元素合成が矛盾なく起こるためには，核燃焼波伝搬の途中でディフラグレーションが加速されるか，あるいは，さらに，デトネーションに変化する爆発モデルが必要とされている[108]．

ディフラグレーションの身近な例としてはロウソクの炎があり，ロウソクの炎は安定に見える．これは(42)式の重力が波面の下流から上流に働いている（$g<0$）ため安定化しているといえる．ただし，ロウソクの炎は波面を不連続としては扱えず，波面の有限厚の効果も本質的であることを付記しておく．

(42)式の右辺第2項は啓示的である．これは，燃焼波面を横切る流れの効果による波面の安定化を示す．(2)式の$-\beta k V_{\mathrm{a}}$が噴出安定化項と呼ばれるのに対し，強いていえば，$-ku_1$は「流れ安定化」項といえる．流れ安定化項は，以下のように直感的に導出できる．$u_1 \ll u_2$の下では，不安定に伴う流体の運動エネルギーは上流部が支配的である．上流部へは，不安定モードは e^{kz} で広がり，時間的に $e^{\gamma t}$ で成長する．ここに，不安定面を横ぎる流れが有るため，$t=0$ に $z=-u_1 t$ にあった流体が時刻 t に $z=0$ の不安定面に達する．したがって，この流体は $e^{\gamma t + kz}|_{z=-u_1 t}$ の振幅を持つこととなり，実効的な成長率 γ' は

$$\gamma' = \gamma - ku_1 \tag{46}$$

となる．これが流れ安定化である．

S. E. Bodner[109] はアブレーション面でのR-T不安定をアブレーション面が不連続と仮定して解析した．その結果，

$$\gamma = (kg)^{1/2} - kv_{\mathrm{a}} \tag{47}$$

の成長率を得た．ここで v_{a} は(2)式の v_{a} と定義は同じで，(42)式の u_1 に相当する．つまり，L-D不安定の問題に重力を加えて解析したのであるが，(42)式を得るはずが，第一項の中で $k^2 u_1 u_2 \ll kg$ としてしまったため(47)式の成長率を得たと解釈できる．しかし，Bodnerが導出した(47)式は，その後，(2)式や，後ほど出てくる(52)式を導く先導役を担ったという意味において重要である．

5-2　アブレーション面でのR-T不安定の噴出安定化

アブレーション面でのR-T不安定の成長率が(1)式だとすると慣性核融合は難しくなる．また，(42)式の様にL-D不安定もからんでくると直さらICFは難しくなる．そこで，より詳細な安定性解析が必要となった．実際，アブレーションをディフラグレーション波と見なすと，波面の幅 Δz はじょう乱の波長λに比べ充分大きいか，同程度である．したがって，前に説明した不連続近似は意味を失う．アブレーションの構造を考慮した安定性解析が必要となる．

J. Nuckollsらの論文[3]では，アブレーション面のR-T不安定が "fire polishing" 効果により安定化されるはずであると述べられており，彼らはR-T不安定の成長率として直観的に

$$\gamma^2 = kg - k^2 \frac{P_{\mathrm{a}}}{\rho_{\mathrm{a}}}$$

$$=kg(1-k\Delta R) \tag{48}$$

の関係式を示した[48]．ここで，P_a，ρ_a はアブレーション面の圧力と密度で，ΔR は加速時のターゲット殻の厚さである．(48)式第2項の安定化は，後に過大評価であったことがわかるが，Nuckolls らはこれを根拠にレーザーの波形整形をすることにより（パルス後部でレーザー強度は10^{17}W/cm^2 にも達しているが）1kJ で臨界達成可能と主張した．

ところが，Lindl と Mead[110]が LASNEX を使って整形パルスでの爆縮シミュレーションを行ってみると，(1)式の古典的な成長率のせいぜい50-100%程度にしかR-T の成長率は低減していないことが分かった．しかし，確かにエントロピーを高くした爆縮モードでは成長率が低減していることは見られた．これがその後の"picket fence" パルス[111]によるターゲット設計へとつながっていった．

アブレーション面での R-T 不安定性では，圧縮性，流れ，熱伝導，有限密度勾配等の効果が混在することから，詳細で自己無撞着な安定性解析が必要とされていた．特に，電子熱伝導の非線形性はアブレーション面近傍の密度，温度，流速分布を Fig.27(a)に見られるように大変急峻なものとする．そこで，基礎式として一流体，一温度の流体方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho+\nabla\rho\boldsymbol{u}=0 \tag{49}$$

$$\rho\left(\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\nabla\boldsymbol{u}\right)=-\nabla P+\rho g \tag{50}$$

$$\rho C_v\left(\frac{\partial}{\partial t}T+\boldsymbol{u}\cdot\nabla T\right)=-P\nabla\cdot\boldsymbol{u}+\nabla K\nabla T \tag{51}$$

から出発し，固有値解析が行われた[112]．(50)式で g はアブレーション面の加速度であり，アブレーション面に乗った加速度系での運動方程式として現れた項である．(51)式で，K は電子熱伝導係数で，$T^{5/2}$ に比例する．(51)式にレーザー加熱項を加えていないのは下記の理由による．アブレーション面の R-T 不安定を議論する際，加熱領域は含めず，擾乱の固有モードの拡がり幅 k^{-1} が $ka>1$ を満たしている場合について議論する．したがって，ディフラグレーションの構造は Fig.27(b)の a の領域のみ考え，加熱の効果は右端の境界条件に熱伝導によるエネルギー流入を仮定することにより取り込む．固有モードが加熱領域（反応領域）にまで広がる長波長擾乱については別途考える必要がある．しかし，レーザー爆縮で重要となる R-T 不安定の波数は一般に，$ka>1$ の条件を満たしている．

まず，(49)-(51)式の定常解を数値積分により求め，その解を ρ_0，u_0，T_0 とした．定常解は重力の強さ（無次元化された重力 G）とアブレーション面の密度 ρ_a とディフラグレーション部後面の音速点(Chapman-Jouguet 点；C-J 点[113]）の密度 ρ_{CJ} の比 ρ_a/ρ_{CJ} の2つの無次元パラメータで特徴づけられる．

0次解に球対称定常解を仮定し，定常解からの線型擾乱，たとえば密度の場合，$\rho(r,t)=\rho_0(r)+\delta\rho(r,t)$，を考慮し，その擾乱を球関数 $Y_{\ell,m}(\theta,\phi)$ で展開 [$\delta\rho=\Sigma_{\ell,m}\,\delta\rho_{\ell,m}(r,t)\;Y_{\ell,m}(\theta,\rho)$] し，(49)-(51)式に代入し，さらに $\partial/\partial t\to\gamma$ と置くことにより固有値 γ を含む5階の微分方程式を得た[112]．この固有値方程式は m に縮退しており，ℓ のみを含む．固有値問題を数値積分により解き，色々な定常解（G，ρ_a/ρ_{CJ} を変えた場合）に対する R-T 不安定の分散関係を求めた．その結果を(47)式の形を意識しながら整理し，以下の関係式を得た[31]．

$$\gamma=\alpha\sqrt{kg}-\beta kv_a \tag{52}$$

ここで，$\alpha=0.9$，$\beta=3\text{-}4$である．$v_a=(\mathrm{d}m/\mathrm{d}t)/\rho_a$ は(2)式に同じ．(47)式に比べβが3～4と強調された安定化が見られたことは驚きであった．この強調された流れ安定化，いわゆる噴出安定化（ablative stabilization）は流れの効果だけでは説明できず，また，横方向熱伝導による安定化でも理論的に説明できなかった[112]．

噴出安定化は流れ安定化に加え，縦方向の熱伝導効果に起因すると考えられる．つまり，Fig.28に示すように，アブレーション面（AF）が R-T 不安定で歪む時，その

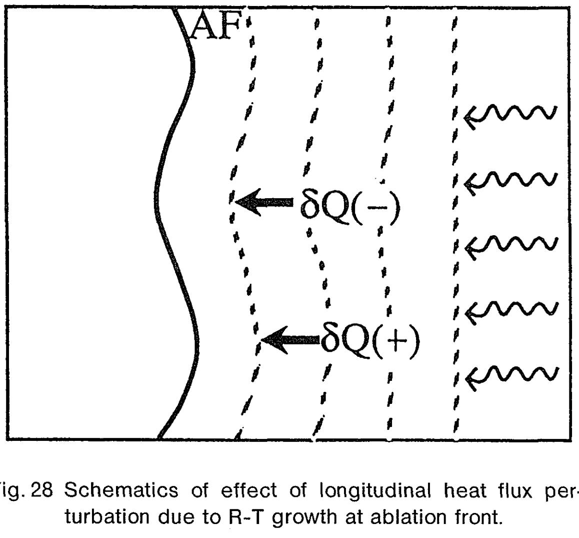

Fig. 28 Schematics of effect of longitudinal heat flux perturbation due to R-T growth at ablation front.

歪みはせいぜい k^{-1} 程度しか下流に広がらない．したがって，レーザー吸収面は歪みを受けず同じ量の熱流束が AF の方へ運ばれる．レーザー吸収面に対し，凸の部分では歪みの結果，温度勾配がより急峻となり，質量噴出率の増加および圧力の上昇が起こる．これは AF の歪みの成長を削り取り，また，圧力増加により押し戻す働きをする．凹部ではその逆のことが起こり成長が抑えられる．これが噴出安定化の定性的な理解である．縦方向熱伝導効果が $\beta k v_a$ と v_a を用いて表現されているのは，アブレーションの構造とそれに伴う質量噴出速度が強く結びついていることによる．また，k に比例するのは，k が大きいほど歪みに伴う縦方向の温度勾配が急峻になることによる．

固有値解析とは独立に２次元の流体コードを用いてアブレーション面の R-T 不安定成長率が調べられた．NRL（Naval Research Lab.）のグループはオイラーメッシュの FCT（Flux Collected Transport）法を用いた FAST2D コードを開発し[114]，R-T 不安定の成長率を求めた．その結果，成長率が(１)式に比べ，大きく低減されていることがわかり，波長0.25μm のレーザー（例えば KrF レーザー）では $\gamma=0.3\text{-}0.25\gamma_{cl}$ であり［γ_{cl}は(１)式で$\alpha_A=1$ とした値］，成長率は

$$\gamma=\left[\left(\frac{k\tilde{V}_a}{2}\right)^2+kg\right]^{1/2}-\frac{k\tilde{V}_a}{2} \tag{53}$$

で与えられると報告した[115]．ここで，$\tilde{V}_a$ は(52)式の v_a ではなく，R-T 不安定で発生する渦の分布がピークを持つ領域での流速で，$\tilde{V}_a \gg v_a$ であることから，(52)式よりもっと強い成長率の低減があるとした．さらに，(53)式と(52)式を比べると，(53)式は γ の低減であり，すべての k で $\gamma>0$ である．ところが，(52)式は $k_c=\alpha^2 g/(\beta v_a)^2$ で $\gamma=0$ となり $k>k_c$ のモードは安定となる．

その後，NRL グループはさらにシミュレーションを進め，１μm のレーザー照射では $\gamma=0.5\gamma_{cl}$，0.25μm では$\gamma=0.3\gamma_{cl}$ であると主張した[116]．これを根拠に高利得ターゲット設計に波長0.25μm のレーザーを使えばインフライト・アスペクト比（IFAR）が200の設計が可能となり，このような高 IFAR のデザインだと流体力学効率が15%にもなりうる[117]ことから，ペレット利得200-300が可能であると結論した[115,116]．

ところが，この NRL の一連のシミュレーションの結果が間違いであったことが自らの手で明らかとなった[118]．加速フォイル裏面のメッシュの切り方に問題があったとのことである．これを修正し，種々のレーザー・ターゲット条件の下にシミュレーションをしてみると，成長率は(52)式で $\beta=3$ と置いた分散式に驚くほど良く一致する（excellent fit）ことがわかった[118]．Fig.29に FAST2D の結果を示す．レーザー強度，波長，ターゲット厚等を変えて行っている．Fig.29の直線は(52)式の $\beta=3$ と $\beta=4$ の関係である．(52)式がシミュレーション結果を良く説明していることが見てとれる．

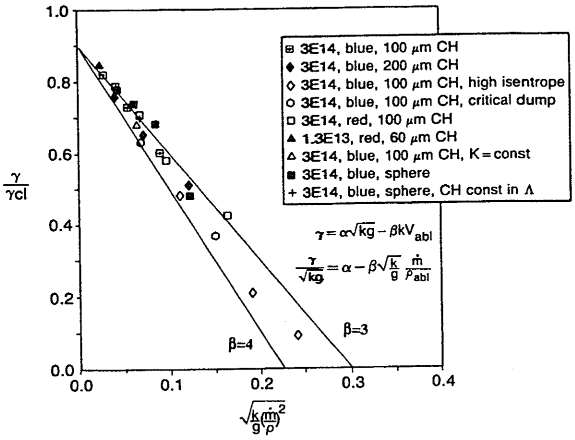

Fig. 29 FAST-2D simulation results of R-T growth rate at ablation front for various cases. The solid lines are those from Takabe formula with $\beta=3$ and 4 [118].

時を同じくして LLNL（リバモア研）でも M. Tabak らによる LASNEX コードを用いたシミュレーションが行われ，(52)式との比較がなされた．その結果，驚くほど良い一致が見られた[119]．

FAST2D がオイラー・コードであるのに対し，LASNEX はラグランジュ・コードである．異なるスキームのコードで(52)式の正当性が確認されたことから，(52)式が広く受け入れられることとなり，Takabe formula と呼ばれるようになった．さらに LLE（Rochester 大学）でも OHCHID コードを用いて調べられ，結果として(52)式の成長率と良く一致することが報告された[120]．一般に $kL \ll 1$ であることから(52)式の成長率は(２)式の成長率とほぼ一致する．その後，(52)式の実験的確認が進められてきており，それについてはすでに第３節で説明したとおりである．

高温プラズマで流体不安定が生じたとき，熱電流が流れ自発磁場が発生し，R-T 不安定の様子が変化するのではなかろうか，という疑問が生ずる．これについては，(49)-(51)式に加え，磁場の方程式を結合し固有値解析を行ったことがある（結果は未発表）．結論からいうと，成長率は磁場ありなしでほとんど変化せず，磁場の効果は無視できることがわかった．磁場の効果としては，レ

ーザーの不均一がアブレーション圧力不均一を形成する際の熱緩和効果などに，電子熱伝導の磁場による抑制などを通して重要になってくると考えられる．

(52)式の噴出安定化したR-T不安定の成長率はICFに限らず，最近，超新星爆発時の核燃焼波の安定性に関連して用いられている[107,121]．Ia型超新星において爆発初期に形成されるディフラグレーション波の不安定により(44)式のように波面が拡がると説明した．ここで$\ell_{\max}$は星のサイズ程度として，$\ell_{\min}$がどう与えられるかが問題である．星の重力により外方へ伝搬する核燃焼波面でR-T不安定が発生し，これが(52)式の分散式に従って$\ell_{\min}=2\pi/k_c$，$k_c=\alpha^2 g/(\beta v_f)^2$となるはずである．ここで$v_f$は波面の伝搬速度であり，白色矮星の典型的な値($g=2\times10^9\ \mathrm{cm/s^2}$，$v_f=100\ \mathrm{km/s}$)をいれると$\ell_{\min}=5\mathrm{km}$となる[121]．実効的なフラクタル次元$D_{\mathrm{eff}}$を文献[122]に従って導入し，(45)式より核燃焼波速度の増大を調べ，重元素合成(Fe，Ni等とそれらの同位体元素)の様子を数値計算している．

超新星の乱流燃焼についてはR-T不安定だけでなくL-D不安定も同時に起こる．L-D不安定によるフラクタル次元をポテンシャル流を仮定して求めた[123]．白色矮星内の核燃焼波面では密度の飛びが小さく($\alpha_A\ll1$)，フラクタル次元が大きくはならない．したがって燃焼波面の速度も一次元球対称の場合に比べ7倍程度にしかならず，音速を超えてデトネーションに変わる遅延爆轟波(delayed detonation)を説明できるような100倍以上の速度上昇は得られなかった[124]．超新星内部の事情はさらに複雑で，R-T不安定性とL-D不安定，さらにはKelvin-Helmholtz (K-H)不安定もからんでおり，現在精力的に研究が進められている．

5-3　噴出安定化の理論解析

レーザーやX線によるアブレーション加速時のR-T不安定の線形成長率が(52)式や(2)式で良く表されることが二次元シミュレーションや実験で確認されるようになり，それらの式が広く定着するようになった．そこで，噴出安定化の物理機構を解明し，(52)式と同様の関係式を解析的に導出しようという努力が多くの研究者により成されてきている．ここでは，解析手法の流れとその成果についてまとめる．

熱伝導の関係をさらに一般化し，(51)式のKとして

$$K=K_0T^{\nu} \tag{54}$$

の形を仮定し，K_0を定数，νを任意のパラメータとした．$\nu=5/2$は完全電離プラズマ中の電子熱伝導であり，完全電離した光学的に厚いプラズマ中の輻射熱伝導では$\nu=6.5$である[125]．

Kullら[126]はアブレーション面を不連続面として扱い，この不連続面での擾乱の物理量に対する接続条件より成長率を求めた．ただし，平衡解は等圧(isobaric)とし，擾乱は非圧縮性の条件を満たすとした．一般に不連続問題では方程式の数より未知数の数が多くなり，付加条件を設定する必要がある．また，平衡解の上，下流の密度をρ_1，ρ_2として$R=\rho_1/\rho_2$は自動的に決まらないため，パラメータとして残した形でしか議論できない．このような状況下で，R-T不安定の成長率を求め，(52)式と比較した．適当なパラメータの選択により良い一致が見られることを確認した[126]．

その後同様の不連続問題の解析を拡張し，下流点が密度勾配の最大値点で定義されるとして$R=\rho_1/\rho_2$の値を求め，さらに付加条件としてBettiらと同様の方法[127]を採用し，成長率を求めた．その結果，$\nu=5/2$の場合，(52)式と良い一致が見られ，さらに(52)式のβが$\nu<2$の場合4-8と強調されると主張した[128]．

Santz[129]はアブレーション面上流の擾乱は解析的に解き，下流部は数値的に解いた解を用い，解同士を接合させ成長率を求めた．その結果，(52)式の形でαは弱いk依存を持ち，$\beta=2$であると結論した．(52)式に比べ，彼の求めた分散関係の方が間接照射型の場合をより正確に再現していると主張した[129]．

Kullは(54)式の熱伝導を持つ等圧なアブレーション構造を求め，熱伝導により拡がりを持つアブレーション構造の安定性解析を行った[130]．彼は不安定パラメータΓ，

$$\Gamma=g\frac{\chi_1}{v_1^3} \tag{55}$$

を導入し，色々なΓ，νの下でのR-T不安定の分散関係を求めた．ただし，(55)式でχ_1，v_1はアブレーション面での熱拡散係数と流速であり，アブレーション構造の密度スケール長Lを導入すると$\Gamma=gL/v_1^2$となる．

このΓはv_a ($=v_1$)のアブレーション流速を用いて定義するフルード数(Froude number; Fr)[131]

$$\mathrm{F_r}=\frac{v_a^2}{gL} \tag{56}$$

の逆数に対応している．Frが大きいときは流れ効果が支配的であり，Frが小さい時(大きいΓの時)は熱伝導効果が支配的となる．

R-T成長率のν依存性については$\nu>5/2$では分散関係に大きな違いは見られなかったが(ただし，この場合

は χ_1, v_1 は一定としている)，$\nu<5/2$ では ν の減少と共に強い安定化が見られた．これは ν が小さいことは予備加熱の増大を引き起こし，短波長擾乱の安定化が見られることを意味する．

色々な Γ, ν の値に対し，文献[112]と同様の数値解析が行われ，(52)式との比較が行われた．アブレーション面の密度 ρ_a と音速点密度 ρ_{CJ} の比 $\rho_a/\rho_{CJ}=12.5$, 25, 50, 100 の場合について分散関係式が文献[31]の結果と ℓ の小さい領域を除いて良く一致することが示された[130]．また，$\gamma=0$ となる波数 k_c の Γ 依存性が調べられ，無次元化した $\tilde{k}_c$

$$\tilde{k}_c=\frac{v_a^2}{g}k_c \tag{57}$$

が $\nu=5/2$ の場合，$\Gamma=0.5$-1 でピーク値 ($\tilde{k}_c=0.1$-0.2) を持ち $\Gamma\ll1$，$\Gamma\gg1$ で減少することが示された．

(52)式から求まる $\tilde{k}_c$ は

$$\tilde{k}_c=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2 \tag{58}$$

であり，$\alpha=0.9$, $\beta=3$ では $\tilde{k}_c=0.1$となりピーク値とほぼ一致する．Kull の論文[130]の重要な点は，もし Γ (つまり Fr) を変化させ得るならば，$\Gamma\ll1$ か $\Gamma\gg1$ とすれば $\tilde{k}_c\ll0.1$となり，実効的な β 値が大きくとれることを示唆していることである．これについては後ほどもう一度議論する．

Bud'ko ら[132] は WKB (Wentzel- Kramers- Brillouin) 法を用い，連続的に密度・流速が変化するアブレーション・プラズマでの R-T 不安定の成長率を解析的に求めた．流れがない場合には速度擾乱に対する固有値方程式は2階の微分方程式となり，ポテンシャル内での量子に対する Schrödinger 方程式に類似の形となる (R-T 不安定と Schrödinger 方程式の関連性については Mikaelian[133] が詳しく議論している)．流れを自己無撞着に入れた場合について，WKB 近似の下で考察し，擾乱振幅に対する4階の代数方程式を導出した．

WKB 近似が成立するのは $kL\gg1$ の場合であり，解析解は数値解と k が大きい所でよく一致し，$\gamma=0$ となるカットオフ波数 k_c が(58)式と良く一致することが示された．しかし，この WKB 解は $k\to0$ の極限では $\gamma\to0$ とはならず，有限の値となってしまった (実際，$kL\gg1$ でのみ WKB 近似が妥当なのは当然)．文献[132]で重要な無次元量として(56)式のフルード数が初めて導入されたことを付記する．

文献[132]は擾乱に対する熱伝導効果を無視した解析であったが，これを改良し，$\nu=2.5$の電子熱伝導を取り込んだ解析が Bychkov ら[104]により行われた．上，下流の擾乱に対する解を WKB 法で解き，$\gamma=0$ となる k_c が $\tilde{k}_c=0.13$-0.16であることを導出した．また，長波長は不連続問題として扱い，最終的に RT 不安定の成長率として(52)式の形で α を $\alpha_A{}^{1/2}$ で置き換え，$\beta=2.5$-3.2 とした形を導出した．

Bettiら[134]は文献[132]の WKB 法を踏襲し，Fr<1 の場合について，非圧縮性を仮定して R-T 不安定の成長率を求めた．実際の ICF の条件下では Fr<1 であり，この補正項が重要であることを主張した．Fr=0.02 の場合について，彼らの結果が(52)式の関係をよく再現することが示された．

さらに Betti ら[135]は，アブレーション・プラズマの領域を Fig.30のように3つの領域に分割し，任意の ν を持つ熱伝導の効果を取り込み解析を行った．解析には境界層の構造計算で用いられる数学手法が使われた．$\nu>1$, Fr>1 の条件に加え，文献[130]に従い，等圧近似を用い，Kull の数値計算の結果を解析的に導出することを試みた．その結果，$\nu=2.5$の場合，$\gamma=0$ の波数 k_c の Fr 依存性が Fig.31の実線のように求まった．これは，一点鎖線で示した Kull の結果[130]と大変良く一致する．また，$\nu=2.5$の場合，彼らの k_c の表式が Bychkov ら[104]の表式に良く一致することが示された．

$\gamma=0$ となる k_c の値の ν 依存性が調べられ，Fr=5 の場合について Fig.32の結果を得た．この図で L_0 はアブレーション・プラズマの密度変化長の最小値にほぼ対応している．ここで，黒点は Kull の数値計算の結果[130]を示す．これより $\nu<2$ の場合，カットオフ波長が急激に長くなることがわかる．これは(58)式で実効的に β が大きくなることに対応し，Wouchuk ら[128]の結果と良く対応している．

Goncharov ら[136]は Fr≫1, $\nu>1$ の場合について，前論文[135]の解析を拡張し，境界層の解析手法を用い，R-T 不安定性の成長率を解析的に導出した．求まった γ の解析解は $\nu=2.5$の場合(52)式に良く一致することがわかり，また，広い ν の範囲にわたり Kull の数値解とよく一致することが示された．大変煩雑な計算の結果，γ を(52)式と類似の形で整理した．

Betti ら[137]は Fr≫1 の場合については境界層の解析を行い，Fr≪1 については WKB 近似を行うことによりほぼ全ての Fr の値について適用できる R-T 不安定の成長率を求めた．その結果を(52)式の形で整理し，α, β の値として $\nu=2$ の場合について

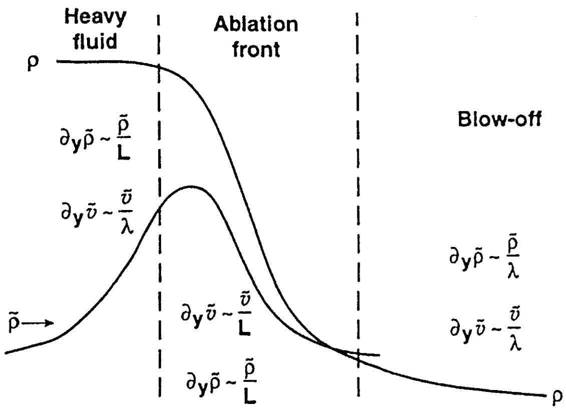

Fig. 30 Density profile with regions of different scale length of density and velocity perturbations [137].

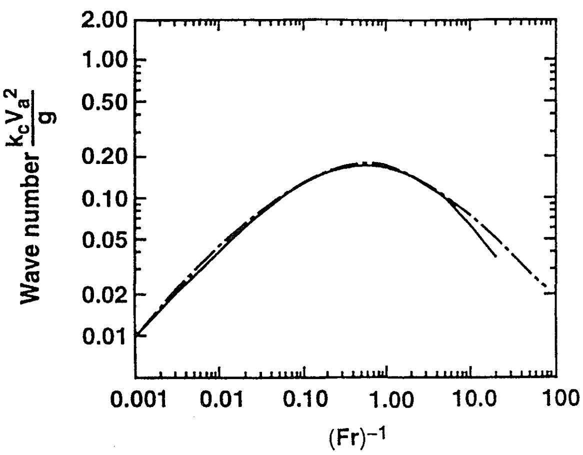

Fig. 31 Normalized cut-off wavenumber obtained theoretically (solid line) and numerically (dash-dotted line) as a function of the inverse of Froude number [135].

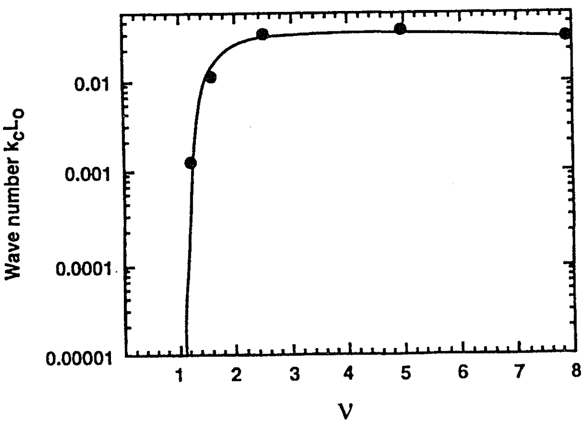

Fig. 32 Normalized cut-off wavenumber vs thermal conduction exponent for Fr=5. The solid line is theoretical and solid circles are numerical [135].

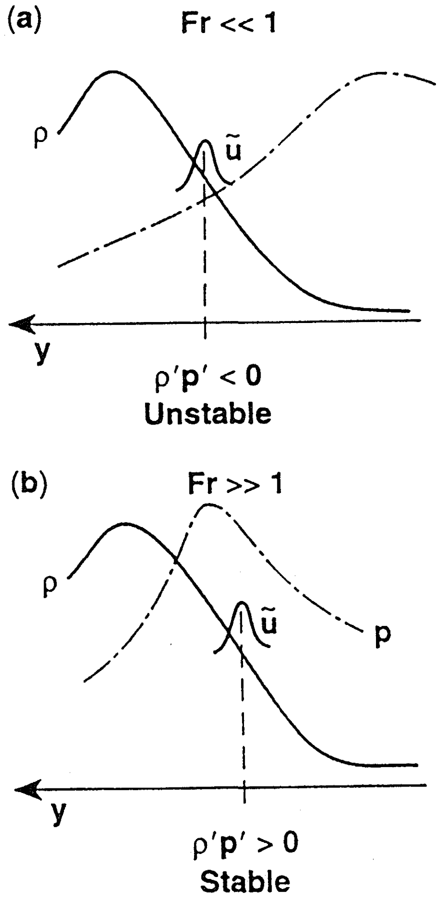

Fig. 33 Localized short-wavelength mode for (a) Fr ≪1 and (b) Fr≫ 1 [137].

$$\alpha = 0.94(\mathrm{Fr})^{0.02}, \quad \beta = 2.11(\mathrm{Fr})^{-0.21} \quad (\mathrm{Fr}<0.5 \text{ の場合})$$

$$\alpha = 0.90(\mathrm{Fr})^{0.04}, \quad \beta = 1.88(\mathrm{Fr})^{0.25} \quad (\mathrm{Fr}>3 \text{ の場合}) \tag{59}$$

となることを示した．(59)式を用いて計算される(58)式の k_c が Fig.31に対応していることがわかる．著者らが導出した β のパラメータ依存性が Goncharov[136]により Fr 依存性に焼き直されており，$\beta \simeq 1.8\mathrm{Fr}^{0.2}$であることが示された．これは(59)式の Fr>3 の場合の β と良く一致している．

Fr≪1 の場合は，たとえば重力が強く，Fig.33のように不安定領域が広がり，$kL \gg 1$ の擾乱が不安定により成長する．したがって，WKB 解による解析が妥当となる．これに対し，Fr≫1 では重力が弱く，$kL \gg 1$ の擾乱は安定となり，長波長モードに対する解析が重要となる．

Fr≪1 の場合の(59)式を(58)式に代入し，(56)式の関

係を用いると$k_cL=(\alpha/\beta)^2\mathrm{Fr}\propto \mathrm{Fr}^{1.4}$となる．これはFig.33のイメージと異なる．$\mathrm{Fr}\ll 1$では，熱伝導効果と密度勾配効果の方が重要となり$k_cL\propto Fr^{-1/3}$となることが指摘された[137]．

(54)式の熱伝導のνの値がどう決まるかについては各種物理を取り込んだ爆縮コードの結果から判断する．CHフォイルに$5\times10^{13}\mathrm{W/cm^2}$の$0.35\mu$mレーザーを照射した場合のLILACによる1-Dシミュレーションでは，輻射を切った場合$2<\nu<2.5$であったが，輻射を多群拡散モデルで解いた場合$1<\nu<2$であった．これは，等圧モデルで求まる密度の定常解分布を1-Dコードで得られる結果と比較して求めた値である．輻射は熱平衡からほど遠く，CHですらプリヒートが支配的でFrも前者が3に対し，輻射を入れた場合0.03と下がった[137]．

アブレーション面近傍では，電離や状態方程式，さらには輻射の効果が重要となり，密度分布は(54)式でνが一定な熱伝導と純粋にバランスを保って決まるわけではない．そこで，1-Dのシミュレーション結果より得られる密度分布と(54)式より求まるモデル解とを比較し，νおよびFrを評価することによりアブレーション面でのR-T不安定の成長率を評価すべきである，というのが現段階でのR-T不安定成長率を評価する際の指針である．

参考文献

[1]-[87]は前月号の第1部160～161頁の参考文献を参照．
[88] S. Nakai and H. Takabe, *Inertial Confinement Fusion,* the Reports on Progress in Physics **59**, 1073 (1996).
[89] D. Shvarts *et al.*, Phys. Plasmas **2**, 2465 (1995).
[90] H. J. Kull, Phys. Rev. Lett. **33**, 1957 (1986).
[91] U. Alon *et al.*, Phys. Rev. Lett. **74**, 534 (1995).
[92] J. Hecht, U. Alon and D. Shvarts, Phys. Fluids. **B6**, 4019 (1994).
[93] D. Layzer, Astrophys. J. **122**, 1 (1955).
[94] U. Alon *et al.*, Phys. Rev. Lett. **72**, 2867 (1994).
[95] D. H. Sharp, Physica **12D**, 3 (1984).
[96] J. A. Zufiria, Phys. Fluids. **31**, 440 (1988).
[97] J. Glimm and D. H. Sharp, Phys. Rev. Lett. **64**, 2137 (1990).
[98] U. Alon, D. Shvarts and D. Mukamel, Phys. Rev. E **48**, 1008 (1993).
[99] D. Ofer *et al.* Phys. Plasmas **3**, 3073 (1996).
[100] ランダウ・リフシッツ：流体力学2（東京図書，1971）第14章.
[101] 例えば，J. L. Bobin, Phys. Fluids, **14**, 2341 (1971).
[102] F. A. Williams 著，柘植俊一監訳：燃焼の理論（日刊工業新聞社，1988）p. 364.
[103] 文献[100]の p. 531, 問題1.
[104] V. V. Bychkov, S. M. Golberg and M. A. Liberman, Phys. Plasmas **1**, 2976 (1994).
[105] B. B. Mandelbrot, J. Fluid. Mech. **72**, 401 (1975).
[106] K. Nomoto, F. K. Thielemannn and K. Yokoi, Astrophys. J. **284**, 644 (1984).
[107] F. X. Timmes, Astrophys. J. **423**, L131 (1994).
[108] 野本陽代, 野本憲一：超新星1987Aに挑む（講談社，ブルーバックス B799, 1989). 第5章.
[109] S. E. Bodner, Phys. Rev. Lett. **33**, 761 (1974).
[110] J. D. Lindl and W. C. Mead, Phys. Rev. Lett. **34**, 1273 (1975).
[111] R. L. McCrory *et al., in Laser Interaction and Related Plasma Phenomena, 12th Int. Conf.* (*AIP Cof. Proc. 369,* New York, 1996) p. 71.
[112] H. Takabe, L. Montienth and R. L. Morse, Phys. Fluids **26**, 2299 (1983).
[113] 例えば H. Takabe, K. Nishihara and T. Taniuti, J. Phys. Soc. Jpn **45**, 2001 (1978).
[114] M. H. Emery, J. H. Gardner and J. P. Boris, Phys. Rev. Lett. **48**, 677 (1982).
[115] M. H. Emery, J. H. Gardner and J. P. Boris, Phys. Rev. Lett. **57**, 703 (1988).
[116] M. H. Emery, J. P. Dahlburg and J. H. Gardner, Phys. Fluids **31**, 1007 (1986).
[117] J. H. Gardner and S. E. Bodner, Phys. Fluids **26**, 2672 (1986).
[118] J. H. Gardner, S. E. Bodner and J. P. Dahlburg, Phys. Fluids **B3**, 1070 (1991).
[119] M. Tabak, D. H. Munro and J. D. Lindl, Phys. Fluids **B2**, 1007 (1990).
[120] LLE Review, LLE, Univ. Rochester **37**, 2 (1988).
[121] E. Livne and D. Arnett, Astrophys. J. **415**, L107 (1993).
[122] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature* (Freeman Pub., New York, 1993).
[123] S. I. Blinnikov and P. V. Sasorov, Phys. Rev. **E53**, 4827 (1996).
[124] S. I. Blinnikov, *private communication.*
[125] Ya. B. Zel'dovich and Yu. P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Academic Press. New York, 1966) Chap. X.
[126] H. J. Kull and S. I. Anisimov, Phys. Fluids **29**, 2067 (1986).
[127] R. Betti, R. L. McCrory and C. P. Verdon, Phys. Rev. Lett. **71**, 3131 (1993).

[128] J. G. Wouchuk and A. R. Piriz, Phys. Plasmas **2**, 493 (1995).
[129] J. Sanz, Phys. Rev. Lett. **73**, 2700 (1994).
[130] H. J. Kull, Phys. Fluids **B1**, 170 (1989).
[131] 液体の自由表面の近くを運動する幾何学的に相似な物体で，物体の代表的な長さ L，重力 g，速度 V がそれぞれ異なる場合を比較すると，無次元の数 $V/\sqrt{gL}$ が同じであれば運動は力学的に相似となる．この無次元数をフルード数という［岩波，理化学辞典より］．ここでは，我々の慣習に従い，その二乗をフルード数 Fr とする．
[132] A. B. Bud'ko and M. A. Liberman, Phys. Fluids **B4**, 3499 (1992).
[133] K. O. Mikaelian, Phys. Rev. **E53**, 3551 (1996).
[134] R. Betti *et al.*, Phys. Rev. **E50**, 3968 (1994).
[135] R. Betti *et al.*, Phys. Plasmas **2**, 3844 (1995).
[136] V. N.Goncharov, R. Betti *et al.*, Phys. Plasmas **3**, 1402 (1996).
[137] R. Betti, V. N. Goncharov *et al.*, Phys. Plasmas **3**, 2122 (1996).

著者 E-mail　takabe@ile.osaka-u.ac.jp