23Pp36

非線形磁気流体方程式に対する平衡保持スキーム
An equilibrium-preserving scheme for nonlinear magnetohydrodynamic equations

白戸高志，松山顕之，相羽信行
Takashi Shiroto, Akinobu Matsuyama, Nobuyuki Aiba
量子科学技術研究開発機構
National Institutes for Quantum Science and Technology

実機形状を考慮した核融合プラズマシミュレーションを現実的な計算コストで行うために，非構造格子を用いて非線形磁気流体（MHD）方程式を解くためのコードが世界各国で開発されている．我々はその中でも双曲型方程式に対する計算精度と数値安定性を高い次元で両立可能である，discontinuous Galerkin (DG) 法に基づく 3 次元 full-MHD コード MUSES の開発を行っている．これまで，円柱プラズマにおける内部キンクモードの再現に成功しており，トーラス形状を模擬するために一般座標系への拡張にも取り組んできた．

しかしながら，これまでの実装により長時間計算を実施しようとすると，時定数の比較的長い数値不安定が発現することにより，トーラスプラズマにおける固有モードの再現が困難となっていた．MUSES コードは磁場のソレノイダル条件 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ の破れに起因する数値不安定を抑制するために，次の形式により表される Powell の 8-wave モデル [1] を採用している．

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = -s(\nabla \cdot \mathbf{B}), \tag{1}$$

ここで，Q は保存変数，$\mathbf{F}$ は流束，s は $\nabla \cdot \mathbf{B}$ に比例するソース項の非線形係数である．DG 法は左辺に示すような保存型方程式の離散化を得意としている一方で，右辺のような非保存項を安定に扱えるような数値技法の開発はさほど勢力的に行われていない．これは，微分演算子の前に s という非線形な変数が現れていることにより，弱形式を立てるのが比較的難しいということに起因する．これまでは先行研究で示されている Powell のソース項に対する離散化手法 [2] を採用してきたが，前述の数値不安定により固有モードの再現が困難となっていた．本研究では，式 (1) を次のように 2 段階に分離することで，この問題を解決することを試みた．

$$\phi = \nabla \cdot \mathbf{B}, \tag{2}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = -s\phi. \tag{3}$$

すなわち，支配方程式を敢えて 2 段階に分離してそれぞれに弱形式を立てることで，微分演算子の前に非線形な変数が現れないようにし，標準的な弱形式を用いて Powell の 8-wave モデルを表現可能とした．安定な平衡を初期条件として与えて数値実験を行った結果，従来のスキームは計算格子を細かくするほど早く計算が破綻する数値不安定が確認されたのに対して，新たな手法は数値不安定が発生せず，格子を細かくするほど厳密解に近づく傾向が確認された．

今後は，数値平衡を読み込むようにコードに改修を加え，内部キンクモードが最も不安定となる平衡を用いた数値実験に移行する予定である．

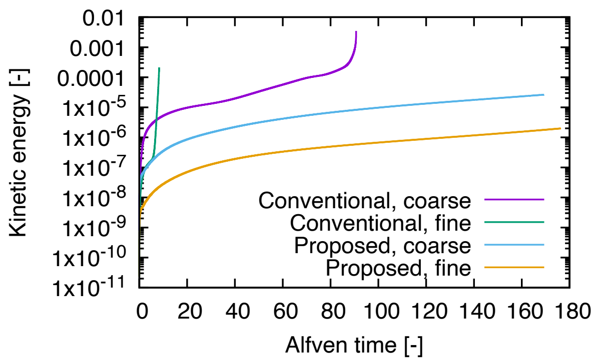

Fig. 1: 安定な解析平衡を与えた際の運動エネルギーの時間発展．従来手法で確認されている数値不安定が新規手法により回避されている．

References

[1] K.G. Powell et al., J. Comput. Phys. 154, 284–309 (1999).
[2] T. Guillet et al., MNRAS 485, 4209–4246 (2019).