

ダイバージェンスフリーな不連続ガレルキン法による非線形 MHD コード開発

Development of nonlinear MHD code with divergence-free discontinuous Galerkin method

白戸高志¹, 松山顕之¹, 相羽信行²

Takashi Shiroto¹, Akinobu Matsuyama¹, Nobuyuki Aiba²,

量研六ヶ所¹, 量研那珂²

QST Rokkasho¹, QST Naka²

磁気流体力学 (MHD) による実機モデリングを目的として, discontinuous Galerkin (DG) 法によるコード開発が各極で行われている. しかしながら, 磁場のソレノイダル条件の破れは数値不安定の原因になりうる事が知られており, 核融合プラズマの場合, 線形問題を解くことすらも困難となる.

量研では DG 法による 3次元非線形 MHD コード MUSES の開発を進めている. 本講演では理想 MHD の結果のみを示すが, 最近では粘性・熱伝導・電気抵抗を含む抵抗性 MHD への拡張も行われている. MUSES コードではポロイダル断面を Delaunay 分割し, トロイダル方向に 2次元メッシュを押し出して 3次元メッシュを構築するため, プリズム要素を採用している. 非構造格子を採用するため沿磁力線座標を用いることはできないが, 高次の基底関数を使用することで解像度を担保している (本研究では 1 次の基底関数により空間 2 次精度とした). セル境界においては物理量が不連続となるため, 近似 Riemann 解法の一つである HLLD 法 [1] により数値流束を計算した. また, 前述のソレノイダル条件に起因する数値不安定を抑制するために, ダイバージェンスフリーな基底関数の線型結合により磁場を表現する locally divergence-free 法 [2], ソレノイダル条件の誤差をソース項により移流させる Powell の 8-wave 法 [3] を採用している.

MUSES コードの動作検証を行うために, 円柱プラズマにおける大域的 Alfvén 固有モードの計算を行った. 図 1 に大域的 Alfvén 固有モードの計算例を示す. プリズム要素を積層することで円柱形状を模擬しているため, MHD 方程式の解のみならず物体形状もまた 2 次精度により表現されている. さほど高いとは言えない解像度 (要素数 236,032) であるが, 内部自由度により比較的滑らかに解を再現できることが見て取れる. 平衡は Appert の論文 [4] と同様のものを与え, 初期摂動は Hain-Lüst 方程式により与えられる固有値問題を数値的に解くことで設定した. 運動エネルギー

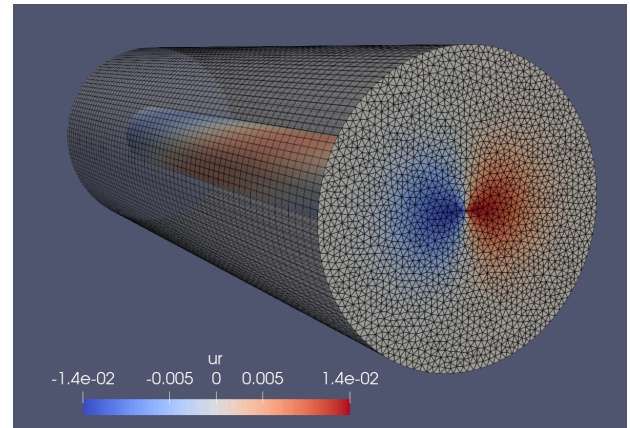


Fig. 1: 円柱プラズマにおける大域的 Alfvén 固有モードの計算例.

の時間発展をフィッティングして得られた固有モードの周波数は, 固有値問題より得られた参照解と比較して 8×10^{-5} 程度の誤差であり, 線形理論を高忠実に再現できていることが確認された. また, 同じく円柱プラズマに対する内部キンクモードの計算を行い, 固有値コードにより得られる成長率と比較して 1×10^{-2} 程度の誤差で線形成長を再現できることを確認した.

今後はトーラス形状での計算を可能とするために, 各セルのローカルな計算座標に対応するメトリックの導入を行う. また, Rankine-Hugoniot の関係を破る移流拡散法に依存しない, 新しいダイバージェンスフリー DG 法を 2次元コードで実証することに成功しており, 今後は 3次元コードへの実装に必要な理論拡張を行う.

References

- [1] T. Miyoshi and K. Kusano, J. Comput Phys. 208, 315 (2005).
- [2] B. Cockburn et al., J. Comput Phys. 194, 588 (2004).
- [3] K.G. Powell et al., J. Comput Phys. 154, 284 (1999).
- [4] K. Appert et al., Plasma Phys. 24, 1147 (1982).