

講座『今更聞けない!?磁場閉じ込めプラズマの微視的不安定性』，プラズマ・核融合学会誌 Vol.99-06～Vol.99-08 の補助資料として、途中計算の説明が必要と思われる式の導出や補足説明を行う。

初学者が微視的不安定性に関する勉強を始める一助となれば幸いである。

更新履歴

2023/6/21 • 第2章および第3章の補足事項について説明

2023/7/15 • 2.4節の大アスペクト比トーラスプラズマにおける演算子について追記

- 2.5節の長波長近似、低周波近似について追記
- 3.2節の分散関係の流体近似式の導出について一部修正
- 付録. ガウス積分まとめを追記
- 第4章および第5章の補足事項について説明

2023/8/X • 第6章および第7章の補足事項について説明

(2.2節) ジャイロ中心位置座標系での分布関数と粒子位置座標系での分布関数の違い

2.2節では、ジャイロ運動論について導出することなく、結果だけ示しているのが釈然としない方も多いかと思う。しかし、ジャイロ運動論についても導出しようとするだけで別の講座が必要になるので、ここでは天下一りに受け入れてもらうしかない。座標変換理論としてのジャイロ運動論の解説は第2章文献[2][3]に詳しい。

本講座を読み進めるに当たり、最低限、

- ・ジャイロ運動論によると、粒子位置での摂動分布関数 $f_s^{(p)}(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ は式(6)によって摂動分布関数の非断熱部分 $h_s(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t)$ を用いて表されること。特に、 h_s は粒子位置 \mathbf{x} ではなくジャイロ中心位置 \mathbf{X} で記述され、ジャイロ位相角へ陽に依存しないという近似が成り立つこと

だけ把握してもらえばよい。

2.3節での摂動分布関数の非断熱部分に関するジャイロ運動論的Vlasov方程式(9)または(13)によって h_s の時間発展を計算できれば、得られた h_s から(6)式に従って粒子位置での電荷密度・電流密度を計算できるので、通常の準中性条件およびAmpère則に代入して電磁場揺動を与える式(15)(16)が導かれ、閉じた方程式系となる。

(2.3節)式(14)の導出：第1の有限Larmor半径効果…粒子が感じる平均的ポテンシャル

ジャイロ運動論方程式(9)にはジャイロ位相平均(3)された形でポテンシャル $\langle \psi \rangle_s$ が現れる。ここでは、このジャイロ位相平均されたポテンシャルを新たに大文字 $\Psi_s \equiv \langle \psi \rangle_s$ と書くことにし、座標の関係を陽に表わすと

$$\Psi_s(\mathbf{X}, \mu, t) = \langle \psi(\mathbf{x}, t) \rangle_s = \frac{1}{2\pi} \oint d\xi \psi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{X}, \mu, \xi), t)$$

として、右辺の積分は $(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t)$ 固定の下でのジャイロ位相角 ξ に対する積分であることに注意すると、 Ψ_s はジャイロ中心位置 \mathbf{X} と磁気モーメント μ への依存性を持つ。

Fourier表示

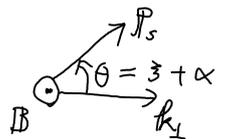
$$\begin{aligned} \Psi_s(\mathbf{X}, \mu, t) &= \sum_{\mathbf{k}_\perp} \Psi_{s\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, \mu, t) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{X}} \\ \psi(\mathbf{x}, t) &= \sum_{\mathbf{k}_\perp} \psi_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, t) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}} \end{aligned}$$

の下で両者の関係を計算してみると、

$$\begin{aligned} \Psi_s(\mathbf{X}, \mu, t) &= \langle \psi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}_s, t) \rangle_s \\ &= \left\langle \sum_{\mathbf{k}_\perp} \psi_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, t) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot (\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}_s)} \right\rangle_s \\ &= \sum_{\mathbf{k}_\perp} \psi_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, t) \left\langle e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \right\rangle_s e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{X}} \\ \therefore \Psi_{s\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, \mu, t) &= \psi_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, t) \left\langle e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \right\rangle_s \end{aligned}$$

となる。 $(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t)$ 固定の下でのジャイロ位相角 ξ に対する積分はLarmor半径ベクトル $\boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{X}, \mu, \xi) = \mathbf{b}(\mathbf{X}) \times \mathbf{v}_\perp(\mathbf{X}, \mu, \xi) / \Omega_s(\mathbf{X})$ を含む項にしか作用しないことに注意。この係数を計算すると、

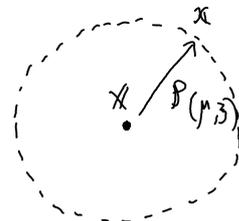
$$\left\langle e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \right\rangle_s = \frac{1}{2\pi} \oint d\xi e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_s \cos(\xi + \alpha)} = J_0(k_\perp \rho_s)$$



ここで、 $\rho_s = |\boldsymbol{\rho}_s| = \frac{v_\perp}{|\Omega_s|}$ であり、式(14)が導かれた。

このように摂動量はその波長の長さ $k_\perp^{-1} \sim \rho$ に起因して、ジャイロ中心位置と粒子位置が明確に区別される $[\psi(\mathbf{x}, t) = \psi(\mathbf{X} + \boldsymbol{\rho}, t) \neq \psi(\mathbf{X}, t)]$ 。一方、平衡量は空間的にゆっくりと変動しているため、例えば $B(\mathbf{x}) = B(\mathbf{X}) + \mathcal{O}(\delta)$ が成り立つ。

$\langle \psi \rangle_s$ はジャイロ中心 \mathbf{X} 周りを旋回する粒子が平均的に感じるポテンシャルであり、磁気モーメント μ が異なれば旋回する半径位置も異なるため、 $\langle \psi \rangle_s(\mathbf{X}, \mu, t)$ の依存性を持つことが理解される。



(2.3節)式(15)の導出：第2の有限Larmor半径効果…位置 \mathbf{x} での密度に対する寄与

準中性条件は、粒子位置での密度 $n_s^{(p)}(\mathbf{x}, t)$ を用いれば、Poisson方程式からDebye長効果を除いた形で表される。

$$0 = \sum_s e_s n_s^{(p)}(\mathbf{x}, t)$$

粒子密度は、摂動分布関数の非断熱部分を用いて、式(6)より、

$$\begin{aligned} n_s^{(p)}(\mathbf{x}, t) &= \int d\nu^3 \Big|_{(\mathbf{x}, \nu)} f_s^{(p)}(\mathbf{x}, \nu, t) \\ &= \int d\nu^3 \Big|_{(\mathbf{x}, \nu)} \left[-\frac{e_s \phi(\mathbf{x}, t)}{T_s} F_{M_s} + h_s(\mathbf{X}, \varepsilon, \mu, t) \right] \\ &= -\frac{e_s n_s}{T_s} \phi(\mathbf{x}, t) + \int d\nu^3 \Big|_{(\mathbf{x}, \nu)} h_s(\mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}_s(\mathbf{x}, \mu, \varepsilon), \varepsilon, \mu, t) \end{aligned}$$

である。ここで、速度空間積分は粒子位置 \mathbf{x} 固定で行われることに注意。Fourier表示では

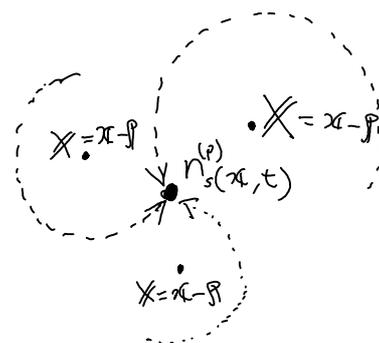
$$\begin{aligned} \sum_{\mathbf{k}_\perp} n_{s\mathbf{k}_\perp}^{(p)}(\mathbf{z}, t) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}} &= -\frac{e_s n_s}{T_s} \sum_{\mathbf{k}_\perp} \phi_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, t) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}} \\ &\quad + \int \frac{2\pi B}{m_s^2 |v_\parallel|} d\varepsilon d\mu \sum_{\mathbf{k}_\perp} h_{s\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, \varepsilon, \mu, t) e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}} \langle e^{-i\mathbf{k}_\perp \cdot \boldsymbol{\rho}_s} \rangle \\ &= \sum_{\mathbf{k}_\perp} \left[-\frac{e_s n_s}{T_s} \phi_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, t) + \int d\nu^3 J_0\left(\frac{k_\perp v_\perp}{|\Omega_{s\perp}|}\right) h_{s\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, \varepsilon, \mu, t) \right] e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}} \\ \therefore n_{s\mathbf{k}_\perp}^{(p)}(\mathbf{z}, t) &= -\frac{e_s n_s}{T_s} \phi_{\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, t) + \int d\nu^3 J_0\left(\frac{k_\perp v_\perp}{|\Omega_{s\perp}|}\right) h_{s\mathbf{k}_\perp}(\mathbf{z}, \varepsilon, \mu, t) \end{aligned}$$

となり、Fourier表示の準中性条件

$$0 = \sum_s e_s n_{s\mathbf{k}_\perp}^{(p)}$$

に代入すると式(15)を得る。

位置 \mathbf{x} での密度 $n_s^{(p)}(\mathbf{x}, t)$ はいわゆる断熱(Boltzmann)応答部分 $-e_s n_s \phi(\mathbf{x}, t)/T_s$ に加えて、非断熱応答部分 h_s からの寄与を持つが、ジャイロ運動する軌道がちょうど密度の評価位置 \mathbf{x} を通過するような粒子 $h_s(\mathbf{X} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\rho}_s, \varepsilon, \mu, t)$ が密度として寄与する。



これが式(15)の右辺に J_0 の因子が現れる理由であり、式(14)の J_0 とは物理的に異なった意味合いの有限Larmor半径効果である。

(2.4節)沿磁力線座標系に関する予備知識

2.4節では、沿磁力線座標系を用いた。スラブ配位の場合は単純なCartesian座標系なので予備知識は必要ないが、トーラス配位の場合については多少の予備知識を必要とする。[Ref. R. D. Hazeltine & J. D. Meiss, "Plasma Confinement"]

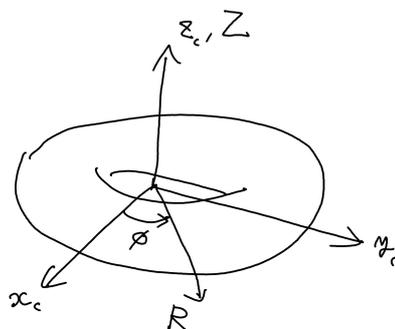
$$\begin{cases} x = \alpha(p - p_0) \\ y = \frac{R p_0}{R_0} (\psi(p) \theta - \xi) \\ z = \theta \end{cases} \quad \dots \quad r = a\psi \quad \text{とすると} \quad \Xi \quad (18)$$

その意味するところを確認するため、トーラス形状のプラズマを考え、それを記述するための座標系をいくつか定義しよう。

(i) 円柱座標系 (R, ϕ, Z)

Cartesian座標系 (x_c, y_c, z_c) との対応は、

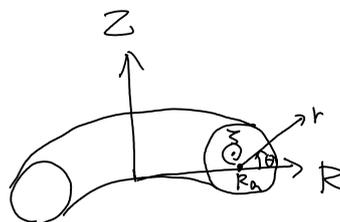
$$\begin{cases} R = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \\ \phi = \tan^{-1} \left(\frac{y_c}{x_c} \right) \\ Z = z_c \end{cases}$$



(ii) (素朴な)トロイダル座標系 (r_0, θ_0, ζ_0)

円柱座標系との対応は

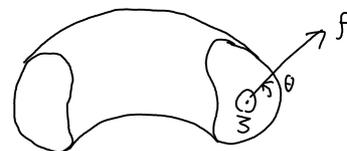
$$\begin{cases} r_0 = \sqrt{(R - R_a)^2 + Z^2} \\ \theta_0 = \tan^{-1} \left(\frac{Z}{R - R_a} \right) \\ \zeta_0 = -\phi \end{cases}$$



この座標系は、 $(R, Z) = (R_a, 0)$ を中心とする円形断面トーラスを表わしている。角度座標の方向の取り方は様々あり得るが、ここでは (r_0, θ_0, ζ_0) の順で右手系になるように定義した。

(iii) 一般化トロイダル座標系 (ρ, θ, ζ)

一般形状の磁気面の存在を仮定し、その磁気面ラベルを ρ とすると、磁気面は $(\rho = \text{const.})$ の局面として表され、ポロイダル角 θ やトロイダル角 ζ 方向には 2π の周期性が存在する。



平衡磁場が磁気面を持つ場合、適切な一般化トロイダル座標系を用いて、磁場は

$$\mathbf{B} = \nabla \chi(\rho) \times \nabla (q(\rho)\theta - \zeta)$$

と表わされる。この様な (ρ, θ, ζ) を特に磁束座標系と呼ぶ。ここで、 χ は規格化ポロイダル磁束、 q は安全係数であり、それぞれ磁気面関数（磁気面ラベル ρ のみに依存）である。

(iv) 沿磁力線座標系

$$\begin{cases} x = a(\rho - \rho_0) \\ y = \frac{a\rho_0}{R_0} (q(\rho)\theta - \zeta) \\ z = \theta \end{cases}$$

を用いると、平衡磁場は以下で表される。

$$\mathbf{B} = C(x) \nabla x \times \nabla y \quad \left[C(x) = \frac{\chi'(\rho) q_0}{a^2 \rho_0} \right]$$

■幾何的に ∇x や ∇y は $x = \text{const.}$ 平面や $y = \text{const.}$ 平面に垂直なベクトルであるので、磁場はこれらの外積、つまり $x = \text{const.}$ 平面と $y = \text{const.}$ 平面の交わる曲線に沿っていることが分かる。

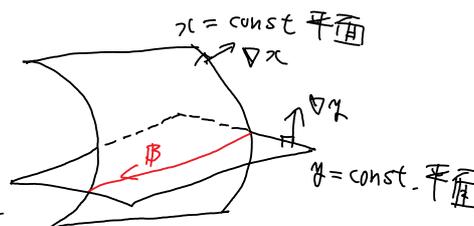
■座標 $z = \theta$ は、もともとの定義では

ポロイダル角であったが、

x と y が一定の下で z を変化させると、

座標点 $\mathbf{r}(x, y, z) \rightarrow \mathbf{r}(x, y, z + dz)$ は磁場に沿って

動くことが分かる。実際、磁場に沿った微分を考えると、



$$\begin{aligned} \mathbf{B} \cdot \nabla &= \mathbf{B} \cdot \left(\nabla x \frac{\partial}{\partial x} + \nabla y \frac{\partial}{\partial y} + \nabla z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{C(x)}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

(ここで $\sqrt{g} = (\nabla x \times \nabla y \cdot \nabla z)^{-1}$ はこの沿磁力線座標系の Jacobian) として、 z 方向偏微分で表される。以上の性質から、 x を磁気面ラベル、 y を磁力線ラベル、 z を沿磁力線座標と呼び、 x, y は磁場に垂直な方向、 z は磁場に平行な方向と解釈できる。

■トロイダル座標系では ρ, ζ 一定の下でポロイダル角 θ と $\theta + 2\pi$ は空間上同じ座標点を指すため周期性があった。一方、沿磁力線座標系では、 x, y 一定の下での z と $z + 2\pi$ は、磁力線に沿って 2π だけ進んだ異なる座標点を指し、周期性は成り立たない。バルーニング理論では、 $-\infty < z < \infty$ の被覆空間上で関数が定義される。

■一般化トロイダル座標系や沿磁力線座標系は、非直交曲線座標系を形成する。そのため、正確な取り扱いにはベクトルの反変・共変表示、計量テンソルや Jacobian の知識があることが望ましい。第4章ではトーラス配位における粒子捕捉を扱うために幾何的な取り扱いを要する。

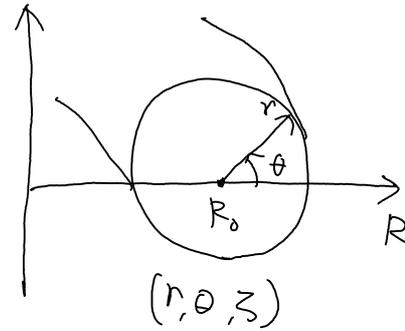
(2.4節) 大アスペクト比トーラスプラズマの場合

磁場の表式は

$$\mathbb{B} = \frac{B_0 R_0}{R} \left(\hat{\xi} + \frac{r}{2R_0} \hat{\theta} \right)$$

であり、一方 $r = r_0$ 近傍での沿磁力線座標 (x, y, z) 式(18)を用いて、

$$\begin{aligned} \mathbb{B} &= B_0 \nabla x \times \nabla y \\ &= B_0 \nabla r \times \nabla \left[\frac{r_0}{2R_0} (g(r)\theta - z) \right] \\ &= \frac{B_0 r_0}{2R_0} \nabla r \times \left[\theta \frac{dg}{dr} \nabla r + g \nabla \theta - \nabla z \right] \\ &= \frac{B_0 r_0}{2R_0} \left(\frac{g}{r} \hat{\xi} + \frac{\hat{\theta}}{R} \right) \\ &= B_0 \left(\hat{\xi} + \frac{r_0}{2R} \hat{\theta} \right) \end{aligned}$$



$$\left(\nabla r = \hat{r}, \nabla \theta = \frac{\hat{\theta}}{r}, \nabla z = \frac{\hat{\xi}}{R} \right)$$

$$(r \rightarrow r_0 \text{ のとき } g(r) \rightarrow g(r_0) \equiv g_0)$$

となり、 $r/R_0 \ll 1$ の最低次近似 ($R \approx R_0 + O\left(\frac{r}{R_0}\right)$) で磁場の表式を与えることが分かる。

このとき、

$$\begin{aligned} \hat{k}_\perp \cdot \nabla &= \frac{B_0 \nabla x \times \nabla y}{B} = \frac{B_0}{B} \nabla x \times \nabla y \cdot \left(\nabla x \frac{\partial}{\partial x} + \nabla y \frac{\partial}{\partial y} + \nabla z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{B_0}{B \sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial z} \\ &\approx \frac{1}{g_0 R_0} \frac{\partial}{\partial z} + O\left(\frac{r}{R}\right) \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} \sqrt{g}^{-1} &\equiv \nabla x \times \nabla y \cdot \nabla z \\ &= \nabla r \times \nabla \left[\frac{r_0}{2R_0} (g(r)\theta - z) \right] \cdot \nabla \theta \\ &= \frac{r_0}{2R_0 r} = \frac{1}{2R_0} \quad (r \rightarrow r_0) \end{aligned} \right)$$

また、 $k_\perp \approx k_x \nabla x + k_y \nabla y$ の近似を用いて、

$$\begin{aligned} k_\perp^2 &= k_\perp \cdot k_\perp = g^{xx} k_x^2 + 2g^{xy} k_x k_y + g^{yy} k_y^2 \\ &= k_x^2 + 2\hat{s}\theta k_x k_y + (1 + \hat{s}^2 \theta^2) k_y^2 \\ &= (k_x + \hat{s}\theta k_y)^2 + k_y^2 \end{aligned} \quad \left(\begin{aligned} g^{xx} &\equiv \nabla x \cdot \nabla x = 1 \\ g^{xy} &\equiv \nabla x \cdot \nabla y \\ &= \theta \frac{r_0}{2R_0} \frac{dg}{dr} = \hat{s}\theta \\ g^{yy} &\equiv \nabla y \cdot \nabla y \\ &= \hat{s}^2 \theta^2 + 1 + \left(\frac{r_0}{2R_0} \right)^2 \\ &\approx 1 + \hat{s}^2 \theta^2 \end{aligned} \right)$$

(22)

磁場ドリフトについては、 $\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \hat{\mathbf{b}} = \nabla \ln B$ の近似を用いて、

$$\omega_{Ds} = \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_{Ds} = \frac{c(\mu_B + m v_{Ts}^2)}{e_s B} \mathbf{k}_\perp \times \nabla \ln B \cdot \mathbf{k}_\perp$$

ここで、

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\perp \times \nabla \ln B \cdot \mathbf{k}_\perp &= -\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp \times \nabla \ln B \\ &= -k_\perp \cdot \left(k_x \nabla x + k_y \nabla y \right) \times \left(\nabla r \frac{\partial}{\partial r} + \nabla \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \nabla z \frac{\partial}{\partial z} \right) \ln B \\ &= -k_\perp \cdot \left[\left(k_x + \hat{s} \theta k_y \right) \hat{\mathbf{r}} + k_y \hat{\boldsymbol{\theta}} + k_y \frac{r}{R} \hat{\boldsymbol{\zeta}} \right] \\ &\quad \times \left(\hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\hat{\boldsymbol{\zeta}}}{R} \frac{\partial}{\partial z} \right) \ln B \\ &\quad \left(\begin{aligned} \frac{\partial \ln B}{\partial r} &= -\frac{B_0 \cos \theta}{BR} \approx -\frac{\cos \theta}{R} \\ \frac{\partial \ln B}{\partial \theta} &= \frac{B_0 r \sin \theta}{BR} \approx \frac{r}{R} \sin \theta, \quad \frac{\partial \ln B}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

$$\approx -k_\perp \cdot \hat{\boldsymbol{\zeta}} \left[\left(k_x + \hat{s} \theta k_y \right) \frac{\sin \theta}{R} + k_y \frac{\cos \theta}{R} \right] + O\left(\frac{r}{R}\right)$$

$$= -\frac{B_0 R_0}{B R^2} \left[k_x \sin \theta + k_y (\cos \theta + \hat{s} \theta \sin \theta) \right]$$

よって、

$$\omega_{Ds} \approx -\frac{c(\mu_B + m v_{Ts}^2)}{e_s B_0 R_0} \left[k_x \sin \theta + k_y (\cos \theta + \hat{s} \theta \sin \theta) \right] + O\left(\frac{r}{R}\right) \quad \text{--- (20)}$$

反磁性ドリフトについても、ベクトル演算から現れる係数を計算すると、

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_\perp \times (-\nabla x) \cdot \mathbf{k}_\perp &= k_\perp \cdot \left(k_x \nabla x + k_y \nabla y \right) \times \nabla x \\ &= k_y k_\perp \cdot \nabla y \times \nabla x \\ &= k_y \frac{B}{B} \cdot \left(-\frac{B}{B_0} \right) \\ &= -k_y \frac{B}{B_0} \end{aligned}$$

よって、

$$\begin{aligned} \omega_{Xs}^T &= \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{v}_{Xs}^T = \frac{c}{e_s B} \left[\frac{T_s}{L_{ns}} + \left(\varepsilon - \frac{3}{2} T_s \right) \frac{1}{L_{Ts}} \right] \mathbf{k}_\perp \times (-\nabla x) \cdot \mathbf{k}_\perp \\ &= -\frac{c k_y}{e_s B_0} \left[\frac{T_s}{L_{ns}} + \left(\varepsilon - \frac{3}{2} T_s \right) \frac{1}{L_{Ts}} \right] \quad \text{--- (21)} \end{aligned}$$

(2.5節) 分散関係式(24)の導出

一様磁場における線形化ジャイロ運動論的方程式は式(13)と2.4節の説明から、

$$-i\omega h_{sk} + ik_{\parallel} m_{\parallel} h_{sk} = \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} \left(-i\omega \langle \Psi_k \rangle_s + i\omega_{ks}^T \langle \Psi_k \rangle_s \right)$$

$$\therefore h_{sk} = \frac{\omega - \omega_{ks}^T}{\omega - k_{\parallel} m_{\parallel}} \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} J_0 \left(\frac{k_{\perp} v_{Ts}}{\Omega_s} \right) \left(\phi_k - \frac{m_{\parallel}}{c} A_{\parallel k} \right) \quad \dots (23)$$

これから粒子密度揺動 (断熱応答 + 非断熱部分 h_{sk} の寄与) と電流揺動を計算すると、

$$n_{sk}^{(p)} = -\frac{e_s n_s}{T_s} \phi_k + \int d^3v J_0 \left(\frac{k_{\perp} v}{\Omega_s} \right) h_{sk} = (-1 + W_{0s}) \frac{e_s n_s}{T_s} \phi_k - W_{1s} \frac{e_s n_s}{T_s} \frac{\omega}{k_{\parallel} c} A_{\parallel k}$$

$$j_{\parallel k}^{(p)} = e_s \int d^3v m_{\parallel} J_0 \left(\frac{k_{\perp} v}{\Omega_s} \right) h_{sk} = W_{1s} \frac{e_s^2 n_s}{T_s} \frac{\omega}{k_{\parallel}} \phi_k - W_{2s} \frac{e_s^2 n_s}{T_s} \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2 c} A_{\parallel k}$$

と表わせる。ここで、

$$W_{js} \equiv \int d^3v J_0^2 \left(\frac{k_{\perp} v}{\Omega_s} \right) \frac{\omega - \omega_{ks}^T}{\omega - k_{\parallel} m_{\parallel}} \frac{F_{Ms}}{n_s} \left(\frac{k_{\perp} v}{\omega} \right)^j$$

と記号を定義した。関数 W_{js} を一様温度 ($R/L_{Ts}=0$) の場合に具体的に計算すると、

$$W_{0s} = -I_{0s} \alpha_s Z(\alpha_s) \left(1 - \frac{\omega_{ks}}{\omega} \right), \quad W_{1s} = W_{2s} = W_{0s} - I_{0s} \left(1 - \frac{\omega_{ks}}{\omega} \right)$$

となる (別途記載)。これらの電荷密度揺動が等しい $\sum_s e_s n_s^{(p)} = 0$ とした準中性条件の式(15)

と、Ampère則(16)に代入すると、

$$\left\{ \begin{aligned} \left[\sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} (1 - W_{0s}) \right] \phi_k + \left[\sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} W_{1s} \right] \frac{\omega}{k_{\parallel} c} A_{\parallel k} &= 0 \\ \left[-\sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} W_{1s} \right] \phi_k + \left[\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp}^2}{4\pi} + \sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} W_{2s} \right] \frac{\omega}{k_{\parallel} c} A_{\parallel k} &= 0 \end{aligned} \right.$$

$\phi_k \neq 0, A_{\parallel k} \neq 0$ の非自明な解が存在するためには、

$$\left[\sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} (1 - W_{0s}) \right] \left[\frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp}^2}{4\pi} + \sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} W_{2s} \right] + \left[\sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} W_{1s} \right]^2 = 0$$

さらに、 $W_{1s} = W_{2s} = W_{0s} - I_{0s} \left(1 - \frac{\omega_{ks}}{\omega} \right)$ を用いて、展開して整理すると、

$$\sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} \left[1 - I_{0s} \left(1 - \frac{\omega_{ks}}{\omega} \right) \right] \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp}^2}{4\pi} + \left\{ \sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} \left[1 - I_{0s} \left(1 - \frac{\omega_{ks}}{\omega} \right) \right] - \frac{k_{\perp}^2 c^2}{\omega^2} \frac{k_{\perp}^2}{4\pi} \right\} \left[\sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} W_{1s} \right] = 0$$

$$\therefore \underbrace{\sum_s \frac{1}{k_{\perp}^2 \lambda_{Ds}^2} \left[1 - I_{0s} \left(1 - \frac{\omega_{ks}}{\omega} \right) \right]}_{\text{式(24)右辺}} + \underbrace{\left\{ \sum_s \frac{1}{k_{\perp}^2 \lambda_{Ds}^2} \left[1 - I_{0s} \left(1 - \frac{\omega_{ks}}{\omega} \right) \right] - 1 \right\}}_{\text{式(24)左辺の左側係数}} \underbrace{\left[\sum_s \frac{1}{k_{\perp}^2 \lambda_{Ds}^2} W_{1s} \right]}_{\text{式(24)左辺右側係数}} = 0$$

$$= -\sum_s I_{0s} [1 + \alpha_s Z(\alpha_s)] \left(1 - \frac{\omega_{ks}}{\omega} \right)$$

として分散関係式(24)が導出された。

速度空間積分の計算

式(24)の導出時に先送りした

$$W_{js} \equiv \int dM^3 \int_0^2 \left(\frac{k_{\perp} M_{\perp}}{\Omega} \right) \frac{\omega - \omega_{ks}^T}{\omega - k_{\parallel} M_{\parallel}} \frac{F_{Ms}}{n_s} \left(\frac{k_{\perp} M_{\perp}}{\omega} \right)^j$$

を計算する。一様温度($R/L_{Ts}=0$)の場合、反磁性ドリフト周波数 $\omega_{*s}^T = \omega_{*s}$ における粒子速度依存性がなくなり定数として扱うことができる。この時、

$$\begin{aligned} W_{0s} &= \frac{\omega - \omega_{*s}}{\sqrt{2} k_{\perp} v_{Ts}} \left(\frac{m_s}{2\pi T_s} \right)^{\frac{3}{2}} 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dM_{\parallel} \frac{\sqrt{2} k_{\perp} v_{Ts}}{\omega - k_{\parallel} M_{\parallel}} e^{-\frac{M_{\parallel}^2}{2v_{Ts}^2}} \int_0^{\infty} dv_{\perp} M_{\perp} \int_0^2 e^{-\frac{M_{\perp}^2}{2v_{Ts}^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2} v_{Ts}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\nu^2}}{\alpha_s - \nu} d\nu = v_{Ts}^2 I_0(k_{\perp}^2 \rho_{Ts}^2) e^{-k_{\perp}^2 \rho_{Ts}^2} \\ &= -\sqrt{2\pi} v_{Ts} Z(\alpha_s) \left(\frac{1}{\alpha_s} + 1 \right) = v_{Ts}^2 I_{0s} \quad (\text{式(27)より}) \\ &= -I_{0s} \alpha_s Z(\alpha_s) \left(1 - \frac{\omega_{*s}}{\omega} \right) \end{aligned}$$

と計算できる。続いて W_{1s} については

$$\frac{1}{\omega - k_{\parallel} M_{\parallel}} \frac{k_{\parallel} M_{\parallel}}{\omega} = -\frac{1}{\omega} + \frac{1}{\omega - k_{\parallel} M_{\parallel}}$$

より、

$$\begin{aligned} W_{1s} &= - \int dM^3 \int_0^2 \left(1 - \frac{\omega_{*s}}{\omega} \right) \frac{F_{Ms}}{n_s} + W_{0s} \\ &= -I_{0s} \left(1 - \frac{\omega_{*s}}{\omega} \right) + W_{0s} \end{aligned}$$

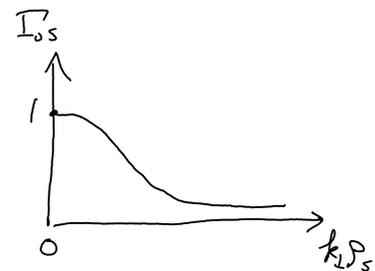
を得る。

(2.5節) 長波長近似

有限Larmor半径効果

$$I_{0s} = I_0(k_{\perp}^2 \rho_{Ts}^2) e^{-k_{\perp}^2 \rho_{Ts}^2}$$

について、 $k_{\perp} \rho_{Ts} \ll 1$ としてTaylor展開を適用すると (『岩波数学公式III 特殊関数』などを参照)、



$$\begin{aligned} I_0(bc) &= 1 + \frac{\gamma^2}{4} + \dots \\ e^{-\gamma} &= 1 - \gamma + \frac{\gamma^2}{2} + \dots \end{aligned}$$

と展開されるので、 $k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 \ll 1$ の1次までの近似として

$$I_{0i} = 1 - k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 + O(k_{\perp}^4 \rho_{Ti}^4), \quad I_{0e} = 1 + O(k_{\perp}^2 \rho_{Te}^2)$$

を得る。イオンについては有限Larmor半径効果を最低次で残している (Alfven波の伝搬に本質的であるイオン分極電流を担う) が、電子の有限Larmor半径効果は無視していることに相当する。

(2.5節) 低周波近似

比較的低周波の $v_{ti} \ll \frac{\omega}{k_{\parallel}} \ll v_{te}$ 程度の波について考える。

まず、イオンについては $\alpha_i = \frac{\omega}{\sqrt{2}v_{ti}k_{\parallel}} \gg 1$ より

$$Z(\alpha_i) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\nu^2}}{\nu - \alpha_i} d\nu = -\frac{1}{\alpha_i \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\nu^2}}{1 - \frac{\nu}{\alpha_i}} d\nu$$

$\exp(-\nu)$ の因子により、積分に寄与するのはおおよそ $|\nu| \leq 1$ 程度のオーダーであることを考慮すると、 $\nu/\alpha_i \ll 1$ の近似が成立し、

$$\begin{aligned} Z(\alpha_i) &\simeq -\frac{1}{\alpha_i \sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu^2} \left(1 + \frac{\nu}{\alpha_i} + \frac{\nu^2}{\alpha_i^2} + \frac{\nu^3}{\alpha_i^3} + \frac{\nu^4}{\alpha_i^4} + \dots \right) d\nu \\ &= -\frac{1}{\alpha_i} \left(1 + \frac{1}{2\alpha_i^2} + \frac{3}{4\alpha_i^4} + O(\alpha_i^{-6}) \right) \end{aligned}$$

となる。(※ここでは主値積分のみ考慮している)

続いて、電子については $\alpha_e = \frac{\omega}{\sqrt{2}v_{te}k_{\parallel}} \ll 1$ より、こちらもTaylor展開を用いて評価する。ついイオンと反対に α_e/ν を微小量として展開したくなるが、 ν は速度積分の変数であり $0 \leq |\nu| \leq 1$ 程度の範囲で小さな値を取りうることに注意する。代わりに $\eta = \nu - \alpha_e$ の変数変換を用いて、

$$Z(\alpha_e) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\nu^2}}{\nu - \alpha_e} d\nu = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\eta^2 - 2\alpha_e\eta - \alpha_e^2}}{\eta} d\eta$$

指数関数の肩の $\alpha_e \ll 1$ についてTaylor展開を適用し、

$$\begin{aligned} Z(\alpha_e) &\simeq \frac{e^{-\alpha_e^2}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\eta^2}}{\eta} \left(1 - 2\alpha_e\eta + \frac{(-2\alpha_e\eta)^2}{2} + \frac{(-2\alpha_e\eta)^3}{6} + \dots \right) d\eta \\ &= e^{-\alpha_e^2} \left(-2\alpha_e - \frac{2\alpha_e^3}{3} + O(\alpha_e^5) \right) \\ &\simeq \left(1 - \alpha_e^2 + O(\alpha_e^4) \right) \left(-2\alpha_e - \frac{2\alpha_e^3}{3} + O(\alpha_e^5) \right) \\ &= -2\alpha_e \left(1 - \frac{2}{3}\alpha_e^2 + O(\alpha_e^4) \right) \end{aligned}$$

の近似を得る。

以上を用いると、低周波の $v_{ti} \ll \frac{\omega}{k_{\parallel}} \ll v_{te}$ 程度の波に対して、

$$\begin{aligned} 1 + \alpha_e Z(\alpha_e) &\simeq 1 - 2\alpha_e^2 + O(\alpha_e^4) \simeq 1 \quad (\alpha_e \ll 1) \\ 1 + \alpha_i Z(\alpha_i) &\simeq 1 - 1 - \frac{1}{2\alpha_i^2} + O(\alpha_i^{-4}) \simeq 0 \quad (\alpha_i \gg 1) \end{aligned}$$

として、電子は断熱応答を仮定し、イオンの平行方向の運動を無視した近似が成立する。なお、イオンの有限の平行方向運動 $-1/(2\alpha_i^2)$ を残すと、これはイオンの磁力線方向の圧縮性に対応し、イオン音波の伝搬を記述する。

(3.2節) 分散関係式(2)の導出

第2章と同様、Vlasov方程式(1)より、イオン分布関数揺動の線形応答を導くと

$$h_{ik} = \frac{\omega - \omega_{*i}}{\omega - \omega_{Di} - k_{\parallel} v_{Ti}} \frac{e \phi_k}{T_i} J_{0i} F_{Mi}$$

より、準中性条件に代入すると式(2)を得る。第2章との違いは磁場ドリフト ω_{Di} の効果を残していることと、有限の温度勾配により反磁性ドリフト ω_{*i} に粒子速度依存性が残ることである。

(3.2節) 分散関係の流体近似式(3)の導出

長波長および流体近似 (熱速度が位相速度より小さい) の仮定として、

$$1 \gg \frac{k_{\parallel} v_{Ti}}{\omega} \sim O(\epsilon), \quad 1 \gg \frac{\omega_{Di}}{\omega} \sim k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 \sim O(\epsilon^2), \quad \omega \sim \omega_{*i}$$

のオーダリングを用いると、

$$\frac{1}{\omega - \omega_{Di} - k_{\parallel} v_{Ti}} = \frac{1}{\omega} \left(1 + \frac{k_{\parallel} v_{Ti}}{\omega} + \frac{\omega_{Di}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \right) + O(\epsilon^3)$$

この近似の下で式(2)の積分を計算すると、

$$\text{(式(2)左辺第3項)} = - \int dV^3 \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} \right) \left(1 + \frac{k_{\parallel} v_{Ti}}{\omega} + \frac{\omega_{Di}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}{\omega^2} \right) J_0^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} + O(\epsilon^3)$$

$$\omega_{*i} = \omega_{*i} \left[1 + \eta_i \left(\frac{m_i v_{Ti}^2}{2T_i} - \frac{3}{2} \right) \right]$$

$$\omega_{Di} = \hat{\omega}_{Di} \frac{m_i v_{Ti}^2 + \mu B}{2T_i} \quad (= z \hat{\omega}_{Di} = k_{\perp} \frac{2c T_i \mathbf{k} \times \mathbf{k} \cdot \nabla \mathbf{k}}{eB})$$

という粒子速度依存性を考慮すると、

$$\int dV^3 J_{0i}^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} = I_{0i} \approx 1 - k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2$$

$$\int dV^3 J_{0i}^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} v_{Ti}^{2n+1} = 0 \quad (M_{\parallel} = 1 \text{ に対し } z \text{ 奇数 } \frac{d}{dk_{\parallel}} \text{ 数 })$$

$$\int dV^3 J_{0i}^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} v_{Ti}^2 = v_{Ti}^2 I_{0i} \approx v_{Ti}^2 (1 - k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2) \quad (= z^2 I_{\nu s} = I_{\nu} (k_{\perp}^2 \rho_{Ts}^2) e^{-k_{\perp}^2 \rho_{Ts}^2})$$

$$\int dV^3 J_{0i}^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} v_{Ti}^4 = 3 v_{Ti}^4 I_{0i} \approx 3 v_{Ti}^4 (1 - k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2)$$

$$\int dV^3 J_{0i}^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} v_{\perp}^2 = 2 v_{Ti}^2 \left[(1 - k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2) I_{0i} + k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 I_{1i} \right] \approx 2 v_{Ti}^2 (1 - 2 k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2)$$

$$\int dV^3 J_{0i}^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} v_{Ti}^2 v_{\perp}^2 = 2 v_{Ti}^4 \left[(1 - k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2) I_{0i} + k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 I_{1i} \right] \approx 2 v_{Ti}^4 (1 - 2 k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2)$$

$$\int dV^3 J_{0i}^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} v_{\perp}^4 = 8 v_{Ti}^4 \left[(1 - 2 k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 + k_{\perp}^4 \rho_{Ti}^4) I_{0i} + \left(\frac{3}{2} k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 - k_{\perp}^4 \rho_{Ti}^4 \right) I_{1i} \right] \approx 8 v_{Ti}^4 (1 - 3 k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2)$$

の各次数の積分が現れる。

よって、式(2)の速度空間積分を陽に計算すると、

$$\begin{aligned}
 (\text{式(2)左辺第3項}) &= - \int d^3v \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega}\right) \left(1 + \frac{k_{\perp}^2 m_i}{\omega} + \frac{\omega_{Di}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2 v_i^2}{\omega^2}\right) \int_{0_i}^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} + O(\epsilon^3) \\
 &= \left[-1 + \frac{\omega_{*i}}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \eta_i\right)\right] \int d^3v \int_{0_i}^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} \left[1 + \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} \frac{v_i^2 + \frac{v_i^2}{2}}{2v_i^2} + \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} v_i^2\right] \\
 &\quad + \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega} \int d^3v \int_{0_i}^2 \frac{F_{Mi}}{n_0} \frac{v_i^2 + v_i^2}{2v_i^2} \left[1 + \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} \frac{v_i^2 + \frac{v_i^2}{2}}{2v_i^2} + \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} v_i^2\right] \\
 &= \left[-1 + \frac{\omega_{*i}}{\omega} \left(1 - \frac{3}{2} \eta_i\right)\right] \left[1 - k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 + \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2 v_i^2}{\omega^2}\right] \\
 &\quad + \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega} \left[\frac{3-5k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2}{2} + \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} \frac{5}{2} + \frac{k_{\parallel}^2 v_i^2}{\omega^2} \frac{5}{2}\right] + O(\epsilon^4) \\
 &= -1 + \frac{\omega_{*i}}{\omega} + \left[1 - \frac{\omega_{*i}(1+\eta_i)}{\omega}\right] \left[k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 - \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} - \frac{k_{\parallel}^2 v_i^2}{\omega^2}\right]
 \end{aligned}$$

よって、式(2)は、 $\omega_{*pi} = \omega_{*i}(1 + \eta_i)$ を用いて

$$\frac{T_i}{T_e} + \frac{\omega_{*i}}{\omega} + \left(1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega}\right) \left(k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 - \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} - \frac{k_{\parallel}^2 v_i^2}{\omega^2}\right) = 0$$

T_i/T_e で各項を割ると、音速 $c_s = \sqrt{T_e/m_i}$ かつ $\rho_s = \frac{c_s}{\Omega_i}$ を用いて、

$$1 + \frac{T_e \omega_{*i}}{T_i \omega} + \left(1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega}\right) \left(k_{\perp}^2 \rho_s^2 - \frac{T_e}{T_i} \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} - \frac{k_{\parallel}^2 c_s^2}{\omega^2}\right) = 0 \quad \text{--- (3)}$$

(3.2節) スラブITGモードの近似式(4)の導出

$$1 + \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{*i}}{\omega} + \left(1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega}\right) \left(k_{\perp}^2 \rho_s^2 - \frac{T_e}{T_i} \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} - \frac{k_{\perp}^2 c_s^2}{\omega^2} \right) = 0 \quad (3)$$

$\underbrace{\frac{\omega_{*i}}{\omega}}_{=0 (\nabla n=0)}$
 $\underbrace{\left(1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega}\right)}_{\frac{\omega_{*pi}}{\omega} \gg 1 (\text{急峻な } \nabla T_i)}$
 $\underbrace{\left(k_{\perp}^2 \rho_s^2 - \frac{T_e}{T_i} \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} - \frac{k_{\perp}^2 c_s^2}{\omega^2} \right)}_{=0 (\text{長波長}) = 0 (\text{直線磁場})}$

と近似し、 $\omega^3 = -k_{\perp}^2 c_s^2 \omega_{*pi} = k_{\perp}^2 c_s^2 |\omega_{*pi}|$ ($\because \omega_{*pi} < 0$ のとき)

また、 $\omega^{1/3} = 1$, $e^{\pm j \frac{2\pi}{3}} = -1$, $\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$ より、三つの根の内、不安定成長する解は

$$\omega = \left(k_{\perp}^2 c_s^2 |\omega_{*pi}| \right)^{1/3} \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

(3.2節) トロイダルITGモードの近似式(5)の導出

$$1 + \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{*i}}{\omega} + \left(1 - \frac{\omega_{*pi}}{\omega}\right) \left(k_{\perp}^2 \rho_s^2 - \frac{T_e}{T_i} \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} - \frac{k_{\perp}^2 c_s^2}{\omega^2} \right) = 0 \quad (3)$$

$= 0$ (トロイダルITGモードの仮定)

$$1 + k_{\perp}^2 \rho_s^2 + \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{*pi} \hat{\omega}_{Di}}{\omega^2} + \frac{T_e}{T_i} \frac{\omega_{*i} - \hat{\omega}_{Di}}{\omega} - k_{\perp}^2 \rho_s^2 \frac{\omega_{*pi}}{\omega} = 0$$

$\underbrace{\left(\omega_{*i} - \hat{\omega}_{Di} \right)}_{\ll |\omega_{*i}|} \ll |\omega_{*i}|$
 $\underbrace{k_{\perp}^2 \rho_s^2}_{\text{トロイダルITGモードの仮定}} \ll 1$
 $\underbrace{\frac{\omega_{*pi}}{\omega}}_{\text{無視}}$

よって無視

と近似すると、

$$\omega^2 = -\frac{T_e}{T_i} \frac{\hat{\omega}_{Di} \omega_{*pi}}{1 + k_{\perp}^2 \rho_s^2} \quad (5)$$

あるいは、もっと簡易的な見積もりは、長波長 $k_{\perp}^2 \rho_s^2 \rightarrow 0$ 、かつ、急峻なイオン温度勾配 $\omega_{*pi} \gg \omega_{*i}, \hat{\omega}_{Di}$ として、

$$\omega^2 = -\frac{T_e}{T_i} \hat{\omega}_{Di} \omega_{*pi}$$

(4.2節) ドリフト速度式(1)の変形

式(1)下段の表式から出発して、上段の表式となることを確認する。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{V}_{da} &= \frac{N_{\parallel}}{B} \left[\nabla \times \left(\frac{N_{\parallel}}{\Omega_a} \mathbf{B} \right) \right]_{\perp} \\
 &= \frac{N_{\parallel} m_a c}{e_a B} \mathbf{h} \times \left[\underbrace{\nabla \times (N_{\parallel} \mathbf{h})}_{\text{ここから}} \right] \quad \left(\because \mathbf{A}_{\perp} = \mathbf{h} \times \mathbf{A} \times \mathbf{h} \right) \\
 &= - \mathbf{h} \times (\nabla N_{\parallel} \times \mathbf{h}) - N_{\parallel} \mathbf{h} \times (\nabla \times \mathbf{h}) \\
 &\quad \left(\begin{array}{l} \text{ここで } \nabla \text{ は } \epsilon, \mu \text{ 固定の下での微分であるので、} \\ 0 = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(\frac{m_a N_{\parallel}^2}{2} + \mu \mathbf{B} + e_a \Phi \right) \\ = m_a N_{\parallel} \nabla N_{\parallel} + \mu \nabla B + e_a \nabla \Phi \\ \text{また } \mathbf{h} \times \nabla \times \mathbf{h} = \underbrace{(\nabla \mathbf{h}) \cdot \mathbf{h}}_{=0} - \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} = -\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} \\ = \frac{1}{m_a N_{\parallel}} (\mu \nabla_{\perp} B + e_a \nabla_{\perp} \Phi) + N_{\parallel} \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} \end{array} \right) \\
 &= \frac{c}{e_a B} \mathbf{h} \times \left(m_a N_{\parallel}^2 \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} + \mu \nabla_{\perp} B + e_a \nabla_{\perp} \Phi \right) \quad \text{--- (11)}
 \end{aligned}$$

(4.2節) 案内中心の運動方程式(13)-(14)

粒子の位置ベクトル \mathbf{r} を座標系 (u^1, u^2, u^3) で表したとき、その時間変化は

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{du^1}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} + \frac{du^2}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2} + \frac{du^3}{dt} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^3}$$

であるので、 du^i/dt は速度の反変成分に当たることが分かる。 $\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{du^i}{dt} \cdot \nabla u^i$

一方、案内中心の運動は、

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} = N_{\parallel} \mathbf{h} + \mathcal{V}_{da}$$

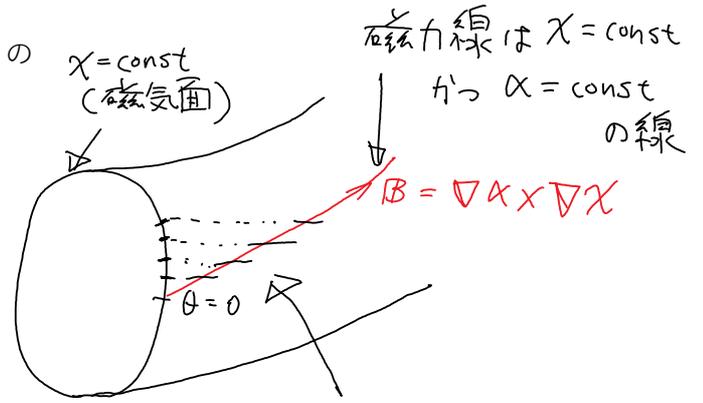
であったので、これを代入すると、

$$\begin{aligned}
 \frac{du^i}{dt} &= (N_{\parallel} \mathbf{h} + \mathcal{V}_{da}) \cdot \nabla u^i = \mathcal{V}_{da} \cdot \nabla u^i \quad \text{--- (14)} \quad \left(\because \mathbf{h} \cdot \nabla u^i = 0 \right) \\
 \frac{du^3}{dt} &= \underbrace{N_{\parallel} \mathbf{h} \cdot \nabla u^3}_{\sim O(N_{\parallel} \mathbf{h})} + \underbrace{\mathcal{V}_{da} \cdot \nabla u^3}_{\sim O\left(\frac{\rho}{R} N_{\parallel} \mathbf{h}\right)} \approx N_{\parallel} \mathbf{h} \cdot \nabla u^3 \quad \text{--- (13)}
 \end{aligned}$$

(4.2節) 粒子捕捉条件(15)についての補足説明

以下は磁気ミラーに関する常套の説明だが、念のため補足しておく。

平衡磁場は $\mathbf{B} = \nabla\alpha \times \nabla\chi$ で与えられるため、 (α, χ) の値を決めれば、磁力線軌道が一つ定まる (右図)。



電磁揺動が存在せず、平衡磁場下の荷電粒子の案内中心のドリフト運動では全エネルギー $\mathcal{E} = \frac{1}{2}m_a v_{\parallel}^2 + \mu B + e_a \Phi$ や磁気モーメント μ が保存する。

荷電粒子の軌道は最低次近似として磁力線に沿っている ($\alpha = \text{const.}, \chi = \text{const.}$) とすると、

$$\frac{1}{2}m_a v_{\parallel}^2(\theta) = \mathcal{E} - e_a \Phi - \mu B(\theta)$$

として、ポロイダル角が変化するにつれて磁力線方向速度 v_{\parallel}^2 が変化する。

χ, α 固定下の θ の変化は磁力線に沿った位置の変化。

例えばトカマクではトーラス内側に行くほど磁場が強くなるが、磁力線に沿った磁場強度の最大値 B_{max} が式(15)

$$\mathcal{E} - e_a \Phi - \mu B_{\text{max}} < 0$$

を満たす場合、荷電粒子はそのような深い位置まで侵入できない ($\frac{1}{2}m_a v_{\parallel}^2$ は負値を取りえない)。必然、

$$\frac{1}{2}m_a v_{\parallel}^2(\theta_{t1}) = \mathcal{E} - e_a \Phi - \mu B(\theta_{t1}) = 0$$

となるような角度 θ_{t1} までしか侵入できず、その点で磁気ミラーによる反射が起こる。

(4.2節) 式(16)の積分経路に関する説明

式(16)ではバウンス運動1周期での積分を行っている。

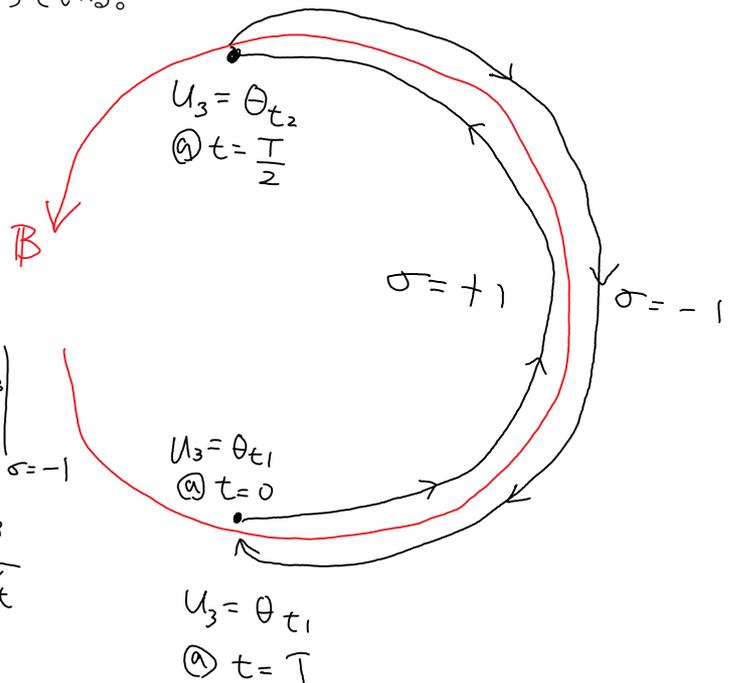
右図で言えば、時間積分

$$\oint dt = \int_0^T dt$$

であるが、行きと帰りでそれぞれ t と u_3 は1対1対応が成り立つので、

変数変換すると、

$$\begin{aligned} \oint dt &= \int_{\theta_{t1}}^{\theta_{t2}} \frac{1}{du^3/dt} du^3 \Big|_{\sigma=+1} + \int_{\theta_{t2}}^{\theta_{t1}} \frac{1}{du^3/dt} du^3 \Big|_{\sigma=-1} \\ &= \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \int_{\theta_{t1}}^{\theta_{t2}} \frac{du^3}{du^3/dt} = \int \frac{du^3}{du^3/dt} \end{aligned}$$



(4.2節) 断熱不変量(18)

解析力学では周期運動する座標 q^i がある場合にそれと共役な正準運動量 p_i を用いて、

$$J = \oint p_i dq^i \quad (\because i \text{ について和をとらない})$$

を断熱不変量と呼ぶのであった。今、周期運動する座標 $q^i = u^3$ であり、

$$p_3 = P \cdot \frac{\partial x}{\partial u^3} = P \cdot \frac{B}{B^3} = (m_a v + e_a A) \cdot \frac{B}{B^3} = m_a v_{||} \frac{B}{B^3} = m_a v_{||} h_3$$

$$(\because B = \nabla \times (u_1 \nabla u_2) \text{ かつ } A \cdot B = (u_1 \nabla u_2) \cdot \nabla u_1 \times \nabla u_2 = 0)$$

よって、 $J = \oint m_a v_{||} h_3 du^3$

(4.2節) 式(21)の導出

磁力線に沿った距離 dl を磁力線方向速度 $v_{||}$ で移動するのに費やす時間であるので、

$$\tau = \oint \frac{dl}{v_{||}}$$

は定義そのものと言える。一方、式(21)最右辺は

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\alpha, \chi, \varepsilon, \mu)} = \oint m_a \frac{\partial \mathcal{M}_{||}}{\partial \varepsilon} dl \quad (\because \oint dl \text{ は } (\alpha, \chi, \varepsilon, \mu) \text{ 固定で } \oint \text{ 積分})$$

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon = \frac{m_a m_{||}^2}{2} + \mu B + e_a \Phi \text{ を } \varepsilon \text{ 微分して,} \\ l = m_a m_{||} \frac{\partial \mathcal{M}_{||}}{\partial \varepsilon} \end{array} \right)$$

$$= \oint m_a \frac{l}{m_a m_{||}} dl = \oint \frac{dl}{v_{||}}$$

として、 τ と一致することが確認できる。

なお、解析力学の基本知識からも、断熱不変量のエネルギー微分は周期を与える。

$$\frac{\partial J}{\partial \varepsilon} = \oint \frac{\partial p_i}{\partial \varepsilon} dq^i$$

$$= \oint \frac{1}{(\partial H / \partial p_i)} dq^i \quad (\text{エネルギー} = \varepsilon = H \text{ ハミルトン} = P \cdot)$$

$$= \oint \frac{1}{dq^i / dt} dq^i \quad (\because \text{Hamilton の運動方程式 } \frac{dq^i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i})$$

$$= \oint dt \equiv \tau$$

(4.2節) バウンス1周期における磁気面ラベル方向の変位(22)の導出

手順は式(14)(16)と同様なので確認してみるとよい。

$$\begin{aligned}
 \frac{dU^2}{dt} &= \mathcal{V}_{da} \cdot \nabla U^2 = \frac{M_{||}}{B} \nabla \times \left(\frac{M_{||}}{\Omega_a} \mathbf{B} \right) \cdot \nabla U^2 \\
 &= \frac{M_{||}}{\Omega_a} \nabla \times (M_{||} \mathbf{h}_i) \cdot \nabla U^2 \\
 &= \frac{M_{||}}{\Omega_a} \nabla U^2 \cdot \nabla \times (M_{||} \mathbf{h}_i \nabla U^i) \\
 &= \frac{M_{||}}{\Omega_a} \nabla U^2 \cdot \nabla (M_{||} \mathbf{h}_i) \times \nabla U^i \\
 &= \frac{M_{||}}{\Omega_a} \left(\nabla U^2 \cdot \nabla U^i \frac{\partial M_{||} \mathbf{h}_i}{\partial U^i} \times \nabla U^3 + \nabla U^2 \cdot \nabla U^3 \frac{\partial M_{||} \mathbf{h}_i}{\partial U^3} \times \nabla U^i \right) \\
 &= \frac{M_{||}}{\Omega_a \sqrt{g}} \left(\frac{\partial (M_{||} \mathbf{h}_i)}{\partial U^3} - \frac{\partial (M_{||} \mathbf{h}_3)}{\partial U^i} \right)
 \end{aligned}$$

これを用いて、

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathcal{X} = \Delta U^2 &= \int \frac{dU^2/dt}{dU^3/dt} dU^3 \\
 &= \int \frac{dU^3}{\Omega_a \sqrt{g} h_i^3} \left(\frac{\partial (M_{||} \mathbf{h}_i)}{\partial U^3} - \frac{\partial (M_{||} \mathbf{h}_3)}{\partial U^i} \right) \\
 &= - \frac{m_a c}{e_a} \frac{\partial}{\partial U^i} \left(\int M_{||} \mathbf{h}_3 dU^3 \right) = - \frac{c}{e_a} \frac{\partial J}{\partial U^i} = - \frac{c}{e_a} \frac{\partial J}{\partial \alpha} \quad \text{--- (22)}
 \end{aligned}$$

(4.2節) 式(26)の確認

J は定義より $(\alpha, \mathcal{X}, \mathcal{E}, \mu)$ の関数である。粒子軌道に沿って $\alpha(t), \mathcal{X}(t)$ は時間依存するため、暗に J も時間依存するが、バウンス平均した J は時間変化しないことを確認する。連鎖律より、

$$\frac{dJ}{dt} = \frac{\partial J}{\partial \alpha} \frac{d\alpha}{dt} + \frac{\partial J}{\partial \mathcal{X}} \frac{d\mathcal{X}}{dt} + \underbrace{\frac{\partial J}{\partial \mathcal{E}} \frac{d\mathcal{E}}{dt}}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial J}{\partial \mu} \frac{d\mu}{dt}}_{=0}$$

バウンス平均(u^3 積分)を行うと」

$$\left\langle \frac{dJ}{dt} \right\rangle_h = \frac{\partial J}{\partial \alpha} \left\langle \frac{d\alpha}{dt} \right\rangle_h + \frac{\partial J}{\partial \mathcal{X}} \left\langle \frac{d\mathcal{X}}{dt} \right\rangle_h = \frac{e_a}{c} \left(- \frac{\Delta \mathcal{X} \Delta \alpha}{\tau} + \frac{\Delta \alpha \Delta \mathcal{X}}{\tau} \right) = 0$$

(4.2節) 大アスペクト比軸対称トーラスにおける縦の断熱不変量(44)の導出

縦の断熱不変量の定義は $(\alpha, \chi, \theta, \varepsilon, \mu)$ 系で式(18)

$$J = \oint m v_{\parallel} dl = \oint m v_{\parallel} \frac{d\theta}{R} \Big|_{(\alpha, \chi, \theta, \varepsilon, \mu)}$$

であり、速度空間座標を取り直して、 $(\alpha, \chi, \theta, w, \lambda)$ 系としてもやはり θ に対するその他の変数は独立なので、

$$J = \oint m v_{\parallel} \frac{d\theta}{R} \Big|_{(\alpha, \chi, \theta, w, \lambda)}$$

捕捉粒子の磁力線平行方向速度 v_{\parallel} の座標依存性を陽に書くと、式(40),(43)を用いて

$$v_{\parallel}(r, \theta, w, \lambda) = \sigma v_{(w)} \sqrt{2\lambda B_0 \varepsilon(r) \left[k^2(r, \lambda) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]} \quad \dots \text{捕捉粒子のとき}$$

また、

$$v^{\theta} = \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \theta}{B} = \frac{(B_p/r)}{B} \approx \frac{1}{2R} + O(\varepsilon)$$

これらを代入すると、

$$J = 2R \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma \int_{-\theta_t}^{\theta_t} m_a \sigma v \sqrt{2\lambda B_0 \varepsilon \left[k^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]} d\theta$$

$$= 4 \cdot 2R m_a v \sqrt{2B_0 \varepsilon} \int_0^{\theta_t} \sqrt{k^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta$$

$$\left(\begin{array}{l} \sum_{\sigma} \sigma^2 = \sum_{\sigma} 1 = 2 \\ \text{よび上下対称性} \\ \int_{-\theta_t}^{\theta_t} d\theta = 2 \int_0^{\theta_t} d\theta \end{array} \right)$$

$$\left(\begin{array}{l} u = \frac{1}{k} \sin \frac{\theta}{2} \text{ と置換して } \frac{du}{d\theta} = \frac{1}{2k} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2k} \sqrt{1 - k^2 u^2} \\ \therefore d\theta = \frac{2k}{\sqrt{1 - k^2 u^2}} du \quad \begin{array}{l} \theta \mid 0 \rightarrow \theta_t \\ u \mid 0 \rightarrow 1 \end{array} \end{array} \right)$$

$$= 8 \cdot 2R m_a v \sqrt{2B_0 \varepsilon} \int_0^1 k^2 \frac{\sqrt{1 - u^2}}{\sqrt{1 - k^2 u^2}} du$$

$$= 8 \cdot 2R m_a v \sqrt{2B_0 \varepsilon} \int_0^1 \left[\frac{\sqrt{1 - k^2 u^2}}{\sqrt{1 - u^2}} - (1 - k^2) \frac{1}{\sqrt{(1 - u^2)(1 - k^2 u^2)}} \right] du$$

$$= 8 \cdot 2R m_a v \sqrt{2B_0 \varepsilon} \left[E(k) - (1 - k^2) K(k) \right] \quad \text{--- (44)}$$

ここで、完全楕円積分の定義式(45)を用いた。

(4.2節) 式(48)の導出

バウンス運動1周期でのトロイダル角の変化は式(16)

$$\Delta\alpha = \frac{c}{e_a} \frac{\partial J}{\partial \chi} \Big|_{(\alpha, \chi, \varepsilon, \mu)} = \frac{c g}{e_a r B_0} \frac{\partial J}{\partial r} \Big|_{(\alpha, r, w, \mu)} - \frac{c g}{r B_0} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial J}{\partial w}$$

であり、径電場が無い場合は第2項は無視できる。大アスペクト比軸対称トーラスにおける縦の断熱不変量の陽な表式(44)を用いて

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &= \frac{c g}{e_a r B_0} \frac{\partial}{\partial r} \Big|_{(\alpha, r, w, \mu)} \underbrace{\delta m_a g R w \sqrt{2\lambda B_0 \varepsilon}}_{r \text{依存}} \left[E(k) - (1-k^2)K(k) \right] \\ &= \frac{\delta m_a c g R w \sqrt{2\lambda B_0}}{e_a r B_0} \left\{ \left(\frac{\partial g}{\partial r} \sqrt{\varepsilon} + g \frac{\partial \sqrt{\varepsilon}}{\partial r} \right) \left[E - (1-k^2)K \right] \right. \\ &\quad \left. + g \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial k^2}{\partial r} \frac{\partial}{\partial k^2} \left[E - (1-k^2)K \right] \right\} \quad \left(\begin{array}{l} \text{式(46)(47)} \\ \text{を用いて} \end{array} \right) \\ &= \frac{\delta m_a c g R w \sqrt{2\lambda B_0}}{e_a r B_0} \left\{ \left(\frac{g \delta \varepsilon \sqrt{\varepsilon}}{r} + \frac{g \sqrt{\varepsilon}}{2r} \right) \left[E - (1-k^2)K \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{g \sqrt{\varepsilon}}{r} \left(\frac{1}{2} - k^2 \right) \left[\frac{E-K}{2k^2} + K - (1-k^2) \frac{1}{2k^2} \left(\frac{E}{1-k^2} - K \right) \right] \right\} \\ &= \frac{4\sqrt{2} m_a c g^2 R w \sqrt{\lambda B_0 \varepsilon}}{e_a r^2 B_0} \left\{ 2\delta \left[E - (1-k^2)K \right] \right. \\ &\quad \left. + E - (1-k^2)K + \left(\frac{1}{2} - k^2 \right) K \right\} \quad \left(\lambda B_0 \approx 1 \text{ の近似を用いて} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{2} m_a c g^2 R w}{e_a B_0 r \sqrt{\varepsilon}} \left\{ 2\delta \left[E - (1-k^2)K \right] + E - \frac{K}{2} \right\} \quad \text{--- (48)} \end{aligned}$$

(4.2節) 式(50)の導出

バウンス運動の周期は式(21)より、

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{\partial J}{\partial \varepsilon} \Big|_{(\alpha, \chi, \varepsilon, \mu)} = \frac{\partial J}{\partial w} \Big|_{(\alpha, r, w, \mu)} = \frac{\partial}{\partial w} \delta m_a g R w \sqrt{2\lambda B_0 \varepsilon} \left[E(k) - (1-k^2)K(k) \right] \\ &\quad \underbrace{w \sqrt{\lambda}}_{= \sqrt{\frac{2\mu}{m_a}} \dots w\text{-indep}} \quad \underbrace{\varepsilon}_{w \text{依存}} \\ &= \delta m_a g R w \sqrt{2\lambda B_0 \varepsilon} \frac{\partial k^2}{\partial w} \frac{\partial}{\partial k^2} \left[E - (1-k^2)K \right] \\ &= \delta m_a g R w \sqrt{2\lambda B_0 \varepsilon} \frac{1}{2w\varepsilon} \frac{K}{2} \quad \left(\begin{array}{l} \text{式(46)(47)を用いて} \end{array} \right) \\ &= \frac{4\sqrt{2} g R}{w \sqrt{\varepsilon}} K \quad \text{--- (50)} \end{aligned}$$

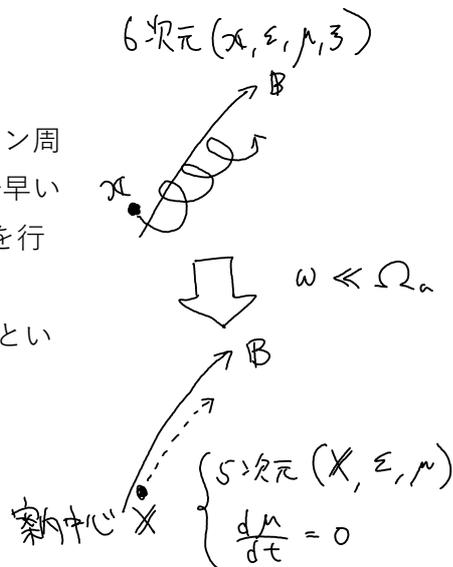
(4.2節) 4.2節における捕捉粒子の運動の解析に関する振り返り

式の導出を丁寧に追うことは、導出上の仮定や理論の適用範囲を理解するために大事だが、どんな見通しを持って計算していたか忘れてしまった読者もいるかもしれないので、ここで少し4.2節の俯瞰的な振り返りを行ってみよう。

そもそも、荷電粒子のLorentz力による運動は6次元位相空間 $(x, \varepsilon, \mu, \xi)$ で記述されていた。これに対し、種々のオーダリングを導入し、摂動論に基づいて運動を簡約化したのが案内中心またはバウンス中心のドリフト運動方程式である。

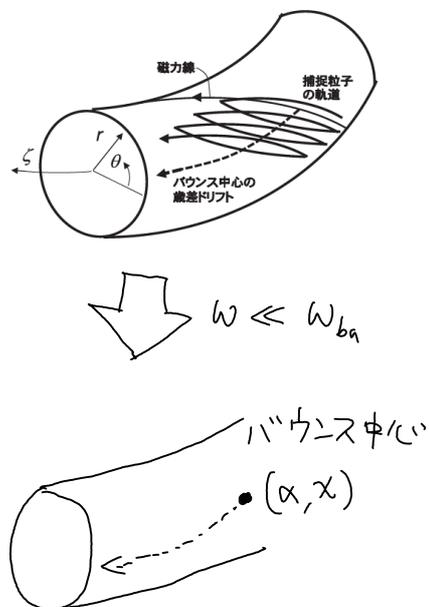
➤ 案内中心のドリフト運動方程式の導出においては、

- オーダリング：ジャイロ位相 ξ の変化するサイクロトロン周波数 Ω_a が、考えている現象の時間スケール ω より十分早いという条件の下で、ジャイロ位相平均（あるいは座標変換）を行うことで、
- ジャイロ位相 ξ についての依存性を除去した、 (X, ε, μ) という5次元位相空間での案内中心の運動方程式を導いた。また、依存性を持たない対称な座標系 ξ の存在は、Noetherの定理によって保存量の存在を意味し、
- 磁気モーメントが運動の恒量 $d\mu/dt = 0$ となる。



➤ バウンス中心のドリフト運動方程式の導出においては、案内中心 (X, ε, μ) の運動方程式よりも低周波を考慮して更なる簡単化を施す。

- オーダリング：捕捉粒子について磁力線方向座標 θ の変化するバウンス周波数 ω_{ba} が、考えている現象の時間スケール ω より十分早いという条件の下で、バウンス平均を行うことで、
- 磁力線方向座標 θ についての依存性を除去した、 $(\alpha, \chi, \varepsilon, J)$ という4次元位相空間でのバウンス中心の運動方程式を導いた。このとき、
- 縦の断熱不変量が運動の恒量 $dJ/dt = 0$ となる。



磁力線に沿った位置情報は記述できず、ドリフトによる磁気面ラベル方向の変化 $\langle d\chi/dt \rangle_b$ と磁力線ラベルの変化 $\langle d\alpha/dt \rangle_b$ という実空間2次元で記述される。

(4.3節) 捕捉電子についてバウンス平均されたVlasov方程式(63)の導出

まず、バウンス平均操作が磁力線方向移流演算子に対する annihilator であることを確認する。

$$\begin{aligned}
 \langle v_{\parallel} \hat{b} \cdot \nabla h \rangle_h &= \frac{1}{\tau} \oint (v_{\parallel} \hat{b} \cdot \nabla h) dt \\
 &= \frac{1}{\tau} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{\theta_{t_1}}^{\theta_{t_2}} (v_{\parallel} \hat{b} \cdot \frac{\partial h}{\partial \theta}) \frac{d\theta}{v_{\parallel} \hat{b} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial t}} \\
 &= \frac{1}{\tau} \sum_{\sigma=\pm 1} \sigma [h(\theta_{t_2}, \sigma) - h(\theta_{t_1}, \sigma)] \\
 &= \frac{1}{\tau} \left\{ h(\theta_{t_2}, \sigma=+1) - h(\theta_{t_1}, \sigma=+1) \right. \\
 &\quad \left. - h(\theta_{t_2}, \sigma=-1) + h(\theta_{t_1}, \sigma=-1) \right\} \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

ここで、捕捉粒子に関する境界条件(61)を用いた。

電子のVlasov方程式(56)において、電子の磁力線方向の運動が速いために、磁力線方向移流のみ大きいというオーダーリングを用いると、電子分布関数揺動を $h_e = h_0 + h_1 + \dots$ と展開して、最低次の式より、

$$v_{\parallel} \hat{b} \cdot \nabla h_0 = 0 \quad h_0 = \bar{h}_0(\varepsilon, \mu) \quad \dots \quad \theta \text{ に依らず}$$

1次の式より、

$$-i(\omega - \omega_{De}) \bar{h}_0 + v_{\parallel} \hat{b} \cdot \nabla h_1 = -i(\omega - \omega_{*e}^T) f_{Me} \frac{e_e \phi_k}{T_e} - \nu_{eff} \bar{h}_0$$

バウンス平均することで $v_{\parallel} \hat{b} \cdot \nabla h_1$ を除去することができ、 h_0 までで閉じた式を得る。

$$-i(\omega - \langle \omega_{De} \rangle) \bar{h}_0 = -i(\omega - \omega_{*e}^T) f_{Me} \frac{e_e \langle \phi_k \rangle}{T_e} - \nu_{eff} \bar{h}_0 \quad \text{--- (63)}$$

ここで、 $\bar{h}_0, \omega_{*e}^T, f_{Me}$ などの量は θ 依存性を持たないためバウンス平均が作用しないことに注意する。

(4.3節) (66)式の導出

イオン密度揺動については、第2,3章でも行った計算とほぼ同様に求まる。式(65)を用いて、

$$\begin{aligned} \delta n_i &= -n_0 \frac{e\phi_{\mathbf{k}_\perp}}{T_i} + \int d\nu^3 h_{i\mathbf{k}_\perp} J_0(\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_i) \\ &= -n_0 \frac{e\phi_{\mathbf{k}_\perp}}{T_i} + \frac{e\phi_{\mathbf{k}_\perp}}{T_i} \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega}\right) \underbrace{\int f_{M_i} J_0^2 d\nu^3}_{=n_0 I_0} - \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega} \underbrace{\int \left(\frac{m_i \nu^2}{2T_i} - \frac{3}{2}\right) f_{M_i} J_0^2 d\nu^3}_{=n_0 k_\perp^2 \rho_{Ti}^2 (I_{Ti} - I_{0i})} \\ &= -n_0 e\phi_{\mathbf{k}_\perp} \left[\frac{1}{T_i} - \frac{1}{T_i} \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega}\right) I_0 + \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega} h_i (I_{Ti} - I_{0i}) \right] \end{aligned}$$

電子密度揺動についても、式(64)を用いて、

$$\begin{aligned} \delta n_e &= n_0 \frac{e\phi_{\mathbf{k}_\perp}}{T_e} + \int d\nu^3 h_{e\mathbf{k}_\perp} J_0(\mathbf{k}_\perp \mathbf{v}_e) \\ &= n_0 \frac{e\phi_{\mathbf{k}_\perp}}{T_e} + \frac{n_0 e}{T_e} \int_{tr} d\nu^3 f_{M_e} \frac{\phi_{\mathbf{k}_\perp}}{\omega - \bar{\omega}_{De} + i\nu_{eff,e}} \frac{\omega - \omega_{*e}}{\omega - \bar{\omega}_{De} + i\nu_{eff,e}} \end{aligned}$$

よって、準中性条件 $\delta n_e - \delta n_i = 0$ に代入し、両辺を $n_0 e/T_e$ で割ると式(66)を得る。ただし、水素プラズマにおける電子・イオン反磁性ドリフトの関係

$$\frac{T_e}{T_i} \omega_{*i} = -\omega_{*e}$$

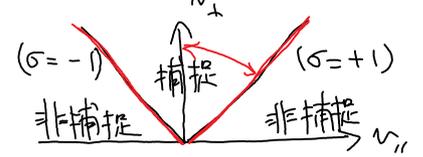
を用いた。

(4.3節) 式(67)の導出

式(66)における捕捉電子の積分領域 (右図または式(35)) については、

$$\begin{aligned} \int_{tr} d\nu^3 &= \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{tr} d\omega d\lambda d\bar{z} \frac{\omega B}{m_e^2 |\nu_{\parallel}|} \quad (\because \nu_{\parallel} = \sigma v \sqrt{1-\lambda B}) \\ &= \pi \sum_{\sigma=\pm 1} \int_{tr} d\omega d\lambda \frac{\omega B}{m_e \sqrt{1-\lambda B}} \quad (d\omega = m_e v dv) \\ &= \pi \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} v^2 dv \int_{\frac{1}{B_{\max}}}^{\frac{1}{B_{\theta}}} \frac{B d\lambda}{\sqrt{1-\lambda B}} \end{aligned}$$

あるポロイド角 \$\theta\$ での
捕捉粒子境界



$$\mu B_{\theta} \leq \frac{m v_{\perp}^2}{2} + \mu B_{\theta} \leq \mu B_{\max}$$

$$\Leftrightarrow \mu B_{\theta} \leq \omega \leq \mu B_{\max}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{B_{\max}} \leq \lambda \leq \frac{1}{B_{\theta}}$$

— 式(35)

であり、さらに大アスペクト比軸対称トラスにおける捕捉パラメータ \$\kappa\$ を用いて表わすと

$$\kappa^2 = \frac{1 - \lambda B_{\theta} (1 - \epsilon)}{2 \lambda B_{\theta} \epsilon}$$

$$2\kappa \frac{d\kappa}{d\lambda} = - \frac{1}{2 \lambda^2 B_{\theta} \epsilon}$$

$$\therefore d\lambda = -4 \lambda^2 B_{\theta} \epsilon \kappa d\kappa \quad \begin{array}{c|c} \lambda & \frac{1}{B_{\max}} \rightarrow \frac{1}{B_{\theta}} \\ \kappa & 1 \rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{array}$$

の変数変換と、

$$1 - \lambda B = 2 \lambda B_{\theta} \epsilon \left[\kappa^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad \dots \text{式(40) と同等の変形}$$

という関係式を用いて、

$$\begin{aligned} \int_{tr} d\nu^3 &= \pi \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} v^2 dv \int_1^{\sin\frac{\theta}{2}} \frac{B}{\sqrt{2 \lambda B_{\theta} \epsilon \left[\kappa^2 - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]}} (-4 \lambda^2 B_{\theta} \epsilon \kappa d\kappa) \\ &\simeq 2\pi \sqrt{2\epsilon} \sum_{\sigma=\pm 1} \int_0^{\infty} v^2 dv \int_{\sin\frac{\theta}{2}}^1 \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}}} \quad \left(\because \lambda B \sqrt{\lambda B_{\theta}} \simeq 1 \text{ の近似} \right) \\ &\hspace{15em} \text{を用いた。} \end{aligned}$$

— (67)

もし被積分関数に \$\kappa\$ 依存性が無い場合は \$\kappa\$ 積分は

$$\int_{\sin\frac{\theta}{2}}^1 \frac{\kappa}{\sqrt{\kappa^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}}} d\kappa = \left[\sqrt{\kappa^2 - \sin^2\frac{\theta}{2}} \right]_{\kappa=\sin\frac{\theta}{2}}^{\kappa=1} = \sqrt{1 - \sin^2\frac{\theta}{2}}$$

として簡単に計算できる。さらに、式(70)では \$\theta \ll 1\$ として 1 で近似している。

(4.4節) 式(74)の近似解(75),(77)の導出

式(74)に対し、 $\omega_r \gg \gamma, \sqrt{\epsilon} \ll 1$ の近似より、最低次の式、

$$1 + \frac{T_e}{T_i} - \left(\frac{T_e}{T_i} + \frac{\omega_{*e}}{\omega_r} \right) I_0 - \eta_i \frac{\omega_{*e}}{\omega_r} \ell_i (I_i - I_0) = 0$$

を解いて実周波数の式(75)を得る。続いて、式(74)に対して、右辺はPlemeljの公式(76)を用い、左辺には

$$\frac{1}{\omega} = \frac{1}{\omega_r + i\gamma} = \frac{1}{\omega_r} - \frac{i\gamma}{\omega_r^2} + O(\sqrt{\epsilon}^2)$$

の展開を用いて、1次オーダーまでの式について、虚部を取ると、 $(N^2 dN \rightarrow \frac{N}{m} dW)$

$$\frac{\omega_{*e}\gamma}{\omega_r^2} I_0 + \eta_i \frac{\omega_{*e}\gamma}{\omega_r^2} \ell_i (I_i - I_0) = -\frac{4\pi^2}{n_0} \sqrt{2\epsilon} \int_0^\infty v^2 dv f_{Me}(\omega_r - \omega_{*e}^T) \delta(\omega_r - \bar{\omega}_{De0})$$

この内、左辺は $\frac{1}{\omega_r}$ に式(75)を代入して、

$$(\text{左辺}) = \left[1 + \frac{T_e}{T_i} (1 - I_0) \right] \frac{\gamma}{\omega_r}$$

右辺は、 $\delta(\omega_r - \bar{\omega}_{De0}) = \delta(\omega_r - \omega_{Ge} W / T_e) = (T_e / \omega_{Ge}) \delta(W - T_e \omega_r / \omega_{Ge})$, $dv = dW / m v$ より、

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= \frac{4\pi^2}{n_0} \sqrt{2\epsilon} \int_0^\infty dW \frac{N}{m} f_{Me}(\omega_{*e}^T - \omega_r) \frac{T_e}{\omega_{Ge}} \delta\left(W - \frac{T_e \omega_r}{\omega_{Ge}}\right) \quad \left(W \rightarrow \frac{T_e \omega_r}{\omega_{Ge}} \text{と置く}\right) \\ &= \frac{4\pi^2}{n_0} \sqrt{2\epsilon} \frac{1}{m_e} \sqrt{\frac{2T_e \omega_r}{m_e \omega_{Ge}}} n_0 \left(\frac{m_e}{2\pi T_e}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega_r}{\omega_{Ge}}} \left[\omega_{*e} \left\{ 1 + \eta_e \left(\frac{\omega_r}{\omega_{Ge}} - \frac{3}{2} \right) \right\} - \omega_r \right] \frac{T_e}{\omega_{Ge}} \\ &= 2\sqrt{2\pi\epsilon} \left(\frac{\omega_r}{\omega_{Ge}} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\omega_r}{\omega_{Ge}}} \left[\frac{\omega_{*e}}{\omega_r} \left\{ 1 + \eta_e \left(\frac{\omega_r}{\omega_{Ge}} - \frac{3}{2} \right) \right\} - 1 \right] \end{aligned}$$

として式(77)が導かれる。

(4.5節) 式(87)の近似解(88),(89)の導出

式(87)に対し、 $\omega_r \gg \gamma, \sqrt{\epsilon} \ll 1$ の近似より、最低次の式、

$$1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega_r} = 0 \quad \therefore \omega_r = \omega_{*e} \quad \text{--- (88)}$$

続いて、

$$\frac{1}{\omega} \simeq \frac{1}{\omega_r} - i \frac{\gamma}{\omega_r^2} + O\left(\frac{\gamma^2}{\omega_r^2}\right)$$

$$\frac{1}{\omega + i\gamma_{\text{eff}}} \simeq -i \frac{1}{\gamma_{\text{eff}}} + O\left(\frac{\omega}{\gamma_{\text{eff}}}\right)$$

の近似を用いて、式(87)の虚部を取ると、

$$\frac{\omega_{*e} \gamma}{\omega_r^2} = - \frac{4\pi}{n_0} \sqrt{2\epsilon} \int_0^\infty dv v^2 f_{Me} \frac{\omega_r - \omega_{*e}^T}{\gamma_{\text{eff}}}$$

$$\gamma = \omega_{*e} \frac{4\pi}{n_0} \sqrt{2\epsilon} \int dv v^2 f_{Me} \frac{\omega_{*e}^T - \omega_{*e}}{\gamma_{\text{eff}}}$$

$$= \epsilon^{\frac{3}{2}} \frac{\omega_{*e}^2}{\gamma_e} \eta_e \frac{4\pi\sqrt{2}}{n_0} \int dv v^2 f_{Me} \left(\frac{m_e v^2}{2T} - \frac{3}{2} \right)$$

$$\sim \epsilon^{\frac{3}{2}} \frac{\omega_{*e}^2}{\gamma_e} \eta_e \quad \text{--- (89)}$$

(5.3.2節) 式(23)(24)の導出

速度空間積分(21)の電子に対する近似式(22)を用いると、 $m=1$ について、

$$\begin{aligned}
 P_{1e} &= -\frac{1}{N_{te} k_{||} T_e} \int d\nu^3 F_{Me}(\omega - \omega_{*e}) \\
 &= -\frac{1}{N_{te} k_{||} T_e} (\omega - \omega_{*e}) \underbrace{\int \frac{e^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{3/2}} d\nu^3}_{=1} - \omega_{*e} \eta_e \underbrace{\int \left(\varepsilon - \frac{3}{2}\right) \frac{e^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{3/2}} d\nu^3}_{= \int \left(\frac{N_x^2}{2} + \frac{N_y^2}{2} + \frac{N_z^2}{2}\right) \frac{e^{-\varepsilon}}{(2\pi)^{3/2}} d\nu^3 - \frac{3}{2}} \\
 &= -\frac{\omega - \omega_{*e}}{N_{te} k_{||} T_e} \quad \text{--- (23)}
 \end{aligned}$$

$\left(\begin{array}{l} \text{通常の Gauss 積分} \\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \end{array} \right)$

$m=2$ については近似式(25)を用いて、

$$\begin{aligned}
 P_{2e} &= -\frac{1}{N_{te} k_{||} T_e} \int d\nu^3 F_{Me}(\omega - \omega_{*e}) \underbrace{\nu_{||}}_{\nu_{||} = \omega / \hat{\omega}_{De}} \left(1 + \frac{\omega - \omega_{De}}{N_{te} k_{||} \nu_{||}} \right) \\
 &= \frac{1}{N_{te}^2 k_{||}^2 T_e} \int d\nu^3 F_{Me}(\omega - \omega_{*e}) (\omega - \omega_{De}) \quad \left(\because \hat{\omega}_{De} = \frac{\hat{\omega}_{De}}{2} \left(N_{||}^2 + \frac{N_{\perp}^2}{2} \right) \right) \\
 &= -\frac{1}{N_{te}^2 k_{||}^2 T_e} \left[\omega(\omega - \omega_{*e}) - \frac{\hat{\omega}_{De}}{2} (\omega - \omega_{*e}) \int \left(N_{||}^2 + \frac{N_{\perp}^2}{2} \right) F_{Me} d\nu^3 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\hat{\omega}_{De}}{2} \omega_{*e} \eta_e \int \left(N_{||}^2 + \frac{N_{\perp}^2}{2} \right) \left(\frac{N^2}{2} - \frac{3}{2} \right) F_{Me} d\nu^3 \right] \\
 &= -\frac{1}{N_{te}^2 k_{||}^2 T_e} \left[\omega(\omega - \omega_{*e}) - \hat{\omega}_{De} (\omega - \omega_{*e}) + \hat{\omega}_{De} \omega_{*e} \eta_e \right] \\
 &= -\frac{1}{N_{te}^2 k_{||}^2 T_e} \left[\omega(\omega - \omega_{*e}) - \hat{\omega}_{De} (\omega - \omega_{*e}) \right] \quad \text{--- (24)} \quad \left(\because \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{4a^2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \right)
 \end{aligned}$$

なお、異なるオーダーまでの近似式(22)(25)を都度勝手に使い分けているわけではなく、電子速度が速い $v_{te} \gg \omega/k_{||}$ というオーダーリングに基づく近似だったことを思い出すと、分散関係式(19)

(20)には $P_{0e}, v_{te} P_{1e}, v_{te}^2 P_{2e}$ の形でのみ現れるため、すべて近似式(25)に基づいて計算して、

$$P_{0e} = \mathcal{O}(v_{te}^{-2}), v_{te} P_{1e} = -\frac{(\omega - \omega_{*e})}{k_{||} T_e} + \mathcal{O}(v_{te}^{-2}), v_{te}^2 P_{2e} = -\frac{[\omega(\omega - \omega_{*e}) - \hat{\omega}_{De}(\omega - \omega_{*e})]}{k_{||}^2 T_e} + \mathcal{O}(v_{te}^{-2})$$

として、すべて同じオーダー $\mathcal{O}(1)$ で評価している。

(5.3.3節) 式(29)のオーダリング

イオンの流体近似において、磁力線方向圧縮項 $k_{\parallel} v_{\parallel}$ は磁場ドリフト項より1次大きく、

$$\frac{k_{\parallel} N_{\parallel}}{\omega} \sim O(\epsilon), \quad \frac{\omega_{D_i}}{\omega} \sim O(\epsilon^2), \quad \omega \sim \omega_{*i}$$

のオーダリングを用いることで、 $k_{\parallel}^2 v_{\parallel}^2$ という2次の項を残しているのは第3章と同様である。これは磁力線方向移流の圧縮性による密度変動を生み出す項で、スラブITGモードの不安定化に本質的であった。

(5.3.3節) 式(31)(32)の導出

これもGauss積分を用いて丁寧に計算すればよい。

$$\left(\begin{array}{l} \int F_M dv^3 = 1, \quad \int M_{\parallel}^2 F_M dv^3 = 1, \quad \int M_{\parallel}^4 F_M = 3 \\ \int M_{\parallel}^6 F_M = 15, \quad \int M_{\perp}^2 F_M dv^3 = 2, \quad \int M_{\perp}^4 F_M dv^3 = 8 \end{array} \right)$$

ただし、イオン平行方向速度については位相速度に比べて1次小さい $v_{\parallel} \sim O(\epsilon)$ ことに注意する。m=0については式(30)を用いて、

$$\begin{aligned} P_{0i} &= \int dv^3 F_{M_i} \left[\left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega} \right) \left(1 + \frac{\hat{\omega}_{D_i}}{\omega} \frac{2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{4} + \frac{k_{\parallel} M_{\parallel}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2 M_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2 M_{\perp}^2}{2\Omega_i^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega} \frac{M^2}{2} \left(1 + \frac{\hat{\omega}_{D_i}}{\omega} \frac{2v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2}{4} + \frac{k_{\parallel} M_{\parallel}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2 M_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2 M_{\perp}^2}{2\Omega_i^2} \right) \right] + O(M_{\parallel}^4) \\ &= \left(1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} + \frac{3}{2} \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega} \right) \left(1 + \frac{\hat{\omega}_{D_i}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2}{\Omega_i^2} \right) \\ &\quad - \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega} \left[\frac{3}{2} + \frac{5}{2} \left(\frac{\hat{\omega}_{D_i}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2}{\Omega_i^2} \right) \right] \\ &= 1 - \frac{\omega_{*i}}{\omega} + \left(1 - \frac{\omega_{*i} \eta_i}{\omega} \right) \left(\frac{\hat{\omega}_{D_i}}{\omega} + \frac{k_{\parallel}^2}{\omega^2} - \frac{k_{\perp}^2}{\Omega_i^2} \right) \quad \text{--- (31)} \end{aligned}$$

m=1については、 v_{\parallel} の奇関数は速度空間積分すると0になることに注意して、

$$\begin{aligned} P_{1i} &= \int dv^3 F_{M_i} v_{\parallel} \left(1 - \frac{\omega_{*i}^T}{\omega} \right) \frac{k_{\parallel} M_{\parallel}}{\omega} + O(M_{\parallel}^4) \\ &= \frac{k_{\parallel}}{\omega} \left(1 - \frac{\omega_{*i}^T}{\omega} \right) \quad \text{--- (32)} \end{aligned}$$

m=2については、m=0,1と同様に v_{\parallel}^2 のオーダーまで残すことに注意して、

$$P_{2i} = \int dv^3 F_{M_i} M_{\parallel}^2 \left(1 - \frac{\omega_{*i}^T}{\omega} \right) + O(M_{\parallel}^4) = 1 - \frac{\omega_{*i}^T}{\omega} \quad \text{--- (32)}$$

(5.3.3節) 式(35)の導出

[式(34)]- ω^2 [式(33)]を計算すればよい。ただし、式(35)では無次元化

$$\bar{\Omega}_i = \frac{\Omega_i}{\Omega_i} = 1$$

の關係を用いて、 $\frac{k_{\perp}^2}{\Omega_i}$ (無次元) = k_{\perp}^2 (無次元) として表記している。

(5.3.3節) 水素プラズマにおける電子とイオンのドリフト運動の換算

式(33)-(36)などの変形では、水素プラズマの条件

$$e_i = -e_e = e, n_i = n_e \equiv n_0, L_{ni} = L_{ne} \equiv L_n$$

より、

$$\omega_{*i} = -\frac{cT_i}{eB_0 L_n} k_{\parallel} = -\frac{T_i}{T_e} \frac{cT_e}{eB_0 L_n} k_{\parallel} = -\tau \omega_{*e}$$

$$\hat{\omega}_{D_i} = -\frac{2cT_i}{eB_0 R_0} k_{\parallel} = -\frac{T_i}{T_e} \frac{2cT_e}{eB_0 R_0} k_{\parallel} = -\tau \hat{\omega}_{D_e}$$

となることを適宜用いている。

(5.3.5節) 式(42)におけるMHDバルーニング方程式の圧力勾配による不安定性駆動項

種々の反磁性ドリフト速度 $\omega_{*s}, \omega_{*ps}, \omega_{*p}$ の定義について確認しておこう。

$$\omega_{*s} = -\frac{cT_s}{e_s B_0 L_{ns}} k_{\parallel} \propto T_s \frac{|\nabla n_s|}{n_s} \quad \dots \text{粒子種sの密度勾配に比例}$$

$$\begin{aligned} \omega_{*ps} &= \omega_{*s} (1 + \eta_s) \propto T_s \frac{|\nabla n_s|}{n_s} \left(1 + \frac{n_s |\nabla T_s|}{T_s |\nabla n_s|} \right) \\ &= \frac{1}{n_s} |T_s \nabla n_s + n_s \nabla T_s| \\ &= \frac{|\nabla (n_s T_s)|}{n_s} = \frac{|\nabla P_s|}{n_s} \quad \dots \text{粒子種sの圧力勾配に比例} \end{aligned}$$

また、 $\omega_{*p} = \omega_{*pi} - \omega_{*pe}$ については水素プラズマの条件を用いて、

$$\begin{aligned} \omega_{*p} &= \omega_{*pi} - \omega_{*pe} \\ &= -\frac{ck_{\parallel}}{eB_0} \left[\frac{T_i}{L_{ni}} (1 + \eta_i) + \frac{T_e}{L_{ne}} (1 + \eta_e) \right] \quad \begin{matrix} (\because e_i = -e_e = e) \\ (\because n_i = n_e \equiv n_0) \end{matrix} \\ &\propto \left(\frac{|\nabla P_i|}{n_i} + \frac{|\nabla P_e|}{n_e} \right) = \frac{|\nabla (P_i + P_e)|}{n_0} \end{aligned}$$

となり、電子とイオンから構成される水素プラズマの全圧 $P = P_i + P_e$ の圧力勾配に比例する。

MHDとの対応として、MHDではそもそも1流体描像に基づき全圧Pしか扱わないことと整合する。

(5.4節) 式(45)の導出

分散関係式(38)において、

- 急峻な温度勾配かつフラットな密度勾配を仮定して $\frac{\omega_{*i}}{\omega} \gg 1 \gg \frac{\omega_{*e}}{\omega}$
- 磁力線方向の圧縮性は小さい $c_s^2 \ll \frac{\omega^2}{k_{\parallel}^2}$ としてスラブITG駆動項 (左辺第3項) を無視
- イオン有限Larmor半径効果は小さいとして、 $\frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} - k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 \sim \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega}$
- 低ベータ近似式(40) $F \simeq 1 - \beta_i \frac{\hat{\omega}_{Di} \hat{\omega}_{*i}}{2 k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2}$ (※同様にスラブ項無視)

の近似を用いると、

$$1 + \frac{T_e}{T_i} \frac{\hat{\omega}_{Di}}{\omega} \frac{\omega_{*i}}{\omega} \left(1 - \beta_i \frac{\hat{\omega}_{Di} \omega_{*i}}{2 k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2} \right) = 0$$

$$\therefore \omega^2 = - \frac{T_e}{T_i} \hat{\omega}_{Di} \omega_{*i} \left(1 - \beta_i \frac{\hat{\omega}_{Di} \omega_{*i}}{2 k_{\perp}^2 \rho_{Ti}^2 k_{\parallel}^2 v_{Ti}^2} \right) \quad \text{--- (45)}$$

(6.2節) 内部領域幅 δ の見積もり

線形化されたOhm則(3)と渦度方程式(4)の各項が $x \sim \delta$ の位置でバランスするとして、

$$\left\{ \begin{aligned} i k_y \frac{\delta}{L_s} c \phi_{k_y} &\sim \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{d^2 A_{z k_y}}{dx^2} \\ -i\omega \frac{c \phi_{k_y}}{\delta^2 B_0} &\sim -\frac{i k_y}{4\pi\rho} \frac{B_0 \delta}{L_s} \frac{d^2 A_{z k_y}}{dx^2} \end{aligned} \right.$$

ここで、 $\frac{d^2 \phi_{k_y}}{dx^2} \sim \frac{\phi_{k_y}}{\delta^2}$ として見積もった。 ϕ_{k_y} と $\frac{d^2 A_{z k_y}}{dx^2}$ を消去して整理すると、内部領域幅 δ の見積もりとして以下を得る。

$$\left(\frac{\delta}{L_s}\right)^4 \sim (-i\omega) \frac{\tau_A^2}{\tau_R}$$

ここで、 $\tau_A^2 = \frac{1}{k_y^2 N_A^2} = \frac{4\pi\rho}{k_y^2 B_0^2}$, $\tau_R = \frac{4\pi L_s^2 \sigma}{c^2}$

(6.2節) 外部領域の解

外部領域では変動が緩やかで電気抵抗や慣性項が効かないとすると、慣性項を無視した渦度方程式[式(4)右辺のみ]より、

$$B_y^{eq}(x) \left(\frac{d^2}{dx^2} - k_y^2 \right) A_{z k_y}(x) - \frac{d^2 B_y^{eq}}{dx^2} A_{z k_y}(x) = 0$$

この $A_{z, k_y}(x)$ に関する2階常微分方程式は、平衡磁場 $B_y^{eq}(x)$ と境界条件を与えることでくことができる。ただし、特異性を持つ磁気中性点近傍の境界条件は内部領域との接続条件により与えられる。

(6.2節) テアリングモードの固有値

式(5)は結局、

$$\frac{L_s^2}{\tau_R} \frac{\delta'}{2} = -i\omega\delta$$

であり、内部領域幅の見積もり $\left(\frac{\delta}{L_s}\right)^4 = -i\omega \frac{\tau_A^2}{\tau_R}$ と併せて δ を消去すると、

$$-i\omega\tau_A = \frac{1}{16} \left(\delta' L_s\right)^{\frac{4}{5}} \left(\frac{\tau_A}{\tau_R}\right)^{\frac{3}{5}} \equiv \gamma_0 \tau_A$$

として式(8)を得る。

(6.3節) ピッチ角散乱衝突項の密度保存と抵抗

$$C = \frac{\nu(\omega)}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{\partial h(\nu, \xi)}{\partial \xi} \right]$$

ここで、速度空間は速度の絶対値 v とピッチ角変数 $\xi = v_{\parallel}/v$ を独立な座標ととっている。
 ※第2章ではジャイロ位相に対して記号 ξ を用いていたが、ここでは異なる。

有限Larmor半径効果は無視して、0次速度モーメントを取ると

$$\begin{aligned} \int d\nu^3 C &= 2\pi \int_0^{\infty} d\nu \frac{\nu}{2} \nu^2 \int_{-1}^1 d\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{\partial h}{\partial \xi} \right] \\ &= \pi \int_0^{\infty} d\nu \nu^2 \left[(1 - \xi^2) \frac{\partial h}{\partial \xi} \right]_{\xi=-1}^{\xi=1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

密度保存が確かめられる。

磁場方向速度 v_{\parallel} について1次モーメントを取ると ($\nu_{\parallel} = \nu \xi$)

$$\begin{aligned} \int d\nu^3 \nu_{\parallel} C &= 2\pi \int_0^{\infty} d\nu \frac{\nu}{2} \nu^3 \int_{-1}^1 d\xi \left\{ \xi \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \xi^2) \frac{\partial h}{\partial \xi} \right] \right\} \\ &= \left[\xi (1 - \xi^2) \frac{\partial h}{\partial \xi} \right]_{\xi=-1}^{\xi=1} - \int_{-1}^1 d\xi (1 - \xi^2) \frac{\partial h}{\partial \xi} \\ &= - \left[(1 - \xi^2) h \right]_{\xi=-1}^{\xi=1} + \int_{-1}^1 d\xi (-2\xi) h \\ &= -2 \int_{-1}^1 d\xi \xi h \\ &= \int d\nu^3 (-\nu \nu_{\parallel} h) \end{aligned}$$

よって、ピッチ角散乱により抵抗力が生じる。衝突周波数の速度依存性に注意。今回考慮する電子-イオン衝突（イオンとの衝突による電子分布関数の変化）では、

$$\nu_{ei}(\omega) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4} \nu_c \frac{N_{Te}^3}{\sqrt{3}}$$

(6.3節) 式(10),(11)の近似式と簡約MHD方程式(4)(3)との対応

式(10)(11)以下の文にある通り、低波数を考えて近似すると、

$$\Gamma_{oi} - \eta_i k_{\perp}^2 \rho_{ti}^2 \Gamma_{ii} \simeq 1 - (1 + \eta_i) k_{\perp}^2 \rho_{ti}^2 \xrightarrow{\text{逆Fourier変換}} 1 + (1 + \eta_i) \rho_{ti}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right)$$

よって、イオンと電子の密度揺動 $\delta n_{s,ky}(x)$ について、式(10)より、

$$\begin{cases} -i\omega \frac{\delta n_{i,ky}}{n_0} = \left[i\omega_{*i} + i\omega_{*pi} \rho_{ti}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \right] \frac{e\phi_{ky}}{T_i} - i\omega \rho_{ti}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \frac{e\phi_{ky}}{T_i} \\ -i\omega \frac{\delta n_{e,ky}}{n_0} = -ik_{\parallel} \delta u_{\parallel e,ky} - i\omega_{*e} \frac{e\phi_{ky}}{T_e} \end{cases}$$

ここで、 $e_i = -e_e = e, n_i = n_e = n_0, \omega_{*ps} = \omega_{*s}(1 + \eta_s)$ を用いた。粒子位置密度に対する準中性条件 $\delta n_{e,ky} = \delta n_{i,ky}$ に代入すると、 $\omega_{*i} = -\omega_{*e} T_i / T_e$ に注意して、

$$-i\omega \rho_{ti}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \frac{e\phi_{ky}}{T_i} = ik_{\parallel} \frac{j_{\parallel ky}}{en_0} - i\omega_{*pi} \rho_{ti}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - k_y^2 \right) \frac{e\phi_{ky}}{T_i}$$

ここで、磁場方向電流 $j_{\parallel} = -en_0 \delta u_{\parallel e}$ であり、磁場平行方向イオン電流を無視した。この式は簡約化MHD方程式における渦度方程式(4)と対応している。ただし、式(4)では密度・温度勾配が無視されていたが、こちらでは反磁性ドリフト項として残っている。

また、上の式を準中性条件を保つための電流の連続の式と見なすと、磁場平行方向電流を電子が担い(右辺第1項)、磁場垂直方向にはイオン分極電流(左辺)と有限Larmor半径効果によるイオン反磁性電流(右辺第2項)が現れていることが分かる。

$$\nabla_{\perp} \cdot \left(\frac{m_i n_0}{B^2} \frac{\partial -\nabla_{\perp} \phi}{\partial t} \right) + \nabla_{\parallel} j_{\parallel} + \nabla_{\perp} \cdot \left[en_0 \omega_{*pi} \left(-\rho_{ti}^2 \nabla_{\perp}^2 \frac{e\phi}{T_i} \right) \right] = 0$$

続いて、電子についての運動方程式(11)は、低波数近似と $e_e = -e$ を用いて、

$$\begin{aligned} -i\omega n_0 m_e \delta u_{\parallel e,ky} &= -ik_{\parallel} \delta P_{\parallel e,ky} - en_0 \left(-ik_{\parallel} \phi_{ky} + \frac{i\omega}{c} A_{\parallel ky} \right) \\ &\quad - i\omega_{*pe} \frac{en_0}{c} A_{\parallel ky} - \int dN^3 \left(\nu_{ei} m_e n_{\parallel} h_{e,ky} \right) \end{aligned}$$

この式は簡約化MHD方程式におけるOhm則(3)と対応している。右辺第2項の平行電場 $E_{\parallel} = -ik_{\parallel} \phi_{ky} + i\omega A_{\parallel ky} / c$ 項は同一であるが、衝突抵抗(右辺第4項)は簡約MHDの場合には $\propto j_{\parallel} / \sigma = c j_{\parallel} / (4\pi\sigma)$ と置き換えられ(衝突周波数の粒子速度 v 依存性を無視したことに相当する)、左辺の電子慣性項、右辺第1項の圧力項、右辺第3項の反磁性項などは簡約MHDではすべて落とされている。

(6.3節) ジャイロ運動論方程式のLegendre展開式(13)-(15)の導出

Legendre多項式の性質をまとめると、以下の通りである。

$$\frac{\partial}{\partial \xi} (1 - \xi^2) \frac{\partial}{\partial \xi} P_n(\xi) = -n(n+1) P_n(\xi) \quad \text{————— (12)}$$

$$P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi$$

漸化式 $(n+1) P_{n+1} = (2n+1) \xi P_n - n P_{n-1}$

直交性 $\int_{-1}^1 d\xi P_m(\xi) P_n(\xi) = \frac{1}{n+\frac{1}{2}} \delta_{m,n}$

直交性を利用して電子分布関数を $h_{e,k_y}(x, v, \xi) = \sum_n h_n(x, \xi) P_n(\xi)$ とLegendre展開する。この時、ジャイロ運動論方程式(9)の各項を陽に書き下してみよう。

(左辺 第1項) $= -i\omega \sum_{n=0}^{\infty} h_n P_n$

(左辺 第2項) $= ik_{\parallel} v_{\parallel} h_{e,k_y} = ik_{\parallel} v_{\parallel} \sum_{n=0}^{\infty} h_n \xi P_n$
 $= ik_{\parallel} v_{\parallel} \left[h_0 \xi + \sum_{n=1}^{\infty} h_n \left(\frac{n+1}{2n+1} P_{n+1} + \frac{n}{2n+1} P_{n-1} \right) \right]$
 $= ik_{\parallel} v_{\parallel} \left[\sum_{n'=1}^{\infty} h_{n'-1} \frac{n'}{2n'-1} P_{n'} + \sum_{n''=0}^{\infty} h_{n''+1} \frac{n''+1}{2n''+3} P_{n''} \right] \begin{pmatrix} n' = n+1 \\ n'' = n-1 \\ \text{と書いた。} \end{pmatrix}$

(右辺 第1項) $= \frac{e F_{M_e}}{T_e} (-i\omega + i\omega_{*e}^T) \left(\phi_{k_y} - \frac{N_{\parallel}}{c} A_{\parallel k_y} \right)$
 $= -i \frac{e F_{M_e}}{T_e} (\omega - \omega_{*e}^T) \left(\phi_{k_y} P_0 - \frac{N_{\parallel}}{c} A_{\parallel k_y} P_1 \right)$

(右辺 第2項) $= -\frac{\nu}{2} \sum_{n=0}^{\infty} n(n+1) h_n P_n$

Legendre多項式の直交性を利用して、 $P_n(\xi)$ の係数が各次数毎に等しいとすると式(13)-(15)を得る。

(6.3節) 電気伝導度(17)の導出

$h_{n \geq 2}$ を無視するので、式(13)より h_0 を h_1 と ϕ_{k_y} で表した上で式(14)に代入すると、

$$\begin{aligned}
 (i\omega - \nu_{ei})h_1 &= \frac{ik_{\parallel} v}{i\omega} \left[\frac{ik_{\parallel} v}{3} h_1 + i(\omega - \omega_{*e}^T) \frac{e_e \phi_{k_y}}{T_e} F_{Me} \right] - i(\omega - \omega_{*e}^T) \frac{e_e v A_{\parallel k_y}}{c T_e} F_{Me} \\
 \left[i\omega(i\omega - \nu_{ei}) + \frac{k_{\parallel}^2 v^2}{3} \right] h_1 &= -i(\omega - \omega_{*e}^T) \frac{e_e F_{Me}}{T_e} \underbrace{\left(-ik_{\parallel} \phi_{k_y} + \frac{i\omega}{c} A_{\parallel k_y} \right)}_{= E_{\parallel k_y}} \\
 \therefore h_1 &= \frac{-i(\omega - \omega_{*e}^T)}{i\omega(i\omega - \nu_{ei}) + \frac{k_{\parallel}^2 v^2}{3}} \frac{e_e F_{Me}}{T_e} \underbrace{\left(-ik_{\parallel} \phi_{k_y} + \frac{i\omega}{c} A_{\parallel k_y} \right)}_{= E_{\parallel k_y}}
 \end{aligned}$$

より、 $\sigma = j_{\parallel} / E_{\parallel} = e_e n_e \delta u_{\parallel e} / E_{\parallel} = (4\pi e_e / 3) dvv \int dvv^3 h_1 / E_{\parallel}$ に代入することで式(17)を得る。

(6.3節) 高衝突度の場合の実効的な電気伝導度(18)の導出

D 無視かつ $\omega \ll \nu_{ei}$ より、

$$\begin{aligned}
 - \frac{i\omega}{i\omega(i\omega - \nu_{ei}) + \nu_{ei} k_{\parallel} D} &= \frac{1}{\nu_{ei}} \left(1 + \frac{i\omega}{\nu_{ei}} \right) + O\left(\frac{\omega^2}{\nu_{ei}^2} \right) \\
 &= \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi} \nu_c} \hat{v}^3 \left(1 + \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi} \nu_c} i\omega \hat{v}^3 \right) \quad \left(\hat{v} = \frac{v}{\sqrt{2} v_{Te}} \right)
 \end{aligned}$$

のTaylor展開を用いて、式(17)の積分を実行すると、

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{\delta}{3\sqrt{\pi}} \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi} \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi} \nu_c} \int_0^{\infty} d\hat{v} \hat{v}^4 \hat{v}^3 \left(1 + \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi} \nu_c} i\omega \hat{v}^3 \right) \left[1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \left(1 + \eta_e \left(\hat{v}^2 - \frac{3}{2} \right) \right) \right] e^{-\hat{v}^2} \\
 &\quad \left(\begin{array}{l} \text{ガウス積分} \\ \text{を用いる。} \end{array} \int_0^{\infty} x^{2n-1} e^{-ax^2} dx = \frac{(n-1)!}{2a^n} \quad (n=1, 2, \dots) \right. \\
 &\quad \left. \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2a)^n} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (n=1, 2, \dots) \right) \\
 &= \frac{32}{9\pi (\nu_c / 2^{3/2})} \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi} \left\{ 3 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \left(3 + \eta_e \left(12 - \frac{9}{2} \right) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{8\sqrt{2}}{3\nu_c} i\omega \left[\frac{9!!}{2^6} - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \left(\frac{9!!}{2^6} + \eta_e \left(\frac{11!!}{2^7} - \frac{3 \cdot 9!!}{2^7} \right) \right) \right] \right\} \\
 &= \frac{32}{3\pi (\nu_c / 2^{3/2})} \frac{\omega_{pe}^2}{4\pi} \left\{ 1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \left(1 + \frac{5}{2} \eta_e \right) + \frac{105}{16} \frac{i\omega}{(\nu_c / 2^{3/2})} \left[1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \left(1 + 4\eta_e \right) \right] \right\} \\
 &\hspace{15em} \text{————— (18)}
 \end{aligned}$$

(6.3節) 式(20)(21)の導出

6.2節と同様の手順だが念のため確認すると、式(19)の積分より、

$$\int_0^{\delta} \frac{d^2 A_{\parallel k_y}}{dx^2} dx = - \frac{4\pi}{c^2} \int_0^{\delta} \sigma_L \times i\omega A_{\parallel k_y} dx$$

左辺は内部解と外部解との接続条件を用いて、外部解で決まるパラメータ Δ' を用いて、

$$\left(\frac{d}{dx}\right) = \left[\frac{dA_{\parallel k_y}}{dx} \right]_{x=0}^{x=\delta} = \frac{\Delta'}{2} A_{\parallel k_y}$$

一方、右辺については近似的に

$$(\text{右辺}) \simeq -i\omega \times \frac{4\pi\sigma_L\delta}{c^2} A_{\parallel k_y} = -i\omega \times \frac{\tau_R\delta}{L_s^2} A_{\parallel k_y}$$

であるので、等式を成立させて式(20)を得る。

続く式(21)については特に近似は用いず、係数を整理すれば導かれる。

(6.3節) 微視的テアリング不安定性の分散関係式(23)の導出

式(21)について、右辺が $(\gamma_0/\omega)^{5/3} = O(\varepsilon)$ のオーダーのとき

$$\underbrace{1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} \left(1 + \frac{5}{2} \eta_e\right)}_{\sim O(1)} + \underbrace{\frac{105}{16} \frac{i\omega}{\nu_c/2^{3/2}} \left[1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega} (1 + 4\eta_e)\right]}_{\sim O(\varepsilon)} = \underbrace{i \left(\frac{\gamma_0}{\omega}\right)^{5/3}}_{\sim O(\varepsilon)}$$

$O(1)$ の式から

$$\omega = \omega_{*e} \left(1 + \frac{5}{2} \eta_e\right) \equiv \omega_{MT}$$

続いて、逐次近似により、 $O(\varepsilon)$ までの式に $\omega = \omega_{MT} + O(\varepsilon)$ を代入して高次解を求めると、

$$1 - \frac{\omega_{MT}}{\omega} + \frac{105}{16} \frac{i\omega_{MT}}{\nu_c/2^{3/2}} \left[1 - \frac{\omega_{*e}}{\omega_{MT}} (1 + 4\eta_e)\right] = i \left(\frac{\gamma_0}{\omega_{MT}}\right)^{5/3}$$

$$= -\frac{3}{2} \frac{i\eta_e \omega_{*e}}{\nu_c/2^{3/2}}$$

$$\therefore \frac{\omega}{\omega_{MT}} = \frac{1}{1 - \frac{105}{16} \frac{3}{2} \frac{i\eta_e \omega_{*e}}{\nu_c/2^{3/2}} - i \left(\frac{\gamma_0}{\omega_{MT}}\right)^{5/3}}$$

$$\simeq 1 + \frac{105}{16} \cdot \frac{3}{2} \cdot 2^{3/2} \frac{i\eta_e \omega_{*e}}{\nu_c} + i \left(\frac{\gamma_0}{\omega_{MT}}\right)^{5/3} \quad (23)$$

(6.4節) 共鳴擾動磁場による磁気面破壊

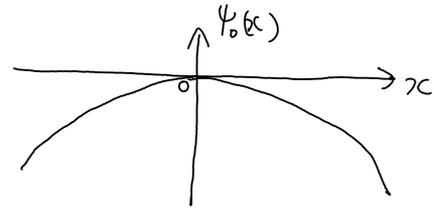
磁気中性面 $x=0$ 近傍での擾動の無いスラブ磁場は

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{z} + B_y^{eq}(x) \hat{y} = B_0 \hat{z} + \frac{B_0 x}{L_s} \hat{y} = B_0 \hat{z} + \nabla \times \left(-\frac{B_0 x^2}{2L_s} \hat{z} \right)$$

であったので、磁束関数を

$$\psi_0(x) = -\frac{B_0 x^2}{2L_s}$$

とすると、磁束関数の等高線が磁力線軌道に対応し、 $x=0$ で向きが変わるシア磁場を表わす。



これに、 $x=0$ で共鳴

$$\mathbf{B} \cdot \nabla \tilde{A}_{||} = 0$$

条件を満たす擾動磁場として以下を考える。

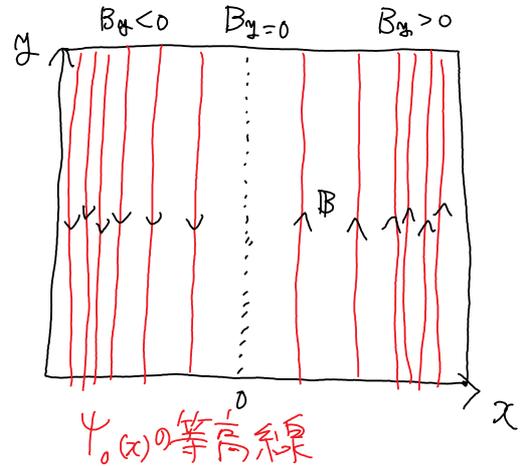
$$\tilde{A}_{||}(y) = A_1 \cos(k_y y)$$

$$\tilde{\mathbf{B}} = \nabla \times (\tilde{A}_{||} \hat{z})$$

このとき、磁束関数は

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= \psi_0(x) + \tilde{A}_{||}(y) \\ &= -\frac{B_0 x^2}{2L_s} + A_1 \cos(k_y y) \end{aligned}$$

となるので、等高線は以下ようになる。



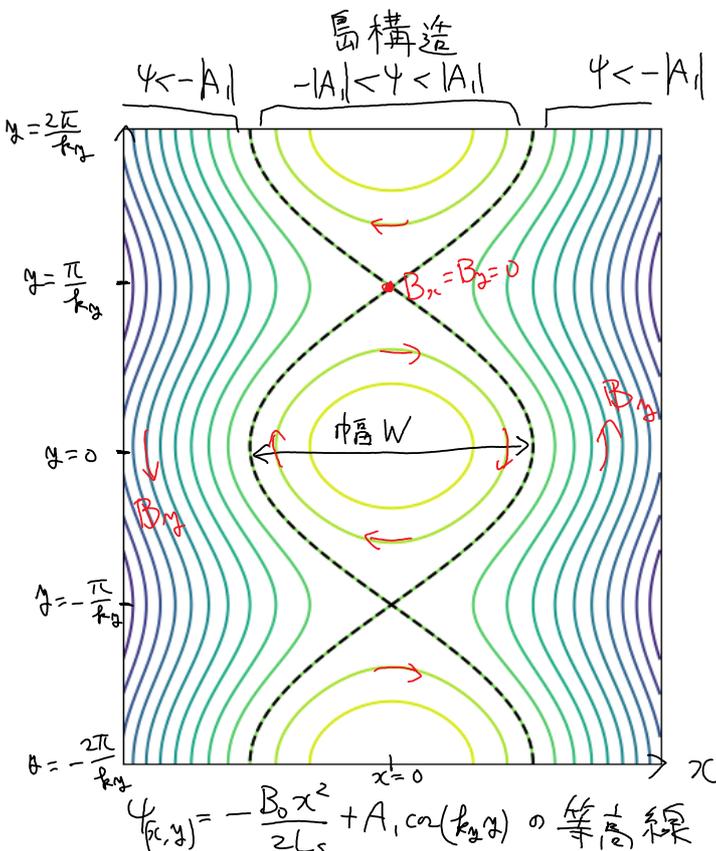
島状構造となる理由は、

$$\frac{B_0 x^2}{2L_s} = A_1 \cos(k_y y) - \psi > 0$$

より、ある ψ 一定の線（磁力線軌道）を考えたとき、 $-\psi > |A_1|$ であれば上の式は任意の y で満たされるが、 $-\psi < |A_1|$ の場合は取りうる y の値に制限が加わるためである。

磁気島の幅 W は $\psi = -|A_1|$ となる線の最大値を取ると、揺動振幅の平方根に比例すると分かる。

$$\begin{aligned} W &= 2|x_{\max}| \\ &= 2 \sqrt{\frac{2L_s [|A_1| - (-|A_1|)]}{B_0}} \\ &= 4 \sqrt{\frac{L_s |A_1|}{B_0}} \end{aligned}$$



(6.4節) 磁力線軌道方程式(27)(28)の導出

平衡磁場 $\mathbf{B} = B_0 \nabla x \times \nabla y$ に比べて、摂動磁場 $\mathbf{B}_\perp = \nabla \times (A_\parallel \hat{\mathbf{b}}) \approx \nabla_\perp A_\parallel \times \hat{\mathbf{b}}$ は小さいとする。

磁力線軌道方程式

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\ell} = \frac{dx}{d\ell} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} + \frac{dy}{d\ell} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} + \frac{dz}{d\ell} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial z} = \frac{\mathbf{B} + \nabla_\perp A_\parallel \times \hat{\mathbf{b}}}{B}$$

より、

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\ell} &= \frac{d\mathbf{r}}{d\ell} \cdot \nabla x = \frac{\nabla_\perp A_\parallel \times \hat{\mathbf{b}}}{B} \cdot \nabla x \quad (\because \mathbf{B} \cdot \nabla x = 0) \\ &= \frac{1}{B} \frac{\partial A_\parallel}{\partial y} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla x \times \nabla y \quad \left(\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{B}}{B}, \nabla x \times \nabla y = \frac{\mathbf{B}}{B_0} \right) \\ &= \frac{1}{B_0} \frac{\partial A_\parallel}{\partial y} \quad \text{--- (27)} \end{aligned}$$

$$\frac{dz}{d\ell} = \frac{d\mathbf{r}}{d\ell} \cdot \nabla z \approx \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \nabla z \quad (\because B \gg B_\perp)$$

$$= \frac{B_0 \nabla x \times \nabla y \cdot \nabla z}{B}$$

$$= \frac{B_0}{\sqrt{2} B}$$

$$\approx \frac{B_0}{2_0 R B}$$

$$\approx \frac{1}{2_0 R_0} \quad \left(B \approx \frac{B_0 R_0}{R} \right)$$

--- (28)

$$\left(\begin{aligned} \sqrt{2}^{-1} &= \nabla x \times \nabla y \cdot \nabla z \\ &\approx \nabla r \times \nabla \left[\frac{r_0}{2_0} (2\theta - z) \right] \cdot \nabla \theta \\ &= -\frac{r_0}{2_0} \nabla r \times \nabla z \cdot \nabla \theta \\ &= \frac{1}{2_0 R} \end{aligned} \right)$$

(7.2節) エントロピーバランス方程式(1)-(7)の導出

本文に記載の通り、摂動ジャイロ運動論的Vlasov 方程式[第2章式(13)]に $T_s f_{sk_\perp}^*/F_{Ms}$ (ここで $f_{sk_\perp} = -e_s \langle \phi_{k_\perp} \rangle_s F_{Ms}/T_s + h_{sk_\perp}$)をかけて実部を取り、速度空間積分および磁気面平均を行い、波数について和を取り、準中性条件とAmpère則[第2章式(15),(16)]を用いる。

まず、第2章式(13)は f_{sk_\perp} を用いて、

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_{sk_\perp}}{\partial t} + v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla f_{sk_\perp} + i\omega_{Ds} \left(f_{sk_\perp} + \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} J_{0s} \phi_{k_\perp} \right) \\ &= \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} \left[v_{\parallel} \left(-\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla (J_{0s} \phi_{k_\perp}) - \frac{\partial J_{0s} A_{\parallel k_\perp}}{c \partial t} \right) + i\omega_{*s}^T J_{0s} \psi_{k_\perp} \right] + C_s (h_{sk_\perp}) \end{aligned}$$

$T_s f_{sk_\perp}^*/F_{Ms}$ をかけて実部を取り、速度空間積分および磁気面平均を取ると、各項は以下となる。

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 \frac{T_s f_{sk_\perp}^*}{F_{Ms}} \frac{\partial f_{sk_\perp}}{\partial t} \right\rangle \right] &= \frac{d}{dt} \left\langle \int dv^3 \frac{T_s |f_{sk_\perp}|^2}{2F_{Ms}} \right\rangle = \frac{dS_s}{dt} \\ \text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 \frac{T_s f_{sk_\perp}^*}{F_{Ms}} v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla f_{sk_\perp} \right\rangle \right] &= \left\langle \int dv^3 v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \frac{T_s |f_{sk_\perp}|^2}{2F_{Ms}} \right\rangle \quad \left(\because \nabla \cdot \mathbf{E} = -\nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \text{ 等} \right) \\ &= \left\langle \int dv^3 \left(\underbrace{v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla}_{\textcircled{1}} - \underbrace{\frac{\mu \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla B}{m_s} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}}}_{\textcircled{2}} \right) \frac{T_s |f_{sk_\perp}|^2}{2F_{Ms}} \right\rangle = 0 \\ & \left((\varepsilon, \mu) \rightarrow (\mu, \mu) \text{ の座標変換より、 } \nabla_{(\varepsilon, \mu)} \cdot \hat{\mathbf{b}} = \nabla_{(\mu, \mu)} \cdot \hat{\mathbf{b}} - \frac{\mu \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla B}{m_s} \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \\ \left(\begin{aligned} \textcircled{1} &= 2\pi \left\langle \frac{B}{m_s} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \left(\int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty dv_{\parallel} v_{\parallel} \frac{T_s |f_{sk_\perp}|^2}{2F_{Ms}} \right) \right\rangle = 0 \quad (\because \text{磁気面平均の性質 } \mathbf{B} \cdot \nabla = 0 \text{ より}) \\ \textcircled{2} &= 2\pi \left\langle \int_0^\infty d\mu \int_{-\infty}^\infty dv_{\parallel} \frac{B}{m_s} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left(-\frac{\mu \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla B}{m_s} \frac{T_s |f_{sk_\perp}|^2}{2F_{Ms}} \right) \right\rangle = 2\pi \left\langle \int_0^\infty d\mu \frac{B}{m_s} \left[-\frac{\mu \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla B}{m_s} \frac{T_s |f_{sk_\perp}|^2}{2F_{Ms}} \right]_{v_{\parallel}=-\infty}^{v_{\parallel}=\infty} \right\rangle = 0 \end{aligned} \right) \end{aligned}$$

$$\text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 \frac{T_s f_{sk_\perp}^*}{F_{Ms}} i\omega_{Ds} f_{sk_\perp} \right\rangle \right] = \text{Re} \left[i \left\langle \int dv^3 \omega_{Ds} \frac{T_s |f_{sk_\perp}|^2}{F_{Ms}} \right\rangle \right] = 0 \quad (\because \text{純虚数より})$$

$$\begin{aligned} \text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 \frac{T_s f_{sk_\perp}^*}{F_{Ms}} \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} i\omega_{*s}^T J_{0s} \psi_{k_\perp} \right\rangle \right] &= \text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 e_s f_{sk_\perp}^* i\mathbf{k}_\perp \cdot \frac{cT_s \hat{\mathbf{b}}}{e_s B} \times \left[-\frac{\nabla x}{L_{ns}} - \left(\frac{\varepsilon}{T_s} - \frac{3}{2} \right) \frac{\nabla x}{L_{Ts}} \right] J_{0s} \psi_{k_\perp} \right\rangle \right] \\ &= \text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 T_s f_{sk_\perp}^* \left[\frac{1}{L_{ns}} + \left(\frac{\varepsilon}{T_s} - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{L_{Ts}} \right] v_\psi \cdot \nabla x \right\rangle \right] \\ &= \frac{T_s \Gamma_s}{L_{ns}} + \frac{Q_s - 3T_s \Gamma_s / 2}{L_{Ts}} \end{aligned}$$

まとめると、

$$\frac{dS_s}{dt} = \text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 e_s (v_{\parallel} E_{\parallel} + v_{Ds} \cdot \mathbf{E}_\perp) f_{sk_\perp}^* \right\rangle \right] + \frac{T_s \Gamma_s}{L_{ns}} + \frac{Q_s - 3T_s \Gamma_s / 2}{L_{Ts}} + \text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 \frac{T_s f_{sk_\perp}^*}{F_{Ms}} C_s \right\rangle \right] \quad - (*)$$

ここで、 $\mathbf{E}_\perp = -i\mathbf{k}_\perp J_{0s} \phi_{k_\perp}$, $E_{\parallel} = -\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla (J_{0s} \phi_{k_\perp}) - \frac{\partial J_{0s} A_{\parallel k_\perp}}{c \partial t}$ とおいた。

続いて、先ほど導出した粒子・波動交換項[式(*)右辺第1項]を電磁揺動エネルギーと関連付ける。

準中性条件[第2章式(15)]は $f_{sk_{\perp}}$ を用いて、

$$\sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} \phi_{k_{\perp}} = \sum_s e_s \int dv^3 J_{0s} \left(f_{sk_{\perp}} + \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} J_{0s} \phi_{k_{\perp}} \right)$$

$$\therefore \sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} (1 - \Gamma_{0s}) \phi_{k_{\perp}} = \sum_s e_s \int dv^3 J_{0s} f_{sk_{\perp}}$$

時間微分を取り、Vlasov方程式[第2章式(13)]を用いると、

$$\sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} (1 - \Gamma_{0s}) \frac{\partial \phi_{k_{\perp}}}{\partial t} = \sum_s e_s \int dv^3 J_{0s} \frac{\partial f_{sk_{\perp}}}{\partial t}$$

$$= \sum_s e_s \int dv^3 J_{0s} \left\{ -v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla f_{sk_{\perp}} - i\omega_{Ds} \left(f_{sk_{\perp}} + \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} J_{0s} \phi_{k_{\perp}} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} \left[v_{\parallel} \left(-\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla (J_{0s} \phi_{k_{\perp}}) - \frac{\partial J_{0s} A_{\parallel k_{\perp}}}{\partial t} \right) + i\omega_{*s}^T J_{0s} \psi_{k_{\perp}} \right] + C_s (h_{sk_{\perp}}) \right\}$$

$\phi_{k_{\perp}}^*$ をかけて実部を取り、磁気面平均を取ると、各項は以下の通り計算される。

$$\text{Re} \left[\left\langle \phi_{k_{\perp}}^* \sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} (1 - \Gamma_{0s}) \frac{\partial \phi_{k_{\perp}}}{\partial t} \right\rangle \right] = \frac{d}{dt} \left\langle \sum_s \frac{e_s^2 n_s}{T_s} (1 - \Gamma_{0s}) \frac{|\phi_{k_{\perp}}|^2}{2} \right\rangle = \frac{dW_E}{dt}$$

$$\text{Re} \left[\left\langle \phi_{k_{\perp}}^* \sum_s e_s \int dv^3 J_{0s} \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} \left[-i\omega_{Ds} J_{0s} \phi_{k_{\perp}} + i\omega_{*s}^T J_{0s} \phi_{k_{\perp}} \right] \right\rangle \right] = 0 \quad (\because \text{純虚数より})$$

$$\text{Re} \left[\left\langle \phi_{k_{\perp}}^* \sum_s e_s \int dv^3 J_{0s} \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} \left[v_{\parallel} \left(-\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla (J_{0s} \phi_{k_{\perp}}) - \frac{\partial J_{0s} A_{\parallel k_{\perp}}}{c \partial t} \right) - i\omega_{*s}^T J_{0s} \frac{v_{\parallel}}{c} A_{\parallel k_{\perp}} \right] \right\rangle \right] = 0 \quad (\because v_{\parallel} \text{の奇関数より})$$

まとめると、

$$\frac{dW_E}{dt} = - \sum_s \text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 e_s v_{Ds} f_{sk_{\perp}}^* \cdot \mathbf{E}_{\perp} \right\rangle \right] - \sum_s \text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 J_{0s} \phi_{k_{\perp}} e_s v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla f_{sk_{\perp}}^* \right\rangle \right]$$

$$+ \sum_s \text{Re} \left[\int dv^3 \frac{e_s F_{Ms}}{T_s} J_{0s} \phi_{k_{\perp}}^* C_s \right] \quad \text{—————} (**)$$

Ampère則[第2章式(16)]は $f_{sk_{\perp}}$ を用いて、

$$k_{\perp}^2 A_{\parallel k_{\perp}} = \frac{4\pi}{c} \sum_s e_s \int dv^3 J_{0s} v_{\parallel} f_{sk_{\perp}}$$

$\partial A_{\parallel k_{\perp}}^* / \partial t$ をかけて実部を取り、さらに磁気面平均を取ると

$$\frac{dW_M}{dt} = - \sum_s \text{Re} \left[\left\langle \int dv^3 e_s v_{\parallel} \left(-\frac{\partial J_{0s} A_{\parallel k_{\perp}}}{c \partial t} \right) f_{sk_{\perp}}^* \right\rangle \right] \quad \text{—————} (***)$$

ここで、 $W_M = \frac{1}{8\pi} \left\langle k_{\perp}^2 |A_{\parallel k_{\perp}}|^2 \right\rangle$ とした。

全粒子種についての式(*)と式(**)および(***)の和を取ると、粒子・波動交換項について以下の様に打ち消しあう（揺動エントロピーと電磁揺動エネルギー間の交換を表わす）。

$$\begin{aligned} & \sum_s \operatorname{Re} \left[\left\langle \int d^3v e_s \left(v_{\parallel} \left(-\hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla J_{0s} \phi_{\mathbf{k}_{\perp}} - \frac{\partial J_{0s} A_{\parallel \mathbf{k}_{\perp}}}{c \partial t} \right) + \mathbf{v}_{Ds} \cdot \mathbf{E}_{\perp} \right) f_{s\mathbf{k}_{\perp}}^* \right\rangle \right] - \sum_s \operatorname{Re} \left[\left\langle \int d^3v e_s \mathbf{v}_{Ds} f_{s\mathbf{k}_{\perp}}^* \cdot \mathbf{E}_{\perp} \right\rangle \right] \\ & - \sum_s \operatorname{Re} \left[\left\langle \int d^3v J_{0s} \phi_{\mathbf{k}_{\perp}} e_s v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla f_{s\mathbf{k}_{\perp}}^* \right\rangle \right] - \sum_s \operatorname{Re} \left[\left\langle \int d^3v e_s v_{\parallel} \left(-\frac{\partial J_{0s} A_{\parallel \mathbf{k}_{\perp}}}{c \partial t} \right) f_{s\mathbf{k}_{\perp}}^* \right\rangle \right] \\ & = \left\langle \int d^3v v_{\parallel} \hat{\mathbf{b}} \cdot \nabla \operatorname{Re} \left[-e_s J_{0s} \phi_{\mathbf{k}_{\perp}} f_{s\mathbf{k}_{\perp}}^* \right] \right\rangle = 0 \end{aligned}$$

よって、以下のエントロピーバランス方程式を得る。

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_s S_s + W_E + W_M \right] = \sum_s \left(\frac{T_s \Gamma_s}{L_{ns}} + \frac{Q_s - 3T_s \Gamma_s / 2}{L_{Ts}} + D_s \right) \quad (1)$$

ここで、 $D_s = \operatorname{Re} \left[\left\langle \int d^3v \frac{T_s h_{s\mathbf{k}_{\perp}}^*}{F_{Ms}} C_s (h_{s\mathbf{k}_{\perp}}) \right\rangle \right]$ とおいた。

なお、ここでは線形化されたジャイロ運動論方程式に基づいて導出されたが、非線形ジャイロ運動論方程式においても、同様のエントロピーバランス方程式が導出される[Sugama(2009)]。乱流揺動を記述する2次の非線形項は、異なる3つの波数の間の三つ組み相互作用として記述され、詳細つり合いと呼ばれる保存則（3つのモード間のエネルギー交換が打ち消し合う）を満たす[Nakata(2012)]。総エネルギー収支ではなく、モード間の詳細なエネルギー交換を解析する場合には、見かけの相互作用を除去するための対称化と呼ばれる操作が重要であり、これに関する議論は文献[Maeyama(2021)]に詳しい。

- ◇ H. Sugama, T.-H. Watanabe, and M. Nunami, "Linearized model collision operators for multiple ion species plasmas and gyrokinetic entropy balance equations", *Physics of Plasmas* 16, 112503 (2009).
- ◇ M. Nakata, T.-H. Watanabe, and H. Sugama, "Nonlinear entropy transfer via zonal flows in gyrokinetic plasma turbulence", *Physics of Plasmas* 19, 022303 (2012).
- ◇ S. Maeyama, M. Sasaki, K. Fujii, T. Kobayashi, R. O. Dendy, Y. Kawachi, H. Arakawa, and S. Inagaki, "On the triad transfer analysis of plasma turbulence: symmetrization, coarse graining, and directional representation", *New Journal of Physics* 23, 043049 (2021).

付録. ガウス積分まとめ

平衡分布としてMaxwell分布を用いているため、本講座の式の導出ではGauss積分が頻出する。各章にも一部導出を記載しているが、参照しやすいように付録としてまとめておく。

$$\text{ガウス積分 } \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\text{証明). } G_0 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \quad \text{と } \delta < \delta$$

$$G_0^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ay^2} dy \right) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-a(x^2+y^2)}$$

$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ の変数変換を行い、

$$G_0^2 = \int_0^{\infty} dr \int_0^{2\pi} d\theta r e^{-ar^2} = \frac{\pi}{a}$$

$$\therefore G_0 = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \blacksquare$$

$$\text{ガウス積分の応用 } \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)!!}{(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

$$\text{証明). } G_n = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad \text{と } \delta < \delta$$

$$G_n = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} e^{-ax^2} \right]_{x=-\infty}^{x=\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} (-2ax) e^{-ax^2} dx$$

$$= \frac{2a}{2n+1} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(n+1)} e^{-ax^2} dx = \frac{2a}{2n+1} G_{n+1}$$

$$\therefore G_n = \frac{2n-1}{2a} G_{n-1}$$

$$= \frac{2n-1}{2a} \cdot \frac{2n-3}{2a} \cdot \frac{2n-5}{2a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{2a} \cdot G_0$$

$$= \frac{(2n-1)!!}{(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad \blacksquare$$

$$\text{ガウス積分の応用 } \int_0^{\infty} x^{2n-1} e^{-ax^2} dx = \frac{(n-1)!}{2a^n}$$

$$\text{証明). } H_n = \int_0^{\infty} x^{2n-1} e^{-ax^2} dx \quad (n=1, 2, \dots) \quad \text{と } \delta < \delta$$

$$H_n = \left[\frac{x^{2n}}{2n} e^{-ax^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} - \int_0^{\infty} \frac{x^{2n}}{2n} (-2ax) e^{-ax^2} dx$$

$$= \frac{a}{n} \int_0^{\infty} x^{2(n+1)-1} e^{-ax^2} dx = \frac{a}{n} H_{n+1}$$

$$\therefore H_n = \frac{n-1}{a} H_{n-1}$$

$$= \frac{n-1}{a} \cdot \frac{n-2}{a} \cdot \frac{n-3}{a} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a} H_1 \quad \left(H_1 = \int_0^{\infty} x e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} \right)$$

$$= \frac{(n-1)!}{2a^n} \quad \blacksquare$$

なお、 $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-1} e^{-ax^2} dx = 0$ (被積分関数が奇関数より)

$$\int_0^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \frac{(2n-1)!!}{(2a)^n} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \quad (\text{被積分関数が偶関数より})$$

有限Larmor半径効果に起因して、

$$\int_0^{\infty} x J_0^2(px) e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} I_0(b) e^{-b}$$

の形の積分が現れた[第2章式(27)]。ここで、 $b = p^2/(2a)$ であり、 J_0 は0次の第1種Bessel関数、 I_0 は0次の第1種変形Bessel関数。

被積分関数の中の x が x^3, x^5 などの高次の場合は以下のように導出できる。

$$\int_0^{\infty} x^3 J_0^2(px) e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2} [(1-b)I_0(b) + bI_1(b)] e^{-b}$$

証明). $\int_0^{\infty} x J_0^2(px) e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a} I_0(b) e^{-b}$ を a で微分すると、

$$\begin{aligned} - \int_0^{\infty} x^3 J_0^2(px) e^{-ax^2} dx &= -\frac{1}{2a^2} I_0 e^{-b} + \frac{1}{2a} \left(-\frac{p^2}{2a^2} \right) \frac{d}{db} [I_0 e^{-b}] \\ &= -\frac{1}{2a^2} [I_0 e^{-b} + b I_0' e^{-b} - b I_0 e^{-b}] \end{aligned}$$

第1種変形Bessel関数の微分 $I_0' = I_1$ を用いて、上式を得る。

$$\int_0^{\infty} x^5 J_0^2(px) e^{-ax^2} dx = \frac{1}{a^3} \left[(1-2b+b^2)I_0(b) + \left(\frac{3}{2}b - b^2 \right) I_1(b) \right] e^{-b}$$

証明). $\int_0^{\infty} x^3 J_0^2(px) e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2a^2} [(1-b)I_0(b) + bI_1(b)] e^{-b}$ を a で微分すると、

$$\begin{aligned} - \int_0^{\infty} x^5 J_0^2(px) e^{-ax^2} dx &= -\frac{1}{a^3} [(1-b)I_0 + bI_1] e^{-b} + \frac{1}{2a^2} \left(-\frac{p^2}{2a^2} \right) \frac{d}{db} [(1-b)I_0 e^{-b} + bI_1 e^{-b}] \\ &= -\frac{1}{a^3} \left[(1-b)I_0 + bI_1 + \frac{b}{2} (-I_0 + (1-b)I_0' - (1-b)I_0 + I_1 + bI_1' - bI_1) \right] e^{-b} \end{aligned}$$

第1種変形Bessel関数の微分 $I_0' = I_1, I_1' = -\frac{I_1}{b} + I_0$ を用いて、係数を整理すると

$$= -\frac{1}{a^3} \left[(1-2b+b^2)I_0 + \left(\frac{3}{2}b - b^2 \right) I_1 \right] e^{-b}$$

よって、上式を得る。

※変形Bessel関数の微分

$$I_\nu'(x) = -\frac{\nu}{x} I_\nu(x) + I_{\nu-1}(x) = \frac{\nu}{x} I_\nu(x) + I_{\nu+1}(x) = \frac{1}{2} [I_{\nu+1}(x) + I_{\nu-1}(x)]$$

と漸化式

$$I_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} I_\nu(x) + I_{\nu-1}(x)$$

より、 I_2 を用いた表式も可能だが、ここでは I_0 と I_1 のみで表す形にまとめた。