



小特集 磁場閉じ込め核融合プラズマにおけるデータ駆動アプローチによる物理モデリングの進展

4. データ駆動アプローチを用いた動的乱流現象の解析

4. Data-Driven Analyses of Dynamical Turbulence Phenomena

佐々木 真^{1,2)}, 河原吉伸^{3,4)}, 草場 彰¹⁾

SASAKI Makoto^{1,2)}, KAWAHARA Yoshinobu^{3,4)} and KUSABA Akira¹⁾

¹⁾九州大学応用力学研究所, ²⁾九州大学極限プラズマ連携研究センター,

³⁾九州大学マス・フォア・インダストリ研究所, ⁴⁾理化学研究所 革新知能統合研究センター

(原稿受付: 2020年10月14日)

本章ではデータ駆動科学的手法として近年注目されている動的モード分解について, その理論的背景からプラズマ乱流への応用例まで紹介する. 動的モード分解は流体現象の時空間構造を観測/計測データから抽出するための数値解析手法の一つとして提案されたものであり, 現在では様々なシステムへの応用がなされている. 動的モード分解を用いると, 時空間発展データから統計的に重要な空間構造とその構造に対応する複素周波数を得ることができ, より少数の自由度でシステムを理解することが可能となる. ここでは, (1)物理機構の理解をめざす例として, 動的モード分解をリミットサイクル振動を伴う乱流に適用し, 構造間の因果関係を抽出する試みについて紹介する. また, (2)乱流の時空間発展の予測に応用する試みについても紹介する.

Keywords:

plasma turbulence, abrupt phenomena, mode decomposition, DMD, causality, prediction

4.1 背景

磁場閉じ込めプラズマや宇宙のプラズマ現象はエネルギーの流入出がある非平衡開放系であり, 自律的なリズムや自己組織的な空間パターンの形成が起こるため, システムが本質的に動的である. 特に, 極限的に空間不均一な系である磁場閉じ込めプラズマでは, プラズマ装置に対して, ミクロスケールの乱流が発達し, その非線形ダイナミクスによってプラズマ閉じ込めが規定されている. ミクロスケール乱流が駆動する装置スケールのマクロ構造や中間スケールのメゾスケール構造の重要性が認識されている[1]. そのため, プラズマの動的挙動を理解するためには, 乱流とその非線形性によって駆動される構造間の相互作用を理解することが必要である.

磁場閉じ込めプラズマにおける重要な動的挙動には周辺局在モード (edge localized mode, ELM) [2]や閉じ込め遷移[3]等の自発的なものから, 燃料供給時の外部摂動に対する応答[4]などがある. これらの挙動の物理機構の理解やその予測は重要な問題である. これらの物理機構の解明をめざした研究が理論・シミュレーション・実験の側面から精力的に進められており, 理解が大きく進んできているものの, これらの現象の定量的な予測や制御には至っていないのが現状である. 近年, データ駆動科学的手法が急速に発達してきており, この新たな手法を第4の科学的手法として利用する方向性の研究も必要となっている.

本章で焦点を当てる動的モード分解は, データ駆動的に

観測データに基づき, システムの時空間発展を特徴付けることができる新たな方法である[5]. システムの時間発展を考慮したモード分解であるため, 系の動的挙動の理解や予測に適している. 近年, 流体力学分野をはじめとして, 様々な分野における時空間ダイナミクスに適用され, その有用性が認識されてきている. プラズマ研究への適用も始まっており, 例えば[6-10]などがある. ここでは, 動的モード分解の基礎を概観し, プラズマ乱流研究への応用例を紹介し, 物理的理解に向けた試みと定量的予測の試みについて紹介する.

4.2 動的モード分解

動的モード分解は, 当初, 流体現象の時空間構造を観測/計測データから抽出するための数値解析手法の一つとして提案されたものである[11, 12]. しかしその後, 応用数学分野などで議論される力学系のクープマン解析との関連も知られるようになり, 流体分野に限らず広く科学・工学分野へ応用されるようになっていく.

流体分野における類似したモード分解としては, 固有直交分解 (POD) も古くからよく用いられている[13]. 固有直交分解では, 空間方向を一つの列としてまとめた行列 (つまり行方向は時間に対応) に対して特異値分解を計算することで, 時間発展に寄与する特徴的な空間構造の抽出を行う. 統計的にはこの計算は, 時間方向の相関を無視すればいわゆる主成分分析と同様であり, 変動の大きな空間

構造, つまり物理的な解釈としてはエネルギーが大きい空間構造を取り出していることになる. そのように, 固有直交分解は時間方向の周期性を陽に抽出している訳ではなく, 多くの場合に特徴的な周期性を持つ空間構造の抽出が困難であることが知られていた. しかし後に見るように, 動的モード分解は, 時間方向の関係を陽に用いたモード分解を計算する方法であり対応する周波数 (とその減衰・発展) も同時に得られる.

ここでは, まず動的モード分解の理論的背景について概説し, そしてその代表的な具体的手順を示しつつ, 動的モード分解の解釈について説明する.

4.2.1 クープマン解析

ここでは動的モード分解の背景として, 力学系のクープマン解析について概説する. 動的モード分解は, クープマン解析へのデータを用いた数値解析手法の一つとしても位置付けられる.

まず, 状態空間 $\mathcal{S}$ (一般には実ベクトル空間の部分集合) における (決定的な) 力学系 $\dot{x}(t) = f(x(t))$ ($x \in \mathcal{S}$) を考える¹. $f: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ は, 系の軌跡を定める写像である. ここではデータを用いた解析を考えるため, 次の離散時間での表現も適宜用いる.

$$x_{k+1} = \varphi_{\Delta t}(x_k) := x_k + \int_{k\Delta t}^{(k+1)\Delta t} f(x(\tau)) d\tau$$

ただし, $x_k = x(k\Delta t)$ であり, $\varphi_{\Delta t}: \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$ は対応するフローである. これらの表現は状態の軌跡を記述することでダイナミクスを表している.

一方で, ダイナミクスのもう一つの表現として観測量の時間発展を表す方法として, クープマン作用素を用いた記述が知られている [15]. 状態空間 $\mathcal{S}$ 上に定義されたなんらかの観測空間 $\mathcal{G}$ 内の関数 $g: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$ ($g \in \mathcal{G}$) (観測量) を考えたとき, クープマン作用素は次式により定義される [16] (図 1 も参照).

$$\mathcal{K}g = g \circ \varphi_{\Delta t} \Rightarrow \mathcal{K}g(x_k) = g(x_{k+1})$$

ただし $\circ$ は関数の合成である. 定義から $\mathcal{K}$ の線形性は容易に示される. 今, 作用素 $\mathcal{K}$ が点スペクトルのみを持ち固有値分解可能であるとし, さらに観測量 g は作用素 $\mathcal{K}$ の固有関数 $\phi_i: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ を用いて一次展開できる, つまり $g = \sum_{i=1}^{\infty} v_i \phi_i$ のように表すことができると仮定する ($v_i \in \mathbb{C}$ は展開係数). このとき, 観測量 g の時間発展は次式のように展開することができる (クープマン・モード分解とも呼ばれる).

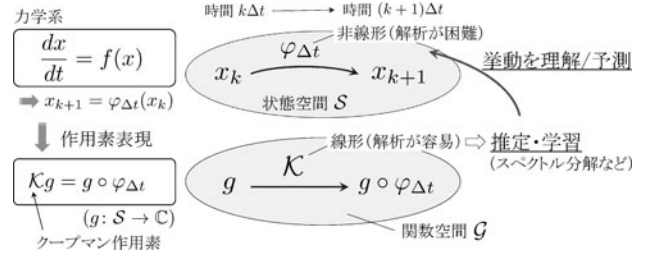


図 1 クープマン作用素を用いた力学系の解析.

$$g \circ \varphi_{k\Delta t} = g \circ \underbrace{\varphi_{\Delta t} \circ \cdots \circ \varphi_{\Delta t}}_{k \text{ 個}} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i^k v_i \phi_i \quad (1)$$

ただし, $\lambda_i (\in \mathbb{C})$ は固有関数 ϕ_i に対応する固有値を表す. 式 (1) 中の各コンポーネント中で時間発展に寄与する部分は λ_i のみであるため, 観測量の時間発展が λ_i で決まる固有の周期性 (λ_i の位相) と減衰率 (λ_i の絶対値) を持つダイナミクスに分解されていることがわかる.

クープマン作用素のスペクトル分解を用いた非線形力学系の解析に関する応用として重要なものの一つに, 縮約理論との関係があげられる. 特に, リミットサイクル振動子などの周期的な運動に近い挙動を示す系で用いられる位相縮約は, クープマン作用素の固有関数と直接的な関係を持つ [17]. またもう一つの重要な応用としては, 力学系から得られる観測が流体现象のように空間的に広がりを持つ場合には, 分解 (1) は, 時空間的なコヒーレンス構造の抽出として有用であることが知られている. つまり, 式 (1) の各コンポーネント中の固有値以外の部分, つまり $v_i \phi_i$ にあたる部分は, 各固有値で表される時間的変動に関する g への寄与として解釈できる. 各観測量が各空間上の点におけるなんらかの量 (例えば, 流体现象であれば流体速度や渦度など) に対応している場合には, この寄与の相対的な違いを見ることで, 各時間変動に対応する空間的な同調性を知ることができる. 流体现象の解析においては, このような空間的なコヒーレンス構造 (組織構造) を知ることは重要な課題として従来から盛んに研究されており, これが動的モード分解への注目のきっかけにもなっている.

4.2.2 基本的な手順とその意味

ここでは, 一般によく用いられる動的モード分解 (厳密 DMD [18]) を取り上げ, その手順を説明しつつ, 動的モード分解の性質について述べる.

動的モード分解は, 未知の系に関するクープマン分解 (1) を, その系から得られたデータから近似的に推定する手順である. この際に, データは, 状態変数を入力とする m 個の観測関数 $g_i: \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{C}$ ($i = 1, \dots, m$) を通して得られて

1 決定的でない場合は, 例えば, $g \in L^\infty(\mathcal{S})$ を観測量としてとれば, それは確率的な力学系を扱うことに相当して, 任意の $x_k \in \mathcal{S}$ に対して次のようにクープマン作用素を定義することができる [14].

$$\mathcal{K}g(x_k) = \int p_{\Delta t}(x_{k+1}|x_k) g(x_{k+1}) dx_{k+1} = E[g(X_{k+1})|X_k = x_k]$$

ただし, $p_{\Delta t}(x_{k+1}|x_k)$ は遷移状態確率である. つまり, ある時刻 $k\Delta t$ における状態 x_k が与えられた際の時刻 $(k+1)\Delta t$ における状態の期待値を与える.

いると仮定する．そのように，まずデータとしては，解析したい未知の系 $\varphi_{\Delta t}$ に関して $x_2 = \varphi_{\Delta t}(x_1)$, $y = g(x)$ として生成された時系列データが与えられたとする ($g := [g_1, \dots, g_m]^T$)．例えば，この系から生成したと想定される有限長 T の時系列データ $y_0, y_1, y_2, \dots, y_T$ が与えられる場合には， (y_{t-1}, y_t) ($t = 1, \dots, T$) のようにペアを構成して用いる．このとき，厳密 DMD の手順は次のようになる．

1. 2つの行列 $Y_1 := [y_0, y_1, \dots, y_{T-1}]$ と $Y_2 := [y_1, y_2, \dots, y_T]$ を構成する．
2. Y_1 の (打ち切り) 特異値分解 $Y_1 \approx USV^H$ を計算する ($\bullet^H$ はエルミート転置，採用ランクを r とする)．
3. 行列 $\tilde{A} := UHY_2VS^{-1}$ の固有値 $\hat{\lambda}_j$ と固有ベクトル $\tilde{v}_j$ を計算する ($j = 1, 2, \dots, r$)．
4. $\hat{v}_j = Y_2VS^{-1}\tilde{v}_j$ (動的モード) と対応する固有値 $\hat{\lambda}_j$ を得る．

この手順からわかるように，動的モード分解は比較的容易に実装が可能である．なおこの手順は， $\min_{A \in \mathbb{R}^{m \times m}} \|Y_2 - AY_1\|_F$ の最小二乗解 $\hat{A}$ の固有値と固有ベクトルを計算していることに相当するが，主要な固有値のみが得られれば十分であるので，直接 $\hat{A}$ の固有値分解を計算する代わりに，これを U を用いて射影した行列 $\tilde{A} = U^H \hat{A} U$ の固有値分解を計算している．なお， U は直交行列であるので，これらの固有値分解で得られる最初の r 個の固有値は同じものである．一般に，DMD は高次元なデータに対して適用する必要がある²，そのため行列 $\hat{A}$ も高次元になり固有値計算などが困難になるため，上記のような計算がよく用いられる訳である．

そして計算された動的モードとその固有値を用いて，例えば時系列データの場合には，各サンプルは次のように分解される．

$$y_t \approx \sum_{j=1}^r \hat{\lambda}_j^{t-1} z_j \hat{v}_j \quad (2)$$

ただし， $z := [z_1, z_2, \dots, z_r]^T$ は $y_0 = \hat{V}z$ ($\hat{V} := [\hat{v}_1, \hat{v}_2, \dots, \hat{v}_r]$) を満たす定数である． m 個の観測関数 g_i ($i = 1, \dots, m$) が，4.2.1節で述べた関数空間 $\mathcal{G}$ 内の要素であると仮定すると，この分解(2)は，分解(1)の有限データによる近似を与えていることが確認できる．実際，ある数学的仮定の下で，上記の動的モード分解により推定される固有値が，内在する真のクープマン作用素のスペクトルの情報を捉えることも示されている[23]．

なお，動的モード分解で得られる分解(2)の各コンポーネントは，推定した固有値 $\hat{\lambda}_j$ で決まる固有の周期性と減衰率を持つ要素に分解されていることは，クープマン・モード分解(1)と同様である．そして，分解(2)における動的モード $\hat{v}_j$ が，これらのダイナミクスがどのように各観測量 g_i へ相対的な重みで寄与するか，つまりある種の空間的な

コヒーレンス構造の情報を与えている．流体現象における適用では，こういった情報は，データから空間的な組織構造を抽出する目的などに利用できる[13, 15, 24]．この動的モードに関するコヒーレンスという視点は応用的にも重要であり，流体のみでなく，脳科学や感染症伝播，経済学など，多くの分野でこの特徴を用いた解析が研究されている[25-28]．また，このコヒーレンス構造をデータの特徴として予測 (教師あり／教師なし学習) に用いるための枠組みも提案されており[29, 30]，いくつかの応用場面においても有用であることが確認されている[31, 32]．

4.3 プラズマ乱流の時空間ダイナミクス解析への応用

4.3.1 乱流構造間の因果関係同定への応用

乱流と背景場との動的な相互作用の理解に向けた試みとして，動的モードを利用した構造間因果関係抽出方法の紹介をする．動的な相互作用の例として，大域的乱流シミュレーションで得られたリミットサイクル振動に動的モード分解を適用した成果について述べる[6]．

直線磁化プラズマにおける長谷川・若谷方程式の大域的乱流シミュレーションで得られた時系列データを解析に使用した．本シミュレーションでは，密度・静電ポテンシャル・平行速度場の空間3次元的分布の時間発展が出力され，乱流データは1ケースおおよそ数十ギガバイト程度となる．基礎プラズマ実験でしばしば観測されている強い周方向流れ[33]を渦度ソースを導入することで模擬し，周方向流れの空間不均一性によって駆動されるケルビンヘルムホルツ不安定性の非線形発展を得た．渦度ソースの強度を増加させると，定常的な非線形飽和状態からリミットサイクル振動を伴うダイナミックな状態へ変化した[34]．ここでは，リミットサイクル振動を伴うケースに動的モード分解を適用した結果に焦点を当てる．図2に乱流シミュレーションで得られた非線形飽和状態でのフーリエモード (m, n) の時間発展 (m, n はそれぞれ周方向・軸方向モード数)を示す．ここで背景場は $(0, 0)$ に対応している．軸方向に均一で周方向に有限の波数を持つ揺動が発達している．これはケルビンヘルムホルツ揺動の特徴である．揺動エネルギーが大きく変動し，それと同期して背景場も変動している様子がわかる．また，図2下段で示しているスナップショットを見ると，揺動の空間パターンも時間的に変動していることがわかる．リミットサイクルの周期は $T_{\text{LCO}} \sim 100$ 程度であり，これは乱流の周期 $T_{\text{turb}} \sim 10$ に比べ格段に長い (時間はイオンジャイロ周波数で規格化)．

このような動的乱流状態に動的モード分解を適用する．時刻 t における観測ベクトル y_t を，その時刻における各空間点における密度 $N_i(r_j)$ から作成し， $y_t = [N_t(r_1), N_t(r_2), \dots, N_t(r_m)]$ を用意する．そして，時空間情報マトリックス $Y_1 = [y_0, y_1, \dots, y_{T-1}]$ と，観測時刻

² 厳密 DMD において用いるデータの次元は，本質的には観測量 g_i の数に相当する．分解(2) (または分解(1)) では， g_i の張る空間が十分大きいことを仮定しており (例えば[18])，低次元なデータに対して適用する場合には，数理的に空間を広げる必要がある．具体的な手法もいくつか提案されており，例えば，基底関数を事前に準備する方法[19]や，再生カーネルを用いた方法[20]，ニューラルネットをデータから学習して用いる方法[21, 22]などが提案されている．

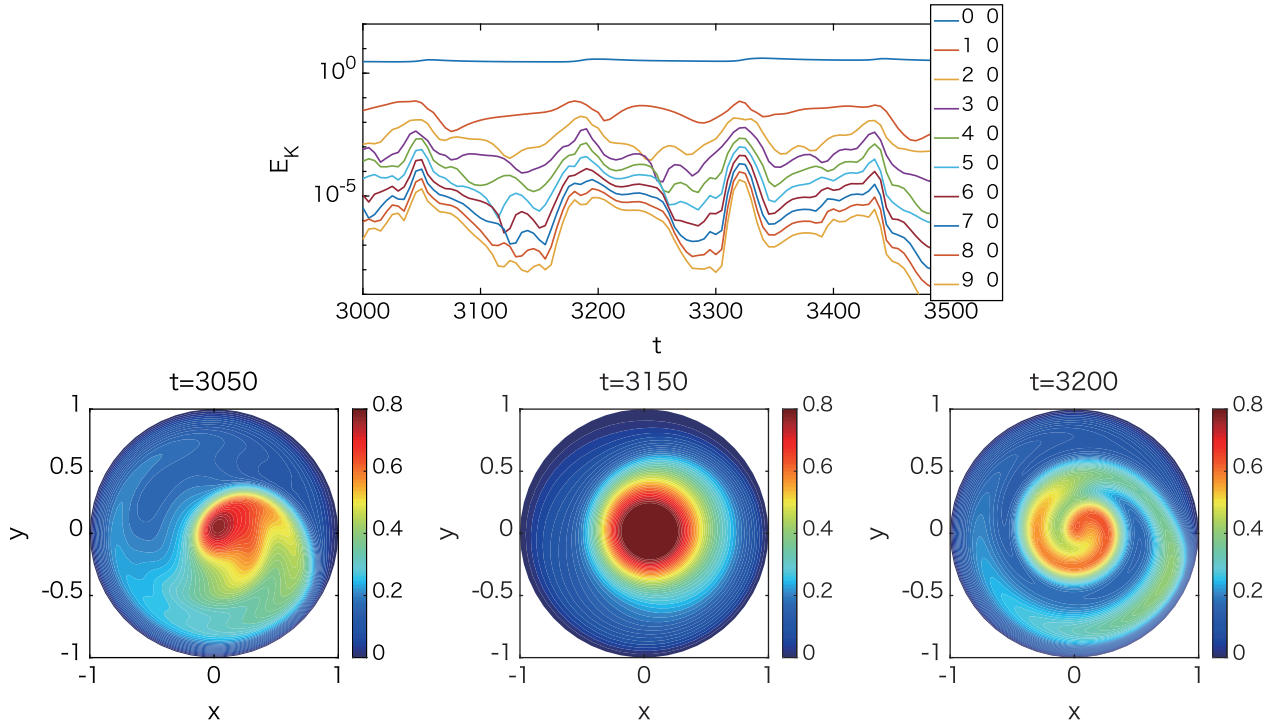


図2 上段：乱流シミュレーションで得られた非線形飽和状態でのフーリエモード(m, n)の時間発展 (m, n はそれぞれ周方向・軸方向モード数)。背景流れ場は(0, 0)に対応している。下段： $t=3050, 3150, 3200$ における密度揺動のスナップショット[6]。

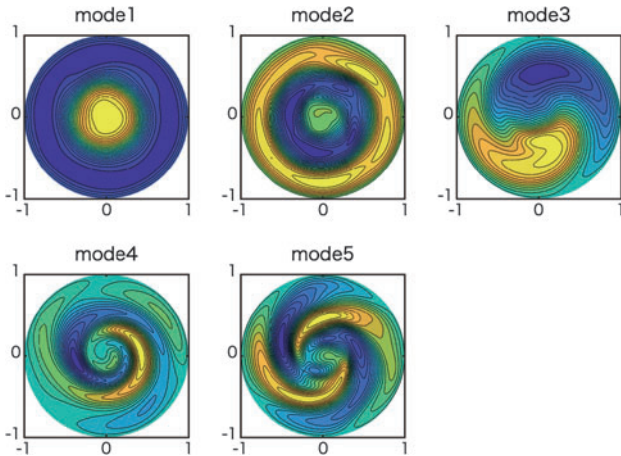


図3 支配的固有関数の空間パターン (Mode1~5) [6]。

を1ステップずらした $Y_2 = [y_1, y_2, \dots, y_T]$ とを準備し、前節で述べた特異値分解による低次元化した動的モード分解を行なった。ここで低次元化に用いたランクは $r=9$ とした。こうして、系の特徴量である固有値 λ_j とそれに対応する固有関数 $\psi_j(\mathbf{r})$ を得ることができる。以下では、リミットサイクル振動とリミットサイクル周期に比べ高周波の乱流の挙動について、動的モード分解より得られた固有関数(特徴的空間構造)間の因果関係を抽出する試みを紹介する。

図3に得られた固有関数(寄与率の大きな上位5つ)を示す。ここでは、寄与率の最も大きなモードから順番に Mode1 から Mode5 と呼ぶことにする。Mode1 は背景密度分布, Mode2 は径方向に有限の波数を持ち周方向に一樣な帯状流成分, Mode3 はコヒーレントなケルビンヘルムホ

ルツ揺動, Mode4, 5 はスパイラル構造に対応している。上述のように、解析している乱流状態は、プラズマの背景分布, 乱流揺動が乱流スケールに比べ長い時間でリミットサイクル振動しており、乱流の空間パターンも大きく変化する。この場合、各 DMD モードの時間発展を決める複素周波数は指数関数的増加・減少しか記述することができないため、各モードの増減を表現するには工夫が必要である。

そこで、畳み込み積分を用いた固有関数の強度を評価する方法を提案する。この方法では、各時間ステップにおいて、得られた固有関数とオリジナルの乱流データとの間で畳み込み積分を行い、その空間最大値を固有関数(特徴的構造)の“強度”とする。すなわち、Mode- j の“強度”の瞬時値 $C_j(t)$ は、次のように計算される。

$$F_j(\mathbf{r}, t) = \left[\int N_t(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \right]^{-1} \int N_t(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \psi_j(\mathbf{r}') d\mathbf{r}', \quad (3)$$

$$C_j(t) = \max_{\mathbf{r}} [F_j(\mathbf{r}, t)]. \quad (4)$$

得られた $C_j(t)$ を図4に示す。 C_j はうまく DMD モードの増減を表現しており、プラズマ背景分布の変形とスパイラル構造の出現・消失まで含めた乱流パターンの変化を明確に捉えることができています。

DMD モードの“強度” C_j を用いて、プラズマ分布や乱流構造間の因果関係を評価することができる。一例として、コヒーレント揺動 (Mode3) とスパイラル構造 (Mode4) について、図4下段に示すように C_3, C_4 の時間発展からリサージュを書くことができる。コヒーレント揺動の振幅が小さな時はコヒーレント揺動とスパイラル構造の強度は共に増加していくが、ある程度コヒーレント揺動

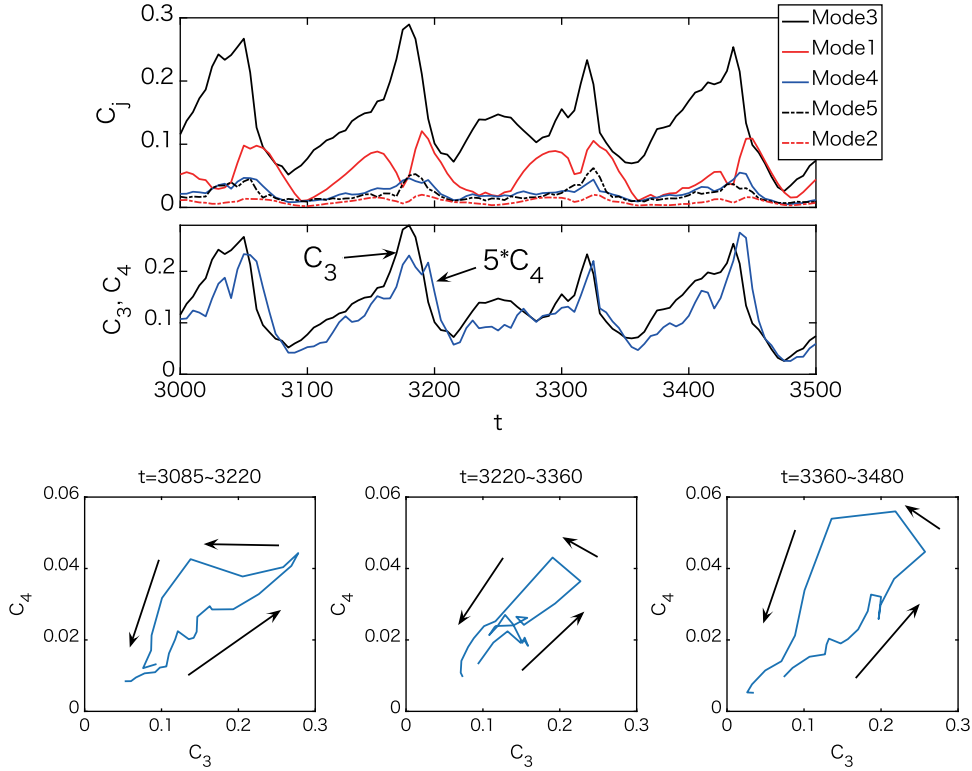


図4 上段：各DMDモードの相関係数 C_j の時間発展。下段：各リミットサイクル周期で描いた (C_3, C_4) 間のリサージュ。ここで C_3 はコヒーレントなKH揺動、 C_4 はスパイラル構造に対応[6]。

が大きくなると、スパイラル揺動の強度が急増し、コヒーレント揺動の強度が大きく減少することがわかる。この増減を繰り返し、リミットサイクル振動が実現していることがわかる。また、スパイラル構造は、コヒーレント揺動の非線形飽和振幅を規定していることを示唆している。

以上のように、DMDモードを用いて乱流構造間の因果関係を同定する方法を紹介した。リミットサイクル振動を伴うケルビンヘルムホルツ乱流に適用した結果を示した。リミットサイクルのように乱流の増減を繰り返す場合は、畳み込み積分による構造“強度”の評価が有効である。得られた構造強度について、モード間のリサージュを描くことで因果関係を抽出できることを示した。コヒーレント揺動の強度がスパイラル構造の出現に規定されていることを示唆する結果を得た。この方法は、他の様々な揺動観測に適用することが容易であり、幅広い波及効果を持つと期待している。また、さらに拡張された発展的な動的モード分解手法もあり（例えば recursive DMD [35]）、今回の解析では使用していない複素周波数の時間変化や位相ダイナミクスを抽出することで、乱流ダイナミクスの理解から輸送への理解への展開も期待される。また、ニューラルネットワークを応用した構造間相互作用への発展も開発が進められている。

4.3.2 乱流現象の定量的予測への応用

動的モード分解をプラズマ乱流の観測データに適用することで、乱流挙動を予測する試みについて紹介する。ここでは、ハンケル行列とスパース動的モード分解を用いた方法について述べる。

一般に、実験から時系列データを取得する場合、データ

の次元 m は時間ステップ数 T よりも極端に小さくなることが多い。これは設置できるセンサー数に限りがあるためであり、数値シミュレーションとの大きな違いである。固有値分解に基づく標準的動的モード分解アルゴリズムでは、モード数は最大でも m しか得られない。仮に、モード数が $T(>m)$ 以上あれば、観測ノイズまで含めてデータを正確に再構成できる。換言すると、回帰モデル $Y_2 = AY_1$ は、縦長のデータ行列には厳密にフィットし得るのに対し、極端に横長のデータ行列には表現力が十分でない。別の見方をすると、動的システムを構成する本質的なモードの数よりも少ないモード数でフィッティングすると、挙動の近い複数の本質的なモードが近似的に1つのモードでまとめて表現される。さらに観測ノイズがあれば、ノイズに対応して付加されるモードもまとめて表現される。こうして得られたモードの重ね合わせでは、十分正確にデータを再構成することができない。

このような問題を解決するために、動的システムが有するモード（本質的なモードとノイズ由来のモード）の数以上のモードを用いてフィッティングすることで必要なモードを正確に推定したのちに、不要なモードを取り除くというアプローチを提案する。それぞれ、ハンケル行列作成とスパース動的モード分解によって実装することができる。ハンケル行列は、元の時系列データから窓幅 w とスライド幅 s で切り出したデータを h 回積み上げて、次のように定義される。

$$Y_H := \begin{bmatrix} Y(0, T-sh) \\ Y(s, T-sh+s) \\ Y(2s, T-sh+2s) \\ \vdots \\ Y(sh, T) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+hm) \times (T-sh+1)}, \quad (5)$$

$$Y(i, i+j) := [y_i, y_{i+1}, y_{i+2}, \dots, y_{i+j}]. \quad (6)$$

このハンケル行列に対して動的モード分解を適用することで、モード数は hm だけ増加する。標準的動的モード分解では、時刻 t における観測ベクトル y_t は行列 A の固有値分解から、式(2)のように展開された。スパース動的モード分解では以下の手続きにより寄与率 z_j を決め直す。まず、観測した時空間行列と再構成した時空間行列の差の Frobenius ノルムを最小化するための目的関数を $J(z)$ とし、L1 正則化項を加えた次の最適化問題を解く。

$$\text{minimize}_z J(z) + \gamma \sum_j |z_j|. \quad (7)$$

最適化でゼロとなった寄与率 z_j を拘束した条件下で、再び正則化項を外した $J(z)$ のみ最小化して、最終的な寄与率 z_j を決定する。以上の手続きで、重要度の低いモードが取り除かれる。アルゴリズムの詳細は、文献[36]を参照された。

我々は、動的モード分解による乱流データの解析を進めてきた[7]。解析に使用した乱流データは、九州大学にある直線磁化プラズマPANTA装置で観測されたイオン飽和電流を用いた。周方向に64チャンネル設置されているラングミュアプローブアレイによって1マイクロ秒ステップで計測された時空間発展を使用した。PANTA 装置では、放電条件によって帯状流やストリーマ、孤立波状態等の様々な乱流状態が存在するが[37]、ストリーマ構造が支配的な条件で解析を行った[38]。この放電では、5 kHz 程度のドリフト波乱流と1 kHz 程度のストリーマ構造が共存している。このデータからハンケル行列を作成することは、上流側にプローブアレイを擬似的に増設していることに相当する。ここでは、 $s=100$ と $h=5$ の設定で、時間区間 $T=3$ ms のデータで学習し、その先の予測を試みた。

この計測データにおいて、スパース動的モード分解の適用は、時空間データからのノイズ除去に相当する。ノイズ除去の様子を、DMD モードの複素周波数の観点から図5に示す。ここで、複素平面における単位円付近の成分（赤丸）は動的システムの本質的なモードであり、単位円から離れた成分（青丸）はノイズ由来のモードと考えられる。実際、青丸で示した DMD モードは減衰が大きく、周波数が高く、寄与率が小さい。ただし、ここで述べるノイズ除去の方法は高周波なランダムノイズに対するものだけに適用可能なものであるため、計測器の基本的なノイズ対策は必要である[39]。以降の結果は、赤丸で示した DMD モードのみから得られるものである。

図6は計測データ（訓練データと検証データ）、提案アプローチおよび標準的動的モード分解における再構成と予

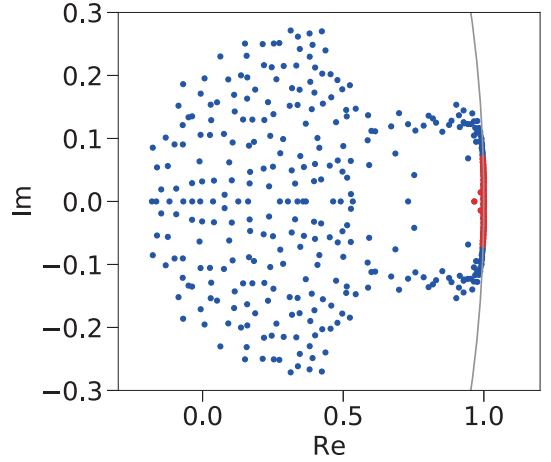


図5 DMD モードの複素周波数。青がスパース DMD で除去された DMD モード、赤の DMD モードのみを解析に使用した。

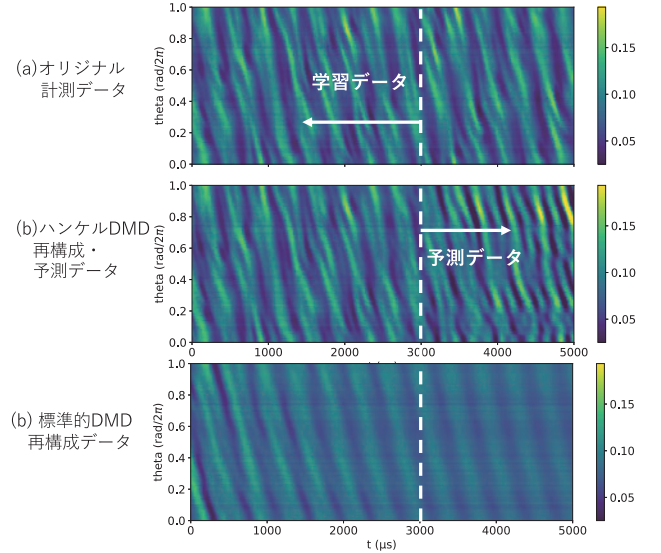


図6 乱流時空間発展の学習と予測：上段から順にオリジナル計測データ、ハンケル・スパース DMD を用いた再構成と予測、標準的 DMD を用いた再構成と予測[40]。 $t < 3000[\mu s]$ は学習領域、 $t > 3000[\mu s]$ は予測領域。

測である[40]。L1 正則化のパラメータ γ は、DMD モードの数が計測点数64以下となるように調節した。標準的動的モード分解では、時空間パターンは時間とともに減衰して、細部も正確に再構成できていないのに対し、提案アプローチではこの問題が大幅に改善されている。このように精度良く再構成する動的モード分解を用いると、乱流の空間構造を含めた時間発展をより正確に予測できる。予測性能を定量的に議論するため、以下の誤差指標 $E(t)$ を導入する。

$$E(t) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{64} \{\hat{y}_i(t) - y_i(t)\}^2}{\sum_{i=1}^{64} y_i(t)^2}} \quad (8)$$

ここで、 $\hat{y}_i(t)$ と $y_i(t)$ は、それぞれ、時刻 $t(> T_{dt})$ 、計測点 i における予測データと検証データである。誤差指標に対して、

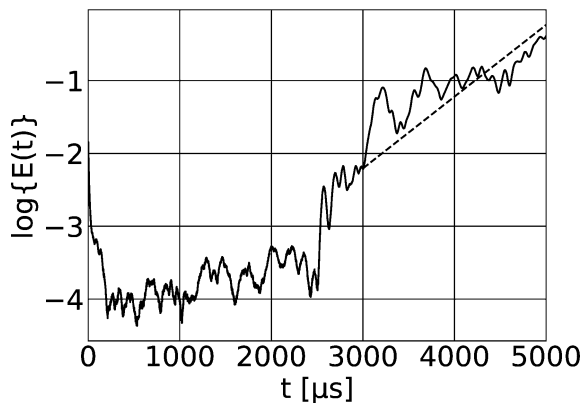


図7 予測誤差指標 $E(t)$ の時間発展. $t > 3000[\mu\text{s}]$ が予測領域.

$$E(t) = E(0) \exp(t/\tau) \quad (9)$$

というフィッティングを行うことで、予測可能時間 τ を評価する. 図7は $E(t)$ の対数プロットであり, $\tau \approx 1000$ マイクロ秒程度であると評価できる.

現状では支配的乱流揺動(周期200マイクロ秒程度)の数周期程度の予測が空間構造を含めてできている. 解析に用いたショットでは, ストリーマに起因するミリ秒スケールの空間局在した輸送が起こっている[41]. 今後, より長時間の予測が可能となれば, このような突発的・間欠的な輸送現象の空間構造を含めた予測にも応用できる可能性がある.

4.4 まとめ

本章ではデータ駆動科学的手法として近年注目されている動的モード分解について, 理論的基礎から応用例まで紹介した. 動的モード分解は流体现象の時空間構造を観測/計測データから抽出するための数値解析手法の一つとして提案されたものであり, ここではプラズマ乱流への応用について紹介した. 動的モード分解を用いると, 時空間発展データから統計的に重要な空間構造とその構造に対応する複素周波数を得ることができ, より少数の自由度でシステムを理解することが可能となる. 物理機構の理解をめざした応用例として, 大域的乱流シミュレーションで得られた乱流場に適用した例を紹介した. ここでは動的モード分解によって抽出された特徴的空間構造を元データとの畳み込み積分を行うことで構造間の動的因果関係を抽出する方法を提案した. また, 時空間発展予測へ向けた応用例として, 実験で観測された乱流の時空間発展について, ハンケル行列とスパース動的モード分解を適用し, 空間構造を含む乱流の発展を予測した試みを紹介した. 今後, 突発的輸送等の空間発展予測を可能にすると期待される.

謝辞

本研究は九州大学若手研究者グローバルリーダー育成型 Progress 100 (NB80645028) および九州大学数理・データサイエンスに関する教育・研究支援プログラムの支援を受けました. また JSPS 科研費 JP18H03287, 16K18335,

17H06089, 16H02442, 15H02155, 15H02335, 18K03578, 19J00871, 九州大学応用力学研究所共同利用研究および JST CREST JPMJCR1913 の助成をいただきました. R.O. Dendy 教授, 稲垣滋教授との有益な議論に感謝いたします.

参考文献

- [1] P.H. Diamond *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **47**, R35 (2005).
- [2] J.W. Connor *et al.*, Phys. Plasmas **5**, 2687 (1998).
- [3] F. Wagner, Plasma Phys. Control. Fusion **49**, B1 (2007).
- [4] J.D. Callen and M.W. Kissick, Plasma Phys. Control. Fusion **39**, B173 (1997).
- [5] P.J. Schmid, J. Fluid Mech. **656**, 5 (2010).
- [6] M. Sasaki *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **61**, 112001 (2019).
- [7] A. Kusaba *et al.*, Plasma Fusion Res. **15**, 1301001 (2020).
- [8] A.A. Kaptanoglu *et al.*, Phys. Plasmas **27**, 032108 (2020).
- [9] R. Taylor *et al.*, Rev. Sci. Instrum. **89**, 053501 (2018).
- [10] H. Natsume *et al.*, Phys. Plasmas **27**, 042301 (2020).
- [11] C.W. Rowley *et al.*, J. Fluid Mech. **641**, 115 (2009).
- [12] P.J. Schmid, J. Fluid Mech. **656**, 5 (2010).
- [13] K. Taira *et al.*, Aiaa Journal **55**, 4013 (2017).
- [14] S. Klus *et al.*, J. Nonlinear Sci. **30**, 283 (2020).
- [15] I. Mezić, Annu. Rev. Fluid Mech. **45**, 357 (2013).
- [16] B. Koopman, Proc. National Academy of Sciences of the United States of America **17**, 315 (1931).
- [17] A. Mauroy *et al.*, Physica D **261**, 19 (2013).
- [18] J.H. Tu *et al.*, J. Comput. Dyn. **1**, 391 (2014).
- [19] M.O. Williams *et al.*, J. Nonlinear Sci. **25**, 1307 (2015).
- [20] Y. Kawahara, Neural Inf. Process. Syst. **29**, 911 (2016).
- [21] N. Takeishi *et al.*, Adv. Neural Inf. Process. Syst. **30**, 1130 (2017).
- [22] B. Lusch *et al.*, Nat. Commun **9**, 4950 (2018).
- [23] M. Korda and I. Mezic, J. Nonlinear Sci. **28**, 687 (2018).
- [24] B.J. Cantwell, Annu. Rev. Fluid Mech. **13**, 457 (1981).
- [25] B.W. Brunton *et al.*, J. Neurosci. Methods **258**, 1 (2016).
- [26] J.L. Proctor and P.A. Eckhoff, Int. Health **7**, 139 (2015).
- [27] J. Mann and J.N. Kutz, Finance **16**, 643 (2016).
- [28] K. Fujii *et al.*, Sci. Rep. **9**, 16755 (2019).
- [29] K. Fujii *et al.*, Proc. 2017 European Conf. on Machine Learning and Principles and Practice of Knowledge Discovery in Databases (ECML-PKDD'17), pages 127 (2017).
- [30] T. Bito *et al.*, Proc. 2019 Int'l Joint Conf. on Neural Networks (IJCNN'19), number 19278 (2019).
- [31] K. Fujii *et al.*, Sci. Rep. **10**, 3005 (2020).
- [32] H. Shiraishi *et al.*, J. Neural Eng. **17**, 036009 (2020).
- [33] B.M. Annaratone *et al.*, Phys. Plasmas **18**, 032108 (2011).
- [34] M. Sasaki *et al.*, Phys. Plasmas **26**, 042305 (2019).
- [35] B.R. Noack *et al.*, J. Fluid Mech. **809**, 843 (2016).
- [36] M. R. Jovanović *et al.*, Phys. Fluids **26**, 024103 (2014).
- [37] T. Kobayashi *et al.*, Plasma Fusion Res. **12**:1401019 (2017).
- [38] T. Yamada *et al.*, Nat. Phys. **4**, 721 (2008).
- [39] 永島芳彦, 稲垣 滋: プラズマ・核融合学会誌 **96**, 2 (2020).
- [40] A. Kusaba *et al.*, submitted to Plasma Fusion Res. (2020).
- [41] F. Kin *et al.*, Phys. Plasmas **26**, 042306 (2019).