J. Plasma Fusion Res. Vol.94, No.7 (2018) 341‐348

解説

流れや磁気島のある MHD 平衡の疑似アニーリング

Simulated Annealing for MHD Equilibria with Flow and/or Magnetic Island

古川　勝
FURUKAWA Masaru
鳥取大学工学部

（原稿受付：2018年３月19日）

磁気流体力学（MagnetoHydroDynamics, MHD）平衡計算の新しい方法として，疑似アニーリングを提案している．理想MHD方程式がハミルトニアンとPoisson括弧を用いて書かれることに基づき導いた人工的な発展方程式を解くことにより，MHD方程式に内在する不変量を保持したままエネルギーを極値へと導くことができる．このエネルギー極値がMHD平衡である．プラズマ流や磁気面の存在について特別な仮定をしないので，従来のMHD平衡計算法で求められるものより広いクラスの平衡を求められる可能性がある．本稿では疑似アニーリングの考え方を簡単な例を用いて説明し，MHDへの適用について定式化および計算例を示す．

Keywords:
MHD equilibrium, simulated annealing, plasma flow, magnetic island, three-dimensional effect

1．はじめに

磁気流体力学（MagnetoHydroDynamics, MHD）平衡，つまりMHD方程式の定常解を求める問題の歴史は長い．核融合プラズマ分野では，1950年代後半には既に軸対称トーラスプラズマの理想MHD平衡方程式が２階の楕円型偏微分方程式として導かれている[1‐3]．これはGrad-Shafranov（G-S）方程式と呼ばれ，現代でも核融合プラズマ研究において重要な地位を占めている．G-S方程式の数値解法も確立しており[4]，レビュー記事にまとめられている[5]．軸対称な場合，磁力線の方程式は可積分となり，入れ子状の磁気面が形成される．

G-S方程式自体の様々な拡張も行われてきた．本記事に関係が深い拡張として，トロイダル方向の平衡流を考慮したもの[6]や，トロイダル・ポロイダル方向の両方を考慮したもの[7,8]も導かれている．流れがポロイダル方向にもある場合には，その流れの速さによっては平衡方程式が楕円型から双曲型に変わる場合があり，このような場合も含めて一般的に軸対称トーラスの理想MHD平衡を求める方法は確立していない．

非軸対称トーラスプラズマの理想MHD平衡については，少し前までは主たる研究対象はステラレータであった．最近では，軸対称として扱われてきたトカマクプラズマでも実際には軸対称性が少し破れており，そのことに起因するプラズマ閉じ込め劣化が問題とされている．また，逆に，軸対称性を意図的に破ることで，プラズマを制御しようとする試みも増えている．そのため，ステラレータ用に開発されてきた数値計算コードを３次元変形したトカマクプラズマに用いることも増えてきた．この意味でも，非軸対称トーラスプラズマのMHD平衡計算の重要性が増している．

以下で，幾つかの非軸対称（３次元）MHD平衡の数値計算コードを簡単に紹介する．まず，入れ子状の磁気面の存在を仮定し，系のエネルギーが最小になるようにそれら磁気面の形を決めるVMEC（Variational Moment Equilibrium Code）[9,10]は広く用いられてきた．しかし，系に空間対称性がない場合には入れ子状の磁気面の存在は保証されず，その存在の仮定は平衡解に強い制約を課している可能性がある．

次に，HINT（Helical Initial value solver for Toroidal equilibria）コード[11,12]およびHINT2コード[13]は，MHD方程式の定常解を反復法によって求めるものである．反復の仕方が若干異なるものとしてPIES（Princeton Iterative Equilibrium Solver）[14]もある．これらは磁気面の存在を特に仮定せず，磁気島やストキャスティックな磁力線領域があるようなMHD平衡を求めることができる．HINT2では，トロイダル方向のプラズマ流を考慮する拡張が進められつつある[15]が，ポロイダル方向のプラズマ流は考えられていない．

最近開発されたコードでは，トーラスプラズマを複数の入れ子状の環状領域に分割し，それぞれの領域の中では圧力が平坦（電流と磁場が平行で，いわゆるforce-free）な解を求め，領域の境界で全圧が連続として大域的な解を構築するSPEC（Stepped Pressure Equilibrium Code）[16]がある．理論的に大変興味深いが，どのように環状領域に分割すればよいのかは自明でなく，任意性がある．

以上のような先行研究を踏まえ，磁気面の存在を仮定す

Faculty of Engineering, Tottori University, TOTTORI 680-8552, Japan

author's e-mail: furukawa@tottori-u.ac.jp

る必要がなく，トロイダルおよびポロイダル方向のプラズマ流を含めた理想 MHD 平衡を求める方法として，筆者らは疑似アニーリングを提案している．英語では Simulated Annealing（SA）という．"SA"の定着した日本語訳がなかったため，本解説記事では“疑似アニーリング”という言葉を使うが，疑似アニーリングという言葉自体は他分野で用いられている例があり，それらとは異なることを注意しておく．

ここで扱う疑似アニーリングは，エネルギーが保存する Hamilton 系の発展方程式に細工を施してエネルギーが単調変化する人工的な系を導き，その時間発展を解くことで元の系の定常解を求めようという方法である．以下，有限次元の Hamilton 力学系を用いて基本的な考え方を概説する．１次元調和振動子の Hamilton 方程式は

$$\dot{u}^i = J^{ij}\frac{\partial H}{\partial u^j}, \qquad (i,j=1,2) \tag{1}$$

と書ける．Einstein の規約を用いている．ここで，$\boldsymbol{u}=(u^1,u^2)^{\mathrm{T}}:=(q,p)^{\mathrm{T}}$ は正準座標 q と正準運動量 p のベクトル，$\dot{u}^i$ は u^i の時間微分，$H(\boldsymbol{u}):=\frac{1}{2}(q^2+p^2)$ はハミルトニアンで，

$$J:=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

は歪対称行列である．もちろん，系のエネルギーは保存する．関数 $f(\boldsymbol{u})$，$g(\boldsymbol{u})$ に対する Poisson 括弧を

$$\{f,g\}:=\frac{\partial f}{\partial q}\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{\partial f}{\partial p}\frac{\partial g}{\partial q} \tag{3}$$

と定義すると，

$$\dot{u}^i=\{u^i,H\}, \qquad (i=1,2) \tag{4}$$

とも書ける．

次に，以下のような人工的な発展方程式を考えてみる：

$$\dot{u}^i = J^{ij}K_{jk}J^{k\ell}\frac{\partial H}{\partial u^\ell}, \qquad (i,j,k,\ell=1,2). \tag{5}$$

K は正定値の 2×2 行列である．Poisson 括弧を使う場合は

$$\dot{u}^i=\{u^i,u^j\}K_{jk}\{u^k,H\}, \qquad (i,j,k=1,2) \tag{6}$$

と書ける．仮に K を単位行列とすると，

$$JKJ=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{7}$$

となるから，系のエネルギーは単調減少し，最終的にはエネルギーがゼロの状態に漸近する．もちろん $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ はこの系の定常解である．

以上はトリビアルな例であった．理想 MHD を含め理想流体は無限次元の Hamilton 系として書けるので，同様の方法によって定常解を求めることができると考えられる．ただし，理想流体の場合は後述する Casimir 不変量によって運動が制約を受けているので，調和振動子の例で $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{0}$ にあたるトリビアルな定常解でなく，構造をもった定常解に至ることが期待される．

このように，元の Hamilton 系の構造を利用して導かれた人工的な発展方程式を解くことによって系の定常解を求める方法は，２次元中性流体の渦運動に最初に適用された[17,18]．また，より一般の Hamilton 系に対してもこの考え方が使えることが示された[19]．最近になり，人工的な発展方程式の構成方法が大幅に拡張された[20]．調和振動子の例で示した K にあたる部分に，空間的な平滑化などの効果をもたせることができる“対称括弧”による人工的ダイナミクスや，系に拘束条件を掛けることができる“Dirac 括弧”による人工的ダイナミクス，さらにそれらの結合が導入された．同時に，"simulated annealing"という言葉も導入された．これらを用いた，２次元中性流体の様々な定常解の数値計算例も示された．

次節から，疑似アニーリングを MHD に適用する研究について述べていく．２節では，[20]で導入され，筆者らが MHD に疑似アニーリングを適用する際に用いている対称括弧による定式化について，まず一般論を述べた後，具体例も示す．３節では，低ベータ簡約化 MHD[21]を用い，磁気島のある定常解がエネルギー極小状態として求められたシミュレーション結果を紹介する．最後に，４節で最新の進展と今後の課題を述べ，まとめる．

２．理論

2.1 一般論

本解説では，理想流体の運動に疑似アニーリングを適用する．理想流体の運動は，ハミルトニアンと Poisson 括弧で書かれる[22-24]．まず最初に，任意の２つの汎関数 $F[\boldsymbol{u}]$，$G[\boldsymbol{u}]$ に対する一般的な Poisson 括弧を次のように定義する：

$$\{F,G\}:=\int_{\mathcal{D}}\mathrm{d}^N x'\int_{\mathcal{D}}\mathrm{d}^N x''\frac{\delta F[\boldsymbol{u}]}{\delta u^i(\boldsymbol{x}')}J^{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')\frac{\delta G[\boldsymbol{u}]}{\delta u^j(\boldsymbol{x}'')}. \tag{8}$$

ここで，$\boldsymbol{u}$ は状態ベクトル，添字 i，j は $\boldsymbol{u}$ が M 元ベクトルのとき $1,\cdots,M$ をとり，N は空間の次元，$\mathcal{D}$ は空間領域である．$(J^{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''))$ は Poisson 括弧の歪対称性 $\{F,G\}=-\{G,F\}$，双線形性 $\{aF+bG,H\}=a\{F,H\}+b\{G,H\}$，Leibnitz 則 $\{FG,H\}=F\{G,H\}+\{F,H\}G$，Jacobi 恒等式 $\{F,\{G,H\}\}+\{G,\{H,F\}\}+\{H,\{F,G\}\}=0$ を満たすように選ぶ．ただし，ここの $H[\boldsymbol{u}]$ だけは任意の汎関数で，a，b は定数である．また，$F[\boldsymbol{u}]$ の変分 $\delta F[\boldsymbol{u}]$ を通じて汎関数微分 $\frac{\delta F[\boldsymbol{u}]}{\delta u^i}$ を定義する：

$$\delta F[\boldsymbol{u}]=\left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\epsilon}F[\boldsymbol{u}+\epsilon\tilde{\boldsymbol{u}}]\right|_{\epsilon=0} =:\int_{\mathcal{D}}\mathrm{d}^N x\frac{\delta F[\boldsymbol{u}]}{\delta u^i}\tilde{u}^i. \tag{9}$$

さらに，$(J^{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''))$ は，理想流体の運動を表す発展方程式が

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \{u^i, H\} \tag{10}$$

となるように選ぶ．ここの $H[\boldsymbol{u}]$ はハミルトニアン汎関数である．

任意の汎関数$F[\boldsymbol{u}]$とのPoisson括弧が恒等的にゼロになる汎関数$C[\boldsymbol{u}]$，つまり

$$\{C, F\} \equiv 0 \tag{11}$$

を満たす$C[\boldsymbol{u}]$をCasimir不変量という．記述したい系に対するPoisson括弧（歪対称作用素）が，その系のCasimir不変量を決める．系の状態を表す相空間において，Casimir不変量が同じ値をとる“面”をCasimirリーフと呼ぶ．理想流体の運動ではエネルギーが保存するので，初期値によって定まる相空間内の点は，Casimirリーフ上でハミルトニアンの等高線に沿って運動する．

次に，任意の汎関数$F[\boldsymbol{u}]$と$G[\boldsymbol{u}]$に対する対称括弧を次のように定義する：

$$((F, G)) := \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^N x' \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^N x'' \{F, u^i(\boldsymbol{x}')\} K_{ij}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'') \{u^j(\boldsymbol{x}''), G\}. \tag{12}$$

ここで，$(K_{ij}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''))$ は正定値（または負定値）の対称積分核である．

この対称括弧を用いて，疑似アニーリングの人工的な発展方程式を以下とする：

$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = ((u^i, H)) \tag{13}$$

$$= \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^N x' \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^N x'' \{u^i, u^j(\boldsymbol{x}')\} K_{jk}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'') \{u^k(\boldsymbol{x}''), H\}. \tag{14}$$

ただし，$H[\boldsymbol{u}]$ はハミルトニアン汎関数である．第1節で述べた調和振動子に対する人工的な運動方程式との類似が見えるだろう．

この対称括弧による人工的な運動では，ハミルトニアンが単調減少（対称積分核が負定値の場合は単調増加）する一方，Casimir不変量は保持されることが以下からわかる．まず，任意の汎関数 $F[\boldsymbol{u}]$ の時間微分が

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} &= \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^N x \frac{\delta F[\boldsymbol{u}]}{\delta u^i} \frac{\partial u^i}{\partial t} \\ &= \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^N x \frac{\delta F[\boldsymbol{u}]}{\delta u^i} ((u^i, H)) \\ &= ((F, H)) \qquad (15) \\ &= \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^N x' \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^N x'' \\ &\quad \{F, u^i(\boldsymbol{x}')\} K_{ij}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'') \{u^j(\boldsymbol{x}''), H\} \qquad (16)\end{aligned}$$

と書ける．F に H を代入し，$(K_{ij}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''))$ が正定値，$\{u^i, H\} = -\{H, u^i\}$ を使うと，$\mathrm{d}H/\mathrm{d}t \leq 0$ となることがわかる．したがって，この人工的な運動によるとハミルトニアンは単調減少し，ハミルトニアンが極小の状態に漸近していく．$\mathrm{d}H/\mathrm{d}t = 0$ のとき，再び $(K_{ij}(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}''))$ が正定値であることと$\{u^i, H\} = -\{H, u^i\}$を考慮すると，$\{\boldsymbol{u}, H\} = 0$であることがわかる．これは，基になった理想流体の運動方程式の定常状態に他ならない．一方，F にCasimir不変量 C を代入すると，被積分関数の中で$\{C, u^i(\boldsymbol{x}')\} \equiv 0$ となるから，$\mathrm{d}C/\mathrm{d}t = 0$ ということになる．つまり，元の系のCasimir不変量は，人工的な運動でも保持される．つまり，この人工的な運動により，Casimir不変量を保持したまま系のエネルギーを極値に導き，理想流体の定常解を求めることができる．

2.2 2次元渦運動

次に，偏微分方程式系としては最も簡単な具体例と思われる2次元平面上の非圧縮中性流体の運動について述べる．本記事ではこの系のことを2次元渦運動と呼ぶ．まず支配方程式を整理しておく．非圧縮中性流体が x-y 平面内で運動するとし，それに垂直な方向に z 軸をとるとき，流速は $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{z}} \times \nabla\varphi$ と書ける．ここで $\hat{\boldsymbol{z}}$ は z 方向の単位ベクトル，φ は流れ関数である．渦度を $U := \hat{\boldsymbol{z}} \cdot \nabla \times \boldsymbol{v} = \Delta_\perp \varphi$ として，渦度方程式は

$$\frac{\partial U}{\partial t} = [U, \varphi] \tag{17}$$

$$:= \frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial U}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} \tag{18}$$

となる．なお，x-y 平面内のラプラシアンを $\Delta_\perp := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ とした．

ここから，疑似アニーリングの定式化を行う．状態ベクトルは渦度のみから成る1元ベクトル $\boldsymbol{u} := (U)$ である．ハミルトニアン汎関数は運動エネルギー

$$H[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^2 x \ |\nabla_\perp (\Delta_\perp^{-1} U)|^2 \tag{19}$$

である．空間領域を$\mathcal{D}$とし，$\nabla_\perp$ は x-y 平面の勾配演算子である．このとき，$H[\boldsymbol{u}]$ の U による汎関数微分は，定義にしたがって $H[\boldsymbol{u}]$ の変分を計算することにより，

$$\frac{\delta H[\boldsymbol{u}]}{\delta U} = -\varphi \tag{20}$$

とわかる．なお，計算途中で部分積分を行った際に現れる境界項は適切な境界条件の下で消えるものとした．さらに，汎関数のPoisson括弧を考えたいので，領域$\mathcal{D}$内の任意の場所$\boldsymbol{x}_0 = (x_0, y_0)$で，ある時刻$t$ での渦度を与える汎関数 $U(\boldsymbol{x}_0, t)[\boldsymbol{u}]$ を次のように定義する：

$$U(\boldsymbol{x}_0, t)[\boldsymbol{u}] := \int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^2 x \ U(\boldsymbol{x}, t) \delta^2(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0). \tag{21}$$

2次元のDiracのデルタ関数を $\delta^2(\boldsymbol{x})$ と書いた．被積分関数に現れている $U(\boldsymbol{x}, t)$ は，時間と場所の関数である渦度 U である．引数に$[\boldsymbol{u}]$がある場合は汎関数を表している．$U(\boldsymbol{x}_0, t)[\boldsymbol{u}]$ の変分から

$$\frac{\delta U(\boldsymbol{x}_0,t)[\boldsymbol{u}]}{\delta U(\boldsymbol{x},t)}=\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_0) \tag{22}$$

となる．これらを用い，またこの例の場合は1×1 行列の形になる歪対称作用素 J を

$$J(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''):=-\delta^2(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')[U(\boldsymbol{x}'',t),\circ] \tag{23}$$

と定義して，$\{U(\boldsymbol{x}_0,t),H\}$ をPoisson括弧の定義にしたがって計算すると，

$$\begin{aligned}&\{U(\boldsymbol{x}_0,t),H\}\\&\quad=\int_{\mathcal{D}}\mathrm{d}^2x'\int_{\mathcal{D}}\mathrm{d}^2x''\\&\qquad\delta^2(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}_0)\delta^2(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')[U(\boldsymbol{x}'',t),\varphi(\boldsymbol{x}'',t)]\\&\quad=[U(\boldsymbol{x}_0,t),\varphi(\boldsymbol{x}_0,t)]\end{aligned} \tag{24}$$

となり，本節の冒頭で紹介した渦度方程式の右辺を $(\boldsymbol{x}_0,t)$ で評価した値になることがわかる．したがって，

$$\frac{\partial U(\boldsymbol{x}_0,t)[\boldsymbol{u}]}{\partial t}=\{U(\boldsymbol{x}_0,t),H\} \tag{25}$$

は $\boldsymbol{x}_0$ における渦度 U の時間発展を記述する渦度方程式になっている．

対称括弧については，今の例の場合は対称積分核も1×1 行列の形になる．例えば $K(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')=\delta^2(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')$ と選んでみると，

$$\begin{aligned}&((U(\boldsymbol{x}_0,t),H))\\&\quad=\int_{\mathcal{D}}\mathrm{d}^2x'\int_{\mathcal{D}}\mathrm{d}^2x''\\&\qquad\{U(\boldsymbol{x}_0,t),U(\boldsymbol{x}',t)\}\delta^2(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')\{U(\boldsymbol{x}'',t),H\}\end{aligned} \tag{26}$$

となる．ここで，

$$\{U(\boldsymbol{x}_0,t),U(\boldsymbol{x}_1,t)\}=[U(\boldsymbol{x}_1,t),\delta^2(\boldsymbol{x}_0-\boldsymbol{x}_1)] \tag{27}$$

となるから

$$((U(\boldsymbol{x}_0,t),H))=-[U(\boldsymbol{x}_0,t),[U(\boldsymbol{x}_0,t),\varphi(\boldsymbol{x}_0,t)]] \tag{28}$$

となる．ハミルトニアンの汎関数微分およびPoisson括弧の形を思い出すと，これはまさに

$$((U,H))=J^2\frac{\delta H[\boldsymbol{u}]}{\delta U} \tag{29}$$

の形になっており，Poisson括弧を2回作用したことを意味する．

もう少し一般的に，対称積分核をデルタ関数にせず式変形を進めると

$$((U(\boldsymbol{x}_0,t),H))=[U(\boldsymbol{x}_0,t),\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}_0,t)], \tag{30}$$

$$\tilde{\varphi}(\boldsymbol{x}_0,t):=-\int_{\mathcal{D}}\mathrm{d}^2x''K(\boldsymbol{x}_0,\boldsymbol{x}'')[U(\boldsymbol{x}'',t),\varphi(\boldsymbol{x}'',t)] \tag{31}$$

となる．つまり，渦度 U は φ でなく $\tilde{\varphi}$ で移流されるということである．この人工的な移流は，Casimir不変量（例えばエンストロフィ）を保持したままエネルギーを極値化する．

この $\tilde{\varphi}$ の形を見ると，対称積分核の選び方にはかなり任意性があることがわかるだろう．例えば，$\Delta_\perp g(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}')=-\delta^2(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')$ によって定義される2次元のGreen関数 $g(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}'')$ を対称積分核に選ぶと，$((U,H))$ の高波数成分を小さくする効果が得られる．つまり，初期値が高波数成分を含まなければ，時間発展の間に高波数成分が生じるのを抑えることができる．一方，初期値が既に高波数成分をもっている場合は，その時間変化が小さくなり，いつまでも高波数成分が消えないということになる．

なお，一点注意がある．2次元渦運動の場合に系のエネルギーを極小化すると，エンストロフィを固定したままエネルギーが減るので，エネルギーが高波数成分に集中しKelvinスポンジという状態になる[20]．2次元渦運動の場合には，実は系のエネルギーを極大化したときに，空間的に滑らかな構造をもった流れの定常解が得られる．

2.3 低ベータ簡約化MHD

低ベータ簡約化MHDモデル［21］は，プラズマの巨視的な磁気流体的運動を記述する上で最も簡約化されたモデルであろう．強い背景磁場に垂直な面内の渦運動と，磁力線方向のOhm則が結合した方程式系である．z 方向に強い一様磁場があるとして，磁場を $\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{z}}+\nabla\psi\times\hat{\boldsymbol{z}}$ と表す．代表的な磁場強度で規格化している．また，速度場は2次元渦運動のときと同様に $\boldsymbol{v}=\hat{\boldsymbol{z}}\times\nabla\varphi$ と表す．このとき，z 方向への場の量の変化がないと仮定すれば，簡約化MHD方程式は以下のようになる：

$$\frac{\partial U}{\partial t}=[U,\varphi]+[\psi,J], \tag{32}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=[\psi,\varphi]. \tag{33}$$

ここで，渦度 $U:=\Delta_\perp\varphi$ は2次元渦運動のときと同じ，電流密度は $J:=-\hat{\boldsymbol{z}}\cdot\nabla\times\boldsymbol{B}=\Delta_\perp\psi$ で，2つの任意関数の間のPoisson括弧も2次元渦運動のときと同じものである．(32)式が渦度方程式，(33)式が磁力線方向のOhm則である．粘性や電気抵抗の効果は落としている．

この系の状態ベクトルは $\boldsymbol{u}=(u^1,u^2)^{\mathrm{T}}:=(U,\psi)^{\mathrm{T}}$ であり，ハミルトニアンは

$$H[\boldsymbol{u}]:=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\mathrm{d}^2x\ (|\nabla_\perp(\Delta_\perp^{-1}U)|^2+|\nabla_\perp\psi|^2) \tag{34}$$

である．被積分関数の第1項が運動エネルギー，第2項が磁気エネルギーである．この汎関数微分は，定義に従って計算すれば

$$\frac{\delta H[\boldsymbol{u}]}{\delta\boldsymbol{u}}=\begin{pmatrix}-\varphi\\-J\end{pmatrix} \tag{35}$$

となる．さらに，歪対称作用素は2×2 行列の形になり，

$$(J^{ij}(\boldsymbol{x}',\boldsymbol{x}''))=\delta^2(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')\begin{pmatrix}-[U(\boldsymbol{x}''),\circ] & -[\psi(\boldsymbol{x}''),\circ]\\-[\psi(\boldsymbol{x}''),\circ] & 0\end{pmatrix} \tag{36}$$

と選べばよい．これらを使うと，

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}=\{u^i, H\}, \qquad (i=1,2) \tag{37}$$

が(32)，(33)式に一致することが確認できる．また，この系の Casimir 不変量は

$$C_1[\boldsymbol{u}]:=\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^2x\, f_1(\psi), \tag{38}$$

$$C_2[\boldsymbol{u}]:=\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^2x\, U f_2(\psi) \tag{39}$$

の２つである．ただし，$f_1(\psi)$ と $f_2(\psi)$ は任意関数である．$f_1(\psi)=\psi$ と選んだものは磁気ヘリシティに対応する．

対称括弧の表現に現れる積分核も，この場合2×2行列の形（K_{ij}），$(i,j=1,2)$ となる．(32)，(33)式の右辺をそれぞれ f^U，f^ψ と定義すると，疑似アニーリングの人工的な発展方程式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial U}{\partial t}&=((U,H))\\&=[U,\tilde{\varphi}]+[\psi,\tilde{J}],\end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t}&=((\psi,H))\\&=[\psi,\tilde{\varphi}]\end{aligned} \tag{41}$$

となる．ただし，

$$\tilde{\varphi}:=-\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^2x\ (K_{11}f^U+K_{12}f^\psi), \tag{42}$$

$$\tilde{J}:=-\int_{\mathcal{D}} \mathrm{d}^2x\ (K_{21}f^U+K_{22}f^\psi) \tag{43}$$

である．U と ψ を移流する場が人工的な $\tilde{\varphi}$，$\tilde{J}$ に置き換わった形になっている．

簡単なケースとして，$K_{11}=K_{22}=\delta^2(\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}'')$，$K_{12}=K_{21}=0$ と選ぶと，

$$((U,H))=-[U,f^U]-[\psi,f^\psi], \tag{44}$$
$$((\psi,H))=-[\psi,f^U] \tag{45}$$

となり，やはり Poisson 括弧を単純に２回作用した形がよく見えるだろう．

矩形領域で二重周期境界条件の下，この系の定常解が求められた[25]．運動エネルギーと磁気エネルギーの大きさの比によって，様々な定常解が得られている．２次元渦運動の場合との違いは，状態変数が U と ψ であり，それらが２つの人工的な場 $\tilde{\varphi}$，$\tilde{J}$ で流される点である．したがって，エネルギーが減少していく経路が複雑になっている．前小節の最後に，２次元渦運動の場合はエネルギーを極大化すると空間的に大きな構造をもつ定常解が得られることを述べた．逆に，磁場の方は，磁気ヘリシティを固定したままエネルギーを極小化すれば，空間的に大きな構造をもった定常状態が得られる．したがって，系の運動エネルギーを減少させようとすると流れ場の高波数成分にエネルギーが集まろうとする一方，磁気エネルギーを減少させようとすると低波数成分にエネルギーが集まろうとする．しかし，定常状態では(33)式より$[\psi,\varphi]$，つまり $\varphi=\varphi(\psi)$ でなければならない．したがって，流れ場と磁場は同じ空間構造をもたなければならない．したがって，初期の運動エネルギーと磁気エネルギーの比によって，系の全エネルギーを減少させる経過，つまり緩和経路が異なり，最終的に得られる定常解に細かい構造が残る場合もあることがわかった[25]．当然，場の数が増えれば増えるほど，この緩和経路は複雑になることが予想される．

3．磁気島のある平衡

本節では，円柱プラズマで低ベータ簡約化 MHD モデルの疑似アニーリングを行ったシミュレーション結果を紹介する．特に，円柱プラズマの内部に磁気島がある平衡の計算例を紹介する．定式化の詳細は[26]を参照されたい．

円柱プラズマなので，強い磁場の方向を z 方向とし，それに垂直な平面では小半径 r と方位角 θ を用いる．場の量が r のみの関数の場合は定常解である．例えば，ポロイダル磁場は $\psi(r)$ の関数形によって様々な分布に設定できる．ポロイダル流速も同様である．それらの定常解の中には，MHD モードに対して線形不安定なものも含まれるであろう．線形不安定な場合，現実の系では摂動が指数関数的に増幅し，やがて非線形効果によって飽和し，磁気島が存在したり，ヘルカル変形したような，円柱対称でない定常解に移行するものと考えられる．エネルギーを比べれば，最初の円柱対称な状態よりも低いエネルギー状態があるから線形不安定になったはずで，そうすると移行後の円柱対称でない定常解の方がエネルギーが低いと考えられる．したがって，円柱対称な定常解が線形不安定な場合に，その不安定モードに対応するような摂動を微小振幅で与え，疑似アニーリングを行うと，円柱対称な定常状態に戻ることなく別の円柱対称でない定常解に至るものと考えられる．

[26]では，テアリングモードに対して線形不安定な平衡に，微小な磁気島を作るような摂動を与えて疑似アニーリングを行い，磁気島が成長して残った定常解に至ることを示した．円柱対称な平衡は，ポロイダル（θ）方向のモード数 $m=-2$，トロイダル（z）方向のモード数 n=1 のテアリングモードに対して線形不安定である．逆アスペクト比が $\varepsilon=1/10$ の円柱プラズマで，固定境界条件，初期値は

$$U(\boldsymbol{x},0)=U_{-2/1}(r)\sin(-2\theta+\zeta), \tag{46}$$
$$\psi(\boldsymbol{x},0)=\psi_{0/0}(r)+\psi_{-2/1}(r)\cos(-2\theta+\zeta) \tag{47}$$

とした．$(m,n)=(0,0)$ 成分である $\psi_{0/0}(r)$ による安全係数分布を**図 1** に示す．横軸は小半径 r で，$q=2$ 面が $r=1/2$ にある．また，初期値の $(m,n)=(-2,1)$ 成分を**図 2** に示す．$q=2$ 面で $\psi\neq 0$とし，予め微小な磁気島は作ってある．

図 3 がエネルギーの時間発展を示している．横軸が時間で，エネルギーが単調減少している様子が見える．まだエネルギーが減りそうに見えるかもしれないが，横軸が対数軸なので最後の方のエネルギーの時間変化率は非常に小さくなっている．得られた定常解について，磁束関数の $(m,n)=(-2,1)$，$(-4,2)$，$(-6,3)$ 成分の r 分布を**図 4** (a)，

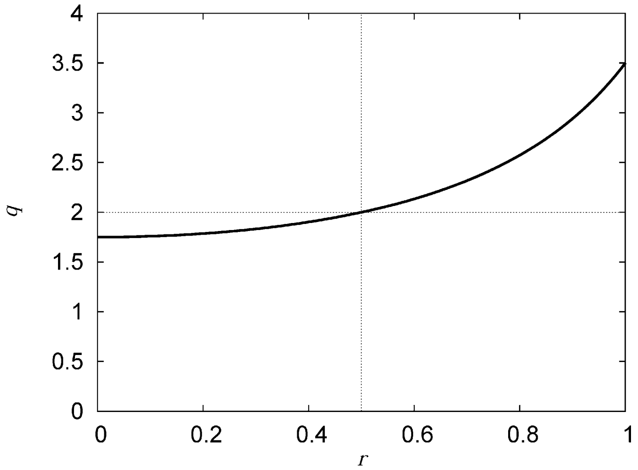


図１　安全係数 q 分布．

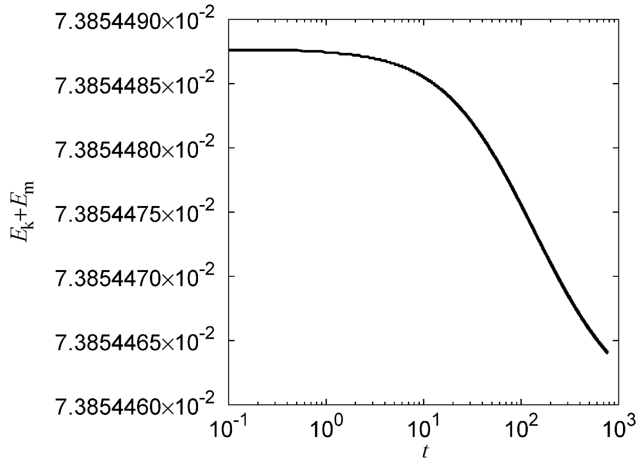
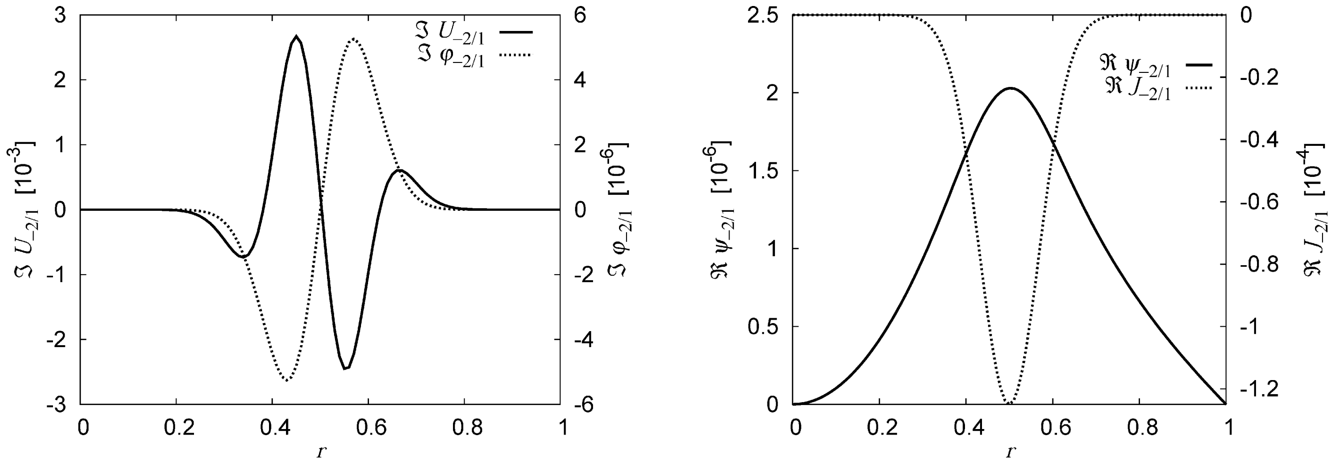
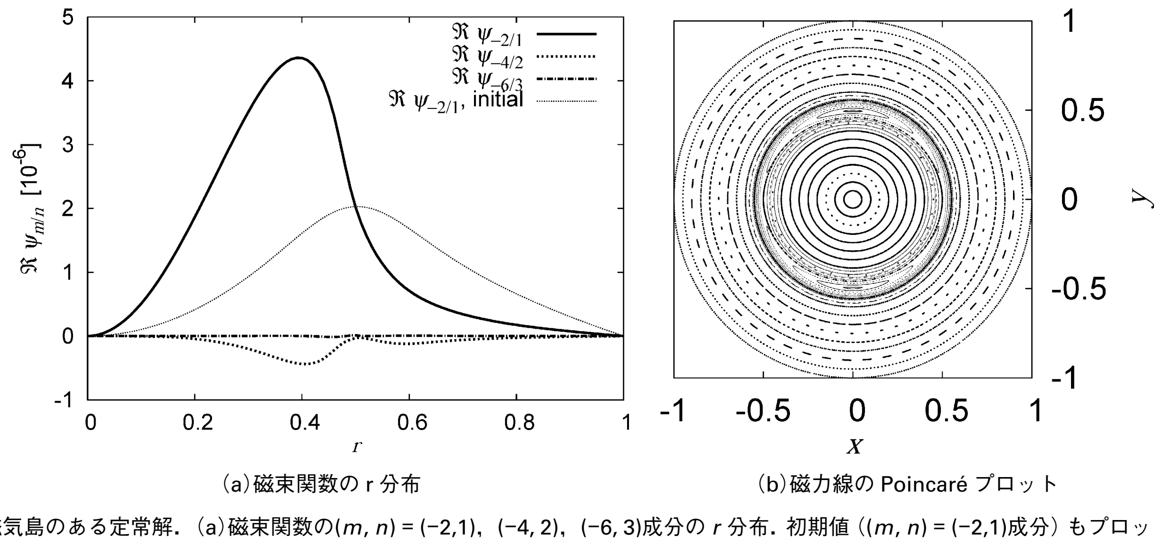


図３　エネルギーの時間発展．単調減少している．横軸が時間で，対数軸なのでまだエネルギーは減りそうに見えるが，最後の方のエネルギーの時間変化率は非常に小さくなっている．



(a)渦度と流れ関数　(b)磁束関数と電流密度

図２　疑似アニーリングの初期値の$(m, n) = (-2,1)$成分．



(a)磁束関数の r 分布　(b)磁力線の Poincaré プロット

図４　磁気島のある定常解．(a)磁束関数の$(m, n) = (-2,1)$，$(-4, 2)$，$(-6, 3)$成分の r 分布．初期値（$(m, n) = (-2,1)$成分）もプロットしてある．(b)磁力線の Poincaré プロット．

磁力線の Poincaré プロットを**図 4**(b)に示す．**図 4**(a)には，$(m, n)=(-2, 1)$ の初期値も一緒にプロットしてある．**図 4** の横軸は $x=r\cos\theta$，縦軸は $y=r\sin\theta$ である．$r=0.5$ 付近に磁気島が存在することがわかる．

4．今後の課題とまとめ

本節では最初に，疑似アニーリング研究の最新の進展について述べる．まず，3節で紹介したシミュレーションと類似して，抵抗性内部キンクモードに対して線形不安定な平衡に微小な摂動を与えて疑似アニーリングを行い，プラズマ内部がヘリカル変形した定常解に至ることが示された．次に，疑似アニーリングを高ベータ簡約化 MHD モデル[27]に適用し，軸対称トロイダル平衡を求めることに成功した[28, 29]．疑似アニーリングによれば，ポロイダル方向の流れをもつ平衡を求めることもできる．ただし，非圧縮流なので，トロイダルプラズマでポロイダル流がもつ圧縮性による問題はない．また，ステラレータ展開に基づき導かれた簡約化 MHD 方程式について，トロイダル平均した平衡を求めることにも成功している[29]．

今回紹介した人工的な運動はハミルトニアンを基にしている．ハミルトニアンの部分を，ハミルトニアンとCasimir不変量の和であるエネルギー－Casimir 汎関数に置き換えた運動も考えられている[30]．プラズマ物理学の“構造”と，それを考慮した数値アルゴリズムに関する研究のレビューが[31]にある．

次に，今後の課題を幾つか述べる．疑似アニーリングでは，Casimir不変量が保持されることを述べた．これは積分量である．疑似アニーリングの初期値を決めると，Casimir不変量の値が決まり，その値が保持される．この Casimir 不変量の値を疑似アニーリングに先立って調整し，初期値を与える方法は開発した[32]が，G-S 方程式を解くときのように局所的な分布を与える方法はまだない．疑似アニーリングでは，領域内の物理量の分布を与えるわけではなく，エネルギーが極小化するように分布が決まる．だからこそエネルギー極小の安定な平衡が得られるとも言えるが，局所分布を与えて平衡を求めたい場合にどのようにすればよいかは，今後の研究課題である．

また，得られる定常解の初期値依存性も気になるところである．ある Casimir リーフ上でエネルギー極小となる定常解は１つとは限らない．この場合は，疑似アニーリングを始めた初期条件によって，行き着く定常解が異なるものと考えられる．力学系理論でいうところの吸引領域がどのようになっているのか分析するのも面白いと考えられる．

さらに，Casimirリーフ上で，長く続く谷のような中にエネルギー極小がある場合，数値計算的にはまだエネルギー極小ではないのにエネルギー極小に至ったと判定してしまうことになると考えられる．仮にそのような状況でなかったとしても，人工的な運動の時間発展では定常解に近づくと系の時間変化率がどんどん小さくなるので，定常解に近いところで時間発展を加速するような工夫が必要である．

簡約化 MHD でなく，フル MHD のハミルトニアンと Poisson 括弧は[22]にあるので，本記事で紹介したのと同様の手順で定式化すれば，３次元 MHD 平衡を求めることができると考えられる．ただ，数値計算的にはそれほど簡単ではないこともわかってきた．それは，Poisson 括弧を２回作用させるために空間の微分階数が１つ増えるからである．流体系の非線形シミュレーションを行う際に，空間の細かい構造が数値的に出てしまうことを防ぐために，微分階数の高い粘性を入れる場合があるが，疑似アニーリングの場合にそれをすると定式化の基となる Hamilton 構造を壊してしまう．数値不安定性が出やすいにも関わらず，それを抑える定番的方法が使えないということである．そのため，方程式の数学的構造をマシンイプシロン程度で保ってくれるような，構造保存型数値アルゴリズムが重要になると考えている．

本記事では，プラズマ流や磁気島，ストキャスティック磁場領域を含んでも良いような，より広いクラスの MHD 平衡を求める方法として筆者らが研究を進めている疑似アニーリングを紹介した．低ベータ簡約化 MHD で，磁気島のある定常解を求めたシミュレーション結果も示した．まだ解決しなければならない課題が数々ある．興味をもった読者がいたら，ぜひ取り組んでみて欲しい．

謝　辞

本解説記事に関わる研究を進めるにあたり，テキサス大学オースチン校の P. J. Morrison さん，東京大学大学院新領域創成科学研究科　プラズマ理工学研究室の皆さん，特に大学院生だった近末吉人さん，鳥取大学大学院工学研究科連続体力学研究グループの皆さん，特に渡邉孝宏さん，馬場一輝さんとの議論が有益でした．紹介した研究成果の一部は JSPS 科研費23760805，15K06647の助成を受けたものです．

参 考 文 献

[1] V. D. Shafranov, Soviet Physics JETP **6**, 545 (1958).
[2] R. Lüst and A. Schlüter, Zeitschrift für Naturforschüng **12A**, 850 (1957).
[3] H. Grad and H. Rubin, in *Proceedings of the Second United Nations International Conference on the Peaceful Uses of Atomic Energy* (United Nations, Geneva, 1958), Vol. 31.
[4] K. Lackner, Comput. Phys. Commun. **12**, 33 (1976).
[5] T. Takeda and S. Tokuda, J. Comput. Phys. **93**, 1 (1991).
[6] H. R. Strauss, Phys. Fluids **16**, 1377 (1973).
[7] H. P. Zehrfeld and B. J. Green, Nucl. Fusion **12**, 569 (1972).
[8] B. J. Green and H. P. Zehrfeld, Nucl. Fusion **13**, 750 (1973).
[9] S. P. Hirshman and J. C. Whitson, Phys. Fluids **26**, 3553 (1983).
[10] S. P. Hirshman *et al.*, Comput. Phys. Commun. **43**, 143 (1986).
[11] T. Hayashi, Theory of Fusion Plasmas, EUR 12149 EN (1989).
[12] K. Harafuji *et al.*, J. Comput. Phys. **81**, 169 (1989).
[13] Y. Suzuki *et al.*, Nucl. Fusion **46**, L19 (2006).
[14] A. H. Reiman and H. S. Greenside, Comput. Phys. Commun. **43**, 157 (1986).
[15] Y. Suzuki *et al.*, in *Proceedings of the 43rd EPS Conference*

on Plasma Physics (European Physical Society, Leuven, Belgium, 2016).
[16] S. R. Hudson *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **54**, 014005 (2012).
[17] G. K. Vallis *et al.*, J. Fluid Mech. **207**, 133 (1989).
[18] G. F. Carnevale and G. K. Vallis, J. Fluid Mech. **213**, 549 (1990).
[19] T. G. Shepherd, J. Fluid Mech. **213**, 573 (1990).
[20] G. R. Flierl and P. J. Morrison, Physica D **240**, 212 (2011).
[21] H. R. Strauss, Phys. Fluids **19**, 134 (1976).
[22] P. J. Morrison and J. M. Greene, Phys. Rev. Lett. **45**, 790 (1980).
[23] D. D. Holm *et al.*, Phys. Rep. **123**, 2 (1985).
[24] P. J. Morrison, Rev. Mod. Phys. **70**, 467 (1998).
[25] Y. Chikasue and M. Furukawa, Phys. Plasmas **22**, 022511 (2015).
[26] M. Furukawa and P. J. Morrison, Plasma Phys. Control. Fusion **59**, 054001 (2017).
[27] H. R. Strauss, Phys. Fluids **20**, 1354 (1977).
[28] 渡邉孝宏：鳥取大学 大学院工学研究科 修士論文（2018年２月）.
[29] M. Furukawa *et al., submitted to* Phys. Plasmas.
[30] M. Kraus, *private communication* (2017).
[31] P. J. Morrison, Phys. Plasmas **24**, 055502 (2017).
[32] Y. Chikasue and M. Furukawa, J. Fluid Mech. **774**, 443 (2015).

古川　勝（ふるかわ　まさる）

鳥取大学学術研究院工学系部門（工学部）准教授．2001年京都大学大学院エネルギー科学研究科　博士課程修了．日本原子力研究所（博士研究員），日本学術振興会（博士研究員），東京大学（助手，助教授，准教授）を経て現職．専門はプラズマ物理学（特に MHD）と核融合開発への応用．近年は疑似アニーリングや構造保存型シミュレーション法など支配方程式の数学的構造を利用した解法の研究に傾倒．