J. Plasma Fusion Res. Vol.94, No.4 (2018) 183‐190

解説

プラズマ回転による抵抗性壁モード安定化に関する理論・シミュレーション研究の進展

Progress of Theoretical and Simulation Studies on Resistive Wall Mode Stabilization by Plasma Rotation

白石淳也
SHIRAISHI Junya
量子科学技術研究開発機構

（原稿受付日：2018年1月19日）

本解説では，抵抗性壁モード（RWM : Resistive Wall Mode）と呼ばれる不安定性について，プラズマ回転による安定化機構の解明に向けた理論研究の進展について紹介する．本課題に関する理論は，磁気流体力学（MHD : Magnetohydrodynamic）方程式を用いた研究から始まり，実験の進展とともに運動論的 MHD 方程式が広く用いられるようになった．運動論的 MHD 理論による解析では，MHD 揺動（ここでは RWM）と運動論効果（粒子運動の効果）との相互作用が重要な役割を果たす．運動論的 MHD 理論では，運動論効果を総圧力テンソルの揺動に埋め込んでいる．古くから用いられてきた理論モデルであるが，回転がある場合の拡張について，最近の進展について述べる．また，これら理論は実験研究とともに発展してきたため，一部実験研究の成果についても触れる．

Keywords:
resistive wall mode, MHD, hybrid kinetic MHD, plasma rotation, advanced tokamak

1．はじめに

本解説で取り上げる抵抗性壁モード（RWM : Resistive Wall Mode）は，標語的には「安定化しきれなかった外部キンクモード」とも言える．外部キンクモードとは，プラズマ表面の変形を伴うキンクモードのことである．外部キンクモードはプラズマ表面の変形を有するため，その安定性はプラズマ内部の物理量（圧力や電流など）の分布だけでなく，プラズマ外部の真空領域およびプラズマを取り囲んでいる外部の壁（たとえば真空容器）の性質によって特徴づけられる．まず極端な状況として，プラズマを取り囲む壁がない場合を考える．そのような状況でも安定な低いベータ値をもつプラズマを考える．その状態から徐々にベータ値を上げていくと，壁による安定化効果が存在しないため，あるベータ値で外部キンクモードが不安定になる．このときのベータ値を「壁なし限界ベータ値」などと呼ぶ．ここで，壁による安定化効果とは，プラズマ表面の変形によって誘起される磁場の摂動を打ち消すような電流パターンを壁が流せることを意味している．次に，もう少し現実に近い状況を考える．プラズマを取り囲む壁は存在するが，壁が理想的な場合，すなわち抵抗がゼロである場合を考える．物理的には，無限に短い時間スケールで，磁場摂動を打ち消すような電流パターンを生成することができることを意味する．この時，理想壁の安定化効果により外部キンクモードは安定化される．しかし，強い安定化効果を持つ理想壁を考えたとしても，更にベータ値を上げていくと，やはりあるベータ値で不安定になる．これを「理想壁限界ベータ値」などと呼ぶ．原理上，これ以上のベータ値を期待することはできない．以上の描像では，理想壁限界以下かつ壁なし限界以上のベータ値でつねに外部キンクモードが安定に思えるが，現実にはそうではない．実際には，壁は理想的ではなく有限な抵抗をもっているため（有限時定数をもつ電流しか流すことができない），完全には外部キンクモード安定化しきれずに，壁の時定数程度の時間スケールで成長する RWM として現れる．このように述べると，RWM は特殊な状況で起こる不安定性のように思えるが，実際には，核融合炉の設計を考える際には非常に重要なものとなる．核融合炉の出力はベータ値の2乗に比例するため，核融合炉の経済的成立性を高めるためには，ベータが高い領域での運転が望まれる．壁なし限界を超えるベータ値の領域での原型炉の設計が可能になれば，他の重要なパラメータ（装置サイズ，楕円度等）の設計尤度が極めて大きくなる．したがって，RWM を安定化する手法の研究開発は，核融合研究にとって非常に大事な課題である．

RWM を安定化することを考えると，素朴には，抵抗性壁では打ち消すことができなかった磁場摂動を外部コイルによって与える"active"な安定化手法が考えられる．このような手法は，フィードバックをかけて RWM を安定化す

National Institutes for Quantum and Radiological Science and Technology, Naka, IBARAKI 311-0193, Japan
author's e-mail: shiraishi.junya@qst.go.jp

る実験によりその効果が検証されている．一方で，原型炉や核融合炉の設計を考えると，そのような外部コイルを取り付けることは非常に困難なことが推測される．特にRWMの場合，可能な限りコイルをプラズマに近づけたいが（例えば真空容器の内側），そのような環境ではプラズマからくる熱負荷や中性子負荷が大きく，メンテナンス性や寿命を考えると，炉内にコイルを置くことが非現実的である．以上のような理由から，"passive"な安定化手法の一つである，プラズマ回転（特にトロイダル回転）が注目を集めている．回転は加熱等によりプラズマ中に遍在するから，これによりRWMが安定化されれば，外部コイルによる安定化については考えなくてよくなる．そのため，プラズマ回転によるRWM安定化機構の解明については古くから研究されており，現在でも活発に研究が行われている．RWMの実験及び理論については，解説[1]やレビュー論文[2]にまとめられている．

次節からは，プラズマ回転によるRWM安定化に関する理論研究の進展の流れについて述べる．

2．MHD理論によるRWM安定化機構解明への取組

1971年に出版されたPfirsch & Tassoの論文[3]から始まる，「理想」MHD理論に基づいたRWM安定性研究について紹介する．この論文では，壁が有限抵抗をもつ場合のエネルギー原理を考察している．その結果，壁なし限界より高いベータ値のときに，抵抗性壁によっては完全に外部キンクモードを安定化できないということが結論されている．これはまさにRWMの描像であり，先駆的な研究であるといえる（およそ47年前の論文で２ページしかない）．その後，漸近接続法を用いたRWM解析[4]など理論的な進展が続いていたが，1989年にHaneyにより重要な論文が出版された（現在でも良く引用され，解析の基礎となっている）．[5]では，Pfirsch&Tassoの定式化をより一般的に考察し，非理想効果などを取り入れる試みがなされている．この論文で導かれた重要な表式は

$$\gamma\tau_{\mathrm{w}} = -\frac{\delta W_{\infty}}{\delta W_{b}} \qquad (1)$$

である．ここでγはRWMの成長率，τ_{w}は壁の時定数，δW_{∞}は壁がないとき（無限遠にあるときの）ポテンシャルエネルギー，δW_bは壁が$r=b$にあるときのポテンシャルエネルギーを表す（rは適切に定義された径方向座標）．ここでδW_{∞}及びδW_bを評価するときのMHD変位$\boldsymbol{\xi}$は試行関数である．通常のエネルギー原理と異なりプラズマの慣性が現れないのはRWMの時定数（成長率，振動数）が壁の時定数程度であり非常にゆっくりとした運動であるためである．このように，MHD理論の根幹をなすエネルギー原理を拡張することによりRWMを記述するというのは直感的にわかりやすく，Freidbergの教科書にもその導出が記されている[6]．

これまでに述べたのは，「理想」MHDで記述され，しかも（平衡の）回転がない場合の理論である．回転や非理想効果が加わると理想MHDの世界では縮退していた理論上の困難が多くあらわれることはよく知られている．このような方向の研究において嚆矢となったのは1994年のBondesonらの論文[7]である．この論文では，線形化された抵抗性MHD方程式に平衡のプラズマ回転の効果を含めて，トカマク配位で数値的に解いている（この論文ではコーディング上プラズマは静止し壁が回転している＝プラズマは剛体回転している）．このコードはMARS-Fと呼ばれ，次のような線形化された非理想MHD方程式系を解いている．

$$\begin{aligned}
&\rho(\gamma+in\Omega)\delta\boldsymbol{v} = \delta\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{J}\times\delta\boldsymbol{B}-\nabla\delta p-\rho\boldsymbol{U}(\delta\boldsymbol{v}),\\
&(\gamma+in\Omega)\delta\boldsymbol{B} = \nabla\times(\delta\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}-\eta\delta\boldsymbol{J})+(\delta\boldsymbol{B}\cdot\nabla\Omega)R^2\nabla\phi,\\
&\delta\boldsymbol{J} = \mu_0^{-1}\delta\boldsymbol{B},\\
&(\gamma+in\Omega)\delta p = -(\delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla)p-\Gamma p\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v},\\
&(\gamma+in\Omega)\delta\rho = -(\delta\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\rho-\rho\nabla\cdot\delta\boldsymbol{v}.
\end{aligned} \qquad (2)$$

ここで，ρ，Ω，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{J}$，pは平衡の質量密度，トロイダル回転周波数，磁場，電流，圧力，$\delta\rho$，$\delta\boldsymbol{B}$，$\delta\boldsymbol{J}$，$\delta\boldsymbol{v}$，δpは質量密度，磁場，電流，速度，圧力の摇動である．また，nはトロイダルモード数，$\boldsymbol{U}$は対流項に起因する項，ηは抵抗，Rは大半径，ϕはトロイダル角，及びΓは比熱比である．（２）式を見ると，$\delta\rho$に関する方程式は独立しているため，他の方程式を解けばよいことがわかる．また，方程式（２）は非自己共役性を持つため，もはや固有値が実数或いは純虚数であることは保証されないため，γは複素数をとる．RWM解析では，プラズマだけでなく，プラズマを取り囲む壁における磁場の拡散，壁内外の真空磁場をまとめてつじつまのあった形で解いていく必要がある．真空領域および抵抗性壁における計算法については[8]や[9]に詳しい記載がある．境界条件としては，プラズマ表面及び抵抗性壁上において磁場摇動の法線成分が真空領域と連続であることを課す．これによりプラズマ-真空-抵抗性壁システムにおいてつじつまのあった解析が可能となる．RWMは回転周波数が極めて小さいため，ほとんど壁に固定されている．仮にプラズマが音速程度で回転すれば，プラズマにのった座標系でみればRWMは音波のように見え減衰を受ける．このような理論的描像に基づいて数値計算行い，[7]ではRWM安定化にはアルフベン速度の数%程度の回転速度が必要であると見積もられた．

この論文が重要であるのは，実験結果を良く説明することができたためである．DIII-D実験においては，壁なし限界ベータを超えたプラズマが実現されていた．これは，RWMが安定化されていると考えられるが，その機構は不明であった．そこで，DIII-Dにおいて，プラズマ回転によるRWM安定化実験が盛んに行われた[10]．重要な研究課題は，どのくらいの回転があればRWMが安定化されるか，という「回転閾値」の同定である．その後DIII-Dでは誤差磁場をわざとかけてプラズマ回転を減衰させて（magnetic braking），回転閾値が調べられた．その結果が，Bondesonらの予測とよく合うため，さきに述べたRWM安定化機構（音波の減衰）により，高ベータプラズマの維持が可能であったと当時は結論づけられた．同様の機構（音波とのカップリング）は理論的にもBettiらによって研究され

[11]，トロイディシティは重要でないということが明らかになった．他にも捩れアルフベン波との共鳴による減衰も考えられた[12]．このような波との共鳴による散逸ではなく，単純にプラズマの粘性や抵抗といった非理想効果による散逸を考慮することもできる[13,14]．例えば，Fitzpatrick[14]は，プラズマ表面の回転とプラズマ中の散逸を考慮している．この場合トロイディシティも圧縮性も必要がない．本章で紹介した理論ではいずれも MHD 方程式に基づいている．いずれの解析結果も，RWM 安定化にはアルフベン周波数の数%の回転速度が必要であることを示していた．このオーダーの回転速度は大体積トカマクでは実現が難しいと考えられる．そのため，プラズマ回転に頼らずに RWM を安定化させるため，外部コイルによるフィードバック制御などの研究も盛んに行われた[8,15]．この方向の研究では，実際の壁形状を考慮することが重要であり，ポート等複雑な 3 次元的な構造をもった抵抗性壁における渦電流を解析可能なコード開発などが行われた（著名なものとして VALEN があげられる[16]）．

3．低プラズマ回転による RWM 安定化実験と運動論的 MHD 理論

今から約10年前に，RWM の安定化に必要な回転閾値について，重要な成果が発表された[17-19]．一つは JT-60U における実験結果についてである．JT-60U の特徴の一つに中性粒子ビーム（NB: Neutral Beam）のジオメトリーが極めて多彩であることが挙げられる．これらを駆使し，回転の大きさ・分布を制御することが可能である．例えば，JT-60U ではバランス入射することにより，ゆっくりとした（2 節で考えた回転速度より一桁も小さい）回転を実現することができた．これにより，回転閾値のさらなる解明に向けた実験的研究が進められた．その結果，低回転（アルフベン速度の 1 %以下）においても RWM が安定化されることが示された[17,18]．同時期に DIII-D においても NB 入射をバランス入射が可能なように改良し，不整磁場の効果を除くことで同様の結果を得た[19]．これらの成果は，速い（アルフベン速度の数%）回転が望めない大体積トカマク（例えば原型炉）における RWM 安定な運転への見通しをたてたという意味で画期的な成果である．

理論的には，実はこれより以前に（2004年），Hu らにより運動論的 MHD 理論に基づいて低回転プラズマでの RWM 安定化機構の存在が議論されていた[20]．運動論的効果によって第 2 章で紹介した分散関係（1）は以下のように修正される[21]．

$$\gamma\tau_{\mathrm{W}} = -\frac{\delta W_\infty + \delta W_{\mathrm{K}}}{\delta W_b + \delta W_{\mathrm{K}}} \tag{3}$$

（1）式と比べると，分子と分母に δW_{K} という項が現れている．これは運動論効果によるエネルギー変化を表している．後で見るように，この表式で重要な点は，δW_{K} が複素数を取りうるということである．

運動論的 MHD 理論に基づいた数値解析コードとして，MISK[20,22,23]，運動論効果を含むように拡張された MARS（MARS-K と呼ばれる）[24-26]，及び著者らが開発した MINERVA/RWMaC[27,28]がある．これらのコードにおいてどのような問題が解かれているのかを紹介する．δW_{K} の導出については最も直感的に理解しやすい Porcelli に従う[29]．運動論効果は案内中心の運動に起因するため，そのラグランジアンから出発する．[30]によれば，$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 速度（あるいはプラズマの巨視的流れ）が粒子の熱速度に対し無視できるほど小さい場合は，案内中心のラグランジアンは

$$L = (Q\boldsymbol{A} + Mv_\parallel \hat{b})\cdot\dot{\boldsymbol{R}} + \frac{y}{\Omega_{\mathrm{c}}}\dot{\alpha} - \frac{1}{2}Mv_\parallel^2 - y - Q\Phi \tag{4}$$

と書ける．ここで $Q(M)$ は案内中心の電荷（質量），$\boldsymbol{A}(\Phi)$ はベクトル（スカラー）ポテンシャル，$v_\parallel$ は案内中心速度の（磁場に対する）平行成分，$\hat{b} = \boldsymbol{B}/B$，$\boldsymbol{R}$ は案内中心座標，$y = \mu B = Mv_\perp^2/2$ は案内中心速度の垂直成分による運動エネルギー（μ は磁気モーメント，$v_\perp$ は案内中心速度磁場に対する垂直成分），α はジャイロ角，Ω_{c} はサイクロトロン周波数，及びドットは時間微分である．ラグランジアン（4）から直ちに Euler-Lagrange 方程式が計算できる．$v_\parallel$，y，α に関してはそれぞれ $v_\parallel = \hat{b}\cdot\dot{R}$（平行方向の運動），$\dot{\alpha} = \Omega_{\mathrm{c}}$（ジャイロ運動），$\dot{\mu} = 0$（磁気モーメント保存）を得る．$\boldsymbol{R}$ に関しては少し計算が必要だが結果だけ記すと，

$$\dot{\boldsymbol{R}} = v_\parallel \frac{\boldsymbol{B}^*}{B_\parallel^*} - \frac{1}{QB_\parallel^*}\hat{b}\times(Q\boldsymbol{E}^* - \mu\nabla B) \tag{5}$$

となる．ここで $\boldsymbol{B}^* = \nabla\times\boldsymbol{A}^*$ 及び $\boldsymbol{E}^* = -\partial_t\boldsymbol{A}^* - \nabla\Phi^*$ は修正されたポテンシャル $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A} + Mv_\parallel\hat{b}/Q$ 及び $\Phi^* = \Phi + Mv_\parallel^2/(2Q)$ により定義される修正された電磁場である．ラグランジアン（4）により記述される運動に関する保存量としてまず磁気モーメントがある．これを使って次の関係式を得る．

$$\frac{\delta\dot{y}}{B} - \frac{y}{B^2}\delta\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\nabla B = \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\delta B}{B}\right) \tag{6}$$

もう一つの保存量は総エネルギー $E_{\mathrm{t}} = Mv_\parallel^2/2 + y + Q\Phi$ である．$\mathrm{d}E_{\mathrm{t}}/\mathrm{d}t = -\partial_t L$ と Euler-Lagrange 方程式（5）を用いると，

$$Q\delta\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\nabla\Phi + Mv_\parallel\delta v_\parallel + \delta\dot{y} = -\partial_t\delta L - Q\frac{\mathrm{d}\delta\Phi}{\mathrm{d}t} - \frac{M}{2}\frac{\mathrm{d}\delta v_\parallel^2}{\mathrm{d}t} \tag{7}$$

を得る．加えて，平衡が軸対称であると仮定すると正準角運動量 $P_\phi = QRA_\phi + Mv_\parallel RB_\phi/B$ が保存する．$\mathrm{d}P_\phi/\mathrm{d}t = \partial_{\mathrm{t}}L$ を用いると，

$$\delta\dot{\boldsymbol{R}}\cdot\nabla P_\phi = +\delta\dot{v}_\parallel\frac{\partial P_\phi}{\partial v_\parallel} = \frac{\partial\delta L}{\partial\phi} - \frac{\mathrm{d}\delta P_\phi}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

を得る．一方，線形化されたドリフト運動論方程式は

$$\frac{\mathrm{d}\delta f}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial P_\phi}\left(\delta\dot{R}\cdot\nabla P_\phi + \delta\dot{v}_\parallel\frac{\partial P_\phi}{\partial v_\parallel}\right)$$

$$+\frac{\partial f}{\partial E_{\mathrm{t}}}(Q\delta\dot{R}\cdot\nabla\Phi+Mv_{\parallel}\delta v_{\parallel}+\delta\dot{y})$$
$$+\frac{\partial f}{\partial\mu}\left(\frac{\delta\dot{y}}{B}-\frac{y}{B^2}\delta\dot{R}\cdot\nabla B\right)=0 \quad (9)$$

と書ける．f は平衡の分布関数を表す．(9)式において，(6)-(8)式を用いると，

$$\delta f=\delta P_{\phi}\frac{\partial f}{\partial P_{\phi}}+\left(Q\delta\Phi+\frac{M}{2}\delta v_{\parallel}^2\right)\frac{\partial f}{\partial E_{\mathrm{t}}}-\mu\frac{\delta B}{B}\frac{\partial f}{\partial\mu}+\delta h \quad (10)$$

を得る．ここで δh は非断熱成分と呼ばれるもので，

$$\frac{\mathrm{d}\delta h}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial f}{\partial E_{\mathrm{t}}}\frac{\partial\delta L}{\partial t}-\frac{\partial f}{\partial P_{\phi}}\frac{\partial\delta L}{\partial\phi} \quad (11)$$

で定義され，δW_{K} の導出に重要な役割を果たす．

(11)式を見ると，非断熱成分は案内中心ラグランジアンの揺動と平衡の分布関数で特徴づけられていることがわかる．案内中心ラグランジアンの揺動は電磁場の揺動と関連づけることができて，

$$\delta L=Q\delta\boldsymbol{A}\cdot\dot{\boldsymbol{R}}-\mu\delta B-Q\delta\Phi \quad (12)$$

となる．運動論的 MHD 理論の定式化のポイントは，電磁場の揺動とプラズマ変位を理想 MHD 方程式により結びつける点にある．具体的には，磁場の揺動を $\delta\boldsymbol{B}=\nabla\times(\boldsymbol{\xi}_{\perp}\times\boldsymbol{B})$ と表す．$\boldsymbol{\xi}_{\perp}$ は垂直方向の変位である．適当なゲージ条件のもと，これより $\delta\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\xi}_{\perp}\times\boldsymbol{B}$ が従う．以上を用いると，(12)は

$$\delta L=-Mv_{\parallel}^2\boldsymbol{\xi}_{\perp}\cdot\boldsymbol{\kappa}+\mu B(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}+\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}) \quad (13)$$

となる．但し $\boldsymbol{\kappa}$ は磁場曲率である．

以上により，δf の非断熱成分が平衡の分布関数及び案内中心ラグランジアンの揺動により特徴付けられること，また案内中心ラグランジアンの揺動が MHD 揺動と特徴付けられることがわかった．次は圧力テンソルの揺動を計算してみる．$\delta L\propto\exp(-\mathrm{i}\omega t)\exp(-\mathrm{i}n\phi)$ と仮定すると ($\omega=\gamma+\mathrm{i}\omega_{\mathrm{r}}$，$\omega_{\mathrm{r}}$ は実周波数)，(11)式は

$$\delta h=\mathrm{i}M\left(\omega\frac{\partial f}{\partial E_{\mathrm{t}}}-n\frac{\partial f}{\partial P_{\phi}}\right)\delta s, \quad (14)$$

$$\delta s=\int_{-\infty}^{t}\left(-\frac{\delta L}{M}\right)\mathrm{d}t' \quad (15)$$

と解くことができる．ただし(15)式における時間積分は摂動を受けていない軌道に沿ってとっている．正準角運動量の揺動は $\delta P_{\phi}=Q\boldsymbol{\xi}_{\perp}\cdot\nabla\psi$ と近似できるから (ψ はポロイダル磁束)，(10)，(14)式より最終的に分布関数の揺動は

$$\delta f=-\boldsymbol{\xi}_{\perp}\cdot\nabla f+\mu(\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}+\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp})\frac{\partial f}{\partial\mu}$$
$$+\mathrm{i}M\left(\omega\frac{\partial f}{\partial E_{\mathrm{t}}}-n\frac{\partial f}{\partial P_{\phi}}\right)\delta s \quad (16)$$

と書くことができる．(2)式で運動方程式において圧力をスカラーからテンソルに置き換えると，慣性以外の項は

$$\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\delta\boldsymbol{B}+\frac{1}{\mu_0}(\nabla\times\delta\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}-\nabla\cdot\delta P \quad (17)$$

と書ける．圧力テンソルの揺動は

$$\delta P=M\int d^3v\delta f\left[v_{\parallel}^2\hat{b}\hat{b}+\frac{1}{2}v_{\perp}^2(I-\hat{b}\hat{b})\right] \quad (18)$$

と書ける．ただし簡単のため $p_{\parallel}=p_{\perp}$ と平衡圧力は等方的と仮定した（非等方の場合，非等方性に起因するポテンシャルエネルギーがある）．(16)式と(18)式を組み合わせ，以下のように断熱成分と非断熱成分に分離する．

$$\delta P_{\mathrm{F}}=M\int\left[v_{\parallel}^2\hat{b}\hat{b}+\frac{1}{2}v_{\perp}^2(I-\hat{b}\hat{b})\right]$$
$$\left[-\xi_{\perp}\cdot\nabla f+\mu(\nabla\cdot\xi_{\perp}+\kappa\cdot\xi_{\perp})\frac{\partial f}{\partial\mu}\right]d^3v \quad (19)$$

$$\delta P_{\mathrm{K}}=M\int\left[v_{\parallel}^2\hat{b}\hat{b}+\frac{1}{2}v_{\perp}^2(I-\hat{b}\hat{b})\right]$$
$$\left[\mathrm{i}M\left(\omega\frac{\partial f}{\partial E_{\mathrm{t}}}-n\frac{\partial f}{\partial P_{\phi}}\right)\delta s\right]d^3v \quad (20)$$

断熱成分は流体的なポテンシャルエネルギーと関係づけられ，非断熱成分は δW_{K} に対応する．本解説とは関係しないため詳細は省くが，(19) 式を用いると，かなり長い計算の後

$$\delta W_{\mathrm{F}}=\frac{1}{2}\int[\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*\cdot(-\boldsymbol{J}\times\delta\boldsymbol{B}-\delta\boldsymbol{J}\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*\cdot(\nabla\cdot\delta P_{\mathrm{F}})]d^3x$$
$$=\frac{1}{2}\int\left[\frac{|\delta B_{\perp}|^2}{\mu_0}+\frac{B^2}{\mu_0}|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}+2\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}|^2\right.$$
$$\left.-J_{\parallel}(\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*\times\hat{b})\cdot\delta\boldsymbol{B}_{\perp}-2(\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*)(\boldsymbol{\xi}_{\perp}\cdot\nabla p)\right]d^3x \quad (21)$$

と，通常の流体的なポテンシャルエネルギーを得る．

δW_{K} を計算するために，速度空間の変数として運動エネルギー $E_{\mathrm{k}}=M(v_{\parallel}^2+v_{\perp}^2)/2$ 及びピッチ角変数 $\Lambda=(B_0/B)v_{\perp}^2/(v_{\perp}^2+v_{\parallel}^2)$ を導入すると，

$$\delta W_{\mathrm{K}}=\frac{1}{2}\int\boldsymbol{\xi}_{\perp}\cdot(\nabla\cdot\delta P_{\mathrm{K}})d^3x$$
$$=-\frac{1}{2}\int E_{\mathrm{k}}\left[\frac{B}{B_0}\Lambda\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*+\left(3\frac{B}{B_0}\Lambda-2\right)\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*\right]$$
$$\mathrm{i}M\left(\omega\frac{\partial f}{\partial E_t}-n\frac{\partial f}{\partial P_{\phi}}\right)\delta s d^3x d^3v \quad (22)$$

となる．ここで，δW_{K} の表式のなかに，案内中心ラグランジアンの揺動

$$\delta L=H_0T=E_{\mathrm{k}}\left[\frac{B}{B_0}\Lambda\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*+\left(3\frac{B}{B_0}\Lambda-2\right)\boldsymbol{\kappa}\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}^*\right] \quad (23)$$

が現れていることがわかる．ここで T は温度である．したがって，

$$\delta W_{\mathrm{K}}=-\frac{1}{2}\int(H_0T)^*\mathrm{i}M\left(\omega\frac{\partial f}{\partial E_{\mathrm{t}}}-n\frac{\partial f}{\partial P_{\phi}}\right)\delta s d^3x d^3v \quad (24)$$

と書くことができる．次に，軌道積分 δs について考える．

$$\delta s = -\frac{1}{M}\int_{-\infty}^{t}(H_0 T)\,\mathrm{d}\tau \tag{25}$$

案内中心の運動方程式は $\dot{r}=\dot{R}\cdot\nabla r$，$\dot{\theta}=\dot{R}\cdot\nabla\theta$，$\dot{\phi}=\dot{R}\cdot\nabla\phi$ である（θ はポロイダル角）．ポロイダル面におけるバウンス時間を $\tau_{\mathrm{B}}=\oint\mathrm{d}\tau=\oint\mathrm{d}\theta/\dot{\theta}$ で定義する．$\oint$ はポロイダル面において，補足粒子と通過粒子両方に対して閉じた軌道を表す．バウンス平均を $\langle X\rangle=\tau_{\mathrm{B}}^{-1}\oint X(\tau)\,\mathrm{d}\tau$ と定義する．これらを用いてトロイダル方向の運動のうち周期的な運動を取り出すと $\tilde{\phi}(\tau)=\phi(\tau)-\langle\dot{\phi}\rangle\tau$．これらを用いてラグランジアンを

$$\begin{aligned}(H_0T)(\tau) &= (\widehat{H_0T})(r(\tau),\theta(\tau))\,e^{-\mathrm{i}\omega\tau}e^{-\mathrm{i}n\tilde{\phi}(\tau)}e^{-\mathrm{i}n\langle\dot{\phi}\rangle} \\ &= (\widetilde{H_0T})(\tau)\,e^{\mathrm{i}\omega\tau}e^{-\mathrm{i}n\langle\dot{\phi}\rangle}\end{aligned} \tag{26}$$

と表すと，$(\widetilde{H_0T})$ は周期 τ_{B} の周期関数である．よって Fourier 級数展開することができ，$(\widetilde{H_0T})(\tau)=\sum_l Y_l^0 e^{il\omega_{\mathrm{B}}\tau}$ とかける．これを用いると最終的に案内中心ラグランジアンの摂動(26)は

$$(H_0T)(\tau)=\sum_l Y_l^0 e^{\mathrm{i}(l\omega_{\mathrm{B}}-\omega-n\langle\dot{\phi}\rangle)\tau} \tag{27}$$

と書ける．$\langle\dot{\phi}\rangle$ は歳差ドリフト運動を表す．(27)式を(25)式に代入し軌道積分し(24)式に代入すると

$$\delta W_{\mathrm{K}}=\sum_{l,m}\frac{1}{2}\int Y_m^{0*}Y_l^0\lambda_l e^{\mathrm{i}(l-m)\omega_{\mathrm{B}}t}d^3x d^3v \tag{28}$$

と書ける．λ_l は共鳴項を表していて，

$$\lambda_l=\frac{\omega\dfrac{\partial f}{\partial E_{\mathrm{t}}}-n\dfrac{\partial f}{\partial P_\phi}}{l\omega_{\mathrm{B}}-n\langle\dot{\phi}\rangle-\omega} \tag{29}$$

である．ポロイダル角 θ を Jacobian $\sqrt{g}=rR^2/R_0$ で定義すれば

$$\delta W_{\mathrm{K}}=\sum_{\mathrm{sign}(v_\parallel)}\sum_{l,m}\frac{2\pi^2}{R_0B_0M^2}\int Y_m^{0*}Y_l^0\lambda_l rE_{\mathrm{k}}\frac{R^2B}{|v_\parallel|}e^{\mathrm{i}(l-m)\omega_{\mathrm{B}}t}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}\mathrm{d}\Lambda \tag{30}$$

を得る．θ に関する積分は $\int|v_\parallel|^{-1}R^2Be^{\mathrm{i}(l-m)\omega_{\mathrm{B}}t}\mathrm{d}\theta=q^{-1}RB\langle e^{\mathrm{i}(l-m)\omega_{\mathrm{B}}t}\rangle\tau_0$［通過（補足）粒子に対し $\tau_0=\tau_{\mathrm{B}}(\tau_{\mathrm{B}}/2)$］となるからバウンス成分に関しては $l=m$ とすることができ，最終的に

$$\delta W_{\mathrm{K}}=\sum_{\mathrm{sign}(v_\parallel)}\sum_l\frac{2\pi^2}{R_0B_0M^2}\int|Y_l^0|^2\lambda_l\tau_0\frac{rRB}{q}E_{\mathrm{k}}\mathrm{d}r\mathrm{d}E_{\mathrm{k}}\mathrm{d}\Lambda \tag{31}$$

を得る．共鳴項 λ_l については，有限軌道幅効果を無視すると，$\langle\dot{\phi}\rangle=-\omega_{\mathrm{E}}-\omega_{\mathrm{d}}+\alpha q\omega_{\mathrm{B}}$ と書けるため（ω_{E} は $E\times B$ 周波数，ω_{d} は歳差ドリフト周波数，α は補足粒子の場合０，通過粒子の場合１となるパラメータ），

$$\lambda_l=\frac{(\omega-n\omega_{\mathrm{E}})\dfrac{\partial f}{\partial E_{\mathrm{k}}}+\dfrac{n}{Q}\dfrac{\partial f}{\partial\psi}}{(l-n\alpha q)\omega_{\mathrm{B}}+n\omega_{\mathrm{d}}+n\omega_{\mathrm{E}}-\omega} \tag{32}$$

となる．(32)で ω_{E} がバウンス周波数や歳差ドリフト周波数と共鳴（分母がゼロ）になると，(31)の積分を行うと δW_{K} は複素になることがわかる．(31)式と(32)式から明らかなように，δW_{K} は案内中心ラグランジアンと平衡分布関数で特徴づけられる．

δW_{K} が計算できたとして，安定性をどう評価するかを考える．δW_{K} は λ_l に ω を含んでいるため，安定性を決める分散関係（３）式は ω に関して非線形になっている．そのため実際には反復法などの数値計算に頼らざるを得ない．このような解法は自己無撞着なアプローチと呼ばれ，MARS-K [24-26]に実装されている．しかし，RWM に関して言えば，ω がほかの周波数に比べて十分小さいため，次のような近似を考えることができる．MHD 方程式のうち流体成分を解いて $\boldsymbol{\xi}_\perp$ を求め，δW_{K} の中では $\omega=0$ とおく．すなわち運動論効果によってモード構造は変化を受けないと仮定する．このような解法は摂動的なアプローチと呼ばれ，MARS-K[24-27]，MISK[20,22,23]，MINERVA/RWMaC [27,28]に実装されている．摂動的アプローチの場合，分散関係（３）の解析はかなり簡単になる．流体のポテンシャルエネルギーは既知かつ実数であるから，簡単な計算により，$[\Re(-\delta W_{\mathrm{K}}/\delta W_\infty)-A]^2+[\Im(-\delta W_{\mathrm{K}}/\delta W_\infty)]^2=r_{\mathrm{d}}$ と変形できる．ここで $A=(1/2)[1+(\delta W_b)/(\delta W_\infty)+((1-(\delta W_b)/(\delta W_\infty))\gamma\tau_{\mathrm{w}})/(1+\gamma\tau_{\mathrm{w}}))$ および $r_{\mathrm{d}}=(1-(\delta W_b)/(\delta W_\infty))/(2(1+\gamma\tau_{\mathrm{w}})^2)$ である．よって摂動的アプローチの場合，流体ポテンシャルエネルギーが与えられた場合，γ の等高線は円になる．**図１**はその一例である．δW_{K} の値が小さく臨界安定の円内にとどまれば不安定であるし，δW_{K} の値が大きく円外に出れば運動論効果で安定化されることになる．

(32)式から明らかなように，運動論的 MHD 理論の枠組みでは，バウンス周波数や歳差ドリフト周波数といった比較的ゆっくりとした（アルフベン周波数の１％よりも小さい）回転でも共鳴がおき，RWM を安定化する可能性がある．実験解析にも広く用いられており，実験結果を一部説

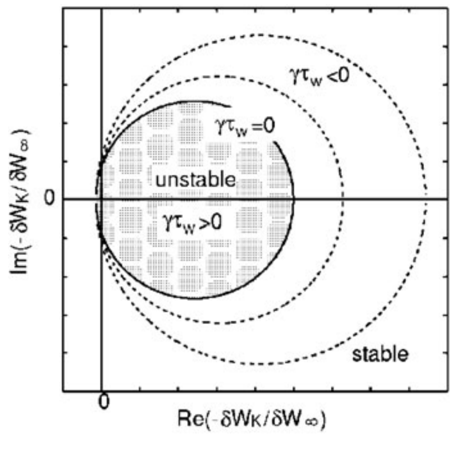

図１　流体ポテンシャルエネルギーが与えられた場合の，δW_{K} の実部-虚部平面における RWM 成長率の等高線の例．

明できるようになってきている．ただし回転シアの効果や高エネルギー粒子の効果など未解明な点も多い．

4．回転の効果を含めた運動論的MHD理論の拡張

3 節ではδW_{K}の導出について述べた．もともとの動機としては，プラズマ回転によるRWM安定化効果を調べるために運動論的MHD理論を用いているわけだが，回転の効果はどこで考慮されているのだろうか？ [20,22-26]などでは，回転の効果は$E\times B$ 周波数ω_{E}の中で考慮される．ω_{E}はイオン流体の力のつり合いから決まると考え，$\omega_{\mathrm{E}}=-\Omega-\omega^{*}_{N_{\mathrm{i}}}-\omega^{*}_{T_{\mathrm{i}}}$と回転周波数$\Omega$と関連付ける．ここで$\omega^{*}_{N(T)_{\mathrm{i}}}$は密度（温度）勾配に関する反磁性周波数である．3節で述べたように，δW_{K}は案内中心ラグランジアンの摂動と平衡の分布関数によって特徴づけられる．しかし，これまでの研究では，（4）式に見られるように回転が無い場合のものを用いている．回転がある場合，案内中心ラグランジアンや平衡分布関数が影響を受けるため，δW_{K}が修正を受けると考えられる．このような発想に基づいた最近の研究[27]について紹介する．

まず案内中心ラグランジアンを拡張する．巨視的なプラズマの流れが粒子の熱速度に対し無視できない場合，（4）は

$$L=(Q\boldsymbol{A}+Mv_{\parallel}\hat{b}+M\boldsymbol{D})\cdot\dot{\boldsymbol{R}}+\frac{y}{\Omega_{\mathrm{c}}}\dot{\alpha}-\frac{1}{2}M|v_{\parallel}\hat{b}+\boldsymbol{D}|^{2}-y-Q\Phi \quad (33)$$

となる[31]．$\boldsymbol{D}$がプラズマの流れ場を表す．3節と同様の計算を行っていくと，(13)式は

$$\delta L=H_0T+H_1T+H_2T \quad (34)$$

と拡張されることがわかる．ここで

$$H_1T=-\sigma(2M)^{\frac{1}{2}}E_{\mathrm{k}}^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{B}{B_0}\Lambda\right)^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{f}_1\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}) \quad (35)$$
$$H_2T=-M\boldsymbol{f}_2\cdot\boldsymbol{\xi}_{\perp}$$

で定義され，それぞれ$\boldsymbol{f}_1=(\hat{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{D}+(\boldsymbol{D}\cdot\nabla)\hat{b}$，$\boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{D}\cdot\nabla)\boldsymbol{D}$のようにコリオリ力と遠心力を表す．次に平衡の分布関数について考えよう．回転がある場合，バルクイオンに関しては遠心力の効果により，

$$f_{\mathrm{i}}=N_{\mathrm{i}}(\psi)\exp\left(\frac{M_{\mathrm{i}}\Omega^{2}}{2T_{\mathrm{i}}}\langle R^{2}\rangle_{\mathrm{mag}}\right)\left(\frac{M_{\mathrm{i}}}{2\pi T_{\mathrm{i}}}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{E_{\mathrm{k}}}{T_{\mathrm{i}}}\right) \quad (36)$$

となる．(32)式から明らかなように，fはψによって微分されるため，自然と回転シアの効果が入ることがわかる．以上より，δW_{K}は

$$\delta W_{\mathrm{K}}=\delta W_{\mathrm{K0}}+\delta W_{\mathrm{K1}}+\delta W_{\mathrm{K2}}+\delta W_{\mathrm{K3}} \quad (37)$$

のように，従来項，コリオリ力に関する項，遠心力に係る項，回転シアに係る項といったように拡張されることがわかる．それぞれ，回転の大きさに対し，0次，1次，2次，1次のオーダーとなる．(3)式および(37)式をみれば，それらの項が有意であれば安定性に影響を与えるはずである．MINERVA/RWMaC[27]には拡張された運動論的MHD理論が実装されている．以下ではMINERVA/RWMaCによる解析例を紹介する．

回転シアの効果に着目した数値解析[27]について紹介する．[27]ではJT-60Uの放電を解析対象としている．解析している放電では，回転分布だけが変化していき，その他の物理量（電流分布等）はほとんど変化していない．**図2**は，RWM成長率を$q=2$面における回転シアと回転の関数としたマップであり，従来理論と拡張された理論の計算結果の比較を示している．回転周波数が低いところの安定領域は歳差ドリフト周波数との共鳴による安定化を表している．従来理論の計算結果と比較して，拡張された理論では臨界安定に近い領域で回転シアの効果が大きくなり，安定領域が広くなっていることがわかる．$\Omega=35$ krad/sの場合に着目する．このときのδW_{K}の実部と虚部の振舞を見ると，**図3**のようになる．矢印は回転シアが大きくなっていることを示す．**図3**よりδW_{K}の虚部が重要であることがわかる．このときの各δW_{K}の虚部の大きさを比べると**図4**のようになる．**図4**(左)は従来のδW_{K}と修正されたδW_{K0}の虚部の比較，**図4**(右)は拡張されたδW_{K1}，δW_{K2}，δW_{K3}の内訳を示している．δW_{K}と修正されたδW_{K0}の違いは歳差ドリフト周波数の修正に起因する．この効果は通過粒子にのみ現れる．また**図4**(右)より，回転に伴う効果のなかで，通過粒子，補足粒子ともにコリオリ力の効果が大きいことがわかる．遠心力，回転シアの効果も有意な値をもっており，安定性を変化させる．以上拡張された運動論的MHD理論を用いて，現在回転シア効果に関する実験結果の定量的な比較が試みられている．

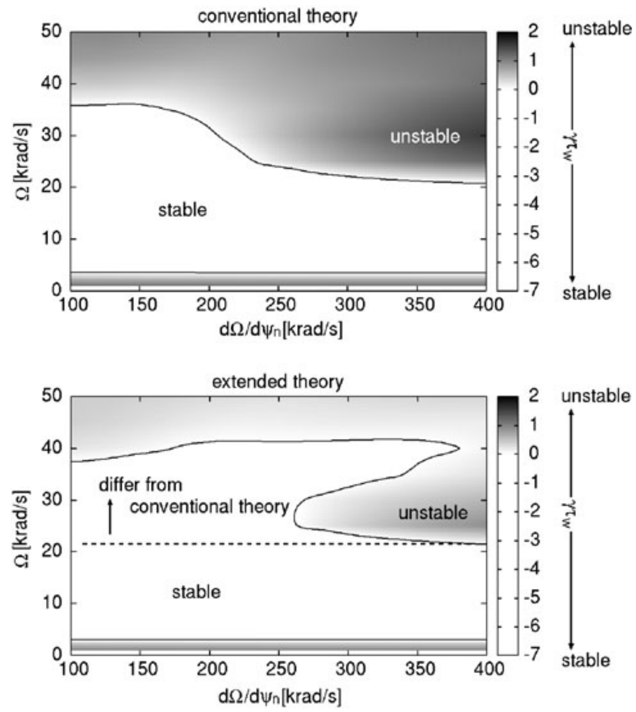

図2 RWM成長率を$q=2$面における回転シアと回転の大きさの関数としたマップ．従来理論と拡張された理論の比較．黒の実線は臨界安定を表す（参考文献[27]の図4を引用）．

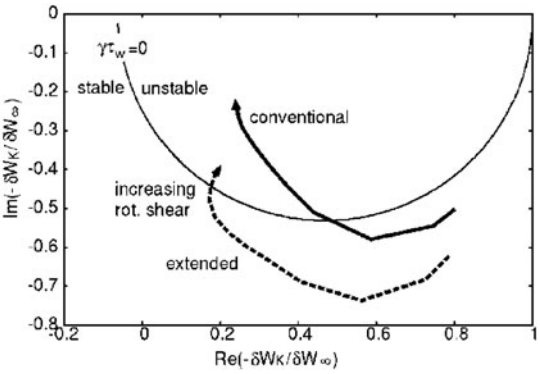

図3　図2においてΩ = 35 krad/sのときの$\delta W_{\rm K}$の実部-虚部平面上における$\delta W_{\rm K}$の軌跡．矢印は回転シアの増加を表す（参考文献[27]の図5を引用）．

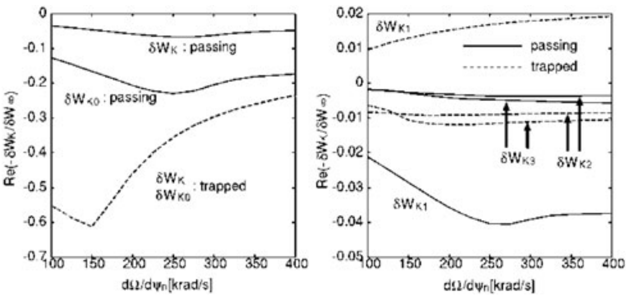

図4　(左)図3における従来の$\delta W_{\rm K}$と修正された$\delta W_{\rm K0}$の虚部の比較．(右)図3における拡張された$\delta W_{\rm K1}$，$\delta W_{\rm K2}$，$\delta W_{\rm K3}$の内訳（参考文献[27]の図6を引用）．

更に，高エネルギー粒子の効果に着目し理論の拡張を行った[27]．NBI加熱による高エネルギー粒子を考える．平衡分布関数として定常なslowing-down分布を考える必要がある．標準的なslowing-down分布の導出を見れば[32]，この分布はバルク粒子の回転にのった系における速度で表現されることがわかる．この点に注意し(32)により共鳴条件を計算するとともに，高エネルギー粒子の回転効果によって拡張された$\delta W_{\rm K}$(37)式を計算した．計算対象としてJT-60SAを取り上げる．co-passingとcounter-passingの接線NBIモデルを用いた．**図5**はRWM成長率をco-passing NBIの入射エネルギー及び入射ピッチ角の関数としたマップである．上が従来理論，下が拡張された理論に対応している．実線は臨界安定を表している．図より明らかなように，拡張されたモデルではRWM成長率が減少し，安定な領域が大きくなっていることがわかる．同様にcounter-passingのNBIモデルでも，図の軸の値の範囲で全て不安定な状態であったところに安定な領域が現れる．これは高エネルギー粒子の回転に伴う非共鳴的な$\delta W_{\rm K}$が増加することに起因している．またこの効果は，固有モードの振幅が大きくなる$q = 2$面及びプラズマ表面付近で特に顕著になることが明らかになっている．

現在，バルクプラズマの回転シア効果および高エネルギー粒子の回転効果を両方取り入れたMINERVA/RWMaCコードにより実験解析が行われている．

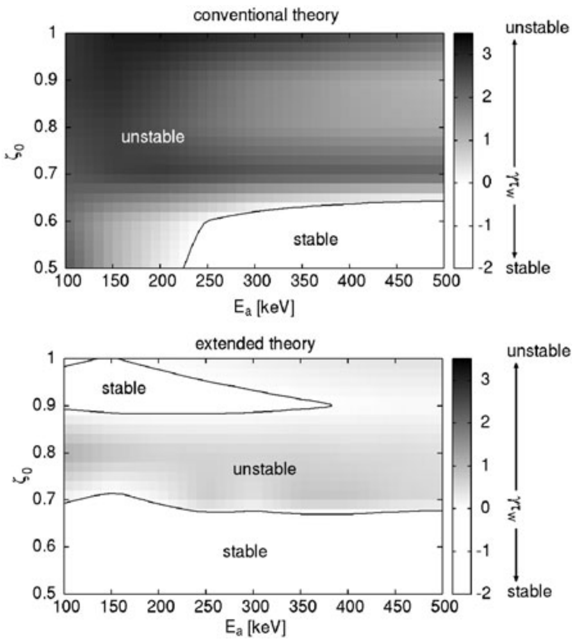

図5　RWM成長率をNBI入射エネルギーと入射ピッチ角の関数としたマップ．上が従来理論，下が拡張された理論の結果を表す．黒実線は臨界安定を表す（参考文献[28]の図9を引用）．

5．まとめ

プラズマ回転によるRWM安定化に関する理論研究の進展について，理想MHDから始め，拡張MHD，最後に運動論的MHD理論に基づいた研究について概観してきた．これらは新しいアイディアを取り入れて徐々に物理的描像の精度を上げて発展している．これまでたびたび触れてきたように理論研究の進展といっても，新たな実験結果の発見に駆動されている面もある．今後も，理論と実験がともに協調して進展していくと思われる．本解説ではすべて線形理論について述べてきたため，非線形MHDシミュレーションについて触れられなかったが，RWM飽和レベルの解明など重要な研究課題もある．また，ここで紹介した詳細な定式化から簡約化モデルを構築し，ディスラプション予測に用いるという挑戦的な試みも最近行われている．これらも今後の高性能トカマク研究においては重要な研究課題であり，更に研究を進めていく必要がある．

6．謝　辞

本原稿を書くにあたり，量子科学技術研究開発機構の松永剛博士，武智学博士，宮戸直亮博士，相羽信行博士，鈴木隆博博士との議論に感謝します．

参 考 文 献

[1] 武智 学 他：プラズマ・核融合学会誌 **85**, 147 (2009).
[2] M.S. Chu and M. Okabayashi, Plasma Phys. Control. Fusion **52**, 123001 (2010).
[3] D. Pfirsch and H. Tasso, Nucl. Fusion **11**, 259 (1971).
[4] C.G. Gimblett, Nucl. Fusion **26**, 617 (1986).
[5] S.W. Haney and J.P. Freidberg, Phys. Fluids B **1**, 1637 (1989).

[6] J.P. Freidberg, *Ideal Magnetohydrodynamics* (Plenum, New York, 1987), Chap 9.
[7] A. Bondeson and D.J. Ward, Phys. Rev. Lett. **72**, 2709 (1994).
[8] M.S. Chu *et al.,* Nucl. Fusion **43**, 441 (2005).
[9] J. Shiraishi *et al.,* Nucl. Fusion **54**, 083008 (2014).
[10] E.J. Strait *et al.,* Phys. Rev. Lett. **74**, 2483 (1995).
[11] R. Betti and J.P. Freidberg, Phys. Rev. Lett. **74**, 2949 (1995).
[12] L.-J. Zheng *et al.,* Phys. Rev. Lett. **95**, 255003 (2005).
[13] J.M. Finn, Phys. Plasmas **2**, 3782 (1995).
[14] R. Fitzpatrick and A.Y. Aydemir, Nucl. Fusion **36**, 11 (1996).
[15] Y.Q. Liu and A. Bondeson, Phys. Rev. Lett. **84**, 907 (2000).
[16] A.H. Boozer, Phys. Plasmas **5**, 3350 (1998).
[17] G. Matsunaga *et al.,* Proc. the 33rd EPS Conference on Plasma Physics (Rome), 30I, O2. 003 (2006).
[18] M. Takechi *et al.,* Phys. Rev. Lett. **98**, 055001 (2007).
[19] H. Reimerdes *et al.,* Phys. Rev. Lett. **98**, 055002 (2007).
[20] B. Hu and R. Betti, Phys. Rev. Lett. **93**, 105002 (2004).
[21] M.S. Chu *et al.,* Phys. Plasmas **2**, 2236 (1995).
[22] B. Hu *et al.,* Phys. Plasmas **12**, 057301 (2005); **13**, 112505 (2006).
[23] J.W. Berkery *et al.,* Phys. Rev. Lett. **104**, 035003 (2010).
[24] Y.Q. Liu *et al.,* Phys. Plasmas **15**, 112503 (2008).
[25] Y.Q. Liu *et al.,* Nucl. Fusion **49**, 035004 (2009).
[26] Y.Q. Liu *et al.,* Phys. Plasmas **21**, 056105 (2014).
[27] J. Shiraishi *et al.,* Sci. Rep. **6**, 25644 (2016).
[28] J. Shiraishi *et al.,* Nucl. Fusion **57**, 126051 (2017).
[29] F. Porcelli *et al.,* Phys. Plasmas **1**, 470 (1994).
[30] R.G. Littlejohn, J. Plasma Phys. **29**, 111 (1983).
[31] R.G. Littlejohn, Phys. Plasmas **24**, 1730 (1981).
[32] J.D. Gaffey, Jr., J. Plasma Phys. **16**, 149 (1976).

しらいしじゅんや
白石淳也

2007年東京大学大学院新領域創成科学研究科先端エネルギー工学専攻修了，現在は量子科学技術研究開発機構主幹研究員．主な研究分野はプラズマの安定性理論．最近は制御についても興味があります．趣味はサッカー，読書，娘や猫と遊ぶこと．