J. Plasma Fusion Res. Vol.93, No.4 (2017) 163‑168

解説

実験データの新しい解析方法

ー順列エントロピーと統計的複雑性を用いた時系列データ評価ー

Evaluation of Time-Series Data Using Permutation Entropy and Statistical Complexity

恩 地 拓 己
ONCHI Takumi
九州大学応用力学研究所

（原稿受付：2017年02月10日）

ノイズを含んだ時系列データを解析する際，順列エントロピーと統計的複雑性を求めることで従来よりも再現よくカオス性，ランダム性，周期性などの特性を区別して理解することが可能になった．近年では基礎プラズマ実験やトカマク・逆磁場ピンチなどの高温プラズマ実験で得られる時系列データへ適用した研究結果が発表され始めている．本稿では順列エントロピーと統計的複雑性を求める計算手法を示し，視覚的な理解に役立つ *C*-*H* 面を利用した特性評価方法について解説する．

Keywords:
statistical complexity, permutation entropy, C-H plane, data analysis

1．はじめに

プラズマの振る舞いは複雑である．またプラズマはしばしば「複雑なシステム（複雑系）」の例としてあげられる．複雑系研究の発展で提唱されてきた様々な「複雑さ」を表す指標の中で，本解説では「順列エントロピー（Permutation Entropy）」[1]と「統計的複雑性（Statistical Complexity）」[2,3]を紹介する．（複雑さを表す量は「複雑度」や「複雑量」とも呼ばれるが，本解説では「複雑性」と呼ぶことにする）．ノイズを含んだ時系列データの複雑性解析では，順列エントロピーの導入が効果的である．また統計的複雑性(C)を縦軸に，（順列）エントロピー(H)を横軸に取ったグラフを C-H 面(C-H plane)と呼ぶ[4-7]．C-H 面を利用し，解析した時系列データが面上のどの位置にプロットされるかを調べることで，その時系列データの振る舞いを視覚的に分類できる．

これら二つのパラメータと C-H 面は医学[8]，経済学[9]，物理化学[10]，気象学[11,12]，音響学[13]など多岐に渡る複雑系研究分野で用いられている．プラズマ物理においても2013年頃から密度揺動や乱流の性質[14-16]，また磁束管ロープに伴う磁場揺動のカオス性の研究[17]に適用され始めており，時系列データの（H，C）を調べ，プラズマの性質を複雑性の観点から定量的に評価する試みが広がりつつある．

2．順列を使った時系列データの解析

2.1　統計的複雑性

統計的複雑性は1989年に James P. Crutchfield と Karl Young によって提唱された概念で，「システムを情報源として観測し，過去と未来の統計的振る舞いが矛盾しない最も単純なモデルの情報量」に相当する[2,18]．彼らはランダム（乱雑）な振る舞いの統計的単純性（Statistical simplicity）に注目した．周期的振る舞いは情報エントロピーが低く，ランダムな振る舞いは高い．一方で周期的振る舞いは有限のパターンを，ランダムな振る舞いは乱数を使えばモデル計算は容易である．言い換えると情報エントロピーは複雑系モデル計算の計算量に相関が無い．よってエントロピーは「ランダム性」を表すが，「複雑さ」を表せそうもない，と考察される．ゆえに周期的振る舞いとランダムな振る舞い，両者の中間領域の複雑性が高いと考えた．これは現実社会のシステムをよく表すので，直感的に正しそうである．例えば，インクが水に落ちた様子を想像してみよう．水中は「落とす前」や「充分時間経過してインクが広がりきった状態」よりも「その間のインクが広がっていく状況」の方が複雑な気がしないだろうか．

統計的複雑性の物理学への導入は「完全結晶」と「理想気体」の考察が始まりと言われている（時系列データへの応用はもう少し後になる）[3]．両者には複雑性が無い．完全結晶は熱力学的エントロピーがゼロである．すなわち乱雑さがゼロであり，情報エントロピーは最小になる．一方

Research Institute for Applied Mechanics, Kyushu University, Kasuga, FUKUOKA 816-8580, Japan
author's e-mail: onchi@triam.kyushu-u.ac.jp

で理想気体は最も乱雑な状態であり，情報エントロピーは最大となる．やはり複雑性を情報エントロピーだけで表すことは難しいようである．ここで N 個の状態 $\{x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_N\}$ を取りうる N 系統があるとすると各々の状態になる確率は $\{p_1, \cdots, p_i, \cdots, p_N\}$ となる．このとき $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$，$p_i > 0$ である．情報エントロピーを確率分布の関数として

$$S = -k \sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i \tag{1}$$

と表せる．

情報エントロピーに加えて「不均衡性（Disequilibrium）」というパラメータ D が重要となる．この不均衡性は系が取りうる状態の等確率分布からの距離を表す．よって $D > 0$ である．N 系統を考えると，D は各状態確率から等確率 $1/N$ への二次距離を足し合わせたもの，すなわち

$$D = \sum_{i=1}^{N} (p_i - 1/N)^2 \tag{2}$$

と表すことができる．よって完全結晶で不均衡性は最大となり，理想気体ではゼロをとる．これらの特徴から情報エントロピー S と不均衡性 D を掛け合わせた

$$\begin{aligned} C_{\mathrm{LMC}} &= D \cdot S \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} (p_i - 1/N)^2\right) \cdot \left(-k \sum_{i=1}^{N} p_i \log p_i\right) \end{aligned} \tag{3}$$

は完全結晶でも理想気体でもゼロとなり，その他の場合は $C > 0$ となる．ここで $k = 1/\log N$ である．情報エントロピー S を横軸に，不均衡性 D と複雑性 C_{LMC} を縦軸にとると，３つのパラメータの関係性は，**図１**に示した概念図のようになる．この統計的複雑性 C_{LMC} は発案者に由来して，LMC（LópezRuiz-Mancini-Calbet）Complexity と呼ばれている[4,5]．

2.2 順列エントロピー

フラクタル次元解析やリアプノフ指数解析の発展により，フラクタルやカオスなど，複雑性を持って変化する時系列データを詳細に理解することが可能になった[19]．一方，実験などで得られる現実の信号にはノイズが伴うため，解析の再現性などに問題があった．そこで Christoph Bandt と Bernd Pompe によって提案されたのが，ノイズを伴った場合でも有効に時系列データを解析し，周期的信号やカオス信号を判別するための尺度，順列エントロピーである［1］．具体的には「時系列データにおいて d-順列の確率分布から得られる規格化された情報エントロピーの総和」と定義される．

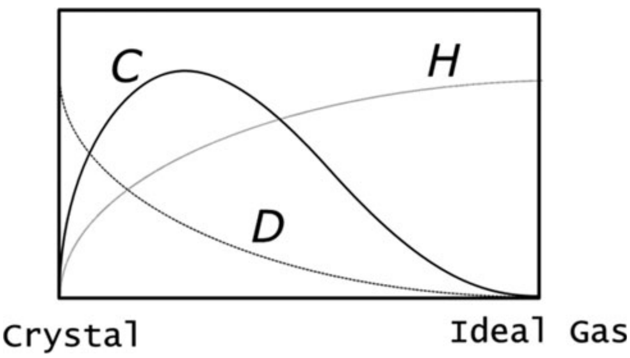

図１　情報エントロピー H，不均等性 D，統計的複雑性 $C = D \cdot H$ の概念図．完全結晶の場合は H が最小，D が最大，理想気体の場合は H が最大，D が最小になるため，C はその中間で最大値をとる．

次のような離散的データ

$$x_i \in \{x_1, x_2, \cdots, x_{Z^*}\}$$

に関して，順列のタイプ別個数を順列の総数で割った値は，そのタイプの順列の存在確率である．ここで d-順列のタイプを π で表すことにする．π は $K = d!$ 種類あることになる．離散データ中の π_j の個数を a_j として順列の総数 $Z - d + 1$（$= Z^*$）で割ると，確率は

$$p_j = \frac{a_j}{Z^*} \tag{4}$$

であり，確率分布は $P = (p_1, \cdots, p_j, \cdots, p_K)$ となる．離散データの情報エントロピーは式（１）と同じく

$$S = -\sum_{j=1}^{K} (p_j) \ln p_j \tag{5}$$

である．最大値は P が $p_j = 1/K$ の等確率を持つときに得られ，$S_{\mathrm{M}} = \ln(K)$ である．そして順列エントロピーは

$$H_{\mathrm{S}} = S / S_{\mathrm{M}} \tag{6}$$

である．最大値で規格化されるため，$0 \leq H_{\mathrm{S}} \leq 1$ の範囲の値を持つ．

次のような簡単な数列

$$\{2, 1, 7, 9, 3, 4, 8, 5, 6\}$$

の順列エントロピーを求めてみよう．$d = 2$ のとき，この中には2-順列が８個ある．ここで $x_i < x_{i+1}$ の順列（$\pi = 01$）が８個中５個，ゆえに確率は $p_0 = 5/8$，そして $x_i > x_{i+1}$ の順列（$\pi = 10$）が８個中３個なので，確率は $p_1 = 3/8$ である．また $K = 2$ である．よって順列エントロピーは

$$\begin{aligned} H_{\mathrm{s}} &= \frac{\{-(5/8)\ln(5/8) - (3/8)\ln(3/8)\}}{\ln(2)} \\ &\cong 0.95 \end{aligned} \tag{7}$$

となる．時系列データ X も d-順列の集合であると考える．$d = 3$ の場合，**図２**に示すようにデータの順列エントロピーを求める．$Z = 100$ のデータ点を持つ X 中の連なる３点 (x_{i-1}, x_i, x_{i+1}) が $x_{i-1} < x_i < x_{i+1}$ であれば，$\pi = 012$ で示されるとしよう．①順序の組は（012, 021, 102, 120, 201, 210）の３の階乗 $3! = 6$ 個ある．②時系列データ X から各々の個数 a_j を検索，③順列の合計数 Z^* で a_j を割ることで確率分布 $P = (p_1, \cdots, p_6) = (a_1/Z^*, \cdots, a_6/Z^*)$ を得る．④ P に対し式（５），（６）に示した計算を行うことで，時系列データの情報・順列エントロピーを得ることができる．次数の値は $d = 3 \cdots 7$ が推奨されている．解析する時系列データのデータ長 M は $M > 5d!$ を満たしたい．$d > 7$ の場合，計算機の能力が十分高い必要があり，M が長くなりすぎる可能性がある．

2.3 Jensen-Shannon 複雑性

順列エントロピーを用いれば，ノイズを含む時系列デー

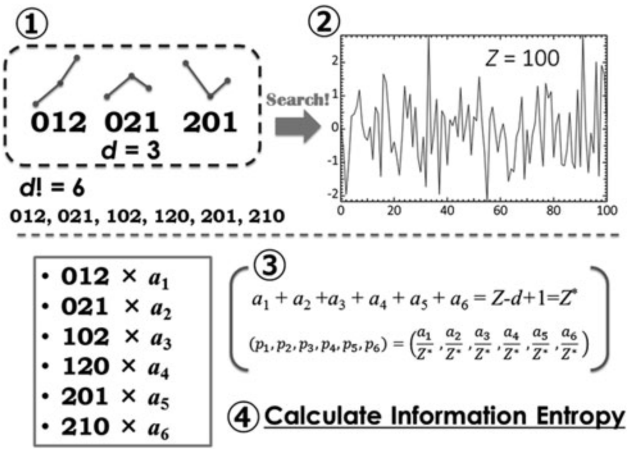

図２　$d=3$ 時の順列エントロピーの求め方．ある時系列データの中から3-順列を種類ごとに数え上げ，確率分布として情報（シャノン）エントロピー $S[P]$ を求める．最大値 $S[P_e]$ で規格化すると順列エントロピー H_S が得られる．

タ（信号）の統計的複雑性を求めることができ，Jensen-Shannon（JS）複雑性は周期性やカオスの判別に優れている[7]．JS 複雑性は JS ダイバージェンス $J[P_1,P_2]$ を不均衡性 Q_J に導入する．Q_J は次のように表される．

$$\begin{aligned} Q_J[P_1,P_2] &= Q_{\max} J[P_1,P_2] \\ &= Q_{\max}\{S[\pi_1 P_1+\pi_2 P_2]-\pi_1 S[P_1]-\pi_2 S[P_2]\} \end{aligned} \quad (8)$$

Q_J は「二つの確率分布同士の距離」と定義される．本解説では簡単に，P_2 を等確率分布と考え，

$$P_2 = P_e = \{1/K, \cdots, 1/K\} \quad (9)$$

とする．また $\pi_1=\pi_2=0.5$ として，

$$Q_J = Q_{\max}\left\{S\left[\frac{P+P_e}{2}\right]-\frac{S[P]}{2}-\frac{S[P_e]}{2}\right\} \quad (10)$$

と表すことができる．$Q_{\max}$ は Q_J の最大値であり，次式で表される．

$$Q_{\max} = -\frac{1}{2}\left\{\frac{d!+1}{2}\ln(d!+1)-2\ln(2d!)+\ln d!\right\} \quad (11)$$

また順列エントロピーは式（６）で示したように

$$H_S[P]=\frac{S[P]}{S_M}=\frac{S[P]}{S[P_e]} \quad (12)$$

である．JS不均衡性と順列エントロピーの積がJS複雑性であり，

$$C_{JS}[P]=Q_J[P,P_e]H_S[P] \quad (13)$$

である．ここで H_s と C_{JS} を導入した時系列データの解析手順を以下にまとめる．

1．時系列データを順列の集合として整理し，確率分布を求める．
2．その確率分布の情報（順列）エントロピーを計算．
3．また確率分布の JS 不均衡性を計算．
4．H_s と Q_J の積を取って JS 複雑性 C_{JS} を算出．

2.4　*C*-*H* 面

図１のように C を縦軸，H を横軸にとったグラフは C-H 面と呼ばれ，H が中間の値をとる場合に C は最大値をとる．H_s と C_{JS} による C-H 面上のプロット位置は時系列データの性質を表し，周期性，カオス性，ランダム性，ノイズ性などの理解に対して視覚的なサポートを与える．また $(H_S, C_{JS})=(0,1)$ のとき，信号は完全ランダム，すなわち白色雑音である．

統計的複雑性 C には最小値 $C_{\min}$ と最大値 $C_{\max}$ が存在し，エントロピーに依存する[5, 6, 12]．$C_{\min}$ はある１つの状態（順列）の確率 p_h が $1/K<p_h<1$ の値を持ち，他のすべての状態が等しい確率 p_j を持つ場合に得られる．このとき

$$p_j=\frac{1-p_h}{K-1}, \qquad (j=1,2,\cdots,K, j\neq h) \quad (14)$$

である．例えば $d=4$ のとき，$p_h=1/2$ であるとすると $p_j=1/46$ となる．もし $p_1=p_h$ であるとするなら確率分布は

$$P=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{46},\frac{1}{46},\cdots,\frac{1}{46}\right\}$$

と表すことができる．次に $C_{\max}$ はある１つの状態（順列）の確率 p_h が $0\leq p_{h(i)}\leq 1/(K-i+1)$ で他の K-i 個の状態が等確率

$$p_{j(i)}=(1-p_h)/(K-i), (j=1,2,\cdots,K-i+1, j\neq h) \quad (15)$$

の場合に得られる．このとき i は $i=1,2,\cdots,K-1$ の整数である．すなわち幾つかの状態（順列）に限定し，その中の“１つの状態”と“それ以外の等確率で起きる状態”に分かれている場合を考えればよい．具体的には $d=4$，$K-i=2$，$p_1=p_h=1/2$ のときの確率分布は

$$P=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},0,\ldots,0\right\}, \qquad (K-i=2)$$

さらに $K-i=3,4$ の場合は，

$$P=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{6},\frac{1}{6},0,\ldots,0\right\}, \qquad (K-i=3)$$

$$P=\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},\frac{1}{8},0\ldots,0\right\}, \qquad (K-i=4)$$

のようになる．(H, C) の値は C-H 面上における $C_{\min}$ と $C_{\max}$ の二つの曲線に囲まれた範囲に限定される．

具体的に三角関数，カオス，非整数ブラウン運動の関数の (H_S, C_{JS}) を求め，それぞれを C-H 面にプロットしてみる．またここでは $d=4$，解析する離散データ数は150とした．例えば単純な三角関数 $f=\sin(\omega t)$ の場合，C-H 面では**図３**に示すような位置にプロット(●)される．

次にカオスの代表例としてロジスティック写像について考える．ロジスティック写像は

$$f(t+1)=rf(t)(1-f(t)) \quad (16)$$

で表され，その振る舞いは $0\leq r\leq 4$ のパラメータに依存して大きく変化する．r が３を超えると，固定点付近で振動

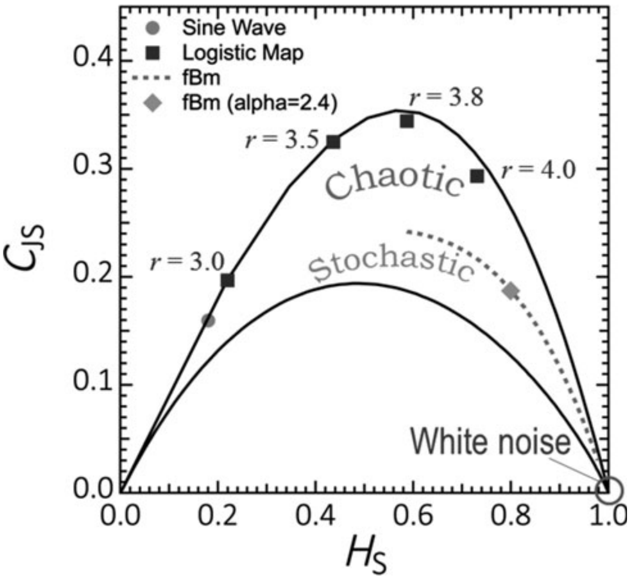

図3　$d = 4$ である場合の C-H 面．sine 波(●)，ロジスティック写像（■），非整数ブラウン運動（$\alpha = 2.4$，◆）をプロットしている．非整数ブラウン運動の関数に関して α を変化させると，点線のような曲線が描ける．曲線よりも上にある場合カオス性，下にある場合はストキャスティック性を表す．

し始め，3.4を超えるまでは二点間を行き来する周期性が現れる．図4(a)のような波形になる $r = 3.0$ のとき，$(H_S, C_{JS}) = (0.2, 0.2)$ 付近にプロット（■）され，その位置は上で求めた sin 関数と近い．r を 3.4 よりもさらに増大させると，周期が突然倍増していき，$r = 3.569946\cdots$ で無限大になる．$r = 3.5, 3.8, 4.0$ と増大させた場合，f は図4(b)-(d)のように振る舞う．また図3に示すように C-H 面では曲線に沿うように $C_{\max}$ 付近を移動する．ロジスティック写像は自由度1の非常に単純な非線形写像による決定論的カオスであり，それらの H_S は中程度で C_{JS} は最高値に接近する．

次に非整数ブラウン運動（Fractional Brownian Motion, fBm）の複雑性を求めてみよう．fBm はその名の通り有色雑音であり，

$$x(t) = N(0, \propto t^{2H}) \tag{17}$$

で表される確率過程である．平均は 0，分散は t のベキで変化する．また分散は

$$\mathbb{E}[(B_M(t) - B_M(s))^2] = \sigma^2 |t-s|^{2H} \tag{18}$$

共役分散は

$$\mathbb{E}[B_M(t) B_M(s)] = \frac{(t^{2H} + s^{2H} - |t-s|^{2H})}{2} \tag{19}$$

である．H はハースト指数であり，$0 \leq H \leq 1$ の値をとる．$H = 1/2$ のとき通常のブラウン運動になる．また fBm のパワースペクトルは

$$P(f) \propto \frac{1}{f^{\alpha}} \tag{20}$$

となる．H と α の間には

$$H = \frac{\alpha - 1}{2} \rightarrow \alpha = 2H + 1 \tag{21}$$

の関係があり，α は $1 \leq \alpha \leq 3$ の値を持つ．$\alpha = 2.4$ の場合，関数は図5に示すような波形になる．C-H 面上では図3に示すように $(H_S, C_{JS}) \approx (0.8, 0.2)$ 付近にプロット（◆）される．$\alpha = 1$ のときは $(H_S, C_{JS}) = (1, 0)$ に近い値になる．α を増大させていくと，H_S は減少，C_{JS} は増大し，C-H 面上では図3に示すように，$C_{\max}$ と $C_{\min}$ の中間あたりに曲線を描く．この fBm の α が変化して描かれる曲線は，解析した時系列データの特徴を表す重要な基準となる．具体的に述べると，曲線より上にプロットされる場合はカオス的，下にプロットされる場合はストキャスティック（ランダム）的である．よってこの曲線を基準として，その時系列データの振る舞いが決定論的であるかランダムなのかを判断することができる．

Rosso 等は文献[7]で，様々な種類の関数を C-H 面上にプロットして分析し，カオスとノイズを明確に分離できることを示した．本解説では sin 信号，ロジスティック写像，fBmを C-H 面上の目安としてプロットした．他にもテント写像，エノン写像，レスラー方程式などを C-H 面上のカオ

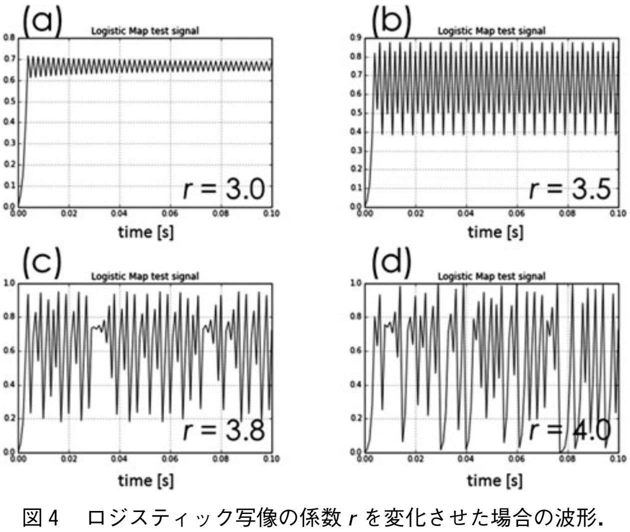

図4　ロジスティック写像の係数 r を変化させた場合の波形．

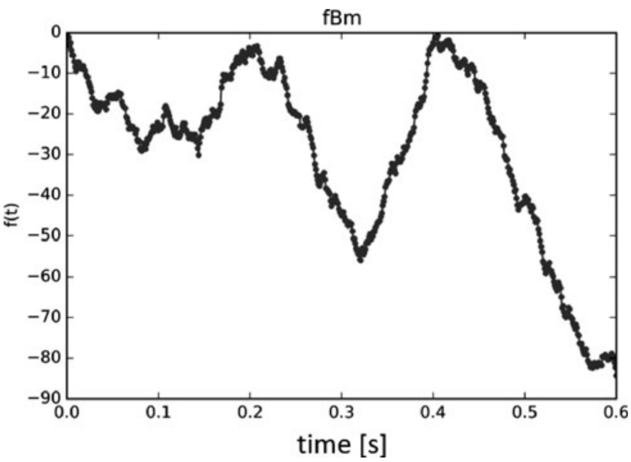

図5　非整数ブラウン運動（$\alpha = 2.4$）の波形．

スの指標に，またfractional Gaussian Noiseなどを有色雑音の指標にすることも可能だろう．

3．プラズマ実験研究への *C*-*H* 面の適用

近年，基礎プラズマ研究で得られた実験データを*C*-*H*面上で分析する研究手法が適用され始めている．MaggsとMoralesは単結晶LaB_6電極を用いた電子ビームで作られる電子温度フィラメント構造を静電プローブで計測し，イオン飽和電流の揺動成分を解析した[14]．Gekelman等はLAPD装置で生成される磁束管ロープを計測対象とし，磁気プローブを挿入して三方向の磁場揺動を調べた[17]．この磁場揺動信号は空間・時間に依存し，磁束管ロープ中にカオスが局在することがわかった．またWeckやBrownはスフェロマックや太陽風におけるプラズマ乱流を*C*-*H*面や周波数スペクトルを利用して分析している[15, 16]．さらに高温プラズマ実験結果の解析例もあり，Maggs等はDIII-DトカマクのLモードプラズマで得られたDoppler Backscattering信号を詳細に調べ，周辺プラズマ密度揺動がカオス的であることを明らかにした[20]．

逆磁場ピンチ（Reversed Field Pinch, RFP）プラズマで得られる時系列データへの適用も行われた[21]．低アスペクト比RFP装置RELAX[22]で得られた制動放射軟X線，紫外光，トロイダル磁場揺動の時系列データを解析している．軟X線検出はジルコニウム箔を介しており，RELAXのプラズマでは中心部からの発光を観測している．一方で紫外光はプラズマ周辺部からの寄与が大きいと考えられている[23]．**図6**に放電波形を示す．上からプラズマ電流，軟X線，紫外線，それら放射検出信号から求めたH_SとC_{JS}の時間変化を示している．プラズマ電流が増大し，軟X線放射強度が上昇すると，紫外線放射強度は低下する．軟X線信号の(H_S, C_{JS})は放射強度の上昇に合わせて低下する傾向にあるが，紫外線信号は$(H_S, C_{JS}) = (0.5, 0.25)$付近の値から大きく変化しない傾向にある．

また高密度（$\overline{n_e} > 3\times10^{19}\ \mathrm{m}^{-3}$）と低密度（$\overline{n_e} \sim 10^{19}\ \mathrm{m}^{-3}$）のプラズマで制動放射軟X線及びトロイダル磁場揺動を比較した．ここで磁気プローブは真空容器壁位置に設置しており，周辺磁場揺動を計測している．高密度プラズマ及び低密度プラズマはピンチパラメータΘと反転パラメータFでは$(\Theta, F) \approx (1.6, -0.1)$及び$(\Theta, F) \approx (2.1, -0.5)$と特徴付けられる．RELAXで生成されるRFPプラズマの詳細は文献[24-27]などを参照していただきたい．**図7**に示すように*C*-*H*面において，軟X線信号は$0.4 \le H_S \le 0.5$, $0.2 \le C_{JS} \le 0.3$の範囲に集まる．低密度プラズマの方がC_{JS}は高くなり，よりカオス的になっていることがわかる．磁場揺動を比較すると，高密度プラズマでは$(H_S, C_{JS}) \approx (0.75, 0.17)$付近にプロットされ，fBmの曲線よりも低い位置にある．一方低密度では$(H_S, C_{JS}) \approx (0.90, 0.10)$付近にプロットされ，ちょうどfBmの曲線上に乗る．ここで示したように，n_eや(Θ, F)のようなRFPプラズマの性質が異なる場合には*C*-*H*面上でも違いが充分に現れることがわかった．

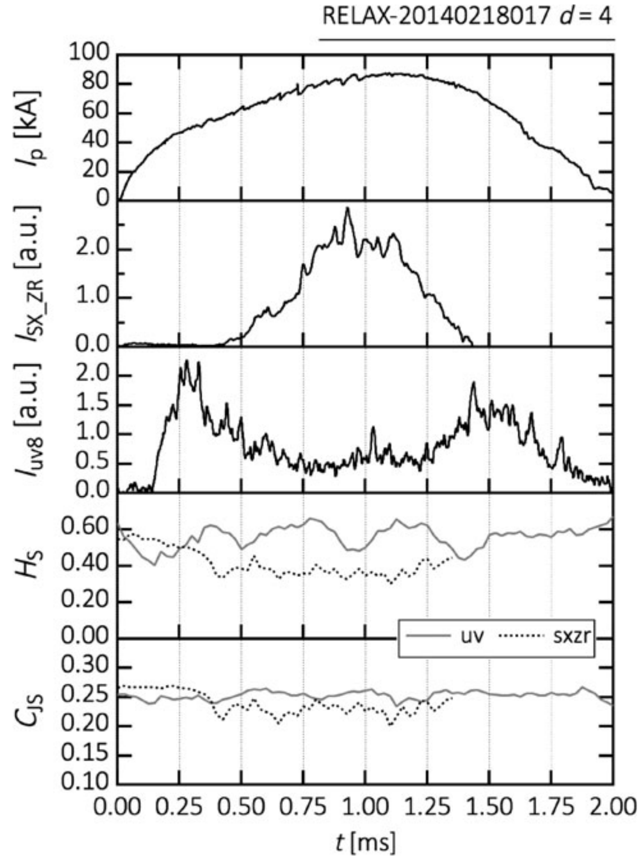

図6　逆磁場ピンチ装置RELAXで得られた放電波形．上からプラズマ電流，軟X線放射，紫外放射，それら放射の信号の順列エントロピーと統計的複雑性を示す．

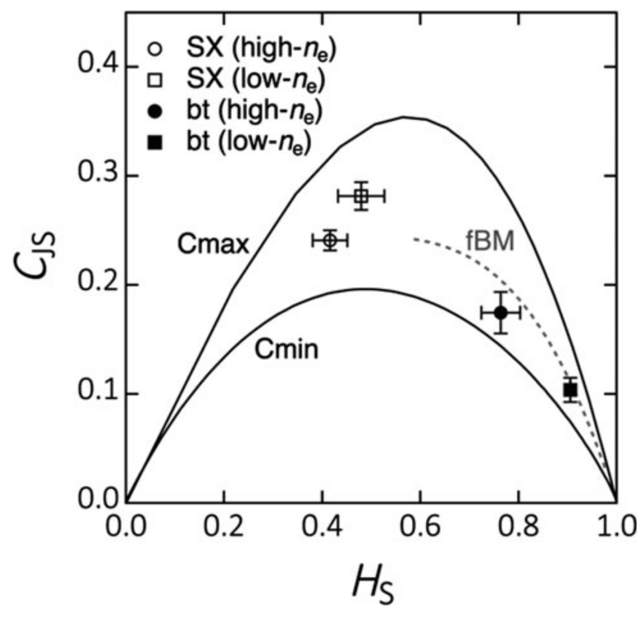

図7　RELAXで得られた軟X線放射と磁場揺動データをプロットした*C*-*H*面．高密度プラズマ（31ショット平均）と低密度プラズマ（18ショット平均）で比較．

4．複雑性の定量化，今後の展望

順列エントロピーと統計的複雑性は物事の，特に複雑系の複雑性を定量化するためのアプローチから生まれたパラメータだと言える．そもそも複雑系という言葉は何を指すのだろうか．自然の中や社会の中には複雑なシステム，複

雑系は多く存在する．複雑系を組織作る一つ一つの個体は比較的単純であるが，それらは集団としてパターンを成し，情報を利用し，適応する．その複雑な振る舞いは中央制御されることなく生じる．例えば「脳」という複雑なシステムの場合，ニューロンが単純な個体である．ニューロンは他の個体からのシグナルを受け，自身でもシグナルを発生する，という単純な活動を行う．しかし無数のニューロン（人間の大脳皮質は平均で140億個のニューロンを持つ）が生み出すのは，「思考」や「感情」といった極めて複雑な脳活動である．脳の他にも免疫系，遺伝子（DNA）などの生物学的なものから，経済，インターネット（WWW），気象海洋などが複雑系の代表例としてあがる．これらに共通する性質から，M. Mitchell は複雑系の定義を「数多くのコンポーネントから構成されながらも単純な運用規則を持つのみで中央制御機構を持たない大規模なネットワークから，集合体としての複雑な振る舞い，複雑な情報処理や，学習，進化による適応が生じるシステム」とする[18]．また「創発的で自己組織化する振る舞いをはっきりと示すシステム」ともしている．これらの定義に対し，荷電粒子という単純なコンポーネントで構成される一方，自己組織化を伴いながら集団として複雑に振る舞うプラズマは，「複雑系」であると言えそうである．

複雑系の「複雑性」を定量的に測定したり，計算したりするために，様々な基準が提案され，議論されてきた．しかし多岐に渡る分野で広く一般的に受け入れられている「複雑性の定量的指標」は，実は現時点で存在していない．ゆえに「複雑性」の意味は其々の科学研究分野で異なり，複数が併存している．研究者達はまず，サイズやエントロピーのような単純なパラメータで複雑性を測ろうとした．その後の研究により，これまで述べたもの以外にも，コルモゴロフ複雑性，熱力学的深度，構造の階層度などの指標が発展している．

順列エントロピーと統計的複雑性は数ある指標の一部である．今回いくつか紹介したものの，これらの量で物理を議論したプラズマ実験研究は2017年始めの時点ではそれほど多くない．世界中で様々なプラズマが生成されているなかで，時系列データの揺動の理解やカオスの判定に C-H 面は便利であろう．過去に取ったデータの順列エントロピーや統計的複雑性を求めてみると，また何か新しいことが見つかるかも知れない．

プラズマの複雑性を定量化するための試みは，今後も複雑系研究や計算法の発展と共にあるだろう．Steven Hawking は前世紀の末，2000年に次のように述べている．"I think the next century will be the century of complexity"[28]．プラズマの複雑性を理解する研究の発展に期待したい．

おんち たくみ
恩 地 拓 己

九州大学応用力学研究所高温プラズマ理工学センター助教．主に磁場閉じ込め高温プラズマの実験研究に従事．これまでに逆磁場ピンチ，トカマク，球状トカマクに関わる．最近は球状トカマク装置 QUEST のプラズマ加熱のために電気回路，ジャイロトロン，クライストロンなどと格闘中．

謝 辞

本解説を執筆するにあたり，京都工芸繊維大学の比村治彦准教授に大変お世話になった．また実験研究では九州大学藤澤彰英教授，京都工芸繊維大学政宗貞男教授，三瓶明希夫講師，RELAX チームの学生皆様のご協力をいただいた．

参 考 文 献

[1] C. Bandt and B. Pompe, Phys. Rev. Lett. **88**, 174102 (2002).
[2] J.P. Crutchfield and K. Young, Phys. Rev. Lett. **63**, 105 (1989).
[3] K.D. Sen, *Statistical Complexity* (Netherlands Springer, 2011), 65-127.
[4] R. López-Ruin *et al.*, Phys. Lett. A **209**, 321 (1995).
[5] X. Calbet and R. López-Ruin, Phys. Rev. E **63**, 066116 (2001).
[6] M.T. Martin *et al.*, Physica A **369**, 439 (2006).
[7] O.A. Rosso *et al.*, Phys. Rev. Lett. **99**, 154102 (2007).
[8] O.A. Rosso *et al.*, J. Neurosci. Methods **153**, 163 (2006).
[9] L. Zunino *et al.*, Physica A **389**, 1891 (2010).
[10] H.V. Ribeiro *et al.*, PLoS ONE **7**, e40689 (2012).
[11] P.M. Saco *et al.*, Physica A **389**, 5022 (2010).
[12] L. Zunino *et al.*, Phys. Rev. E **86**, 046210 (2012).
[13] H.V. Ribeiro *et al.*, Physica A **391**, 2421 (2012).
[14] J.E. Maggs and G. J. Morales, Plasma Phys . Control. Fusion **55**, 850015 (2013).
[15] P.J. Weck *et al.*, Phys. Rev. E **91**, 023101 (2015).
[16] M.R. Brown *et al.*, Phys. Plasmas **22**, 055601 (2015).
[17] W. Gekelman *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **55**, 064002 (2014).
[18] M. Mitchell：ガイドツアー 複雑系の世界 サンタフェ研究所講義ノートから（紀伊國屋書店，2011）．
[19] 合原一幸 他：カオス時系列解析の基礎と応用（産業図書，2000）．
[20] J.E. Maggs *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **57**, 045004 (2015).
[21] T. Onchi *et al.*, *to be published in* Phys. Scripta.
[22] S. Masamune *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **76**, 123501 (2007).
[23] T. Onchi *et al.*, Rev. Sci. Instrum. **85**, 113502 (2014).
[24] T. Onchi *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **80**, 114501 (2011).
[25] R. Ikezoe *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **53**, 025003 (2010).
[26] R. Ikezoe *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **55**, 015005 (2012).
[27] R. Ikezoe *et al.*, J. Phys. Soc. Jpn. **81**, 115001 (2012).
[28] S. Hawking in San Jose Mercury News, Morning Final Edition, January 23 (2000).