講座 画像再構成とパターン認識の数理

4．ラプラシアン固有関数とその画像データ解析への応用

4. Laplacian Eigenfunctions and Their Application to Image Data Analysis

斎 藤 直 樹
SAITO Naoki
カリフォルニア大学デイヴィス校数学科

（原稿受付：2016年 8 月26日）

本章では，ユークリッド空間上の領域で定義されたラプラス作用素，およびそれと可換な積分作用素の固有値・固有関数の基礎，またそれらの画像データ解析への応用，特に脳の海馬の形状認識，およびラプラシアン固有関数といわゆる「患者対応基底関数」との関係について考察する．

Keywords:
eigenvalues and eigenfunctions of Laplace operators, integral operators commuting with Laplacians, boundary value problems, Fourier analysis, image analysis, shape recognition

4.1 始めに（フーリエ解析について）

読者もすでに充分ご承知のことと思われるが，数学・物理・工学等の分野における**フーリエ級数・変換**の重要性・普遍性はどこに帰着するのであろうか？　筆者は，「**与えられた関数やデータを既知の基本的な関数を用いて分解し，それらの線形結合（あるいは積分）として元の関数やデータを表すことができる**」という性質であると考えている．ここにいう「既知の基本的な関数」とは，もちろん，様々な周波数のサイン（正弦）・コサイン（余弦）関数のことである．与えられている関数やデータを解析するにあたり，その定義域や台に注意することは，常に重要である．例えば，一次元の連続関数 $f(x)$ が，長さ l の閉区間 $I:=[0,l]$ で定義されているとしよう．一般に I 上で定義された関数を考察・解析するには，I 上の自乗可積分空間 $L^2(I):=\{f:I\to\mathbb{C}\mid \|f\|_2:=\sqrt{\int_I|f(x)|^2\mathrm{d}x}<\infty\}$ を考え，そこにおける**正規直交基底** $\{\phi_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ を使い，関数 f をその展開係数列 $\{c_k(f)=\langle f,\phi_k\rangle:=\int_I f(x)\overline{\phi_k(x)}\mathrm{d}x\}_{k\in\mathbb{N}}$（この数列は，自乗総和可能列の空間 $\ell^2(\mathbb{N})$ に属する）を使って，$f(x)\sim\sum_{k\in\mathbb{N}}c_k(f)\phi_k(x)$ として表せば，f の様々な性質を，数列 $\{c_k(f)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を調べることにより解析することができる．詳細は[1‐5]等を参照されたい．ここで問題になるのが，どのような $L^2(I)$ の正規直交基底を用いるかということである．

もし $f(x)\in C(I)\subset L^2(I)$ が周期 l の周期関数とみなすことができれば，すなわち $f(0)=f(l)$ であるならば，$f(x)$ の $C(I)$ から $C(\mathbb{R})$ への周期的拡張を考えることができる．この場合，最も自然で便利な $L^2(I)$ の正規直交基底は，**フーリエ基底** $\{\frac{1}{\sqrt{l}}\exp(2\pi\mathrm{i}kx/l)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ である．また，境界条件が**斉次ディリクレ境界条件** $f(0)=f(l)=0$ の場合は，**フーリエ正弦関数系** $\{\sqrt{\frac{2}{l}}\sin(\pi kx/l)\}_{k\in\mathbb{N}}$，**斉次ノイマン境界条件** $f'(0)=f'(l)=0$ の場合は，**フーリエ余弦関数系** $\{\frac{1}{\sqrt{l}}\}\cup\{\sqrt{\frac{2}{l}}\cos(\pi kx/l)\}_{k\in\mathbb{N}}$，が適している．ところが，与えられた関数・データが，予めこれらの境界条件を満たしているとは限らない．一般には，むしろそのような境界条件を満たしている方が稀であると言える．その場合，無理に上記の正規直交系を使うと，何が起こるであろうか？　通常のフーリエ基底を例にとって考えよう．与えられた関数 $f(x)\in C(I)$ で，$f(0)\neq f(l)$ と仮定しよう．すると，f のフーリエ基底関数による展開係数は，

$$c_k(f):=\frac{1}{\sqrt{l}}\int_0^l f(x)\mathrm{e}^{-2\pi\mathrm{i}kx/l}\mathrm{d}x,\quad k\in\mathbb{Z},$$

で与えられる．この場合，$\{c_k(f)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ のサイズの**減衰**が非常に遅くなってしまう．さらに詳しく言うと，$k\to\pm\infty$ のとき，$|c_k(f)|\sim O(1/|k|)$ となる上，いわゆる**ギブズ現象**（Gibbs Phenomenon）が生じる[3‐5]．これは，与えられた関数 f が周期境界条件を満たさないため，f 自体は I 上で連続関数であっても，f の周期的拡張は**不連続関数**となるからである．なぜ展開係数のサイズの減衰が遅いとまずいのか？　それは，実用上，関数の正規直交系による展開は，有限項で打ち切る必要があるからであり，設定されたレベルの近似誤差を得るためには，減衰が速い展開級数の方が，減衰の遅いものよりもより少数の項で打ち切ることができるからである．以上のことは，たとえ $f(x)$ が I 上で非常に滑らかな，すなわち $C^\infty(I)$ に属する関数であっても，$f(0)\neq f(l)$ である限り，そのフーリエ展開係数のサイズの減衰は $O(1/|k|)$ と f が I 上で単に連続な場合と変らない．なお，$f\in C(I)$ で $f(0)\neq f(l)$ であっても，f をフーリエ余弦関

Department of Mathematics, University of California, One Shields Avenue, Davis, CA 95616 USA

author's e‐mail: saito@math.ucdavis.edu

数で展開すると，その展開係数のサイズの減衰は，$O(1/k^2)$ となる．これは，f を y-軸について偶対称に $x\in[-l,0]$ まで拡張し，その結果得られた $[-l,l]$ 上での関数をさらに周期 $2l$ で実軸上全体に周期的拡張した関数を考えると，それは $C(\mathbb{R})$ に属し，その周期 $2l$ のフーリエ基底展開と元の I 上での関数 f のフーリエ余弦展開が一致するからである．また，このことが，JPEG 画像圧縮規格[6]で**離散コサイン変換**（DCT）が採用されている大きな一因であることを指摘しておく（DCTの様々なタイプや性質については，[7]の一読をお薦めする）．データ解析における境界条件の重要性についてのさらに詳しい解説，特に，与えられたデータが上記のような通常の境界条件を満たさないときは，どのようにフーリエ解析を進めればよいかについては，[8-10]とそこでの参考文献を参照されたい．

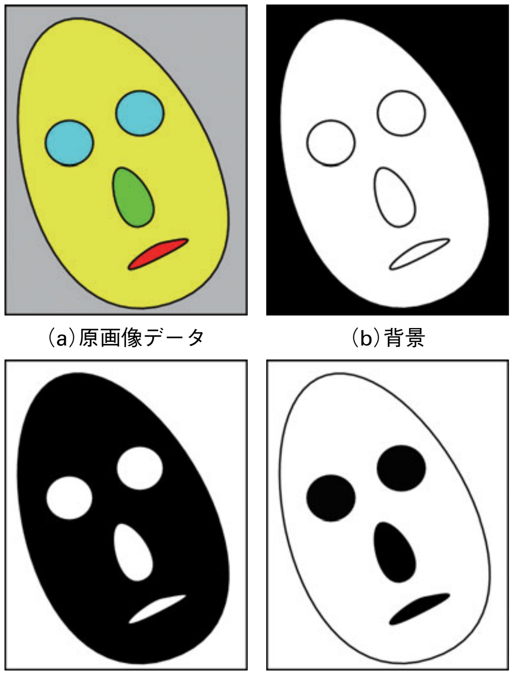
さて，このようなフーリエ基底が，$L^2(I)$ 上での正規直交基底として自然に現れるのは，なぜであろうか？　それは，I 上での簡単な物理的な問題を考えると明確になる．例えば，I を針金とみなしたときの熱の拡散を記述する**熱方程式**や I を弦とみなしたときの振動を記述する**波動方程式**の**初期値・境界値問題**を考えよう．すると，これらの問題を変数分離法で解くときに現れる空間変数 $x\in I$ に依存する成分 $u(x)$ が，次の 2 階常微分方程式の境界値問題で記述され，境界条件が，周期的／斉次ディリクレ／斉次ノイマンの場合，フーリエ基底／正弦関数系／余弦関数系がそれぞれ解となっていることがわかる：

$$
\begin{cases}
-u''(x)=\lambda u(x), & x\in(0,l);\\
u(0)=u(l) & \text{周期条件の場合；}\\
u(0)=u(l)=0 & \text{斉次ディリクレ条件の場合；}\\
u'(0)=u'(l)=0 & \text{斉次ノイマン条件の場合.}
\end{cases}
\tag{1}
$$

なお，上記の境界値問題はいわゆる**正則スツルム・リゥヴィル型境界値問題**（regular Sturm-Liouville boundary value problem）の最も単純なケースである．一般に，正則スツルム・リゥヴィル型境界値問題の解集合は $L^2(I)$ 上の正規直交基底系を形成するという事実はよく知られている[11-13]．ここで，k 番目の固有値 λ_k は，周期的境界条件の場合は，$(2\pi k/l)^2$，$k\in\mathbb{Z}$；斉次ディリクレ条件の場合は，$(\pi k/l)^2$，$k=1,2,\ldots$；斉次ノイマン条件の場合は，$(\pi k/l)^2$，$k=0,1,\ldots$，となることが容易にわかる．このとき，**固有値に区間 I の情報が反映されている**，すなわち，固有値が区間長 $|I|=l$ に依存することを注意しておく．

以上，与えらた関数・データが一次元上の長さ l の区間 I で与えられている場合を考察したが，d 次元上の一般の開領域 $\Omega\in\mathbb{R}^d$，$d=2,3,\ldots$，のときは，どのような状況になるであろうか？　例として，画像データが**図 1** のイラストレーションのような場合を考えよう．このとき，背景の部分だけのデータを解析したい，あるいは，目・鼻・口以外の顔の皮膚の部分のデータのみ，あるいは目の部分のデータのみを解析したいとすると，従来の二次元空間におけるフーリエ正弦・余弦関数系では，歯が立たない．

一般形状の $\Omega\in\mathbb{R}^d$ 上では，(1)式は以下のようなヘル



(a)原画像データ　(b)背景　(c)目・鼻・口以外　(d)目・鼻・口

図 1　顔の画像データのイラストレーション．

ムホルツの偏微分方程式による境界値・固有値問題に一般化される：

$$
\begin{cases}
-\Delta(\boldsymbol{x})=\lambda u(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x}\in\Omega;\\
u|_{\partial\Omega}=0 & \text{斉次ディリクレ条件の場合；}\\
\partial_\nu u|_{\partial\Omega}=0 & \text{斉次ノイマン条件の場合.}
\end{cases}
\tag{2}
$$

ここで，$\Delta:=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$ であり，$\mathbb{R}^d$ 上での**ラプラス作用素**あるいは**ラプラシアン**と呼ばれる二階の偏微分作用素である．また，$\partial_\nu u|_{\partial\Omega}$ は，領域境界 $\partial\Omega$ における，領域の外側に向いた法線微分 $\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{x})\cdot\nabla u(\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}\in\partial\Omega$ のことである．ここで，周期的境界条件は，Ω が矩形領域のときしか意味をもたないことを注意しておく．

Ω が矩形領域の場合は，一次元のフーリエ正弦・余弦関数のテンソル積が(2)の解となり，$L^2(\Omega)$ の正規直交系になることは容易に理解されよう．しかしそれ以外の場合は，どうであろうか？　Ω が $\mathbb{R}^2$ 上の単位円板，$\mathbb{R}^3$ 上の単位球面，$\mathbb{R}^3$ 上の偏長楕円体の場合，(2)式にそれぞれ適切な座標変換・変数分離を行った後の境界値問題の固有関数解は，数理物理でしばしば現れるベッセル関数，球面調和関数，偏長楕円体関数となることが知られている[14-18]．

それでは，一般形状の $\Omega\in\mathbb{R}^d$ の場合は，どうであろうか？　もしも，(2)のように境界条件がはっきり指定されている場合ならば，大きく分けて二つのアプローチを考えることができる．一つは，(2)を有限要素法（FEM）などを用いて離散化して近似解を求める方法[19-21]，もう一つは，グリーン関数[14-18]を用いて積分方程式に変換し，さらにそれを離散化して近似解を求める方法[22, 23]である．前者は，疎（スパース）な線形方程式・固有値問題を

解くことに帰着し，計算速度は速いがそのシステムの**条件数**が大きくなる．一方，後者の条件数は一般的には低く，数値解析上安定して計算できるものの，密な線形方程式・固有値問題になるため，計算速度は遅くなる．また，上記に述べた特殊な形状（円板・球など）の場合以外の一般形状の有界領域においてディリクレあるいはノイマン境界条件を満たすグリーン関数を構成することは難しい．また，どちらの手法にしても境界条件を明確に指定する必要がある．しかしながら，数理物理の境界値・固有値問題を解くのではなく，領域上で観測された関数・データを解析するのが目的であるならば，上述したように，その関数・データがディリクレあるいはノイマン境界条件を最初から満たしていることは稀である．したがって，これらの従来の手法と異なる手法の開発が重要となる．

4.2 ラプラシアンと可換な積分作用素

筆者は，前節で述べた動機から，一般形状領域上で関数・データが与えられたとき，境界条件を最初から陽に指定しなくても済むようなラプラシアン固有関数の構成法およびその数値解法を提案した[24]．ここでは，その概要について述べる．

前節でも述べたが，積分作用素を用いた解法の方がラプラシアンのような微分作用素を直接扱う解法よりも，数値的には安定している[22,23]．ここで，ラプラシアン $\mathcal{L}:=-\Delta$ を直接扱うことに伴う困難を克服するための鍵となるのは，それと**可換**な積分作用素$\mathcal{K}$，すなわち$\mathcal{K}\mathcal{L}=\mathcal{L}\mathcal{K}$を満たすような$\mathcal{K}$を探すことである．なぜならそのような$\mathcal{K}$を見付けることができれば，以下の定理によって，$\mathcal{K}$の固有関数と$\mathcal{L}$の固有関数が一致するので，$\mathcal{L}$の固有関数を直接$\mathcal{L}$を解析することによって求める必要がなくなるからである．

定理2.1（[25, p.63]）．$\mathcal{K}$と$\mathcal{L}$を交換可能な二つの $L^2(\Omega)$ の作用素とし，そのうちの一つは重複度が有限な固有値を持つと仮定する．そのとき，$\mathcal{K}$と$\mathcal{L}$はその固有値に対応する固有関数を共有する．すなわち，$\mathcal{L}\varphi=\lambda\varphi$ と$\mathcal{K}\varphi=\mu\varphi$ となる $\varphi\in L^2(\Omega)$ が存在する．

それでは，$\mathcal{L}=-\Delta$ で事前に境界条件を設定したくないとき，$\mathcal{K}$としてどのようなものを考えればよいであろうか？　グリーン関数をその核とするグリーン作用素$\mathcal{G}$は，境界値問題の偏微分作用素の逆作用素であり，当然その偏微分作用素と可換である．しかしながら，上述したように，画像データ解析では，境界$\partial\Omega$上でデータの値が0（ディリクレ条件）になったり，法線微分が0（ノイマン条件）になったりするとは限らず，またそのような境界条件を満たすグリーン関数を構成するのも難しい．そこで，以下のような，**ラプラシアンの基本解**（**自由空間におけるグリーン関数**とも呼ばれる）を考える．

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}):=\begin{cases} -\dfrac{1}{2}|x-y| & d=1; \\ -\dfrac{1}{2\pi}\log|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}| & d=2; \\ \dfrac{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}|^{2-d}}{(d-2)\omega_d} & d>2. \end{cases} \tag{3}$$

上式で $\omega_d:=\frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)}$ は $\mathbb{R}^d$ における単位球の表面積，$|\cdot|$ は通常のユークリッドノルムを表す．ここで，(3)式を積分核とする積分作用素$\mathcal{K}:L^2(\Omega)\to L^2(\Omega)$ を以下のように定義する：

$$\mathcal{K}f(\boldsymbol{x}):=\int_\Omega K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})f(\boldsymbol{y})\,\mathrm{d}\boldsymbol{y},\quad f\in L^2(\Omega). \tag{4}$$

するとこの$\mathcal{K}$について次の定理が成り立つ．

定理2.2（[24]）．(4)式で定義された積分作用素$\mathcal{K}$はラプラシアン$\mathcal{L}=-\Delta$ と可換である．その共通の固有関数φ は，以下の「非局所的」な境界条件を満たす：

$$\int_{\partial\Omega}K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\partial_{\nu_y}\varphi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{ds}(\boldsymbol{y})=-\frac{1}{2}\varphi(\boldsymbol{x}) +\mathrm{pv}\int_{\partial\Omega}\partial_{\nu_y}K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\varphi(\boldsymbol{y})\,\mathrm{ds}(\boldsymbol{y}),\quad \boldsymbol{x}\in\partial\Omega. \tag{5}$$

ここで，pv はそれに続く広義積分のコーシーの主値，$\mathrm{ds}(\boldsymbol{y})$ は境界上の点 $\boldsymbol{y}\in\partial\Omega$ における面積要素を表す．

ここで注意しておくが，積分作用素$\mathcal{K}$の固有関数を求めるには，(5)式の境界条件を気にする必要は全くない．これが微分作用素$\mathcal{L}$の固有関数を$\mathcal{L}$から直接求めるときとの大きな違いの一つである．

系2.3. 定理2.2における$\mathcal{K}$，$\mathcal{L}$の共通の固有関数$\varphi(\boldsymbol{x})$ は領域Ω の外部に**自然に拡張**でき，以下の偏微分方程式を満たす：

$$-\Delta\varphi=\begin{cases}\lambda\varphi & \boldsymbol{x}\in\Omega; \\ 0 & \boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^d\setminus\overline{\Omega},\end{cases}$$

また，φ，$\partial_\nu\varphi$ ともに，領域内部から外部へ境界 $\partial\Omega$ を跨いで連続である．さらに，$|\boldsymbol{x}|\to\infty$ のとき，$\varphi(\boldsymbol{x})$ は次の漸近式を満たす：

$$\varphi(\boldsymbol{x})=\begin{cases}\mathrm{const}\cdot|\boldsymbol{x}|^{2-d}+O(|\boldsymbol{x}|^{1-d}) & d\neq 2\ \text{の場合}; \\ \mathrm{const}\cdot\ln|\boldsymbol{x}|+O(|\boldsymbol{x}|^{-1}) & d=2\ \text{の場合}.\end{cases}$$

系2.4（[24]）．(4)式で定義された積分作用素$\mathcal{K}$は $L^2(\Omega)$ 上でのコンパクトな自己共役作用素であり，したがって(3)式で定義されたその積分核 $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ は以下のように固有関数展開される：

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\sim\sum_{j=1}^{\infty}\mu_j\varphi_j(\boldsymbol{x})\overline{\varphi_j(\boldsymbol{y})}.$$

さらに$\{\varphi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$は $L^2(\Omega)$ の正規直交基底を成す．

注意2.5. (3)，(4)式で定義される積分作用素の固有値を大きい順に $\mu_1\geq\mu_2\geq\cdots$ とし，それに対応する固有関数を φ_j，$j=1,2,\ldots$ としよう．そのとき，φ_j は定理2.2により $-\Delta\varphi_j=\lambda_j\varphi_j$ と境界条件(5)を満たすが，このヘルムホルツ方程式の固有値は逆に小さい順 $\lambda_1\leq\lambda_2\leq\cdots$ になってい

ることを注意しておく．実際，$\lambda_j = \mu_j^{-1}$ という関係がある．

4.3　積分作用素の離散化とラプラシアン固有関数の数値計算法

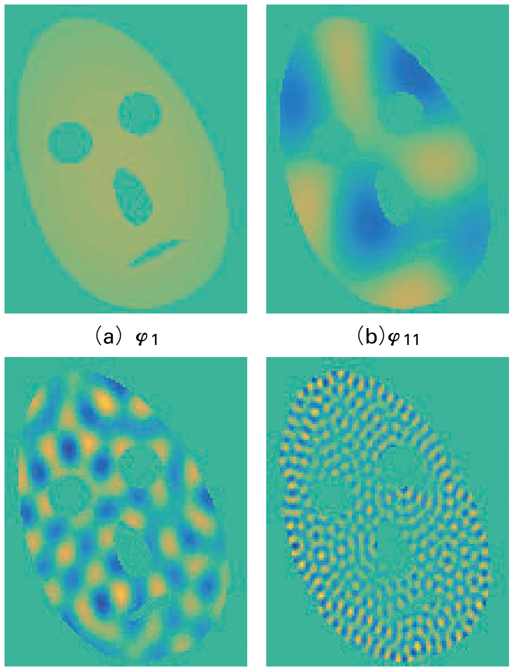
さて，コンピュータ上で取り扱う都合上，ほとんどすべての画像データは離散化されているのが現状である．それに対応するために，（3）式の積分核と（4）式の積分作用素を離散化する必要がある．まず，対象となる一般形状領域 $\Omega \in \mathbb{R}^d$ は，N 個の互いに素な微小矩形領域 $\Delta\Omega_i \in \mathbb{R}^d$，$i = 1, \ldots, N$，の集合で近似されるものと仮定する（正確にいえば，Ω も各 $\Delta\Omega_i$ も開集合であるから，$i \neq j$ のとき $\Delta\Omega_i \cup \Delta\Omega_j = \varnothing$で，$\overline{\Omega} = \cup_{i=1}^{N} \overline{\Delta\Omega_i}$ ということである）．ここで，$\Delta\Omega_i$ の中心点を $\boldsymbol{x}_i \in \mathbb{R}^d$，その体積を $w_i \in \mathbb{R}_+$，$i = 1, \ldots, N$，と表す．さらに観測された離散画像データは，N 次元のベクトル $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^N$ として与えられ，その i 番目のデータ点 $\boldsymbol{f}[i]$ は連続画像データ $f(\boldsymbol{x})$ の $\Delta\Omega_i$ の中心での値 $f(\boldsymbol{x}_i)$（あるいは $\Delta\Omega_i$ 上での f の平均値）としてサンプルされたものと仮定しよう．これらの仮定の元で，（4）式の積分作用素の固有値問題 $\mathcal{K}\varphi = \mu\varphi$ を以下のような簡単な数値積分で近似する：

$$\sum_{j=1}^{N} K(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)\varphi(\boldsymbol{x}_j) w_j = \mu\varphi(\boldsymbol{x}_i),\quad i = 1, \ldots, N.$$

上式を行列・ベクトル表示すると $K\boldsymbol{\varphi} = \mu\boldsymbol{\varphi}$ と簡単に表すことができる．ここで，$K = (K_{ij}) \in \mathbb{R}^{N\times N}$，$K_{ij} := w_j K(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)$，$\boldsymbol{\varphi} := (\varphi_1, \ldots, \varphi_N)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^N$，$\varphi_i := \varphi(\boldsymbol{x}_i)$ である．一般には，$\Delta\Omega_i$ の大きさ・体積を i に依存させる，すなわち大きさの違う微小矩形集合によって Ω を近似することも考えられるが，ここでは簡単のため，$\Delta\Omega_i$，$i = 1, \ldots, N$ は，すべて同一形状の微小矩形であると仮定する．すると，重み w_j は j に依存しないので，K が**対称行列**となることがわかる．

ここで，以上の手法の例として，**図 1 c** の顔の目・鼻・口以外の部分を領域 Ω とした場合の，可換積分作用素の固有関数を実際に計算してみよう．まず，**図 1 c** のフレーム全体の矩形を，簡単のため，$[0,1]\times[0,1]$ と仮定し，これを横方向を 105 縦方向を 135，すなわち，$105 \times 135 = 14{,}175$ 個の微小矩形集合に分割する．各微小矩形を添字 i，j を使って $\Delta\Omega_{ij}$ と表す．その面積は $\Delta x \times \Delta y = 1/105 \times 1/135$ で，中心座標は $((i-0.5)\Delta x, (j-0.5)\Delta y)$，$i = 1, \ldots, 105$，$j = 1, \ldots, 135$ である．次に，このフレーム全体を覆う微小矩形集合のうち，Ω と共通部分をもつものを取り出す．この場合は，その共通部分の微小矩形の数は $N = 7{,}533$ 個である．以上の情報を基に，$7{,}533 \times 7{,}533$ の行列 K を計算し，その固有ベクトルを計算する．**図 2** は，そのうちの四つの固有ベクトルを表示したものである．**図 2** から，顔の輪郭や目・鼻・口の近傍に固有関数のエネルギーが集中していないこと，また固有値が大きくなるにつれて固有関数の波数が高くなっていることがわかる．

さて，一般に $N\times N$ の密行列の固有値・固有ベクトルを計算するには，$O(N^3)$ の手間がかかる[26, 27]．したがって，N が大きい場合（例えば $N > 10^4$）は，高速数値解法を使う方が望ましい．ここで，（3）式の積分核が重要にな



(a) φ_1　(b) φ_{11}　(c) φ_{101}　(d) φ_{1001}

図 2　図 1 c の黒い部分を Ω としたときの可換積分作用素の固有ベクトルの例．

る．これは，上述したようにラプラシアンの基本解に他ならず，Greengard-Rokhlin の提案した**高速多重極法**（Fast Multipole Method; FMM）[28, 29] を使用することにより，行列・ベクトルの積 $K\boldsymbol{\varphi}$ を高速に計算できる．そしてこれを基にしてランチョス法に代表される反復解法[26, 27]を使えば，k 個の固有値・固有ベクトルの計算量は $O(N(k + \log N))$ のレベルまで下げることができる．詳しくは，[30]を参照されたい．

4.4　ラプラシアン固有関数の医用画像データ解析への応用

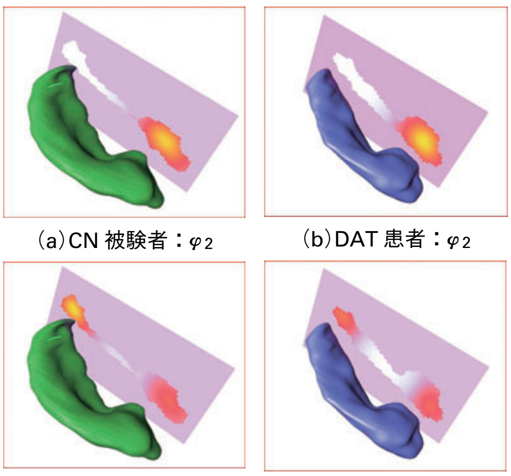
この節では，前節で述べた可換積分作用素から導出されたラプラシアン固有関数の画像データ解析への応用として，脳の MRI 画像から抽出された海馬の形状識別についての Faisal Beg と彼のグループの研究結果[31]を概説する．ここでの領域形状の解析は，ラプラシアン固有関数そのものを使う応用ではなく，ラプラシアン固有値を使ったものであることを注意しておく．もちろん，海馬上で何か計測データ（例えば，拡散テンソル画像（DTI）で使われる水分子の拡散運動の異方性情報など）があれば，ラプラシアン固有関数を使って，そのデータのスペクトル解析を行うことができるが，この節では取り扱わない．

ラプラシアン固有値を使った形状解析は，[31]以前にも行われており，例えば，有限差分法（FDM）を用いて二次元領域のラプラシアン固有値系列を計算し，固有値の比からなる特徴ベクトルを構成して，植物の葉などの認識を行った研究[32, 33]，また "Shape-DNA" の名のもとで，多様体上で定義されたラプラシアン（ラプラス・ベルトラミ作用素と呼ばれる）の固有値系列を FEM により計算し，それを特徴ベクトルとして形状解析を提案した論文[20]，さ

らにそれを応用して脳の尾状核の形状認識を行った研究[21]などがあげられる．これらの著者も指摘しているように，医用画像データを含む多くの画像データを解析するにあたり，境界条件を陽に設定しない方が望ましい．特にディリクレ境界条件は，医用画像データの場合，物理的に非現実的であり，第1節で述べたようなギブズ現象も起こってしまう．ところが，FDM や FEM では，境界条件を陽に設定しなければならない．したがって，可換積分作用素を使えば，この難点をかわすことができるのである．

Beg らの研究の目的は，海馬（人間の長期記憶と空間学習能力において重要な役割を果す）の形状情報を使って，アルツハイマー型の軽度認知障害のある患者（mild dementia of the Alzheimer type; DAT）と認知的に正常な被験者（Cognitively Normal; CN）とを識別できるかどうかを考察することである．データとしては，18人のDAT患者と26人の CN 被験者の左脳の海馬部分に相当するボクセル（voxel）を 3D の MRI 画像から抽出したものを用いた．海馬部分のボクセル数は個人個人によって異なるが，$12{,}000 < N < 16{,}000$ の範囲である．**図3**に一人の CN 被験者と一人の DAT 患者の海馬とそれを領域とした可換積分作用素の（つまりラプラシアンの）固有関数 φ_2，φ_3 の計算結果を示す．海馬自体の色（緑・薄紫）は，CN 被験者と DAT 患者の違いを示す人工的な色である．これらの 3D の海馬の中央で輪切りにしたときのラプラシアン固有関数の値の分布（正値から負値に行くに従って黄→赤→白というグラデーションである）を輪切り面と平行な平面に投射している．ラプラシアン固有関数自体は，領域自体を自然に分割するのにも使われる．これは，著名な**クーラントの節領域定理**（The Courant Nodal Domain Theorem）[15, Sec. 6.6]に基づいている．**図3**でも，φ_2，φ_3 の節（零交差曲線）が海馬をそれぞれ2つ，3つの領域に自然に分割していることがわかる．

さて，与えられた領域 Ω 上のラプラシアンの固有値を使って，Ω の幾何学的情報（体積，表面積など）およびトポロジカルな情報（穴がいくつ空いているかなど）を抽出・推定する分野は，**スペクトル幾何学**と呼ばれており，レイリー卿の「部屋で響く倍音からその部屋の体積を推定する」問題，ゾンマーフェルトとローレンツの黒体輻射問題に対するワイルの回答，カッツの「太鼓の形を叩いた音から推定する」問題など，歴史的にも大変興味深い．詳しくは，優れた解説[34, 35]および浦川の著作[19, 36, 37]を参照されたい．



（a）CN 被験者：φ_2　（b）DAT 患者：φ_2　（c）CN 被験者：φ_3　（d）DAT 患者：φ_3

図3　ある CN 被験者と DAT 患者の海馬におけるラプラシアン固有関数の例．

Beg らは[31]において，以下のような手法を用いて，CN 被検者と DAT 患者の海馬の形状識別実験を行った．

1．k 個の可換積分作用素の固有値 $\mu_1 \geq \cdots \geq \mu_k$ を各海馬につき計算（Beg らは $k = 999$ と設定した）．
2．各海馬につき，固有値の比からなる次のような特徴ベクトルの計算：

$$\left(\frac{\mu_2}{\mu_1}, \frac{\mu_3}{\mu_1}, \cdots, \frac{\mu_k}{\mu_1}\right)^{\mathsf{T}} \in \mathbb{R}^{k-1}. \qquad (6)$$

3．主成分分析（Principal Component Analysis; PCA 例えば[38, Sec. 3.4.1, Sec. 14.5.1]などを参照のこと）により特徴次元を $k-1$ から k' に圧縮（Beg らは $k' = 14$ と設定した）．
4．Leave-one-out 交差検証（Cross-Validation; CV）とサポートベクターマシン（Support Vector Machine; SVM 例えば[38, Chap. 12]および本講座第3章の内田による解説などを参照のこと）を使った識別結果の計算．

ここで注意2.5を考慮すると，ラプラシアン固有値 $\{\lambda_j\}_{1 \leq j \leq k}$ を使うことにより，（6）式は，$(\lambda_1/\lambda_2, \cdots, \lambda_1/\lambda_k)^{\mathsf{T}}$ となる．この特徴ベクトルはもともと[32]で植物の葉の形状分類に使われたが，これが形状認識において有効なのは，以下の理由による．

まず，合同な二つの領域におけるラプラシアン固有値が（したがって可換積分作用素の固有値も）一致することは簡単にわかるが，ラプラシアン固有値の**比**はさらに次のような**スケール不変性**をもつ：

$$\frac{\lambda_i(\alpha\Omega)}{\lambda_j(\alpha\Omega)} = \frac{\lambda_i(\Omega)}{\lambda_j(\Omega)} = \frac{\mu_j(\Omega)}{\mu_i(\Omega)} = \frac{\mu_j(\alpha\Omega)}{\mu_i(\alpha\Omega)},$$

ここで，$\alpha\Omega$ は領域 Ω を等方的に α 倍に拡大（$\alpha > 1$）あるいは縮小（$0 < \alpha < 1$）した領域を表す．すなわち，（6）式のような固有値の比からなる特徴ベクトルは，形状の合同変換およびスケール変換に関して不変の形状特徴を表している．

Beg らの実験結果は，以下の通りである：精度（accuracy）77.3%；感度（sensitivity）66.6%；特異度（specificity）84.6%．これらは，それぞれ，正しい識別結果を得た人数の割合；DAT と正しく識別された患者の真の DAT 患者に対する割合；そして CN と正しく識別された被験者の真の CN 被験者に対する割合を示す．Beg らは他にも三つの方法でこれらの数値を計算し，比較したところ，（6）式を使った上記の手法は，精度で2番目，感度で3番目，特異度で1番目という結果を得た．詳しくは，[31]を参照され

たい．

最後に，可換積分作用素の固有値・固有関数は，この節に述べた海馬の画像データ解析以外にも，気候変動モデル[39]や人間の目の画像の特徴解析[24]など，様々な分野で応用されていることを指摘しておく．

4.5 患者対応基底関数との関係

ここでは，Wintersらが提案した，いわゆる「患者対応基底関数」(patient-specific basis functions)[40]とラプラシアン固有関数との関係について考察する．

まず，「患者対応基底関数」について概説しておこう．元々Wintersらの目的は，乳房のマイクロ波イメージングにおいて，*Region Of Interest*（ROI，または関心領域とも呼ばれる）の部分のイメージングを高速化するというものであった．その基になるアイデアは，「各ROI上の画像データを個人個人の患者に対応・適応した少数の基底関数を用いて近似する」というものである．これは，各ROIにおける観測値をボクセルの集合上でのサンプルとして表現するのに比べ，「効率的」であると考えられる．もちろん，ここで「効率的」というのは，そのような基底関数をどれくらい速く計算できるか，また，$k(\ll N)$ 個の基底関数を使って，どの程度の近似を得られるのかに強く依存する．さて，[40]には直接的には書かれていないが，「患者対応基底関数」を計算するということは，本質的には，**ROI上で観測されたデータの自己相関関数がROI上に制限された正規分布であると仮定し，そこでのカルーネン・ロェーヴ変換**(*Karhunen-Loève Transform; KLT*)[1]**の基底を求める**ことと等価である．

以下，簡単のため，一次元モデルを例にとって，詳しく見て行こう（実際，[40]での三次元モデルは一次元モデルのテンソル積として求められている）．第1節と同じく，$I:=[0,1]$ とし，ROIとして $\Omega\subset I$ を考える．まず，I を N 個の長さ $\Delta x=|I|/N=1/N$ の等部分区間に分解し，その中心座標を $x_j:=(j-1/2)\Delta x$, $j=1,\dots,N$ と表す．ここで以下のような $x=x_j$ を中心にもつ**ガウス関数**を定義する：

$$g_j(x\mid\sigma):=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{(x-x_j)^2}{2\sigma^2}\right),\quad x\in I.$$

[40]では $\sigma=0.75\Delta x$ と設定されており，$g_j(x\mid\sigma)$ と $g_{j+1}(x\mid\sigma)$ は充分な重なりをもつことがわかる．ここで，第 j 列が，ガウス関数 $g_j(\cdot\mid\sigma)$ をサンプル点 $\{x_i\}_{1\le i\le N}$ で離散化したベクトル $\boldsymbol{g}_j:=(g_j(x_1\mid\sigma),\cdots,g_j(x_N\mid\sigma))^{\mathsf{T}}$ となるような行列 $G\in\mathbb{R}^{N\times N}$ を定義する．さらに，ROIを $\Omega=(x_{m_0}-\Delta x/2, x_{m_1}+\Delta x/2)\subset I$ とする I の開部分区間と仮定しよう．ここで Ω の区間長は $|\Omega|=(m_1-m_0+1)\Delta x$ であるが，その中に含まれているサンプル点の数は，$|\Omega|_0:=m_1-m_0+1$ である．Ω の（離散的）指示関数ベクトル $\boldsymbol{\chi}_\Omega\in\mathbb{R}^N$ を以下のように定義する：

$$\boldsymbol{\chi}_\Omega[j]:=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{|\Omega|_0}} & m_0\le j\le m_1 \text{ の場合；}\\ 0 & \text{それ以外の場合.}\end{cases}$$

まず，この $\boldsymbol{\chi}_\Omega$ を Ω 上の画像データの**直流（DC）成分**を表す基底ベクトルとして保存する．これは，「Ω 上の観測データの直流成分はその平均値に比例するので保存しておきたい」という，画像データ解析の実践者からの要請である[40]．$\boldsymbol{g}_j$ を Ω に含まれるサンプル点での値のみに打ち切ったベクトル，すなわち

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\chi}_\Omega\odot\boldsymbol{g}_j&:=(\boldsymbol{\chi}_\Omega[1]\cdot\boldsymbol{g}_j[1],\cdots,\boldsymbol{\chi}_\Omega[N]\cdot\boldsymbol{g}_j[N])^{\mathsf{T}}\\&=\left(0,\cdots,0,\frac{\boldsymbol{g}_j[m_0]}{\sqrt{|\Omega|_0}},\cdots,\frac{\boldsymbol{g}_j[m_1]}{\sqrt{|\Omega|_0}},0,\cdots,0\right)^{\mathsf{T}}\end{aligned}\qquad(7)$$

を第 j 列とする行列 $G_\Omega:=[\boldsymbol{\chi}_\Omega\odot\boldsymbol{g}_1|\cdots|\boldsymbol{\chi}_\Omega\odot\boldsymbol{g}_N]\in\mathbb{R}^{N\times N}$ を定義し，さらに，$\mathbb{R}^N$ 上での一次元部分空間 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{\chi}_\Omega\}$ の**直交補空間**を考え，G_Ω のそこへの射影を考える：

$$\tilde{G}_\Omega:=(I_N-\boldsymbol{\chi}_\Omega\boldsymbol{\chi}_\Omega^{\mathsf{T}})G_\Omega,\qquad(8)$$

ここで，I_N は $\mathbb{R}^N$ 上の単位行列である．なお，G_Ω の各列ベクトルは，(7)式からもわかるように，Ω の外側に対応する要素はすべて0であるから，$\mathrm{rank}(G_\Omega)=\mathrm{rank}(\tilde{G}_\Omega)+1=|\Omega|_0$ となる．$\tilde{G}_\Omega$ の各列ベクトルはもちろん $\boldsymbol{\chi}_\Omega$ と直交しているが，列ベクトル同士は直交していない．したがって，これらの列ベクトルの張る線型空間の正規直交基底を求めるために，$\tilde{G}_\Omega$ の**特異値分解**（Singular Value Decomposition; SVD）$\tilde{G}_\Omega=U\Sigma V^{\mathsf{T}}$ を計算する（なお，特異値分解は様々な応用問題において非常に重要な役割を果す；詳しくは[26, 27]などを参照されたい）．ここで，元々のイメージング・システムとの関係を見てみよう．I 上の全画像データ $\boldsymbol{f}\in\mathbb{R}^N$ が $A\boldsymbol{f}=\boldsymbol{b}$ という線型方程式系を満たすものとする．ここで $A\in\mathbb{R}^{m\times N}$ はイメージング・システムを表す行列，$\boldsymbol{b}\in\mathbb{R}^m$ は観測データであり，この線型方程式系から $\boldsymbol{f}$ を求めるというプロセスがイメージングであるとしよう．上記の直流成分ベクトルと最初の $k-1$ 個の左特異ベクトルを使って $N\times k$ の行列 U_k を $U_k:=[\boldsymbol{\chi}_\Omega, U(:,1:k-1)]$ と定義する．ここで，$U_k^{\mathsf{T}}U_k=I_k$ となること，また，$k>|\Omega|_0$ の範囲の k は考える必要はないことを注意しておく．Winters等はこの U_k の列ベクトルを「患者対応基底関数」と呼び，画像データ $\boldsymbol{f}$ をこれら k 個の基底ベクトルを用いて，$\boldsymbol{f}\approx U_k\tilde{\boldsymbol{f}}_k$ と近似し，$\tilde{\boldsymbol{f}}_k\in\mathbb{R}^k$ を線型方程式系 $AU_k\tilde{\boldsymbol{f}}_k=\boldsymbol{b}$ から求めることを提案した[40]．この手法の数値的精度と計算効率は，この k 項の「患者対応基底関数」による近似誤差 $\|\boldsymbol{f}-U_k\tilde{\boldsymbol{f}}_k\|_2$ と $k(\le|\Omega|_0)$ というトレードオフ・パラメータに強く依存していることが理解されよう．

ここで，行列 $\tilde{G}_\Omega$ のSVDを再考しよう．左特異行列 U は，明かに $\tilde{G}_\Omega\tilde{G}_\Omega^{\mathsf{T}}U=U\Sigma^2$ という固有値問題の解であり，これは，U の列ベクトルが，**標本自己共分散行列**が $\frac{1}{N}\tilde{G}_\Omega\tilde{G}_\Omega^{\mathsf{T}}$ の場合のKLT基底をなすことを示している．対

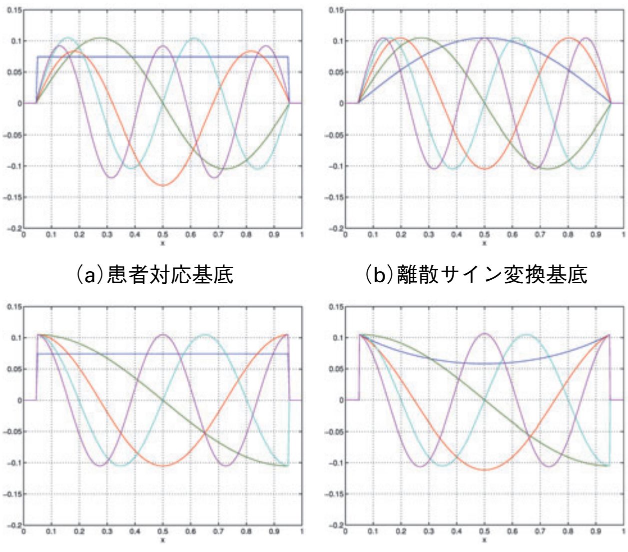
1　離散的な定常確率過程の場合は，KLTと上述したPCAは等価であるが，確率過程の解析においては，KLTという用語の方がよく使用される．

応する**標本自己相関行列**は $\frac{1}{N}G_\Omega G_\Omega^{\mathrm{T}}$ であり，これはすなわち，**「患者対応基底関数系」とは，「Ω 内のサンプル点 x_j を $1/|\Omega|_0$ の等確率でランダムに選び，$\boldsymbol{\chi}_\Omega \odot \boldsymbol{g}_j$ を生成する」という $\mathbb{R}^N$ 上の定常確率過程を対角化する基底であること**を意味している．

さらに，この確率過程の各標本ベクトル $\boldsymbol{\chi}_\Omega \odot \boldsymbol{g}_j$ は，ガウス関数を平行移動した後，その台を Ω 上のみに制限したものであるから，これを対角化するような基底ベクトルは，Ω 上の離散サイン変換（DST）の基底ベクトルであることがわかる（このようなランダムな平行移動を基にした定常確率過程の KLT 基底については，[41, Sec. 1.10]も参照のこと）．さらに正確にいうと，DST の基底ベクトルを直流成分ベクトル $\boldsymbol{\chi}_\Omega$ と正規直交化するように変換したものということができる．この状況を明示するために，$N=201$，$m_0=11$，$m_1=191$，$|\Omega|_0=181$，として実際に数値計算を行った．その結果および他の基底関数と比較を**図 4** に示す．

ここで「患者対応基底関数」とラプラシアン固有関数のそれぞれの長所・短所についての筆者の考えを述べたい．まず，「患者対応基底関数」についてであるが，その長所としては，Ω 上の直流成分ベクトル $\boldsymbol{\chi}_\Omega$ を含むことがあげられる．短所としては，**図 4** a からもわかるように，直流成分ベクトル以外の患者対応基底ベクトルはディリクレ境界条件を満たすことを強要されるため，1）***ROI* の境界 $\partial\Omega$ 近傍の画像特徴を近似するのに効率的ではない**ということ；2）ギブズ現象が起こること；そして 3）複雑な 3D の形状をしてる ROI の場合に，一次元の患者対応基底ベクトルの**テンソル積**を使用するのは効果的ではない，ということがあげられる．これに対して，（交換可能な積分作用素から得られる）ラプラシアン固有関数の長所は，$\partial\Omega$ 近傍の画像特徴を近似するのにより効率的であること，また複雑な 3D 形状の ROI の場合にも積分核が（3）式なので，領域内のサンプル点（ボクセルの中心点）間の距離さえわかれば，計算できることがあげられる．短所は，直流成分ベクトルを含んでいないことである．しかし，この短所は，比較的簡単に克服できる．積分核を離散化した行列 K を直接対角化するかわりに，（8）式と同じように，$\mathrm{span}\{\boldsymbol{\chi}_\Omega\}$ の直交補空間への写像 $(I_N-\boldsymbol{\chi}_\Omega\boldsymbol{\chi}_\Omega^{\mathrm{T}})K$ を構成し，その固有ベクトル系に直流成分ベクトルを含めればよいのである．

以上の長所・短所，および第 1 節で述べた DCT の長所を考慮すると，比較的単純な 3 D 形状の ROI の場合には，**領域に適応した離散コサイン変換基底のテンソル積**の使用を推薦できる：直流成分ベクトルも含んでいる上，高速フーリエ変換を用いることにより計算効率も良いからである．また，DCT（正確に言えば，DCT Type II[7]）は，第 1 節でも述べたように，JPEG 画像圧縮規格に採用されているのみならず，定常確率過程が単純マルコフ過程の極限の（すなわち，隣接したサンプル点でのデータの相関が 1 に近づく）場合の KLT 基底にもなっていることを指摘しておきたい[42]．ただし上記に述べたように，ROI が複雑な 3D の形状の場合の一次元基底関数のテンソル積に関する問題は依然として残る．さらなる比較研究が待たれるところである．



（a）患者対応基底　（b）離散サイン変換基底

（c）離散コサイン変換基底　（d）ラプラシアン固有関数

図 4　$\Omega=[0.0475, 0.9525] \subset I=[0, 1]$ のときの様々な基底ベクトル．それぞれの基底のうち，最低周波数に対応するものから 5 番目に低い周波数に対応するものまでを表示している．

4.6　終わりに

本論文では，主に，ラプラシアン固有関数と境界条件の重要性；ラプラス作用素と可換な積分作用素によって，境界条件を陽に設定しなくても，ラプラシアン固有関数を計算することができる筆者の[24]の手法；Beg らによるその海馬の形状分析への応用[31]；そして，ラプラシアン固有関数と Winters らの「患者対応基底関数」[40]との関係，について述べた．

頁数制限の関係上，曲率のある領域（多様体）上におけるラプラシアン固有関数，すなわちラプラス・ベルトラミ作用素の固有関数については，解説できなかった．詳しくは，[37, 43, 44]等を参照されたい．また，最近特に注目されているグラフ上でのラプラシアン固有関数とその応用についても，残念ながら解説できなかった．詳しくは，[36, 43, 45, 46]等を参照していただければ幸いである．

謝　辞

本研究は，アメリカ合衆国海軍研究局（Office of Naval Research）からのグラント N00014-12-1-0177，N00014-16-1-2255，およびアメリカ国立科学財団（National Science Foundation）からのグラント DMS-1418779の支援を受けた．サイモン・フレイザー大学の Faisal Beg 教授には，図 3 の本論文での使用を快諾していただいた．また本論文は，2013年 9 月 4 日に行った筆者の核融合科学研究所・総合研究大学院大学における夏季集中講義を元にしている．この講義の開催をオーガナイズしていただいた長山好夫先生，「患者対応基底関数」とラプラシアン固有関数の関係についての研究を示唆していただいた岩間尚文先生，そして原稿の閲読をされ有益なコメントをいただいた大舘暁先

生と九州大学の稲垣滋先生に感謝いたします．

参 考 文 献

[1] 新井仁之：フーリエ解析学 講座 数学の考え方第17巻（朝倉書店，2003）．

[2] 黒田成俊：関数解析 共立数学講座第15巻（共立出版，1980）．

[3] H. Dym and H.P. McKean, *Fourier Series and Integrals* (Academic Press, 1972).

[4] G.B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications* (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009).

[5] M.A. Pinsky, *Introduction to Fourier Analysis and Wavelets* (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2009).

[6] W.B. Pennebaker and J. L. Mitchell, *JPEG Still Image Data Compression Standard* (Van Nostrand Reinhold, 1993).

[7] G. Strang, SIAM Rev. **41**, 135 (1999).

[8] N. Saito and J.-F. Remy, Appl. Comput. Harm. Anal. **20**, 41 (2006).

[9] K. Yamatani and N. Saito, IEEE Trans. Image Process **15**, 3672 (2006).

[10] 斎藤直樹：ウェーブレットによる画像処理，薩摩順吉・大石進一・杉原正顕（編）；応用数理ハンドブック，512（朝倉書店，2013）．

[11] 吉田耕作：積分方程式論第２版（岩波書店，2001）．

[12] 池部晃生：数理物理の固有値問題，離散スペクトル，数理解析とその周辺第15巻（産業図書，1976）．

[13] 小谷眞一，俣野 博：微分方程式と固有関数展開（岩波書店，2006）．

[14] 寺沢寛一：自然科学者のための数学概論増訂版（岩波書店，1983）．

[15] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics,* Vol. I (Wiley-Interscience, New York, 1953. Wiley Classics Edition published in 1989).

[16] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics,* Vol. II (Wiley-Interscience, New York, 1962. Wiley Classics Edition published in 1989).

[17] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics,* Part I (McGraw-Hill, Inc., 1953. Republished by Feshbach Publishing in 2005).

[18] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics,* Part II (McGraw-Hill, Inc., 1953. Republished by Feshbach Publishing in 2005).

[19] 浦川 肇：ラプラシアンの幾何と有限要素法 朝倉数学大系第３巻（朝倉書店，2009）．

[20] M. Reuter *et al.,* Computer-Aided Des. **38**, 342 (2006).

[21] M. Niethammer *et al., Global medical shape analysis using the Laplace-Beltrami spectrum.* In N. Ayache *et al.,* editors, *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention--- MICCAI 2007,* Part I, Vol. 4791 of Lecture Notes in Computer Science, pp. 850-857 (Springer, 2007).

[22] K.E. Atkinson, *The Numerical Solution of Integral Equations of the Second Kind,* Vol. 4 of CambridgeMonographs on Applied and Computational Mathematics (Cambridge Univ. Press, 1997).

[23] R. Kress, *Linear Integral Equations,* Vol. 82 of Applied Mathematical Sciences. 3rd edition (Springer-Verlag, 2014).

[24] N. Saito, Appl. Comput. Harm. Anal. **25**, 68 (2008).

[25] B. Friedman, *Principles and Techniques of Applied Mathematics* (JohnWiley & Sons, Inc., 1956. Republished by Dover Publications, Inc. in 1990).

[26] G.H. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix Computations,* 4th edition (The Johns Hopkins Univ. Press, 2013).

[27] L.N. Trefethen and D. Bau, III. *Numerical Linear Algebra* (SIAM, 1997).

[28] V. Rokhlin, J. Comput. Phys. **60**, 187 (1985).

[29] L. Greengard and V. Rokhlin, J. Comput. Phys. **73**, 325 (1987).

[30] X. Xue, On a Fast Algorithm for Computing the Laplacian Eigenpairs via Commuting Integral Operators. PhD thesis, Dept. Math., Univ. California, Davis (2007).

[31] M.F. Beg *et al.,* Stat. Methods Med. Res. **22**, 439 (2013).

[32] M.A. Khabou *et al.,* Pattern Recognition **40**, 141 (2007).

[33] M.B.H. Rhouma *et al., Shape recognition based on eigenvalues of the Laplacian.* In P.W. Hawkes, editor, *Advances in Imaging and Electron Physics,* Vol. 167, chapter 3, pp. 185-254 (Academic Press, 2011).

[34] W. Arendt *et al., Weyl's law: Spectral properties of the Laplacian in mathematical physics,* In W. Arendt and W.P. Schleich, editors, *Mathematical Analysis of Evolution, Information, and Complexity,* chapter 1, pp. 1-71 (Wiley-VCH Verlag, 2009).

[35] D.S. Grebenkov and B.-T. Nguyen, SIAM Rev. **55**, 601 (2013).

[36] 浦川 肇：ラプラス作用素とネットワーク（裳華房，1996）．

[37] 浦川 肇：スペクトル幾何 数学の輝き第３巻（共立出版，2015）．

[38] T. Hastie *et al., The Elements of Statistical Learning: Data Mining, Inference, and Prediction,* 2nd edition (Springer-Verlag, 2009).

[39] T. DelSole and M.K. Tippett, J. Climate **28**, 7420 (2015).

[40] D.W. Winters *et al.,* IEEE Trans. Medical Imaging **28**, 969 (2009).

[41] Y. Meyer, *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolution Equations,* Vol. 22 of University Lecture Series (Amer. Math. Soc. Providence, RI, 2001).

[42] R.J. Clarke, IEE Proceedings, Part F, **128**, 359 (1981).

[43] 浦川 肇：応用数理 **12**, 29 (2002).

[44] S. Rosenberg, *The Laplacian on a Riemannian Manifold,* Vol. 31 of *London Mathematical Society Student Texts* (Cambridge Univ. Press, 1997).

[45] 斎藤直樹：応用数理 **25**, 6 (2015).

[46] J. Irion and N. Saito, *Applied and computational harmonic analysis on graphs and networks.* In M. Papadakis *et al.,* De Ville, editors, *Wavelets and Sparsity XVI,* Proc. SPIE9597, 2015. Paper # 95971F.

講座執筆者紹介

第4章

さいとう なおき
斎藤 直樹

1982年東京大学工学部計数工学科卒業．1984年同大学大学院工学系研究科計数工学専攻修士課程修了．1984-86年日本シュルンベルジェ㈱．1986-97年シュルンベルジェードル研究所（米・コネティカット州）．1994年イェール大学大学院数学科・応用数学博士課程修了．Ph.D. 1997年-2001年カリフォルニア大学デイヴィス校数学科准教授．2001年同校教授，現在に至る．応用・計算調和解析の研究に従事．趣味は多種の楽器演奏．https://plus.google.com/+NaokiSaitoMathMusic も参照して下さい．

第5.1章

あきやま つよし
秋山 毅志

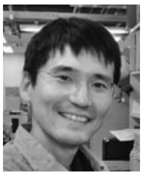
核融合科学研究所 准教授．色々と興味はあるのですが，ここ最近は主にレーザーを使った計測器の開発・設計をしています．核融合研の共同研究や，自然科学研究機構の分野間連携研究プロジェクト，日米協力，ITER など，様々な先生方と一緒に仕事をさせていただく機会が増えました．技術面でもマネジメントの面でも，いつも目からウロコのことばかりで，共同研究や分野間交流の重要性を実感しております．

はやの ゆたか
早野 裕

自然科学研究機構国立天文台先端技術センター・准教授．専門は補償光学，光学赤外線天文観測装置の研究開発．近年は補償光学をさらに発展させ，生体ライブイメージング，プラズマ計測などへの応用にも挑戦している．

はっとり まさゆき
服部 雅之

自然科学研究機構基礎生物学研究所（2013年～）研究員．補償光学を中心に，光学に関する研究を続けている．早稲田大学理工学部 助手（1998年～），通信総合研究所 研究員（2001年～，現，情報通信研究機構），自然科学研究機構国立天文台研究員（2003年～）．近年は，すばる望遠鏡の補償光学系に携わったのち，生物の研究所で光学顕微鏡用の補償光学の研究を本格的に進めている．



たまだ ようすけ
玉田 洋介

基礎生物学研究所 助教．2005年京都大学大学院生命科学研究科博士課程修了．専門は発生生物学で，「細胞の運命がいつ，どのように変わるか？」という疑問を，主に植物の受精や幹細胞化に着目して解明しようとしている．細胞の運命が変わる瞬間を精細に観察するために，様々な光学系を顕微鏡に取り入れようと勉強中．

第5.2章

あらかわ ひろゆき
荒川 弘之

帝京大学福岡医療技術学部診療放射線学科 助教．現在はプラズマ乱流・計測の研究と共に，医療用CTの被ばく減少・画質改善へ向けた研究も行っています．別の分野では，研究に対してアプローチの仕方が異なっていたり，一歩も二歩も進んだ手法が用いられていたりしていろいろと勉強になります．様々な分野の研究手法を取り入れながら新しい研究を進めていけたらと日々考えています．