

小特集 トーラスプラズマにおけるパリティ

### 3. 磁力線方向パリティ対称性

#### 3. Parity Symmetry along a Magnetic Field Line

石澤明宏

ISHIZAWA Akihiro

京都大学

(原稿受付：2016年4月22日)

トーラス磁場閉じ込めにおいて生じる揺動の磁力線方向パリティを考える。この揺動を記述する  $\delta f$  ジャイロ運動論方程式が持つパリティ対称性とこの方程式に従う不安定性のパリティを数値シミュレーション結果を示しながら説明する。そして、奇パリティモードはジャイロ運動論方程式を満たすが、偶パリティモードは満たさないことを示す。さらに、揺動の振幅が小さいとしてジャイロ運動論方程式を線形化した場合は、奇パリティ偶パリティともに方程式を満たすことを示す。典型的なドリフト波不安定性であるイオン温度勾配不安定性 (ITGモード) は偶パリティモードなので、そのままでは非線形飽和することができない。そして、飽和するときには、必ず奇パリティモードを励起する。これがパリティ混合である。一方、微視的テアリングモードは偶パリティモードなので、そのまま非線形飽和することができる。

**Keywords:**

parity, gyrokinetic equation, simulation, electromagnetic, instability, ballooning parity, tearing parity.

#### 3.1 はじめに

磁場閉じ込めプラズマにおいて、微視的乱流は熱および粒子の異常輸送を起こすと考えられている。この磁場閉じ込めプラズマにおける乱流の解析においては、プラズマを構成する粒子の平均自由行程が装置サイズ程度と長い場合運動論的取扱いが重要となる。ジャイロ運動論シミュレーションは、閉じ込め磁場によりプラズマが磁化されることを利用し、構成粒子のジャイロ運動について平均化することで得られる式 (ジャイロ運動論の方程式) を数値的に解く。このようにしてジャイロ運動論方程式の数値シミュレーションでは5次元位相空間中で分布関数の時間発展を計算する。特に、閉じ込め磁場の中で一本の磁力線周辺領域をシミュレーション領域とする数値シミュレーションは、トーラス外側に現れるバルーニング型不安定性に駆動される乱流輸送の解析に有用である [1]。

本章では、イオン温度勾配不安定性や捕捉電子モードなどのバルーニング型不安定性が、磁力線方向パリティ対称性により偶パリティまたは奇パリティに分類されることを数式およびシミュレーション結果を用いて示す。また、乱流の飽和状態のように非線形性が無視できないほど揺動の振幅が大きい場合には、奇パリティのみがジャイロ運動論方程式を満たし、奇パリティの優越性が現れることを示す。

#### 3.2 ジャイロ運動論方程式のパリティ対称性

2章で議論された磁場閉じ込めプラズマを記述する分布関数および電磁場 (静電ポテンシャルとベクトルポテン

シャル) は以下のようにアンサンブル平均部と揺動部に分けられた。

$$f_a + \hat{f}_a, \quad \Phi + \hat{\phi}, \quad \mathbf{A} + \hat{\mathbf{A}}. \quad (1)$$

そして平均部と揺動部はそれぞれ以下のように展開パラメータ  $\eta$  を用いて展開された (前章式 (17), (18), (20) など)。

$$\begin{aligned} f_a &= f_{a0} + \eta f_{a1} + \eta^2 f_{a2} + \eta^3 f_{a3} + \dots, \\ \hat{f}_a &= \eta \hat{f}_{a1} + \eta^2 \hat{f}_{a2} + \eta^3 \hat{f}_{a3} + \dots, \\ \Phi &= \eta \Phi_1 + \eta^2 \Phi_2 + \eta^3 \Phi_3 + \dots, \\ \hat{\phi} &= \eta^2 \hat{\phi}_2 + \eta^3 \hat{\phi}_3 + \dots, \\ \hat{\mathbf{A}} &= \eta^2 \hat{\mathbf{A}}_{\parallel 2} + \eta^3 \hat{\mathbf{A}}_{\parallel 3} + \dots. \end{aligned}$$

通常の  $\delta f$  ジャイロ運動論方程式系はこの揺動の展開の最低次であるジャイロ中心摂動分布関数  $\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^{(1)}$  (前章式 (19), (20)), 摂動静電ポテンシャル  $\hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp}^{(2)}$ , 摂動ベクトルポテンシャルの磁力線平行方向成分  $\hat{A}_{\parallel \mathbf{k}_\perp}^{(2)}$  が従うジャイロ運動論方程式, ジャイロ運動論ポアソン方程式, ジャイロ運動論アンペール則から構成される (詳細は参照論文 [2])。ここで揺動量は前章式 (20) のように展開され、その展開係数という意味で  $\mathbf{k}_\perp$  の下つき添え字をつける。そして、これら揺動の展開の最低次はジャイロ運動論方程式を導くオーダリング

$$\frac{\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^{(1)}}{F_{Ma}} \approx \frac{\rho_a}{L} \approx \frac{k_\parallel}{k_\perp} \approx \frac{\omega}{\Omega_a} \approx \frac{q_a \hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp}^{(2)}}{\eta T_a} \approx \frac{\hat{A}_{\parallel \mathbf{k}_\perp}^{(2)}}{B \rho_a} \approx \epsilon \ll 1, \quad (2)$$

に従うことになる。ここで  $\rho_a = v_{Ta} / \Omega_a$ ,  $\Omega_a = q_a B / (m_a c)$

である。本章ではこの方程式系の磁力線方向座標に対するパリティ対称性について考える。以後、展開次数を表す添え字(1)および(2)は表示しない。ここで $a$ は粒子種をあらわし、 $\mathbf{k}_\perp = k_s \nabla s + k_a \nabla (\zeta - q(s)\theta) = (k_x, k_y)$ は前章の式(21)である。以後は、 $s$ を $x$ 、 $a$ を $y$ と書くので $\mathbf{k}_\perp = (k_x, k_y)$ である。また、 $\theta$ を $z$ と書くことにするので、 $(s, a, \theta) \rightarrow (x, y, z)$ となる。摂動分布関数 $\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}$ の非断熱応答部

$$\hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}(z, v_\parallel, \mu, t) = \hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}(z, v_\parallel, \mu, t) + F_{Ma}(z, v_\parallel, \mu) \frac{q_a}{T_a} \hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp}(z, t) J_{0a}(k_\perp^2) \quad (3)$$

が従うジャイロ運動論方程式

$$\frac{\partial \hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}}{\partial t} = -i \mathbf{v}_{da} \cdot \mathbf{k}_\perp \hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp} - v_{Ta} [H, \hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}]_\parallel + q_a \frac{F_{Ma}}{T_a} \frac{\partial \hat{\chi}_{a\mathbf{k}_\perp}}{\partial t} + i \mathbf{v}_{*a} \cdot \mathbf{k}_\perp q_a \frac{F_{Ma}}{T_a} \hat{\chi}_{a\mathbf{k}_\perp} + [\hat{\chi}_a, \hat{h}_a]_{\mathbf{k}_\perp} + C_a(\hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}), \quad (4)$$

を考える(導出は参照論文[3])。ここで $\hat{\chi}_{a\mathbf{k}_\perp} = (\hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp} - v_{Ta} v_\parallel \hat{A}_{\parallel \mathbf{k}_\perp}) J_{0a}$ は一般化ポテンシャル、 $[H, \hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}]_\parallel \equiv \nabla_\parallel H \frac{\partial \hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}}{\partial v_\parallel} - \frac{\partial H}{\partial v_\parallel} \nabla_\parallel \hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp} = v_\parallel \nabla_\parallel \hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp} - \mu \nabla_\parallel B \frac{\partial \hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}}{\partial v_\parallel}$ 、 $H = v_\parallel^2/2 + \mu B$ 、 $\nabla_\parallel = \mathbf{b} \cdot \nabla$ 、 $\mathbf{v}_{da}$ は磁気ドリフト速度、 $\mathbf{v}_{*a}$ は反磁性ドリフト速度、 $C_a$ は衝突演算子である。 $v_\parallel$ は磁力線方向速度、 $q_a$ は電荷、 $\mu$ は磁気モーメント、 $v_{Ta}$ は熱速度を表す。非線形項はポアソン括弧 $[f, g]_{\mathbf{k}_\perp} = \sum_{\mathbf{k}'_1, \mathbf{k}'_2} \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'_1 + \mathbf{k}'_2} \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}'_1 \times \mathbf{k}'_2 f_{\mathbf{k}'_1} g_{\mathbf{k}'_2}$ で表される。また、 $J_{0a} = J_0(\rho_a k_\perp)$ はゼロ次のベッセル関数である。ポアソン方程式とアンペール則は

$$\lambda_{Di}^2 k_\perp^2 \hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp} = \sum_a q_a \left( \int \hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp} J_{0a} d^3v - \frac{q_a}{T_a} \hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp} \right), \quad (5)$$

$$k_\perp^2 \hat{A}_{\parallel \mathbf{k}_\perp} = \frac{\beta_i}{2} \sum_a q_a v_{Ta} \int v_\parallel \hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp} J_{0a} d^3v \quad (6)$$

である。無次元化は以下のとおりである。 $(tv_{Ti}/R_0, \mathbf{k}_\perp \rho_{Ti}, v_\parallel/v_{Ta}, F_{Ma} v_{Ta}^3/n_0, \delta f_a R_0 v_{Ta}^3/(\rho_{Ti} n_0), \phi e R_0/(\rho_{Ti} T_i), A_\parallel R_0/(\rho_{Ti}^2 B_0), m_a/m_i, T_a/T_i, n/n_0, B/B_0, q_a e, \lambda_{Di}/\rho_{Ti}) \rightarrow (t, \mathbf{k}_\perp, v_\parallel, F_{Ma}, \delta f_a, \phi, A_\parallel, m_a, T_a, n, B, q_a, \lambda_{Di})$ 。ここで $\lambda_{Di} = \sqrt{T_i/(4\pi e^2 n_0)}$ 、 $v_{Ta} = \sqrt{T_a/m_a}$ である。ここで、前章のように磁場強度はパリティ対称性を持つとする( $\mathcal{P}B = B$ )。また、 $\beta_i$ はイオンベータ値をあらわす。

ここで考えるパリティ変換は磁気座標で磁力線に沿った座標の反転である(第1章図1または参照論文[4]の図1)。この座標変換に対して、第1章と同様に、奇パリティモードは非線形ジャイロ運動論方程式を満たし、偶パリティモードは非線形ジャイロ運動論方程式を満たさないこと、そして、両方のパリティモードが線形化したジャイロ運動論方程式を満たすことを以下に示す。揺動 $\hat{Q}$ のパリティ変換は、前章の式(22)、(25)より、以下のようになる。

$$\mathcal{P}\hat{Q}(k_x, k_y, z, v_\parallel, \mu, t) = \hat{Q}(-k_x, k_y, -z, -v_\parallel, \mu, t) \quad (7)$$

ただし本章では $\theta$ の代わりに $z$ を用いるとともに小半径方向座標は $s$ の代わりに $x$ を用いる。前章で示された Boltzmann 方程式と Maxwell 方程式のパリティ不変性によ

り、ジャイロ中心摂動分布関数 $\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}$ 、摂動静電ポテンシャル $\hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp}$ 、摂動ベクトルポテンシャルの磁力線平行方向成分 $\hat{A}_{\parallel \mathbf{k}_\perp}$ が式(4)、(5)、(6)を満たせば $-\mathcal{P}\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}$ 、 $-\mathcal{P}\hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp}$ 、 $\mathcal{P}\hat{A}_{\parallel \mathbf{k}_\perp}$ も式(4)、(5)、(6)を満たす。このようにしてパリティ変換に対して不変であることが示された。以下では、式(4)、(5)、(6)の表記に基づいて、もう一度変換普遍性を示す。その後、前章では示されなかった線形化方程式は両パリティを保存することを示す[2]。

パリティ変換に対するジャイロ運動論方程式の不変性を見るために、はじめに以下のいくつかの量の変換を示す。磁力線垂直方向波数の二乗 $k_\perp^2 = k_y^2 [1 + \hat{s}^2(\theta - \theta_k)^2] = (k_x + \hat{s}z k_y)^2 + k_y^2$ はパリティ変換に対して不変である。また、バルーニング角 $\theta_k = -k_x/(k_y \hat{s})$ は $\mathcal{P}\theta_k = -\theta_k$ のように変換される。他の量の変換は以下ようになる

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\nabla_\parallel &= -\nabla_\parallel, & \mathcal{P}\mathbf{v}_{da} \cdot \mathbf{k}_\perp &= \mathbf{v}_{da} \cdot \mathbf{k}_\perp, \\ \mathcal{P}\mathbf{v}_{*a} \cdot \mathbf{k}_\perp &= \mathbf{v}_{*a} \cdot \mathbf{k}_\perp, & \mathcal{P}F_{Ma} &= F_{Ma}. \end{aligned}$$

衝突項は、例えば、Lenard-Bernstein 衝突演算子に対しては $\mathcal{P}C_a = C_a$ であることが簡単に確かめられる。磁気ドリフト項と反磁性ドリフト項が不変であることは、例えば、大アスペクト比トカマク

$$\mathbf{v}_{*a} \cdot \mathbf{k}_\perp = k_y \frac{-T_a}{q_a L_n B} \left[ 1 + \left( \frac{v_\parallel}{2} + \mu B - \frac{3}{2} \right) \eta_a \right] \quad (8)$$

と

$$\mathbf{v}_{da} \cdot \mathbf{k}_\perp = \frac{-T_a}{q_a R B} (v_\parallel^2 + \mu B) (k_x \sin z + k_y (\cos z + \hat{s}z \sin z)) \quad (9)$$

に対して、簡単に確かめることができる。ポアソン方程式(5)にパリティ変換 $\mathcal{P}$ を作用した式

$$\lambda_{Di}^2 k_\perp^2 \mathcal{P}\hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp} = \sum_a q_a \left( \int \mathcal{P}\hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp} J_{0a} d^3v - \frac{q_a}{T_a} \mathcal{P}\hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp} \right), \quad (10)$$

から静電ポテンシャル揺動 $\hat{\phi}$ と摂動分布関数 $\hat{f}_a$ のパリティは同じであることがわかる。一方、アンペール式(6)にパリティ変換 $\mathcal{P}$ を作用した式

$$k_\perp^2 \mathcal{P}\hat{A}_{\parallel \mathbf{k}_\perp} = \frac{\beta_i}{2} \sum_a q_a v_{Ta} \int v_\parallel (-\mathcal{P}\hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp} J_{0a}) d^3v \quad (11)$$

からベクトルポテンシャル揺動 $\hat{A}_\parallel$ の平衡磁力線平行成分と分布関数揺動のパリティは逆であることがわかる。パリティ演算子 $\mathcal{P}$ をジャイロ運動論方程式(4)に作用し、以上の変換を用いると $(\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}, \hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp}, \hat{A}_{\parallel \mathbf{k}_\perp})$ がジャイロ運動論方程式系を満たせば、 $(-\mathcal{P}\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}, -\mathcal{P}\hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp}, \mathcal{P}\hat{A}_{\parallel \mathbf{k}_\perp})$ が以下のようにジャイロ運動論方程式を満たすこと

$$\begin{aligned} \frac{\partial (-\mathcal{P}\hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp})}{\partial t} &= -i \mathbf{v}_{da} \cdot \mathbf{k}_\perp (-\mathcal{P}\hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}) - v_{Ta} [H, -\mathcal{P}\hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}]_\parallel \\ &+ q_a \frac{F_{Ma}}{T_a} \frac{\partial (-\mathcal{P}\hat{\chi}_{a\mathbf{k}_\perp})}{\partial t} + i \mathbf{v}_{*a} \cdot \mathbf{k}_\perp q_a \frac{F_{Ma}}{T_a} (-\mathcal{P}\hat{\chi}_{a\mathbf{k}_\perp}) \\ &+ [-\mathcal{P}\hat{\chi}_a, -\mathcal{P}\hat{h}_a]_{\mathbf{k}_\perp} + C_a(-\mathcal{P}\hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}), \end{aligned} \quad (12)$$

が示される[2]. さらに非線形項 $[\hat{\chi}_a, \hat{h}_a]_{\mathbf{k}}$ が無視できる場合は式(12)の両辺に $-1$ をかけることにより $(\mathcal{P}\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}, \mathcal{P}\hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp}, -\mathcal{P}\hat{A}_{\parallel\mathbf{k}_\perp})$ もジャイロ運動論方程式系を満たすことが示される. このようにして線形化したジャイロ運動論方程式(4)はパリティ変換に対して不変であることが示される. したがって線形化したジャイロ運動論方程式はパリティを保存する.

つぎに, 第1章で示した手続きと同様にして, 揺動分布関数を偶パリティ部分と奇パリティ部分に分ける.

$$\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp} = \hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^+ + \hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^- \quad (13)$$

ここで

$$\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^\pm = \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{P})\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp} \quad (14)$$

である. 偶パリティモードの揺動分布関数はパリティ変換に対して符号を変えない( $\lambda_P = 1$ ). つまり $\mathcal{P}\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^+(z, v_\parallel, k_x) = \hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^+(-z, -v_\parallel, -k_x) = \hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^+(z, v_\parallel, k_x)$ が成立する. そしてこのモードはバルーニングパリティモードとも呼ばれる.

一方, 奇パリティモードの摂動分布関数は符号を変える. つまり $\mathcal{P}\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^-(z, v_\parallel, k_x) = \hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^-(-z, -v_\parallel, -k_x) = -\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^-(z, v_\parallel, k_x)$ が成立する. そして, このモードはテアリングパリティモードとも呼ばれる. 揺動のパリティを表1にまとめる. 線形化ジャイロ運動論方程式はパリティ変換に対して不変なので, 線形成長する不安定モードのパリティは保存する.

ここまで線形化ジャイロ運動論方程式はパリティ変換に対して不変であることを見てきた. このパリティ対称性は第1章2節および第2章で議論されたパリティ変換と関連し, 運動量輸送の理解に重要である[4]. さらに, この対称性は電磁的なジャイロ運動論シミュレーションで現れる不安定性のモード構造を理解するうえで有用である. 不安定性は二つのグループに分けられる. それは偶パリティ(バルーニングパリティ)モード $\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^+$ と奇パリティ(テアリングパリティ)モード $\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}^-$ である. 前者の典型的な例はイオン(電子)温度勾配不安定性, 捕捉電子モード, 運動論的バルーニングモードである. 一方, 後者の典型的な例は微視的テアリングモードである. 通常, 最も不安定なモードのバルーニング角はゼロであり( $\theta_k = 0$ ), 小半径方向波数はゼロである( $k_x = 0$ ). ここで $k_x = -k_y \hat{s} \theta_k$ である. このバルーニング角がゼロの揺動の磁力線方向分布を第1章図6に示した. 不安定性を初期値問題として解く(固有値問題を解くのではない)数値シミュレーションでは, 最も不安定なモードの線形成長が観測され, そのパリティを第1章図6で示した. 一方, 2番目に不安定なモードは逆のパリティを持ちうることをここで注意する.

### 3.3 パリティ対称性と磁気面破壊

揺動のパリティは有限ベータプラズマで生じる不安定性で特に重要になる. なぜなら, 有限ベータでは磁場揺動が生じ, そのパリティは磁気面破壊に直結するからである. 磁力線は

表1 揺動のパリティ. ここで $\hat{\chi}_{a\mathbf{k}_\perp} = (\hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp} - v_{Ta} v_\parallel A_{\parallel\mathbf{k}_\perp}) J_{0a}$ は一般化ポテンシャル,  $\hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp} = \hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp} + q_a \frac{E_{Ma}}{T_a} \hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp} J_{0a}$ は揺動分布関数の非断熱応答部分を表す.

パリティ分類	$\hat{f}_{a\mathbf{k}_\perp}$	$\hat{\phi}_{\mathbf{k}_\perp}$	$\hat{A}_{\parallel\mathbf{k}_\perp}$	$\hat{\chi}_{a\mathbf{k}_\perp}$	$\hat{h}_{a\mathbf{k}_\perp}$
偶(バルーニング)パリティモード(+)	偶	偶	奇	偶	偶
奇(テアリング)パリティモード(-)	奇	奇	偶	奇	奇

$$\frac{dx}{B_x} = \frac{dy}{B_y} = \frac{dz}{B_z} \quad (15)$$

を積分することにより得られる. 磁力線の小半径方向位置は

$$\int dx = \int \frac{B_x}{B_z} dz = \int \frac{\hat{B}_x}{B_0} dz = \int \frac{ik_y \hat{A}_{\parallel}}{B_0} dz \quad (16)$$

のように表される. したがって, 計算領域の一方の端から他方の端まで磁力線を追い, その小半径方向の位置が元に戻らない場合, 磁気面が破壊されたと判断できる. このようにして, 揺動が奇(テアリング)パリティを持つ場合, 平行方向ベクトルポテンシャル $\hat{A}_{\parallel}$ は $z$ の偶関数で磁力線方向積分は有限 $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{\parallel\mathbf{k}_\perp} dz \neq 0$ となるので, 磁気面は破壊される. 一方, 揺動が偶(バルーニング)パリティを持つ場合,  $\hat{A}_{\parallel}$ は $z$ の奇関数となるので, 積分はゼロになり $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{A}_{\parallel\mathbf{k}_\perp} dz = 0$ , 磁気面破壊は起きない.

### 3.4 トカマクプラズマにおける微視的不安定性のパリティ

ここで示す計算例は, 以下のトカマク(Cyclone base case: CBC)パラメータに基づく.  $q_0 = 1.4$ ,  $\hat{s} = 0.786$ ,  $\eta_i = \eta_e = 3.1$ ,  $R/L_n = 2.22$ ,  $R/L_{Ti} = R/L_{Te} = 6.88$ ,  $\varepsilon = r_0/R = 0.18$ ,  $T_i = T_e$ ,  $m_i/m_e = 1836$ ,  $\eta_a = L_n/L_{Ta}$ . そして, 大アスペクト比近似を用いて磁場強度と磁気ドリフトを以下のように書く.

$$B = \frac{B_0}{1 + \varepsilon \cos z} \quad (17)$$

$$\mathbf{v}_{da} \cdot \mathbf{k}_\perp = \frac{-T_a}{q_a RB} (v_\parallel^2 + \mu B) (k_x \sin z + k_y (\cos z + \hat{s} z \sin z)). \quad (18)$$

弱衝突プラズマにおける乱流の計算を行うために, 不安定性の成長率に影響がない程度に衝突周波数は十分小さくする. 一方, 非線形発展において準定常状態を得るためには衝突周波数は有限でなければならないとの要請から $\nu_{ii} = 2 \times 10^{-3}$ ,  $\nu_{ee} = \sqrt{m_i/m_e} \nu_{ii}$ とする. またデバイ長はゼロとする $\lambda_{Di}/\rho_{Ti} = 0$ . 他の計算条件の詳細は参考論文[2]を参照する.

以下では, ジャイロ運動論シミュレーションで現れる不安定性のベータ依存性などを簡単に解説しながら, 不安定性のパリティについて説明する. はじめに, 線形成長率と実周波数( $k_y \rho_{Ti} = 0.2$ )のイオンベータ値 $\beta_i$ 依存性を図1に示す. 低ベータでは $\beta_i = 0.9\%$ まで, イオン温度勾配(ITG)モードが最も不安定なモードとして現れる. 負の周波数はこのモードがイオン反磁性方向に回転することを示

す。捕捉電子モード (TEM) の成長率は  $\beta_i < 0.9$ ,  $k_y \rho_{Ti} = 0.2$  では ITG モードの成長率より小さいが,  $\beta_i$  が 1% 程度まで増えると, TEM が最も不安定になる。そして, このモードは電子反磁性方向に回転することがわかる。  $\beta_i$  が 1.3% 以上になると運動論的バルーニングモード (KBM) が最も不安定になる。運動論的バルーニングモードの実周波数はこのモードがイオン反磁性方向に回転し, その大きさは ITG モードより大きいことを示す。 ITG モードの成長率はベータとともに減少し, KBM の成長率はベータとともに増大する。このように, イオンスケール  $k_y \rho_{Ti} < 1$  の不安定性の成長率は, 磁力線折り曲げ効果により, ベータ値に強く依存する。一方, 電子スケール  $k_y \rho_{Ti} \geq 1$  に近い不安定性である TEM と ETG モードの成長率はベータ値にほとんど依存性しない。図 2 はそれぞれの不安定性の成長率のポロイダル波数 (正確には磁力線ラベル方向波数)  $k_y$  依存性を示す。 TEM は  $k_y \rho_{Ti} \approx 0.8$  で, ベータ依存性がないことがわかる。一方, ITG モードは  $k_y \rho_{Ti} < 0.5$ ,  $\beta_i = 0.2\%$  で不安定であり,  $\beta_i = 1\%, 1.4\%$  で TEM より成長率が低くなる。 KBM は  $k_y \rho_{Ti} < 0.5$ ,  $\beta_i = 1.4\%$  で不安定で, TEM は  $\beta_i = 1\%$  でどの波数でも不安定である。最も不安定な KBM の波数は, ITG のそれより小さい。

3.4.1 バルーニングパリティモード

以上に紹介した不安定性のパリティを以下に見る。図 3 は波数が  $k_y \rho_{Ti} = 0.3, 1.0$  のそれぞれの不安定性の静電ポテ

ンシヤル揺動の磁力線方向分布を示す。波数が  $k_y \rho_{Ti} = 0.2$  の図は第 1 章図 6 で示した。 ITG モード, TEM, KBM の揺動はトラス外側の悪い局率領域と呼ばれる領域 ( $z = 0$ ) で最大値を持つ。 ITG はバルーニング型不安定性なので, 一般的には, 悪い局率領域で鋭いピークを持つ分布の方が成長率が大きい。実際,  $k_y \rho_{Ti} = 0.3$  の ITG モードの分布は  $k_y \rho_{Ti} = 0.2$  の ITG モードの分布より鋭くピークし, 成長率も大きい。磁力線方向の分布から, ITG モード, TEM, KBM ともに  $z = 0$  でピークするバルーニング構造をもち, バルーニングパリティに属することがわかる。また, ITG モード, TEM, KBM ともに  $k_y \rho_{Ti} = 0.2, 0.3$  のモードは  $z = \pm 2\pi$  以上に広がることわかる。一方, TEM は  $k_y \rho_{Ti} = 1.0$  に対して,  $\pm 8\pi$  以上広がり, その広がりにはベータ値に依存しない。この磁力線方向に広がったモード構造は TEM の特徴である。

静電ポテンシャル揺動  $\hat{\phi}$  は揺動分布関数  $\hat{f}$  と同じパリティを持つが, 一方, 平行ベクトルポテンシャル揺動  $\hat{A}_{\parallel}$  は揺動分布関数と異なるパリティを持つ。図 4 は ITG モード ( $k_y \rho_{Ti} = 0.2$ ), TEM ( $k_y \rho_{Ti} = 1.0$ ), 微視的テアリングモード (MTM ( $k_y \rho_{Ti} = 0.09$ )) の平行ベクトルポテンシャル揺動  $\hat{A}_{\parallel}$  の磁力線方向座標  $z$  分布を示す。 ITG モードと TEM は偶パリティモードなので,  $\hat{A}_{\parallel}$  は  $z$  の奇関数である。

3.4.2 テアリングパリティモード

微視的テアリングモード (MTM) は奇パリティモード

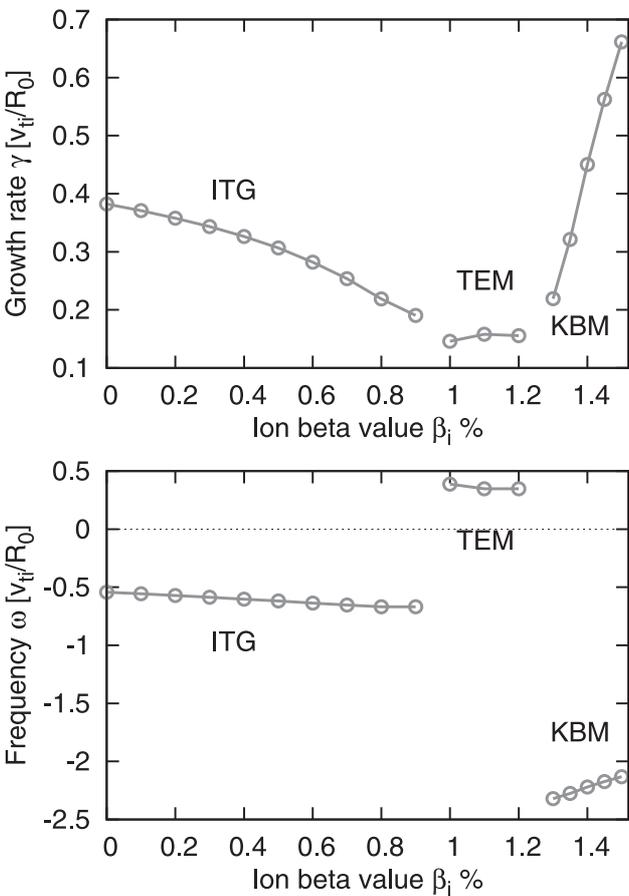


図 1 CBC における微視的不安定性 (ポロイダル波数 (正確には磁力線ラベル方向波数)  $k_y \rho_{Ti} = 0.2$ ) の線形成長率と実周波数のベータ値依存性 [2].

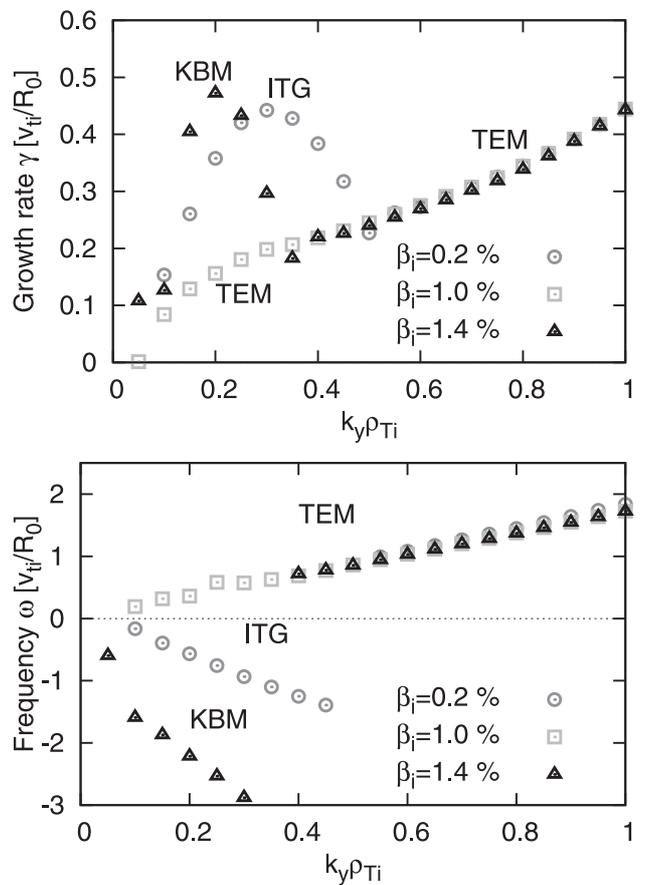


図 2 CBC におけるいくつかのベータ値に対する微視的不安定性の線形成長率と実周波数のポロイダル波数依存性 [2].

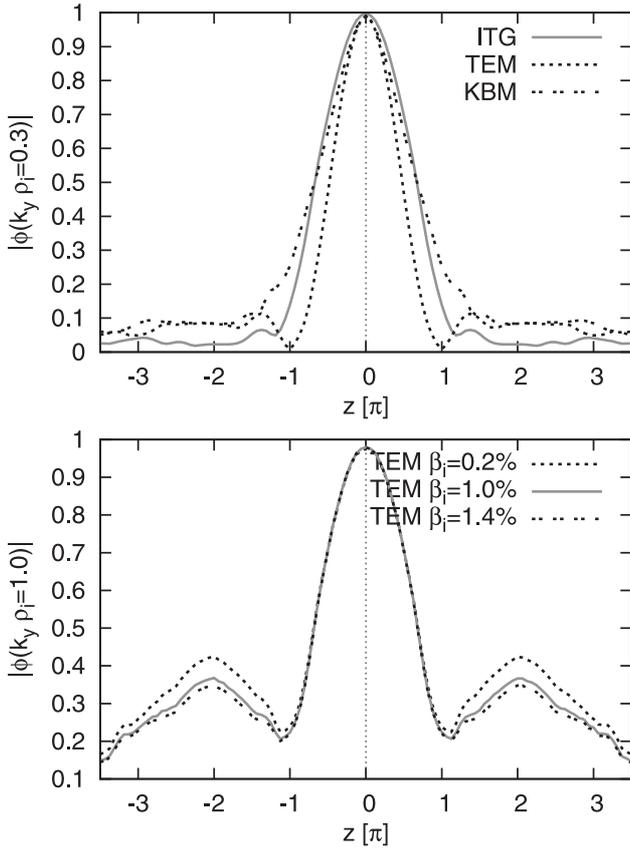


図3 静電ポテンシャル揺動  $\hat{\phi}_k(z)$  の磁力線方向座標  $z$  分布. イオン温度勾配 (ITG) モード, 捕捉電子モード (TEM), 運動論的バルーニングモード (KBM) が波数  $k_y \rho_{Ti} = 0.3$ ,  $k_y \rho_{Ti} = 1.0$ , についてプロットされている. ITG モード, TEM, KBM は偶パリティモードであることがわかる [2].

なので, 図4において,  $\hat{A}_{\parallel}$  は  $z$  の偶関数である. ここで典型的な奇パリティモードである MTM について詳しく見てみる. MTM は, 球状トカマクのようなベータ値が高いトラスプラズマにおいて現れる. MTM は, 通常, 電子温度勾配によって駆動され, 電子イオン衝突による磁気リコネクションによって生じる. イオンベータ値を  $\beta_i = 6\%$ ,  $1/L_{Ti} = 0$  として計算をした結果, MTM (波数  $k_y \rho_{Ti} = 0.09$ ) の線形成長率は  $\gamma = 0.19$  である. 実周波数は  $\omega = 2. v_{Ti}/R_0$  でモードは電子反磁性の方向に回転する. 静電ポテンシャル揺動は磁力線方向座標  $z$  に対して奇関数である (第1章図7). 一方, 平行ベクトルポテンシャル揺動は偶関数である (図4). したがって, MTM は奇 (テリング) パリティモードである.

### 3.5 非線形パリティ混合

ジャイロ運動論方程式の非線形項は異なるパリティを持つモード同士の非線形相互作用を起こす. 3.1節で見たように, 線形化した方程式はパリティを保存するので, 1章での簡約化 MHD 方程式の非線形パリティ混合の議論と同様に, 式(4)の非線形項と時間微分項のみを表示する.

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \hat{h}_{a\mathbf{k}_i}^{\pm} + q_a \frac{F_{Ma}}{T_a} \hat{\chi}_{a\mathbf{k}_i}^{\pm} \right) = [\hat{\chi}_a, \hat{h}_a]_{\mathbf{k}_i}^{\pm}. \quad (19)$$

式(19)の非線形項の偶パリティ部分と奇パリティ部分は

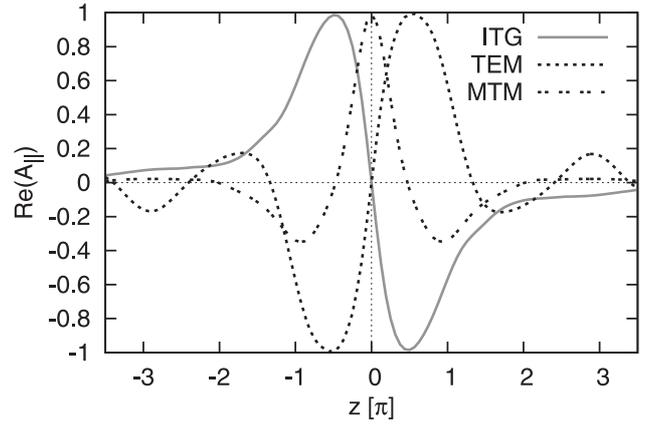


図4 磁力線平行ベクトルポテンシャル揺動  $\hat{A}_{\parallel \mathbf{k}}(z)$  磁力線方向座標分布. イオン温度勾配 (ITG) モード, 捕捉電子モード (TEM), が波数  $k_y \rho_{Ti} = 0.2$ ,  $k_y \rho_{Ti} = 1.0$  に対してプロットされている. ITG モードと TEM は  $z$  の奇関数であり, 偶パリティモードに分類されることを示す. 一方, 微視的テリングモード (MTM) ( $k_y \rho_{Ti} = 0.09$ ) は  $z$  の偶関数で, 奇パリティモードに分類される. また, 図3との比較によりベクトルポテンシャル揺動と静電ポテンシャル揺動は逆のパリティを持つこともわかる [2].

下のようになる.

$$[\hat{\chi}_a, \hat{h}_a]_{\mathbf{k}_i}^{\pm} = \frac{1}{2} (1 \pm \mathcal{P}) [\hat{\chi}_a, \hat{h}_a]_{\mathbf{k}_i} =$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i'} \delta_{\mathbf{k}_i, \mathbf{k}_i + \mathbf{k}_i'} \mathbf{b} \cdot \mathbf{k}_i' \times \mathbf{k}_i'' \{ \hat{\chi}_{a\mathbf{k}_i'}(z, v_{\parallel}, k_x') \hat{h}_{a\mathbf{k}_i''}(z, v_{\parallel}, k_x'') \mp \hat{\chi}_{a\mathbf{k}_i}(-z, -v_{\parallel}, -k_x') \hat{h}_{a\mathbf{k}_i}(-z, -v_{\parallel}, -k_x'') \} \quad (20)$$

まず, 奇パリティモード ( $\hat{\chi}_a^-, \hat{h}_a^-$ )  $\neq 0$ , ( $\hat{\chi}_a^+, \hat{h}_a^+$ )  $= 0$  を代入すると, 以下の関係式を得る.

$$[\hat{\chi}_a^-, \hat{h}_a^-]_{\mathbf{k}_i}^+ = 0, [\hat{\chi}_a^-, \hat{h}_a^-]_{\mathbf{k}_i}^- = [\hat{\chi}_a^-, \hat{h}_a^-]_{\mathbf{k}_i} \neq 0. \quad (21)$$

したがって, 奇パリティモードは偶パリティモードを生成せず奇パリティモードのみを生成するので, 非線形パリティ混合は起こらない. これは, この章のはじめや前章で見たように奇パリティモードは非線形ジャイロ運動論方程式を満たすことに対応する. 次に, 偶パリティモード ( $\hat{\chi}_a^+, \hat{h}_a^+$ )  $\neq 0$ , ( $\hat{\chi}_a^-, \hat{h}_a^-$ )  $= 0$  を代入すると, 以下の関係式を得る.

$$[\hat{\chi}_a^+, \hat{h}_a^+]_{\mathbf{k}_i}^+ = 0, [\hat{\chi}_a^+, \hat{h}_a^+]_{\mathbf{k}_i}^- = [\hat{\chi}_a^+, \hat{h}_a^+]_{\mathbf{k}_i} \neq 0. \quad (22)$$

したがって, 非線形項はパリティを混合し, 偶パリティモードが奇パリティモードを生成する. また, 異なるパリティモード同士の非線形相互作用に対しては

$$[\hat{\chi}_a^+, \hat{h}_a^-]_{\mathbf{k}_i}^- = 0, [\hat{\chi}_a^-, \hat{h}_a^+]_{\mathbf{k}_i}^- = 0, \quad (23)$$

$$[\hat{\chi}_a^+, \hat{h}_a^-]_{\mathbf{k}_i}^+ = [\hat{\chi}_a^+, \hat{h}_a^-]_{\mathbf{k}_i} \neq 0, \\ [\hat{\chi}_a^-, \hat{h}_a^+]_{\mathbf{k}_i}^+ = [\hat{\chi}_a^-, \hat{h}_a^+]_{\mathbf{k}_i} \neq 0, \quad (24)$$

が成立するので, 偶パリティモード, 奇パリティモードが混在する場合, それらの非線形相互作用は偶パリティモードを生成することがわかる.

式(21)から、奇パリティモードは非線形発展においても奇パリティモードを保ったまま飽和することが示唆される。これは、第1章の簡約化MHD方程式のシミュレーション結果を示す図11においてテアリングモードは奇パリティを保ったまま飽和することに対応する。ただ、式(24)からわかるように、わずかでも偶パリティが混在するとさらに偶パリティモードを生成するので、数値シミュレーションにおいて奇パリティモードは完全に奇パリティを保つとは限らないことに注意する。そして、式(22)から偶パリティモードは非線形発展において奇パリティモードを生成するという重要な結論を得る。例えば、ITGモードやTEMは非線形パリティ混合により、磁気面を破壊する磁場揺動を生成することが示唆される。

### 3.6 まとめ

ジャイロ運動論シミュレーションによって解析できる微視的不安定性を、磁力線方向パリティ対称性に基づいて分類した。イオン(電子)温度勾配不安定性、捕捉イオン(電子)モード、運動論的バルーニングモードは偶パリティモードである。一方、微視的テアリングモードは奇パリティモードである。偶パリティモードは、静電ポテンシャル揺動が磁力線方向座標に対して偶関数で、ベクトルポテンシャルが奇関数である。奇パリティモードは、静電ポテンシャル揺動が磁力線方向座標に対して奇関数で、ベクトルポテンシャルが偶関数である。ベクトルポテンシャルが偶関数である奇パリティモードの成長は磁気面破壊を伴う。偶パリティモードと奇パリティモードは、揺動の振幅が十分小さい線形成長時には同等かつ独立であるが、揺動が成長して非線形飽和するときには、同等でなくなる。こ

れは、偶パリティモードと奇パリティモードはそれぞれ線形化されたジャイロ運動論方程式を満たすが、非線形ジャイロ運動論方程式を満たすのは奇パリティモードのみであるからである。したがって、ITGモードなどの偶パリティモードが非線形飽和するときには必ず奇パリティモードを励起する。

パリティに基づく解析は微視的テアリングモード(奇パリティモード)の解析でも有用である。3.5節の議論から、微視的テアリングモードはゾーナル流を生成せず、主にゾーナル磁場を生成することがわかる。したがって、微視的テアリングモード(MTM)はゾーナル流ではなく、ゾーナル磁場による波数空間での散乱で飽和することが予測される。

有限ベータプラズマでは、ゾーナル流が弱く、ゾーナル流生成以外の乱流の飽和機構が重要となる。このような場合に、イオン温度勾配不安定性や捕捉電子モードなどの偶パリティモードの飽和過程における奇パリティモード励起は、ベータが低い場合と比較して重要になる事が予測される。

最後に、本章の執筆にあたって貴重な助言をいただいた中村祐司教授、岸本泰明教授、洲鎌英雄教授に深く感謝いたします。

### 参考文献

- [1] T.-H. Watanabe and H. Sugama, Nucl. Fusion **46**, 24 (2006).
- [2] A. Ishizawa *et al.*, J. Plasma Phys. **81**, 435810203 (2015).
- [3] 洲鎌英雄: プラズマ・核融合学会誌 **79**, 107 (2003).
- [4] H. Sugama *et al.*, Plasma Phys. Control. Fusion **53**, 024004 (2011).