

小特集

トラスプラズマにおけるパリティ

Parity in Torus Plasmas

1. はじめに

1. Introduction

石澤明宏

ISHIZAWA Akihiro

京都大学

(原稿受付：2016年4月22日)

本小特集では、磁場閉じ込めトラスプラズマに現れる揺動分布のパリティ（偶奇性）の理論およびシミュレーション結果を紹介する。そして、この概念が、磁気面破壊による磁気島生成、径電場形成およびプラズマの回転を規定する運動量輸送、多階層相互作用の理解に役立つことを紹介する。近年、トラスプラズマ内の揺動の空間分布計測が可能になり、揺動の詳細な空間分布のパリティからその不安定性を同定する手法が用いられ始めているので、実験研究にも役立つものと期待する。

1.1 導入

パリティは空間反転と深い関係があり、辞書には「パリティ：偶奇性、量子力学で空間反転を表現する物理量」と書いてある。物理現象を記述する方程式系が対称性を持つ場合、方程式系は対称性に関する変換に対して不変であり、その対称性に対応する量が系の時間発展に伴い不変である。たとえば、運動量は空間一様性、角運動量は空間等方性に対応した保存量である。パリティは空間反転の対称性に対応した保存量となる。

磁場に閉じ込められたトラスプラズマに現れる揺動は、プラズマの閉じ込めを劣化させる主要原因であり、その性質を理解して制御することは磁場閉じ込め核融合研究の中心課題の一つである。トラスプラズマ閉じ込め実験において、たとえば大型ヘリカル装置（LHD）では、有理面近傍での揺動分布の偶奇性が観測されはじめていた[1]。その揺動の空間分布のパリティを理論および数値シミュレーションから予測されるパリティと比較することにより、実験で観測された不安定性の同定および理解が期待できる。また、近年、数値シミュレーションにおいても従来

単独の不安定性に焦点をあててなされた研究が、複数の不安定性を含む研究に拡張されている。このときに異なるパリティを持つ不安定性同士の相互作用を理解することが有用になる。この小特集ではトラスプラズマに現れる揺動のパリティの理論を数値シミュレーション結果を用いながら紹介する。特に磁気流体不安定性とドリフト波不安定性のパリティ分類を、図を用いながら解説する。

量子力学の教科書[2]に書いてあるように、古典力学（通常のプラズマは古典力学に従うと考えられる）では3次元座標すべての反転に関するパリティは有用でない。磁場閉じ込めプラズマでは3次元座標を磁力線方向に関連する2つの座標（1章2節、2章および3章で解説）と、小半径方向という1つの座標（1章3節および4章で解説）に分け、それぞれの反転対称性とパリティを考えることが有用となる。

パリティは量子力学で波動関数 ψ の偶奇性として習う[2]。大ざっぱには波動関数が偶関数であるか奇関数であるかということである。座標を反転させるパリティ演算子 \mathcal{P} がハミルトニアン \mathcal{H} と可換な場合、つまり

$$[\mathcal{H}, \mathcal{P}] = \mathcal{H}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{H} = 0 \quad (1)$$

が成立する場合、パリティは保存し時間変化しない。パリティ演算子 \mathcal{P} の固有値 λ_P は固有値方程式 $\mathcal{P}\psi = \lambda_P\psi$ を満たす。パリティ演算子 \mathcal{P} を2回作用すると、この座標変換は元に戻るので $\mathcal{P}^2\psi = \lambda_P^2\psi = \psi$ 。したがって、 $\lambda_P^2 = 1$ である。偶パリティの固有値は $\lambda_P = +1$ であり、固有関数は ψ_+ と書く。一方、奇パリティの固有値は $\lambda_P = -1$ であり、固有関数は ψ_- と書く。式(1)が成立する場合、閉じた系では、波動関数がある時刻に偶（奇）であればその後の時刻も偶

(奇)である。量子力学ではハミルトニアン \mathcal{H} 中のポテンシャルが空間反転に対して不変であればパリティ対称性があることになる。一方、磁場閉じ込めプラズマでは、ポテンシャルに相当するのが閉じ込め磁場であり、閉じ込め磁場が反転対称性を持つことにより、パリティの時間発展に対する保存が導かれる。

パリティ対称性をみる具体的な例として、後で簡約化MHD方程式を考えると同様な方法を用いて、シュレディンガー方程式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \mathcal{H} \psi(x, t) \tag{2}$$

を考える。この方程式に従い、空間反転対称ポテンシャル $V(-x) = V(x)$ 中にある粒子を表す1次元波動関数 $\psi(x, t)$ のパリティを以下に示す。ここでハミルトニアンは $\mathcal{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x)$ 。関数 $Q(x, t)$ の1次元パリティ変換は $\mathcal{P}Q(x, t) = Q(-x, t)$

である。パリティ演算子を式(2)に作用すると

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}\psi(x, t) = \mathcal{P}\mathcal{H}\psi(x, t), \tag{4}$$

そして、ハミルトニアン \mathcal{H} が $\mathcal{P}: x \rightarrow -x$ の変換で不変であれば、つまりポテンシャル $V(x)$ が偶関数であれば、 $\mathcal{P}\mathcal{H}\psi(x, t) = \mathcal{H}\mathcal{P}\psi(x, t)$ なので、式(1)が成立する。このとき式(4)は以下ようになる。

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [\mathcal{P}\psi(x, t)] = \mathcal{H}[\mathcal{P}\psi(x, t)], \tag{5}$$

この式と式(2)を比較すると ψ がシュレディンガー方程式を満たせば $\mathcal{P}\psi$ も同じ方程式を満たすことがわかる。したがって、 $t=0$ で $\mathcal{P}\psi = \psi$ であれば $\mathcal{P}\psi$ は ψ と同じ時間発展をする。このとき ψ は固有値 $\lambda_p = 1$ をもつ偶パリティでこのパリティ保存しながら時間発展する。一方、式(5)に -1 をかけた式

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} [-\mathcal{P}\psi(x, t)] = \mathcal{H}[-\mathcal{P}\psi(x, t)], \tag{6}$$

が成立するので、 ψ がシュレディンガー方程式を満たせば $-\mathcal{P}\psi$ も方程式を満たす。そして、 $t=0$ で $-\mathcal{P}\psi = \psi$ であれば固有値 $\lambda_p = -1$ で奇パリティを保存しながら $-\mathcal{P}\psi$ は ψ と同じ時間発展をする。初期状態 $t=0$ でパリティ演算子の固有状態でなくとも、波動関数 ψ は偶パリティ ψ_+ と奇パリティ ψ_- の線形和で書くことができる。そして、式(2)と式(5)、(6)の和と差から

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_{\pm}(x, t) = \mathcal{H}\psi_{\pm}(x, t) \tag{7}$$

が示される。ここで $\psi_{\pm}(x, t) = \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{P})\psi(x, t)$ 。したがって、パリティの固有関数である波動関数 $\psi_{\pm}(x, t)$ はそれぞれ独立にシュレディンガー方程式に従い、混じり合わず時間発展する。このようにして、量子力学ではハミルトニア

ンとパリティ演算子が可換な場合、パリティは保存する。

上述の量子力学と磁場閉じ込めプラズマの物理学で大きく異なる点は、プラズマの非線形性である。非線形性が無視できる場合は、上述の量子力学と同様の議論ができる。非線形性が支配的な場合は、その非線形性を表現するポアソン括弧の性質から、特定のパリティ(奇パリティ)が優越する。

磁場閉じ込めプラズマでは、量子力学でのポテンシャル V にあたる量が閉じ込め磁場 \mathbf{B} である。例えば、

$$\mathbf{B} = \nabla \chi(r) \times \nabla (q(r)\theta - \xi), \tag{8}$$

と書く場合を考える(r は小半径、 θ はポロイダル角、 ξ はトロイダル角)。座標 (r, θ, ξ) 全てを反転する変換の対称性は有用ではない。本小特集では3次元の中で (θ, ξ) と r を分けて、それぞれの座標反転に対する対称性が有用であることを示す。式(8)で θ と ξ の符号を反転すると右辺全体の符号が反転する。このことをふまえると、前者は、図1に示されるような平衡磁力線方向成分に対応する二つの座標 (θ, ξ) を反転するパリティ変換 \mathcal{P} に対する対称性である(次節および2, 3章で紹介する)。トカマクのような軸対称プラズマでは、トーラス外側を原点として θ 座標を反転することになる。そして、後者は、残りの小半径方向座標 (r) のパリティ変換 \mathcal{P}_x に対する対称性である(図2に示される。1.3節および4章で紹介する)。

磁場閉じ込めプラズマに現れる揺動は、磁気流体不安定性やドリフト波不安定性によって生じる。そしてこれらの揺動の代表的なものは理論的に二つのグループに大別することができる(正確には他の種類もある)。それはトーラ

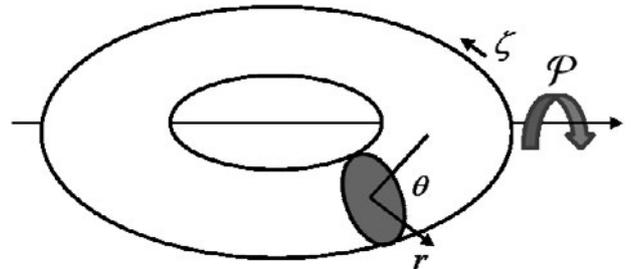


図1 磁力線方向のパリティ変換 $\mathcal{P}Q(r, \theta, \xi) = Q(r, -\theta, -\xi)$ 。ポロイダル角 θ とトロイダル角 ξ の符号を変える。図中の矢印のようにトーラスを反転させることに対応する。

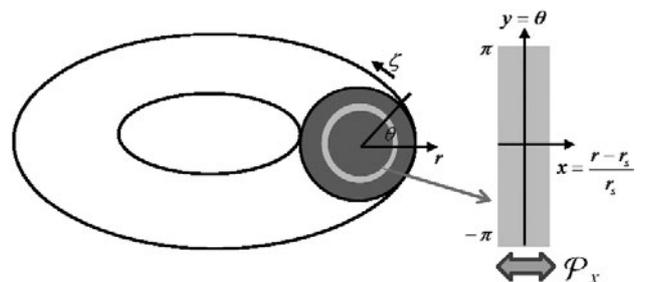


図2 小半径方向のパリティ変換 $\mathcal{P}_x Q(x, y) = Q(-x, y)$ 。有界面近傍の小半径方向座標 $x = (r - r_s)/r_s$ の符号を変える。ここで、 $q(r_s) = m/n$ 、 m はポロイダルモード数、 n はトロイダルモード数を表す。

ス外側に現れるバルーニング型揺動と(図3) トーラス内側外側区別なく特定の小半径に共鳴して現れる有理面共鳴型揺動(図4)である。ここでの有理面は磁力線のねじれが有理数である面を指す。図4は平衡磁場の捻じれの指標である安全係数が $q=2$ で揺動のポロイダルモード数は2, トロイダルモード数は1である。揺動の振幅が小さい場合(線形成長時), 前者の揺動に関しては磁力線方向空間の反転, 後者の揺動に関しては有理面近傍でこの面をはさんだ小半径方向の空間反転に対して線形化した支配方程式が不変である。したがって, それぞれの方向に対するパリティは時間発展しても変わらない。つまり, 反転した座標に対して初めに偶(奇)関数であればその後も偶(奇)関数であり続ける。バルーニング型, 有理面共鳴型どちらも奇パリティは磁気面破壊を意味する。表1および2において不安定性の分類および揺動の偶奇性を示す。ここで分布関数, 静電ポテンシャル, ベクトルポテンシャル(平衡磁力線方向成分)を平衡部分と揺動部分に分けて $F=f+\hat{f}$, $\phi=\Phi+\hat{\phi}$, $A_{\parallel}=A_{\parallel 0}+\hat{A}_{\parallel}$ ($\phi=\Psi+\hat{\phi}$)と書くことにする。また, 密度や温度揺動のパリティを表3に示す。次節において2章および3章で紹介される磁力線方向パリティの導入し, また次々節において4章で紹介される有理面共鳴型パリティを導入する。

1.2 磁力線方向パリティ

この節では揺動の磁力線方向パリティについて簡単な例を図示するとともに, 対応するパリティ変換について最も簡単なモデルの一つである簡約化電磁流体(MHD)モデルを用いて解説する。簡約化MHDモデルについては, 例え

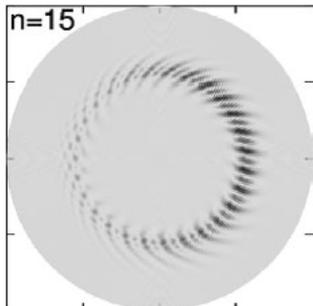


図3 トーラス断面におけるバルーニング型揺動の静電ポテンシャル揺動 $\hat{\phi}$ の分布。トーラス外側($\theta=0$ 近傍)に現れる[5]。

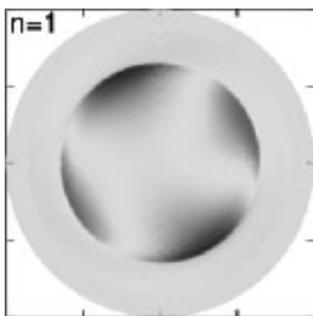


図4 トーラス断面における有理面共鳴型揺動の静電ポテンシャル揺動 $\hat{\phi}$ の分布。トーラス内側外側区別なく特定の小半径($r=r_s$)に共鳴して現れる[5]。ここで $q(r_s)=2$ 。

ば, 参考文献[3-5]に導出が示されている。ここでの議論は, 第2章において, 方程式系については運動論にまで拡張されるとともに磁場の対称性についてはヘリカル対称性(軸対称性を含む)にまで拡張される。

バルーニング型揺動は, 静電ポテンシャル揺動 $\hat{\phi}$ が磁力線方向(図5)に偶関数である偶パリティモード(典型例はイオン温度勾配不安定性, 図6, バルーニングパリティモードとも呼ばれる)と奇関数である奇パリティモード(典型例は微視的テアリングモード, 図7, テアリングパリティモードとも呼ばれる)に分類される(表2)[6]。図はトカマクプラズマにおける揺動のパリティを示す。後で示すように静電ポテンシャル ϕ とベクトルポテンシャル平衡磁場方向成分 A_{\parallel} は逆のパリティを持つ。したがって, 奇パ

表1 不安定性のパリティ分類。本小特集では揺動分布関数 \hat{f} のパリティ(偶奇)にしたがって, 偶パリティ, 奇パリティの分類を行う。ここで, θ はポロイダル角, ξ はトロイダル角, r は小半径, r_s は有理面の小半径をあらわす。また, $F=f+\hat{f}$, $\phi=\Phi+\hat{\phi}$ などのように平衡部分と揺動部分に分ける。例えばエッジローライズドモード(ELM)はビーリングバルーニングモードなので, 「磁力線方向」型のバルーニングモードに分類される。新古典テアリングモード(NTM)は「有理面近傍」型のテアリングモードに分類される。抵抗性交換型モードは「有理面近傍」型の交換型モードに分類される。キンクモードおよび抵抗性壁モードはどの分類にも属さない。

不安定性	パリティ
磁力線方向(θ, ξ)	
バルーニングモード (ELM, KBM など)	偶
イオン(電子)温度勾配モード (ITG, ETG)	偶
捕捉イオン(電子)モード (TIM, TEM)	偶
微視的テアリングモード (MTM)	奇
有理面近傍 $x=r-r_s$	
交換型モード	偶
テアリングモード (NTM など)	奇

表2 揺動のパリティの種類。表1の磁力線方向, 有理面近傍, それぞれの不安定性に対する分布関数揺動 \hat{f} , 静電ポテンシャル揺動 $\hat{\phi}$, 磁場(ベクトルポテンシャル)揺動 \hat{A}_{\parallel} のパリティ分類を示す。分布関数揺動のパリティにしたがって, 偶(+)と奇(-)を定義する。

パリティの種類	\hat{f}	$\hat{\phi}$	$\hat{\phi}$ or \hat{A}_{\parallel}
磁力線方向パリティ			
$\mathcal{P}Q(r, \theta, \xi) = Q(r, -\theta, -\xi)$			
偶(バルーニング)パリティ (+)	偶	偶	奇
奇(テアリング)パリティ (-)	奇	奇	偶
有理面近傍パリティ $\mathcal{P}_s Q(x, y) = Q(-x, y)$			
偶(交換型)パリティ (+)	偶	偶	奇
奇(テアリング)パリティ (-)	奇	奇	偶

表3 磁化プラズマの流体方程式(詳細は参照論文[6])に従う流体量(モーメント量)の揺動のパリティの分類。 \hat{n} は密度揺動, \hat{v}_{\parallel} は磁力線方向速度揺動, \hat{j}_{\parallel} は磁力線方向電流密度揺動, \hat{T} は温度揺動を表す。参照のため分布関数揺動 \hat{f} も併記した。また, 表2に示されたように磁力線方向パリティと有理面近傍パリティの分類は同じなのでこの表では両者の区別なく表示する。

揺動	\hat{f}	\hat{n}	\hat{v}_{\parallel}	\hat{j}_{\parallel}	\hat{T}
偶パリティモード	偶	偶	奇	奇	偶
奇パリティモード	奇	奇	偶	偶	奇

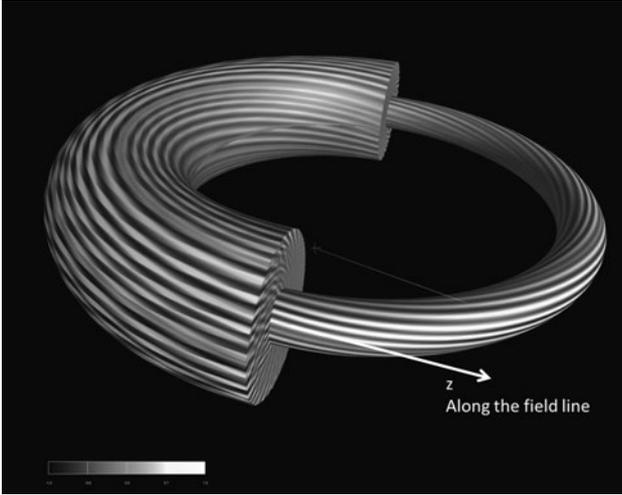


図5 偶パリティモードの静電ポテンシャルの磁力線方向分布。磁力線方向座標 $z = \theta$ に対して偶関数[6]。

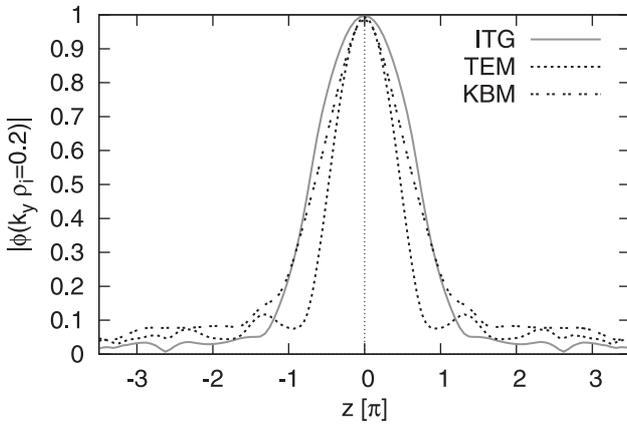


図6 偶（バルーニング）パリティモード（表1）の静電ポテンシャル揺動の磁力線方向分布。トラス外側（悪い曲率領域）が $z=0$ で、揺動はここでピークする。そしてこの揺動は磁力線方向座標 $z = \theta$ に対して偶関数[4]。

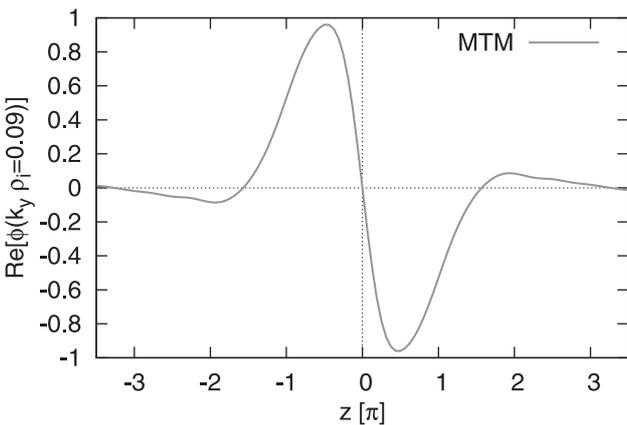


図7 奇（テアリング）パリティモードの静電ポテンシャルの磁力線方向分布。磁力線方向座標 $z = \theta$ に対して奇関数。

パリティモードの磁場揺動の小半径方向成分 \hat{B}_r を磁力線方向に積分した値

$$\int \hat{B}_r dz = \int ik_y \hat{A}_\parallel dz \neq 0 \quad (9)$$

は、 \hat{A}_\parallel が z の偶関数であるため有限となる。これは磁気面が壊れたことを意味する。磁力線ラベル方向波数 k_y についての説明など詳細は3章で解説する。

簡約化 MHD モデルは、不安定モードが磁力線方向に偶関数である偶パリティモードと奇関数である奇パリティモードに分類されることを説明する最も簡単なモデルである。このモデルは大アスペクト比近似のもとで、MHD 不安定性を解析する場合に有用である。座標系は (r, θ, ζ) を用いる。ここで θ はポロイダル角、 ζ はトロイダル角を表す。ここでは磁力線方向に関連した (θ, ζ) 方向のパリティ対称性について考える[3]。低ベータオーダリングに従う簡約化 MHD 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi + [\phi, \nabla^2 \phi] = \nabla_\parallel J_\parallel, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + \nabla_\parallel \phi = \eta \nabla^2 \phi. \quad (11)$$

である。ここで $\nabla_\parallel = \epsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} - [\psi, \cdot]$, $J_\parallel = -\nabla^2 \psi$ に注意すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi + [\phi, \nabla^2 \phi] = [\phi, \nabla^2 \psi] - \epsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 \psi, \quad (12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi + [\phi, \psi] + \epsilon \frac{\partial \phi}{\partial \zeta} = \eta \nabla^2 \phi. \quad (13)$$

と書くことができる。また、 $\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$, $[f, g] = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{1}{r} \frac{\partial g}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial g}{\partial r}$ はポアソン括弧を表し、 $\epsilon = a/R_0$ は逆アスペクト比、 η は磁気拡散係数を表す。 ϕ は MHD オーダリングなので流れ関数であり、後で紹介されるジャイロ運動論はドリフトオーダリングなので規格化静電ポテンシャルである（詳細は文献[5]）。また、 ψ は規格化平行ベクトルポテンシャルを表す。表記などの詳細は参考文献[5]を参照する。

ここでパリティ変換

$$\mathcal{P}Q(r, \theta, \zeta, t) = Q(r, -\theta, -\zeta, t) \quad (14)$$

を考える（図1）。ポアソン括弧が符号を変えること $\mathcal{P}[\cdot] = -[\cdot, \cdot]$ に注意して変換 $-\mathcal{P}$ を式(12)に作用し、変換 \mathcal{P} を式(13)に作用させると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 (-\mathcal{P}\phi) + [(-\mathcal{P}\phi), \nabla^2 (-\mathcal{P}\phi)] \\ = [\mathcal{P}\phi, \nabla^2 \mathcal{P}\phi] - \epsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 \mathcal{P}\phi, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}\phi + [(-\mathcal{P}\phi), \mathcal{P}\phi] + \epsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} (-\mathcal{P}\phi) = \eta \nabla^2 \mathcal{P}\phi. \quad (16)$$

が導かれる。したがって、 (ϕ, ψ) が簡約化 MHD 方程式(12), (13)を満たせば、 $(-\mathcal{P}\phi, \mathcal{P}\psi)$ も簡約化 MHD 方程式を満たすことが示された。これは奇パリティモードはパリティを保存しながら非線形発展まで含めて簡約化 MHD 方程式を満たして飽和しうることを示す。一方、たとえば、 $(\mathcal{P}\phi, -\mathcal{P}\psi)$ は簡約化 MHD 方程式を満たさないため、偶パリティモードはパリティを保ったまま非線形飽和することができない。簡約化 MHD に限らず、通常、奇パリティモー

ドは線形および非線形まで含めてパリティが保存する。一方、イオン温度勾配 (ITG) 不安定性などの偶パリティモードは線形成長ではパリティが保存しても、非線形ではパリティを保存したまま方程式を満足することができない。どのようにして偶パリティモードが非線形発展で方程式を満たすのかについては1.4節「パリティ混合」および3章で詳細に説明する。

次に、揺動の振幅が十分小さい場合、偶パリティ、奇パリティそれぞれが保存することを示す。そのために、ベクトルポテンシャルと静電ポテンシャルを平衡部分と揺動部分に分ける $\psi = \Psi + \hat{\psi}$, $\phi = \Phi + \hat{\phi}$ 。ここで、MHD 平衡は流れのない静止平衡方程式 $[\Psi, \nabla^2 \Psi] = 0$, $\Phi = 0$ に従うとした。揺動は十分小さいと仮定し、揺動の二次の項を無視して簡約化 MHD 方程式を線形化すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi} = [\Psi, \nabla^2 \hat{\phi}] + [\hat{\phi}, \nabla^2 \Psi] - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 \hat{\phi}, \quad (17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi} + [\hat{\phi}, \Psi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{\phi} = \eta \nabla^2 \hat{\psi}, \quad (18)$$

を得る。前節のシュレディンガー方程式のパリティ変換と同様な作業で線形化した簡約化 MHD 方程式のパリティ対称性を示す。このために式 (17), (18) をまとめて以下のように書く。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 & -[\Psi, \nabla^2] - [\nabla^2 \Psi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 \\ [\Psi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} & \frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} = 0$$

ここで、パリティ変換 $\mathcal{P}:(r, \theta, \zeta) \rightarrow (r, -\theta, -\zeta)$ をこの方程式に作用する。

$$\mathcal{P} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 & -[\Psi, \nabla^2] - [\nabla^2 \Psi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 \\ [\Psi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} & \frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi} \\ \hat{\psi} \end{pmatrix} = 0$$

ポアソン括弧が符号を変えること $\mathcal{P}[\cdot] = -[\cdot]$ および $\mathcal{P}\Psi(r) = \Psi(r)$ に注意すると、以下のようになる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 & -[\Psi, \nabla^2] - [\nabla^2 \Psi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 \\ +[\Psi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} & \frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mp \mathcal{P}\hat{\phi} \\ \pm \mathcal{P}\hat{\psi} \end{pmatrix} = 0$$

シュレディンガー方程式の時と同様に元の式との和と差を取ると

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 & -[\Psi, \nabla^2] - [\nabla^2 \Psi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 \\ [\Psi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} & \frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_{\pm} \\ \hat{\psi}_{\mp} \end{pmatrix} = 0$$

ここで $\hat{\phi}_{\pm} = \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{P})\hat{\phi}$, $\hat{\psi}_{\mp} = \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{P})\hat{\psi}$ であり、 $\hat{\phi}$ と $\hat{\psi}$ は異なるパリティでなければならないことがわかるとともに

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi}_{\pm} = [\Psi, \nabla^2 \hat{\phi}_{\pm}] + [\hat{\phi}_{\mp}, \nabla^2 \Psi] - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \nabla^2 \hat{\phi}_{\pm}, \quad (19)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}_{\mp} + [\hat{\phi}_{\pm}, \Psi] + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \zeta} \hat{\phi}_{\pm} = \eta \nabla^2 \hat{\psi}_{\mp}, \quad (20)$$

はパリティ変換 $\mathcal{P}:(r, \theta, \zeta) \rightarrow (r, -\theta, -\zeta)$ に対して不変であることがわかる。ここで偶パリティは $\mathcal{P}\hat{\phi}_{-} = -\hat{\phi}_{-}$ と $\mathcal{P}\hat{\phi}_{+} = \hat{\phi}_{+}$ を満たし、奇パリティは $\mathcal{P}\hat{\phi}_{-} = -\hat{\phi}_{-}$ と $\mathcal{P}\hat{\phi}_{+} = \hat{\phi}_{+}$ を満たす。この磁力線方向対称性に関するパリティについて第2章、3章で運動論も含めた一般的な議論がなされる。

1.3 有理面近傍パリティ (小半径方向)

ここでは4章で紹介される有理面近傍における小半径方向のパリティについて、MHD モデルを用いて簡単に紹介する。有理面共鳴型揺動は静電ポテンシャル揺動 $\hat{\phi}$ が有理面近傍で小半径方向に偶関数である偶パリティモード (典型例は交換型不安定性) と奇関数である奇パリティモード (典型例は磁気島を作るテアリングモード) に分類される (図8)。ここでは簡約化 MHD モデルを用いてこのパリティ分類を説明する。簡約化 MHD モデルを用い、さらに有理面近傍領域を角柱プラズマで近似すると ($x = ((r - r_s)/L_x)$, $y = \theta/\pi$)、有理面近傍に発生する MHD 不安定性は上のパリティに分類されることが示される。この近似は、有理面に共鳴する不安定性の線形理論で用いられる近似 $\frac{\partial}{\partial x} \gg \frac{\partial}{\partial y}$ に対応し、例えば抵抗性 MHD では $L_x = a/(Sk_p)^{1/3}$ ($S = v_A a/\eta$ は Lundquist 数, a はプラズマ小半径)、無衝突プラズマでは $L_x = d_e$ (d_e は電子の慣性長) になる [5]。角柱プラズマ近似はプラズマの小半径全体に広がる領域 ($L_x = r_s$) における不安定性の非線形飽和の研究にもよく用いられる。この時は不安定性の非線形発展の記述では近似が悪くなる可能性があることに注意する必要がある。ここでプラズマ小半径方向に対応する x 方向のパリティ対称性について考える。ポロイダル方向に対応する y 方向のパリティ対称性は、前節の磁力線方向パリティ対称性に対応する [3]。これは、次段落で説明するように、ヘリカル変換を行うことにより磁力線方向をポロイ

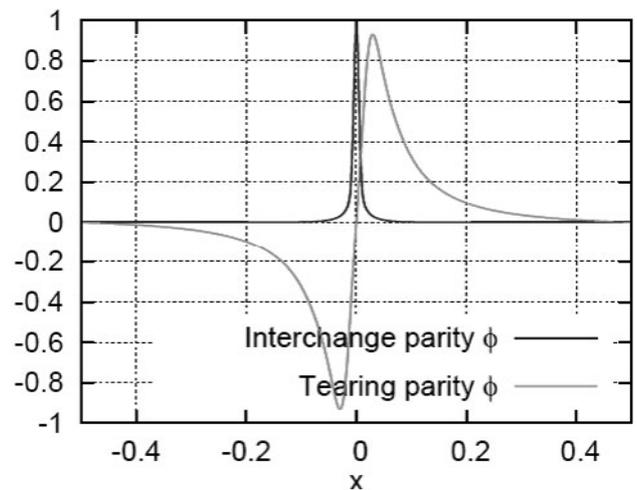


図8 角柱プラズマにおける $x = r - r_s = 0$ にある有理面に共鳴した有理面共鳴型揺動の小半径方向分布。偶パリティモードであるインターチェンジモードの静電ポテンシャル (流れ関数) は x に対して偶関数 $\hat{\phi}_{+}$ である。一方、奇パリティモードであるテアリングモードの静電ポテンシャルは x に対して奇関数 $\hat{\phi}_{-}$ である。

ダル方向に射影できるからである。

ここでも簡約化 MHD 方程式 (12), (13) を考える。ただし、ある有理面に共鳴したモード (ポロイダルモード数 m , トロイダルモード数 n) の不安定性を対象とし、この有理面近傍を考える。ここで、ヘリシティーが m/n のヘリカル構造がポロイダル数 m のみを持つ二次元構造に見える変換であるヘリカル変換 $\phi^* = \phi - \frac{n}{m}\epsilon \frac{r^2}{2}$, $\epsilon = a/R_0$ を行う。この変換により磁場はポロイダル方向に射影され、磁力線方向微分 ∇_{\parallel} 中の ζ に関する微分項は消去できる $\nabla_{\parallel}^* = -[\phi^*, \cdot]$ 。したがって、この節では ζ に関する微分項を消去した方程式系

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi + [\phi, \nabla^2 \phi] = [\phi^*, \nabla^2 \phi^*] \quad (21)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi^* + [\phi, \phi^*] = \eta \nabla^2 \phi^*. \quad (22)$$

を用いて議論を進める。ここで $J_{\parallel}^* = -\nabla^2 \phi^*$ を用いた。また、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$, ポアソン括弧は $[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$ となる。また、これ以後上付き添え字 * は省略する。ここでパリティ変換

$$\mathcal{P}_x Q(x, y, t) = Q(-x, y, t) \quad (23)$$

を考える (図 2)。ポアソン括弧が符号を変えること $\mathcal{P}_x [\cdot, \cdot] = -[\cdot, \cdot]$ に注意してこの変換を式 (21), (22) に作用させると、前節と同様の計算により、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 (-\mathcal{P}_x \phi) + [(-\mathcal{P}_x \phi), \nabla^2 (-\mathcal{P}_x \phi)] \\ = [\mathcal{P}_x \phi, \nabla^2 \mathcal{P}_x \phi], \quad (24) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_x \phi + [(-\mathcal{P}_x \phi), \mathcal{P}_x \phi] = \eta \nabla^2 \mathcal{P}_x \phi. \quad (25)$$

が導かれる。したがって、 (ϕ, ψ) が簡約化 MHD 方程式 (21), (22) を満たせば、 $(-\mathcal{P}_x \phi, \mathcal{P}_x \psi)$ も簡約化 MHD 方程式を満たす。したがって、奇パリティモードはパリティを保存しながら非線形発展まで含めて簡約化 MHD 方程式を満たして飽和する。一方、 $(\mathcal{P}_x \phi, -\mathcal{P}_x \psi)$ は簡約化 MHD 方程式を満たさないで、偶パリティモードはパリティを保ったまま非線形飽和することができない。偶パリティモードの非線形飽和については、次節で説明するパリティ混合が重要になる。

次に、これも前節と同様に、揺動の振幅が十分小さい場合、偶パリティ、奇パリティそれぞれが保存することを示す。そのために、ベクトルポテンシャルと静電ポテンシャルを平衡部分と揺動部分に分けて、揺動は十分小さいと仮定し、二次の項を無視して簡約化 MHD 方程式 (式 (21), (22)) を線形化する。有理面近傍では正磁気シアの平衡磁場が小半径方向 $x = r - r_s$ に対して反対称であり $B_y(-x) = B_y(x)$, $\Psi(-x) = \Psi(x)$ となる。(例えば、 $B_y = B_0 x$, $\Psi = B_0 x^2/2$.) 前節のパリティ変換と同様な作業で線形化した簡約化 MHD 方程式のパリティ対称性を示す。このために線形化した式をまとめて書き、パリティ変換 $\mathcal{P}_x: x \rightarrow -x$ をこの方程式に作用する。ポアソン括弧が符号を変えること

$\mathcal{P}_x [\cdot, \cdot] = -[\cdot, \cdot]$ および $\mathcal{P}_x \Psi = \Psi$ に注意すると以下の式を得て、偶パリティ奇パリティ共に方程式を満たすことが示される。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 & -[\Psi, \nabla^2] - [\nabla^2 \Psi] \\ +[\cdot, \Psi] & \frac{\partial}{\partial t} - \eta \nabla^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mp \mathcal{P}_x \hat{\phi} \\ \pm \mathcal{P}_x \hat{\phi} \end{pmatrix} = 0.$$

シュレディンガー方程式の時と同様に元の式との和と差を取ると、前節のパリティ変換 $\mathcal{P}: (r, \theta, \zeta) \rightarrow (r, -\theta, -\zeta)$ と同じ手続きで同じ式

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi}_{\pm} = [\Psi, \nabla^2 \hat{\phi}_{\pm}] + [\hat{\phi}_{\pm}, \nabla^2 \Psi], \quad (26)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_{\mp} + [\hat{\phi}_{\pm}, \Psi] = \eta \nabla^2 \nabla^2 \hat{\phi}_{\mp} \quad (27)$$

を得る。そして、静電ポテンシャル $\hat{\phi}$ と磁気ポテンシャル $\hat{\psi}$ は異なるパリティでなければならない。ここで $\hat{\phi}_{\pm}(x, y, t) = \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{P}_x) \hat{\phi}(x, y, t)$, $\hat{\psi}_{\pm}(x, y, t) = \frac{1}{2}(1 \pm \mathcal{P}_x) \hat{\psi}(x, y, t)$ であり、偶パリティ (インターチェンジパリティ) は $\mathcal{P}_x \hat{\phi}_{-}(x) = \hat{\phi}_{-}(-x) = -\hat{\phi}_{-}(x)$ と $\mathcal{P}_x \hat{\phi}_{+}(x) = \hat{\phi}_{+}(-x) = \hat{\phi}_{+}(x)$ を満たし、奇パリティ (テアリングパリティ) は $\mathcal{P}_x \hat{\phi}_{-}(x) = \hat{\phi}_{-}(-x) = -\hat{\phi}_{-}(x)$ と $\mathcal{P}_x \hat{\phi}_{+}(x) = \hat{\phi}_{+}(-x) = \hat{\phi}_{+}(x)$ を満たす。

この節の最後に以下のことに注意する。逆磁気シア配位で最少 q の値が有理数になるなど $\Psi(-x) = -\Psi(x)$ となる特別な場合 (例えば、 $B_y = B_0 x^2$, $\Psi = B_0 x^3/3$)、静電ポテンシャル $\hat{\phi}$ と磁気ポテンシャル $\hat{\psi}$ は同じパリティでなければならない。その結果、有理面共鳴型不安定性の性質は通常と大きく異なる。

1.4 非線形効果によるパリティ混合

1.2 節および 1.3 節では、はじめに奇パリティモードは簡約化 MHD 方程式を満たし、偶パリティモードは方程式を満たさないことを示した。そしてその後、揺動の振幅が小さく不安定性が線形成長する状態では偶奇両パリティモードともに簡約化 MHD 方程式を満たすことを示した。これらは非線形項がポアソン括弧で表される方程式に共通の性質である。

不安定性が十分発達すると揺動の非線形性が重要になり、非線形効果が不安定性の飽和振幅を決定する。そして、偶パリティモードは方程式を満たさないで、偶パリティモードのまま飽和することができない。これは MHD インターチェンジモードに限らず、ジャイロ運動論方程式に従う ITG モード、長谷川・三間方程式に従うドリフト波などに共通する性質であり、非線形項がポアソン括弧であることに起因する。偶パリティモードはそのまま飽和できないので、奇パリティモードを生成する。このようにして非線形性が揺動のパリティを混ぜることをパリティ混合と呼ぶ。パリティ混合の過程を示す最も簡単な例が円柱を過ぎる流れの左右対称性である。この流れは 2 次元非圧縮ナビエ・ストークス方程式の回転を取ることによって導かれる渦度方程式

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \phi + [\phi, \nabla^2 \phi] = \nu \nabla^2 \nabla^2 \phi \quad (28)$$

でよく記述できる．ここで ϕ は流れ関数で流れの速度を $\mathbf{u} = \mathbf{e}_z \times \nabla \phi$ のように表し， ν は動粘性係数である．この方程式(28)のパリティ変換はこれまでに議論した簡約化MHD方程式のパリティ変換と全く同じで，磁場がない場合($\phi = 0$)に対応する(粘性項はパリティ変換に対して不変)．たとえば，方程式(28)のパリティ変換 $\mathcal{P}_x Q(x, y, t) = Q(-x, y, t)$ は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 (-\mathcal{P}_x \phi) + [(-\mathcal{P}_x \phi), \nabla^2 (-\mathcal{P}_x \phi)] \\ = \nu \nabla^2 \nabla^2 (-\mathcal{P}_x \phi) \quad (29) \end{aligned}$$

である．したがって， ϕ が渦度方程式(28)を満たせば， $-\mathcal{P}_x \phi$ も渦度方程式を満たすことが示され，奇パリティモードはパリティを保存しながら非線形発展まで含めて渦度方程式を満たす．

図9は水槽の中にある円柱を過ぎる流れの概念図である．実験では，水槽を左右対称にし上流の流れを一樣で左右対称にしても，円柱の下流にはカルマン渦という左右対称でない渦構造が現れる．この渦が現れるのは上流の速度 U がある範囲内にあるときで，それは非線形強度を示す無次元定数であるレイノルズ数 $Re \equiv UL/\nu \approx [|\phi, \nabla^2 \phi|] / |\nu \nabla^2 \nabla^2 \phi| \approx |\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}| / \nu \nabla^2 \mathbf{u}$ によって規定される．ここで L は円柱の直径， ν は水の動粘性係数である．非線形項が線形項(粘性項)と同程度もしくは大きい場合 ($Re \approx 1-10$) 左右対称な流れ，つまり奇パリティ渦構造が円柱下流に現れる(図9(a))．一方，非線形項が粘性項より十分大きい場合 $Re \approx 10-100$ ，つまり非線形性が十分強い場合，左右対称でない渦構造が現れる(図9(b))．これは，非線形性が強く揺動のパリティが混ざるからである．そして，この流れの数値シミュレーションを行うと，このカルマン渦列を再現することができる．このとき，シミュレーションで揺動の初期条件および境界条件を左右対称に与えても，非線形性が強く，数値誤差によって生じる揺動のパリティが混ざり，左右対称性が無い渦列が生じる．このカルマン渦を左右(\mathcal{P}_x)について偶奇に分けると，偶パリティ部分と奇パリティ部分はほぼ半々であることがわかる(図10)．また，下流が乱流である場合 ($Re > 100$)，統計的に偶パリティと奇パリティは半々であることが期待できる．したがって，非線形性が強い場合 ($Re > 10$)，偶奇パリティはほぼ半々の状態であることが期待できる．

磁場閉じ込めプラズマにおいても揺動が成長すると図9と同様なパリティ混合が起きる[7-9]．そして，その混合が磁気流体不安定性の飽和振幅や乱流による磁気面破壊に重要な役割を果たすことを，第3章および第4章でシミュレーション結果を用いて示す．

磁場閉じ込めプラズマにおいて非線形効果によりパリティ混合が起こることを見るために，ここで簡約化MHDモデルを用いる．二次元非圧縮ナビエーストックス方程式と同様に簡約化MHD方程式においてもパリティ変換

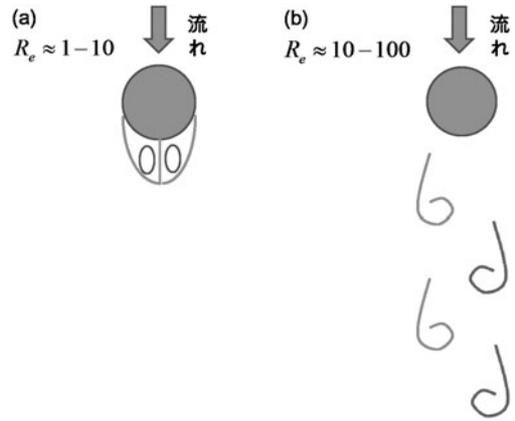


図9 円柱下流に現れる渦構造．矢印は上流の流れ方向を示す．(a)は $Re \approx 1-10$ で非線形項が線形項と同程度もしくは大きい状態で奇パリティ渦構造(右と左で渦の向きが逆)が現れることを示す．(b)は $Re \approx 10-100$ でこれは非線形性によるパリティ混合の典型例であるカルマン渦が現れることを示す．水槽および物体(円柱)が左右対称で上流が左右対称な流れであっても，下流における乱れた流れは左右対称にならない．図は非線形性が強く左右対称でない場合が示されている．

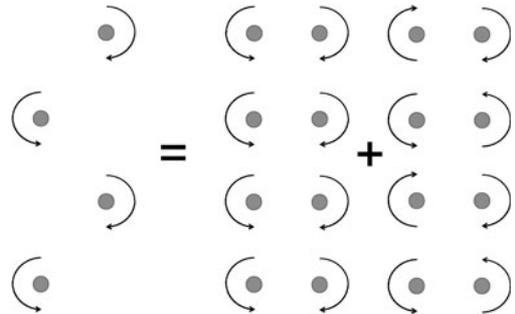


図10 カルマン渦の偶パリティ部 $\phi_+(x, y, t) = 1/2(1 + \mathcal{P}_x) \phi(x, y, t)$ と奇パリティ部 $\phi_-(x, y, t) = 1/2(1 - \mathcal{P}_x) \phi(x, y, t)$ への分解．

$\mathcal{P}_x Q(x, y, t) = Q(-x, y, t)$ について奇パリティ(テアリングパリティ)モードのみがもとの簡約化MHD方程式(21)，(22)とおなじ方程式を満たすことに注意する．前節でみたように，磁力線方向(θ, ξ)と小半径方向($x = (r - r_s)/L_x$)のパリティ変換で簡約化MHD方程式は同様に変換されたので，この節では，両者を区別せずに議論する．パリティ混合が起こるのは，線形化方程式のみを満足し非線形項があるときに方程式を満足しない偶パリティ(インターチェンジパリティ)モードが成長する場合である．この場合，偶(インターチェンジ)パリティモードによる奇(テアリング)パリティモードの励起が起こる．テアリング(偶)パリティは非線形効果があっても，インターチェンジ(偶)パリティを励起しない．したがって，不安定性の成長はプラズマを変形させるが，その時同時に，よりテアリング(奇)パリティ状態に移そうとすることが期待される．規格化静電ポテンシャル $\phi = \hat{\phi}_+ + \hat{\phi}_-$ と規格化平行ベクトルポテンシャル $\psi = \hat{\psi}_+ + \hat{\psi}_-$ を簡約化MHD方程式(12)，(13)に代入する．そして，線形項は式(19)と(20)のようにパリティを混ぜないので，式の煩雑性を避けるために，以下では非線形項と時間微分項のみを表示する．

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi}_+ + \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi}_- = & -[\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_+] - [\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_-] \\ & - [\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_-] - [\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_+] \\ & + [\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_+] + [\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_-] \\ & + [\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_-] + [\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_+], \quad (30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_+ + \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_- = & -[\hat{\phi}_+, \hat{\phi}_-] - [\hat{\phi}_-, \hat{\phi}_+] - [\hat{\phi}_+, \hat{\phi}_+] - [\hat{\phi}_-, \hat{\phi}_-]. \quad (31) \end{aligned}$$

はじめに、1.2節および1.3節でみたようにテアリング (奇) パリティモードは非線形効果があってもインターチェンジ (偶) パリティモードを励起しないことを見る。奇パリティモード (テアリングパリティモード) $(\hat{\phi}_-, \hat{\phi}_+) \neq 0$, $(\hat{\phi}_+, \hat{\phi}_-) = 0$, を式(30), (31)右辺に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi}_- = -[\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_-] + [\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_+], \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi}_+ = 0 \quad (32)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_+ = -[\hat{\phi}_-, \hat{\phi}_+], \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_- = 0 \quad (33)$$

が式(30), (31)を満たすことがわかる。式(32), (33)の右辺の非線形項はテアリング (奇) パリティがテアリング (奇) パリティのみ生成し、パリティ混合は起こらないことを示す。したがってテアリングモードはテアリングパリティを保存したまま非線形飽和する (図11)。

次に偶 (インターチェンジ) パリティモードによる奇 (テアリング) パリティモードの励起をみる。偶 (インターチェンジ) パリティモード $(\hat{\phi}_+, \hat{\phi}_-) \neq 0$, $(\hat{\phi}_-, \hat{\phi}_+) = 0$ を式(30), (31)の右辺に代入すると

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi}_- = -[\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_+] + [\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_-], \quad \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi}_+ = 0, \quad (34)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_+ = -[\hat{\phi}_+, \hat{\phi}_-], \quad \frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_- = 0 \quad (35)$$

が式(30), (31)を満たす。式(34), (35)の右辺の $[\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_+]$, $[\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_-]$, $[\hat{\phi}_+, \hat{\phi}_-]$ がインターチェンジ (偶) パリティモードの非線形相互作用がテアリング (奇)

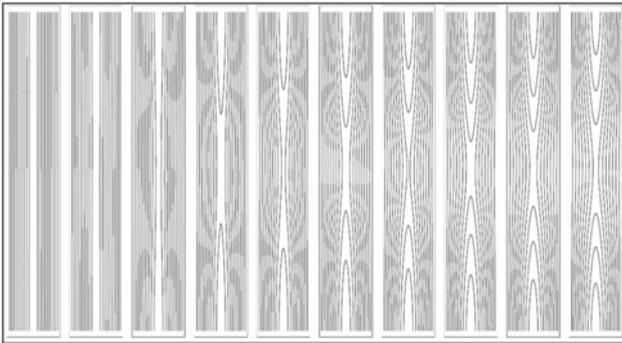


図11 簡約化 MHD 方程式のシミュレーションによって得られたテアリングモード (奇パリティモード) 成長における磁気面 (規格化ベクトルポテンシャル ψ の等値線) の時間発展。左から右へ中央で磁気リコネクションを起こしながら時間発展する。テアリングモード (奇パリティモード) $\hat{\phi}_+$ は非線形飽和時も奇パリティ $\hat{\phi}_+$ 保つ。

パリティモードを生成することを示す (図12)。したがって、偶 (インターチェンジ) パリティモードが奇 (テアリング) パリティモードを励起し、非線形パリティ混合が起こる。その結果、両パリティモードが存在し、 $(\hat{\phi}_+, \hat{\phi}_-) \neq 0$, $(\hat{\phi}_-, \hat{\phi}_+) \neq 0$ なので、奇パリティモードは式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi}_- = & -[\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_+] - [\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_-] \\ & + [\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_+] + [\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_-], \quad (36) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_+ = -[\hat{\phi}_+, \hat{\phi}_-] - [\hat{\phi}_-, \hat{\phi}_+], \quad (37)$$

に従い、さらに生成される [7,8]。右辺の $[\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_-]$, $[\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_+]$, $[\hat{\phi}_-, \hat{\phi}_+]$ 項は、いったん奇 (テアリング) パリティモードが微小でも生成されると、これらの項によりさらにテアリングパリティモードが生成されることを示す。したがって、インターチェンジモードは非線形にはテアリングパリティモード生成に不安定で時間発展とともにテアリングパリティ状態に近づく (図13)。この奇パリティモードが優越する性質はドリフト波不安定性においても同じである。図14はスラブプラズマにおけるイオン温度勾配不安定性 (ITG モード) の二流体シミュレーション結果を示す。ITG モードは線形成長時には偶パリティモードであるが、非線形飽和時は奇パリティモードが卓越する。その結果、静電ポテンシャルは x 方向に奇関数的になるとともに、奇パリティモードの特徴である磁気島生成が起こる。また、両方のパリティモードが混在する場合、偶パリティモードは非線形相互作用によっても、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \hat{\phi}_+ = & -[\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_+] - [\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_-] \\ & + [\hat{\phi}_+, \nabla^2 \hat{\phi}_-] + [\hat{\phi}_-, \nabla^2 \hat{\phi}_+], \quad (38) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\phi}_- = -[\hat{\phi}_-, \hat{\phi}_-] - [\hat{\phi}_+, \hat{\phi}_+]. \quad (39)$$

よりさらに生成されるので、非線形発展で完全に奇 (テアリング) パリティモードのみの状態に近づくわけではない

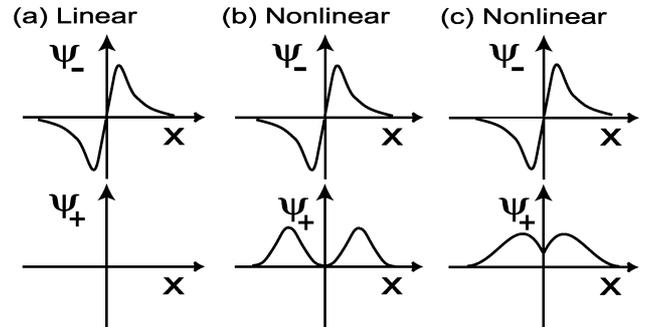


図12 非線形効果により、偶 (インターチェンジ) パリティモード $\hat{\phi}_-$ が奇 (テアリング) パリティモード $\hat{\phi}_+$ を生成する過程 ((a), (b), (c) の順に時間発展する) [7]。 (a) インターチェンジモード (偶パリティ $\hat{\phi}_-$) の線形成長時の磁場揺動分布。 (b) 非線形相互作用による奇パリティモード $\hat{\phi}_+$ の生成。 (c) 生成された磁場揺動 $\hat{\phi}_+$ の有理面近傍 ($x=0$) での値が有限になる。これは磁気リコネクションが起こり、磁気面が破壊されたことを意味する。

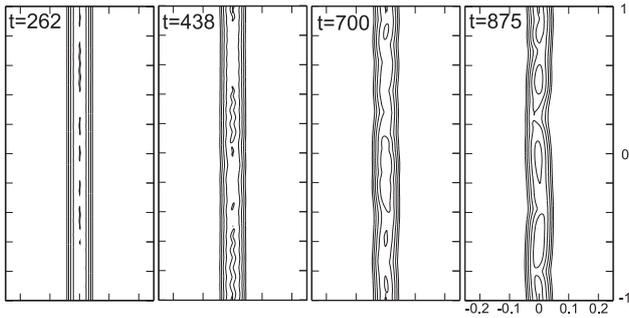


図13 簡約化 MHD 方程式のシミュレーションによって得られた抵抗性インターチェンジモードの成長における磁気面（規格化ベクトルポテンシャル ψ の等値線）の時間発展（左から右へ時間発展する）。抵抗性インターチェンジモード（偶パリティモード）は非線形効果によりパリティ混合を起し、奇パリティモード（磁気島）を励起する[9]。

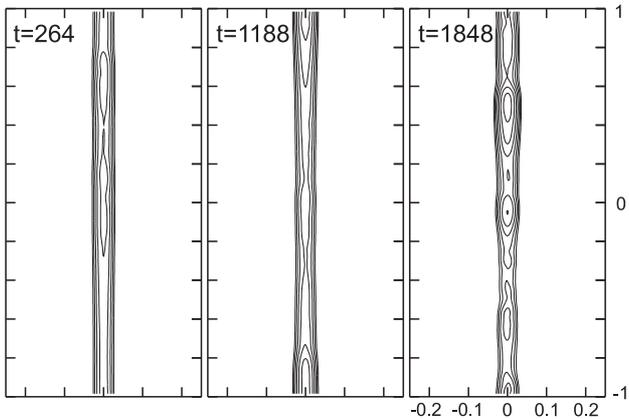
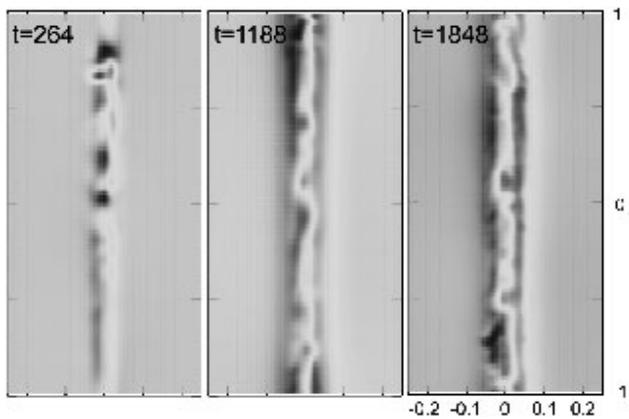


図14 簡約化二流体方程式のシミュレーションによって得られたイオン温度勾配不安定性（ITGモード）の成長と飽和過程。（a）静電ポテンシャルの時間発展、（b）磁気面（規格化ベクトルポテンシャル ψ の等値線）の時間発展（左から右へ時間発展する）。ITGモード（偶パリティモード）は非線形効果によりパリティ混合を起し、奇パリティモード（磁気島）を励起する[9]。

ことを注意する。興味深い点は、奇パリティモードは同じパリティモードの非線形相互作用より生成され、偶パリティモードは異なるパリティモードの非線形相互作用により生成される点である。

1.5 まとめ

磁場閉じ込めプラズマで生じる不安定性をバルーニング型と有理面共鳴型に分類したとき、前者には磁力線方向反

転対称性によるパリティ（または偶奇性）、後者には有理面を境にした反転対称性によるパリティがある。これは、空間3次元座標すべてを一度に反転した場合は自明な結果しか得られないが、閉じ込め磁場による非等方性を利用して、これを二つに分けて、それぞれの反転対称性を考えることが有用であることを意味する。偶パリティモードは、インターチェンジモード、イオン温度勾配不安定性、バルーニングモード、捕捉電子モードなどである。一方、奇パリティモードは、テアリングモード、微視的テアリングモードなどである。

磁化プラズマを支配する方程式（簡約化 MHD 方程式やジャイロ運動論方程式など）を満足するのは奇パリティモードで、偶パリティモードは満足しない。この事実是不安定性の非線形飽和状態に一定の制限を加える。非線形性が無視できる場合は、偶パリティ奇パリティともに方程式を満足し、それぞれが独立に保存する。これ等の性質は、磁力線方向パリティ、有理面近傍パリティどちらについても同様に成立する。

不安定性が成長して振幅が大きくなり、非線形性が重要になると、奇パリティモードのみが方程式を満たす事実は以下のことを示唆する。例えばイオン温度勾配不安定性などの偶パリティを持つ不安定性の成長はプラズマに乱れを生じさせるだけでなく、非線形パリティ混合により奇パリティモードを励起し、磁気面が壊れる奇パリティ（テアリングパリティ）状態に近づけることが期待される[4]。これらの性質は、磁化プラズマの方程式に従う不安定性に対して一般的に成立する。つまり、簡約化 MHD 方程式、ジャイロ運動論的方程式、ジャイロ流体方程式、長谷川・三間方程式など非線形項がポアソン括弧で書かれる方程式の一般的性質として、パリティ対称性および奇パリティの優越性が成立する。

最後に、本章の執筆にあたって貴重な助言をいただいた中村祐司教授、岸本泰明教授、洲鎌英雄教授に深く感謝いたします。

参考文献

- [1] X.D. Du *et al.*, Phys. Rev. Lett. **114**, 155033 (2015).
- [2] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics* (Butterworth-Heinemann, 1958), § 30.
- [3] M. Wakatani, *Stellarator and Heliotron Devices* (Oxford University Press, 1998), § 3.8, p.99.
- [4] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, *Plasma Confinement* (Addison-Wesley Publishing Company, 1992).
- [5] 石澤明宏：二流体およびジャイロ流体方程式系とその MHD 不安定性解析への応用, プラズマ・核融合学会誌 **90**, 213 (2014).
- [6] A. Ishizawa *et al.*, J. Plasma Phys. **81**, 435810203 (2015).
- [7] A. Ishizawa and N. Nakajima, Proc. 22nd IAEA Fusion Energy Conference, TH/P8-16, (2008).
- [8] W. Horton, *Turbulent Transport in Magnetized Plasmas* (World Scientific, 2012), § 15.2.4, p. 391.
- [9] A. Ishizawa and N. Nakajima, Phys. Plasmas, **17**, 072308 (2010).