



## 4. 応用

### 4.2 ビーム物理学

#### 4.2 Beam Physics

大見和史

OHMI Kazuhito

高エネルギー加速器研究機構 (KEK)

(原稿受付: 2014年 8月26日)

加速器におけるエミッタンスはビームを構成する粒子の位相空間内での分布を表現するパラメータである。具体的に粒子分布が位相空間内でガウス分布をしていた場合、その標準偏差で表される体積である。あるいは99%の粒子が含まれる位相空間体積を99%エミッタンスと表現したりする。リュービリの定理で保証される、位相空間体積の保存は運動がシンプレクティックであることが前提である。ビーム内散乱を無視すれば、エミッタンスの保存はリュービリの定理そのものである。実際には非線形力がある場合、位相空間構造が複雑になり、線形理論をもとに定義されたエミッタンスが変化する、一般には拡散的であるため増大する。加速器内では粒子は非線形振動をしているが、考慮すべき振動数は加速器の種類によるが非常に大きい ( $10^5 - 10^{10}$ )。よって加速器におけるシンプレクティック積分は空気、水のような存在で、なくてはならない。エミッタンスの増大は加速器の性能に直接的な影響を与える。ここでは加速器性能を左右する問題として、KEKB/LHCにおけるビームビーム相互作用を例に加速器におけるシンプレクティック性の重要さを論じる。

#### Keywords:

storage ring, e+e- collider, proton collider

#### 4.2.1 はじめに

円形衝突加速器においては、どれだけ多くの衝突反応をとらえるかが性能指標になる。衝突断面積は反応によって決まっているので、断面積あたりのビーム粒子の衝突頻度、ルミノシティを稼ぐのが加速器の使命である。加速器中でのビームは、加速空洞に励起された高周波によって加速されているため、その周波数に対応した集団 (バンチ) で蓄えられている。KEKBでは509 MHz 空洞に対し、2波長 (4 ns) ごとにバンチが蓄積されている。バンチごとの衝突繰り返し  $f_{\text{rep}}$  は250 MHzである。LHCは400 MHz 空洞で、10-20波長ごとにバンチが蓄積されている ( $f_{\text{rep}} = 40 - 20$  MHz)。バンチの中の粒子数はKEKBで電子バンチ  $N_- = 5 \times 10^{10}$  個、陽電子バンチ  $N_+ = 9 \times 10^{10}$  個、LHCでは両ビームとも陽子で  $1.6 \times 10^{11}$  個である。

$$L = \frac{N_+ N_-}{4\pi\sigma_x\sigma_y} f_{\text{rep}} \quad (1)$$

ビームを衝突させる場所での  $x$ - $y$  面内のビームサイズ断面積 ( $\pi\sigma_x\sigma_y$ ) が小さいほどルミノシティは大きい。ビームの粒子分布は位相空間内では楕円体をしている。ビームサイズは実空間への射影であり、エミッタンス  $\epsilon$  と位相空間それぞれの軸への射影係数ベータ関数  $\beta$  により  $\sigma_i = (\beta_i \epsilon_i)^{1/2}$  で表される。 $\beta$  は衝突点の光学設計とビームビーム衝突力

の線形成分による歪みで決まる。エミッタンスは線形理論 [1, 2]での不変量  $J_i$  の平均値なので、陽子衝突器の場合初期条件で定まる。電子陽電子衝突機の場合は放射光放出による減衰とその量子的な励起により決まる [2, 3]。ビームビーム衝突力が強くなると、その非線形性ゆえ、 $J_i$  が不変量でなくなり、拡散的振る舞いを示す。つまりエミッタンスが増大しルミノシティが期待値から劣化する。このエミッタンス増大は積分がシンプレクティックに行われてはじめて正しく予言できる。それゆえシンプレクティック性はビームの運動を調べる上できわめて重要である。

ここでは加速器におけるシンプレクティック性に関わる2つのことについて述べる。1つは加速器を構成する電磁石中の粒子を追跡するための一般的なシンプレクティック積分の手法について。2つ目はシンプレクティックとエミッタンス増大に関する典型的な問題として衝突加速器におけるビームビーム相互作用について述べる。

#### 4.2.2 加速器におけるシンプレクティック積分

加速器の設計の手順は(1)線形力学をベースにしたビーム光学系、(2)その光学系の色 (エネルギー) 収差補正、(3)粒子が安定に周回しうる最大振幅 (力学口径) の評価となっている。これらはビーム強度ゼロでの加速器の設計を行うことであり、設計の第一歩である。これらの手順を行

うための計算機コードは世界中で開発されている。日本では KEK, 生田氏らによる SAD が使われている [4]。CERN では MAD, USA では研究所ごとに様々な計算機コードがある。

シンプレクティック積分による粒子トラッキングは手順 (3) で用いられる。加速器は小振幅で基準軌道の周りを線形振動するように設計されているが、大振幅で非線形が効いてきて周回しなくなる。力学口径は安定して粒子が周回する振幅で、加速器の入射設計、ビーム寿命の評価に必要である。シンプレクティックでない粒子は周回ごとに不変量である振幅がかわってしまうため正しい力学口径が得られない。

円形加速器におけるビーム粒子の運動を決めているのは、電磁石と空洞を使った高周波加速装置である。電磁石は  $x$ - $y$  方向のビーム軌道を規定する偏向電磁石とその軌道の周りに粒子を振動させるための収束用 4 極磁石、高次効果補正用の 6 極、8 極磁石が使われている。偏向磁石は一樣磁場をもつので、解がわかっている (円弧にそった運動)。あるいは対応する偏向曲率をもった曲線座標系を用いた運動方程式を解く。収束 4 極、高次 6 極、8 極磁石では直交座標を用いる。直交座標でのハミルトニアンは以下のように表される。加速器では時間変数は進行方向位置  $s$  を使い、運動量は設計運動量で規格化されている ( $p_{xy} = P_{xy}/P_0$ )。第 3 の運動量は運動量偏差  $\delta = (P - P_0)/P_0$  であり、正準共役座標は進行方向中心からの距離 (前方が正、到着時刻進み) で  $z = c(t_0 - t)$  である。

$$H = 1 + \delta - \sqrt{(1 + \delta)^2 - (p_x - \hat{A}_x)^2 - (p_y - \hat{A}_y)^2} - \hat{A}_s$$

$$\hat{A}_i = eA_i/P_0 \quad (2)$$

前述の電磁石は  $\hat{A}_s$  を多重極展開することで表される。

$$\hat{A}_s = \frac{k_{n-1}}{n!} Re(x + iy)^n \quad (3)$$

$$\hat{A}_x = \hat{A}_y = 0$$

積分は  $H$  を 2 次以下  $H_2$  と、3 次以上  $H_{\geq 3}$  にわけ、2 次以下に関して厳密解を求め、3 次以上を 2 次のシンプレクティック積分を行うのが、おおむね主流である。具体例として 4 極磁石について述べる。

$$H = 1 + \delta - \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} - \frac{k_1}{2}(x^2 - y^2) \quad (4)$$

$$H_2 = \frac{p_x^2}{2(1 + \delta)} + \frac{p_y^2}{2(1 + \delta)} - \frac{k_1}{2}(x^2 - y^2) \quad (5)$$

$H_2$  に関する運動方程式は  $x$ ,  $p_x$ ,  $y$ ,  $p_y$  に関して線形であり解くことができる。

$$\begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\sqrt{k_\delta} s) & \sinh(\sqrt{k_\delta} s)/\sqrt{k_\delta} \\ \sqrt{k_\delta} \sinh(\sqrt{k_\delta} s) & \cosh(\sqrt{k_\delta} s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ p_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} y \\ p_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{k_\delta} s) & \sin(\sqrt{k_\delta} s)/\sqrt{k_\delta} \\ -\sqrt{k_\delta} \sin(\sqrt{k_\delta} s) & \cos(\sqrt{k_\delta} s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ p_y \end{pmatrix} \quad (6)$$

ここで  $K_\delta = K_1(1 + \delta)$  である。線形変換部分を除いたハミ

ルトニアン ( $H_{\geq 3} = H - H_2$ ) に対して、シンプレクティック積分を行う。先ほどの線形変換を  $\exp(-:H_2:s)$  で表すと、

$$M = e^{-:H_2:s/2} e^{-:H_{\geq 3}:s} e^{-:H_2:s/2} \quad (7)$$

により積分される。

6 極磁石では運動量のみ項と座標のみ項に分割し、 $H = H_D + H_S$

$$H_D = 1 + \delta - \sqrt{(1 + \delta)^2 - p_x^2 - p_y^2} \quad (8)$$

$$H_S = -\frac{k_2}{6}(x^3 - 3xy^2) \quad (9)$$

2 次のシンプレクティック積分を行う。

$$M = e^{-:H_D:s/2} e^{-:H_S:s} e^{-:H_D:s/2} \quad (10)$$

最近の磁石配置では 6 極成分を完全にキャンセルするような配置をするので、その場合の残余の評価のために 6 極磁石の厚みを考慮する必要がある。そのために 2 次の積分を  $s$  を複数に区切って繰り返したり、4 次の積分にしたりする。

磁石端部では複雑な磁場分布になるが、階段関数的に磁場が変化するなどとして、近似的にマクスウェル方程式を満たすハミルトニアンを求め運動を積分している。実際は幅を持って磁場は変化しているが、積分として粒子が感じる磁場は階段的でも同じなので大きな差はないとしている。別の方法として、磁場測定結果を用い、端部に多極展開した磁石を実効的に並べる場合もある。マクスウェル方程式は近似してもシンプレクティック性は厳密に行うことが基本方針である。

その他に高エネルギー測定器に使用されているソレノイド磁石、放射光用加速器に使用されている単一波長の放射光を発生させるアンジュレータがある。それらのベクトルポテンシャルは以下のように表される。

$$A_x = b_s y, A_y = -b_s x, A_s = 0 \quad (11)$$

$$A_x = b_y \sin ks, A_y = 0, A_s = 0 \quad (12)$$

式 (5) のように  $H$  を  $p$ - $A$  の 2 次で近似し、母関数を用いた正準変換から、陰関数関係を解く手法が行われている。

高周波加速装置は厚さゼロとし以下で表す。この積分は単純に行うことができる。

$$A_s = eV \sin kz \delta(s - s_{rf}) \quad (13)$$

このように加速器の要素毎にシンプレクティック積分を行うことで、加速器内でのビーム粒子の運動を求めることができる。

電子リングの場合、ビーム入射の際に大振幅のビーム粒子を受け入れるため、力学口径はビームサイズ ( $\sigma$ ) に対し最低 30 倍 ( $30\sigma$ ) くらいに非線形磁石を調整し設計している。LHC では磁石の非線形が顕著になる限界まで磁場を上げ、ビームエネルギーを上げるので  $10\sigma$  くらいである。いずれにせよ、ビームが定常状態に達した状態で  $5\sigma$  以下の振

幅の粒子は線形領域で振動し、磁石の非線形でエミッタンス増大は起きない。ビーム強度が大きくなった際に、衝突加速器においてはビームビーム衝突力が、小強度陽子加速器においては空間電荷力が強くなる。それらの力はビーム粒子の運動振幅に対し非線形であるためエミッタンス増大を引き起こす。その増大を正しく評価するために基礎となる磁石、加速装置配列でのシンプレクティック積分は最低限保証されていなければならないし、ビームビーム衝突力、空間電荷力もシンプレクティックに扱われなければならない。

放射減衰、放射励起について触れておく。電子、陽電子が偏向磁石で曲げられる際、シンクロトロン放射光を放出して減衰すると同時に、放出される光子の不連続なエネルギー変化による励起であり、非シンプレクティックな現象である。減衰時間はKEKBでは $\tau=4000$ 周であり、主に水平方向の励起 ( $\langle \Delta x^2 \rangle = 2\sigma_x^2/\tau$ ) により、ほぼ設計平衡エミッタンスをもつガウス分布に落ち着く。垂直エミッタンスは磁石のエラー補正で決まるが、だいたい水平の1%から0.2%である。そのため電子ビームは薄い楕円分布をしている。一方陽子は放射光とは無縁なので、生成されたビーム形状をそのまま引き次ぐ。途中で確率的な現象もあるので、円形のガウス分布に近い場合が多い。

#### 4.2.3 円形衝突加速器におけるビームビーム効果

ビーム同士の衝突による長距離クーロン相互作用によるビームへの影響をビームビーム効果という[5]。衝突加速器のビームは超相対論的であり、電磁場は $x$ - $y$ 面内に誘起される。よって衝突ビームの誘起する電磁場は2次元スカラーポテンシャルで表すことができる。最近の衝突加速器はビームの収束(waist)領域に比べ、パンチ長が同じか長い、あるいは交差角衝突をする場合もあるので、パンチ長を考慮する必要がある。衝突ビーム(パンチ)は進行方向にそって分割する( $z_i$ )。各スライスの $x$ - $y$ 分布

$$\Delta_{\perp}\phi(x, y; s) = \frac{2r_e \rho(x, y; s)}{\gamma p_0} \quad (14)$$

$r_e$ は古典電子半径 $2.81794 \times 10^{-15}$  m,  $\gamma$ は電子の相対論的因子である。ポテンシャルは2次元( $x$ - $y$ ) Particle In Cell法を用いて解く。境界条件は衝突加速器の場合ビームパイプに比べビームが小さいため、グリーン関数を用いて解く。運動はポテンシャルで表されているため微分を適切に行えば、 $x$ - $y$ の運動に関するシンプレクティック条件は満たされる。 $z$ にある粒子がスライス( $z_i$ )と衝突する場所は $s=(z-z_i)/2$ である。ポテンシャルはビームのウエストのため $s$ によって変わっていく。 $s$ は $z$ の関数なので $z$ 方向の運動量変化が生じる。こうして積分は3次的にシンプレクティックになる。

$$\begin{aligned} \Delta p_{\perp} &= -\nabla_{\perp}\phi(x, y; s(z)) \\ \Delta p_z &= -\frac{\partial\phi(x, y; s(z))}{\partial z} \end{aligned} \quad (15)$$

粒子の衝突する $s$ ごとにポテンシャルを計算するのは大変なのでスライス間での衝突で取りうる $s$ とそこでのポテンシャルを求めておいて内挿する[6]。

両ビームは衝突相互作用が弱い場合、ガウス分布を保つ。電子は衝突点でガウス分布をした陽電子ビームと衝突する(逆も同様)。2次元ガウス分布による運動量変化は解析的に求めることができる。そこで片方のビームを固定したガウス分布としてシミュレーションすることもある(weak-strong model)。

リングの周回は前節のように加速器要素を個々に積分していくのが正確だが、計算の短縮のために( $x, p_x, y, p_y, z, \delta$ )に関する線形変換だけを使うことが多い。電子陽電子衝突器の場合エミッタンスに非線形が効く力学口径にくらべ非常に小さい( $<1/30$ )ため、エミッタンスを論じる領域では線形変換と考えられるからである。

$$M = \begin{pmatrix} M_x & 0 & 0 \\ 0 & M_y & 0 \\ 0 & 0 & M_z \end{pmatrix} \quad (16)$$

ここで $M_i$ は $2 \times 2$ シンプレクティック行列で $|M_i|=1$ ,  $\gamma_i = (1+\alpha_i^2)/\beta_i$ を満たす。

$$M_i = \begin{pmatrix} \cos \mu_i + \alpha_i \sin \mu_i & \beta_i \sin \mu_i \\ -\gamma_i \sin \mu_i & \cos \mu_i - \alpha_i \sin \mu_i \end{pmatrix} \quad (17)$$

ここで $\nu_i = \mu_i/2\pi$ をチューンという。 $\gamma_i = (1+\alpha_i^2)/\beta_i$ 衝突ビームを電荷 $N$ , サイズ( $\sigma_x, \sigma_y$ )の電荷分布と考えると、運動量変化の線形部分は以下のように書ける[5]。

$$(\Delta p_x, \Delta p_y) \approx -\frac{2Nr_e}{\gamma} \frac{1}{(\sigma_x + \sigma_y)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{pmatrix} \quad (18)$$

$y$ 部分の行列で表すと以下である。

$$M_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -4\pi\Delta\nu_y/\beta_y & 1 \end{pmatrix} \quad (19)$$

この線形力は周回行列のチューンをずらす(チューンシフト)。チューンシフトは以下のようにあらわされる。

$$\Delta\nu_{xy} = -\frac{\Delta p_{xy}}{x \text{ or } y} \frac{\beta_{xy}}{4\pi} = \frac{Nr_e}{2\pi\gamma} \frac{\beta_{xy}}{(\sigma_x + \sigma_y)\sigma_{xy}} \quad (20)$$

実際のビームはガウス分布ないし衝突力によりガウス分布から多少ずれていることも考えられる。いずれにしても衝突力は振幅に対し非線形力である。十分距離が離れば力は $1/r$ で減衰するので、チューンシフトは遠方で0になる。つまり、チューンシフトはチューン広がりと同じである。このような非線形振動系ではチューンの整数倍の和ないし差が整数、いわゆる共鳴条件に近づくと、非線形力によりカオスが生じ、それぞれの方向の振幅が不変量でなくなり、エミッタンス増大が起こる。この現象は相手ビームのポテンシャルの中での単一粒子の運動として考えて定性的に正しいので、インコヒーレント効果といえる。電子、陽電子数を増やしていくと、このようなインコヒーレントなエミッタンス増大が起き、チューンシフトが飽和状態に

なってしまう。一般にエミッタンス増大はエミッタンスが最も小さな垂直 (y) 方向に現れる。チューンシフトは式 (1), (20) から

$$\Delta\nu_y = \frac{2r_e\beta_y}{Nyf_{\text{rep}}}L \quad (21)$$

と書ける。ルミノシティは両ビームのバンチ内粒子数 (N) の積 (両ビーム同じなら  $N^2$ ) で増えていくはずが、ある値以上では粒子数 (N) に比例してしか上がらなくなり、さらには増やしても上がらなくなる。前者の状態はチューンシフトが飽和した状態で、後者になると減少に転じることである。このチューンシフトの飽和現象は非線形振動系として一般的な問題である。加速器の世界ではチューンシフトが 0.1 を超えることは非常に難しい。放射光放出減衰が大きな CERN-LEP (振幅減衰時間100周) で 0.1 程度まで達したが、 $\tau=4000$  周の減衰時間の KEKB では 0.09、さらに減衰が遅い加速器では 0.03-0.06 などである。

衝突加速器における長年のテーマはこのチューンシフト限界がどこにあるか、どうすれば高めることができるかである。加速器の周回行列が区分対角からずれるとチューンシフト限界は下がる。y 方向ビームサイズが小さいので、x-z からの回り込みがルミノシティに影響する。KEKB における日々の加速器チューニングの大半の時間はこの変換行列を区分対角化させることに費やされた。衝突点では  $\alpha_{xy}=0$  とし、ビームサイズ、 $\beta_{xy}$  のウェストにとる。周回の線形変換である、式(17)(19)の積は  $\beta_i$  を含まない。つまり  $\beta_i$  は規格化のパラメータでチューンシフト限界に対して、重要なのは区分対角化されているかということと、チューンの選択ということになる。

電子、陽電子円形加速器では y 方向のエミッタンス  $\varepsilon_y$  は磁石エラーによるが、 $\varepsilon_x$  の 1/100 以下は十分達成可能である。ビームの衝突点では位相空間のアスペクト比  $\beta_y$  を 1/100 位に絞るよう設計する。ビームサイズは  $\sigma_i = (\varepsilon_i\beta_i)^{1/2}$  でなので、y ビームサイズ  $\sigma_y$  が水平  $\sigma_x$  に比べ 1/100 以下になっている。そのガウス分布によるビームビーム衝突力を図1に示す。(a)は x に対する  $\Delta p_x$  を  $y/\sigma_y = 0, 1, 2, 5$  に関してプロットした。図上区別できないほど重なっている。一方(b)は y に対する  $\Delta p_y$  を  $x/\sigma_x = 0, 1, 2, 3$  に関してプロットした。x に関して著しく y に対する  $\Delta p_y$  が変わっている。x 方向の力は x のみに依存するが、y 方向の力は x, y 両方に依存することがわかる。このことは、表現はハミルトニアンではないが、x の運動は x だけで閉じている一方で、y の運動は x の運動に影響されやすいということである。また x, y それぞれ正負に関し

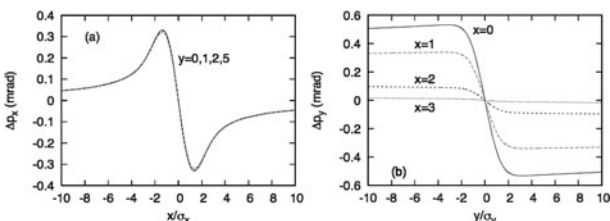


図1 ガウス分布ビームによるビームビーム衝突力。  $\sigma_x/\sigma_y = 100$

て力は対称的である。

まず x の運動を見ていく。図1でわかるように x に対して非線形で、加速器の周長 C に対して周期的である。1 自由度時間依存系では  $s = nC$  でのポアンカレプロットを描くのは常套である。パラメータはチューンだけである図2に  $\nu_x = 0.503, 0.510, 0.530, 0.550$  におけるプロットを示す。チューンを上げるにしたがって、共鳴、カオスの振る舞いが見えてくる。半整数より上で対称的な力が共鳴を起こすチューンは  $\nu_x = (n+1)/2n = 0.75, 0.667, 0.625, 0.6, 0.583, 0.57, 0.5625, 0.556, 0.55, 0.5454, \dots$  である。半整数に近づくほど共鳴は高次になる。非線形力でチューンが広がり、共鳴条件が満たされる振幅で、共鳴現象が起こる。位相空間でセパトリックスが見え、その周辺がカオス的になる。セパトリックス径方向の幅、共鳴幅は共鳴の強さ (ポテンシャルのフーリエ成分) とチューンのスロープ ( $d\nu_x/dJ_x$ ) で決まる。図右下  $\nu_x = 0.55$  ではいくつかの共鳴が重なって、広い領域でカオス的になっている。

チューンシフト  $\Delta\nu_{xy}$  は式(20)で与えられるが、この式は  $\Delta\nu_{xy}$  が小さいときの極限で、チューンが半整数に近づくと正しくない。  $M_{BB}M_{x,y}$  の固有値から  $\nu_{x,y,BB}$  を計算し、実際のチューンシフトをプロットすると図3のようになる。チューンが半整数に近いとチューンシフトも小さくなる。

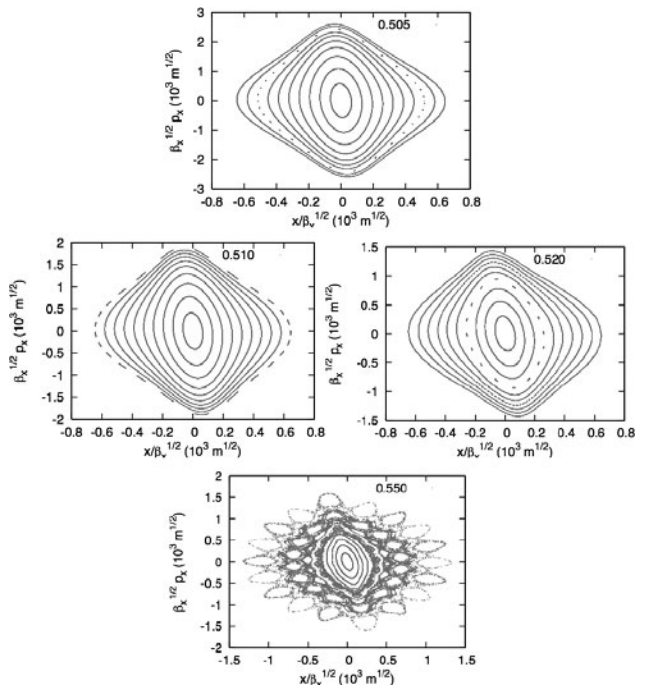


図2 振幅  $0.5 - 5\sigma_x$  の粒子運動のポアンカレプロット。衝突ビーム条件  $\sigma_x \times \sigma_y = 104 \mu\text{m} \times 1.04 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\nu_{xy} = 0.2$

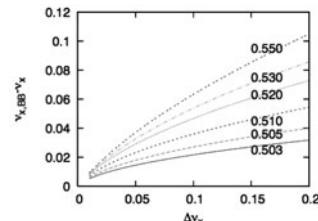


図3 与えたチューンシフト値に対する実際のチューンシフト値。

半整数に近づくほど、共鳴は高次しか効かなくなるため、 $x$  方向の運動の可積分性が上がってくる。一方でチューンを上げてカオスが目立ってきて、1 自由度の運動のため、振幅は KAM 曲線に束縛される。そのため  $x$  方向のエミッタンスは著しく悪化はしない。

次に  $y$  の運動について述べる。先に述べたように  $y$  方向の力は  $x$  に大きく依存する。ビーム形状が  $y$  方向にうすく衝突中のビーム粒子の振動が大きい (振動位相角  $\varphi = (4\pi\xi_i\sigma_z/\beta_i)^{1/2}$ )。そのため半整数に近づけるとシンクロトロン振動と結合しお辞儀運動をしてしまう。そのため  $\nu_y$  はシンクロトロンチューン 0.025 より大きくとる。 $x=0$  における  $y=0.5-5\sigma_y$  の粒子に対する位相空間プロットを図 4 に示す。半整数から離せば共鳴ははっきり見えてくる。共鳴の重なりは見えない。図 1 のように  $x \neq 0$  では力が弱くなるため、さらに  $x$  が振動するため、共鳴位置が振動する。

ここでチューンを  $(\nu_x, \nu_y) = (0.505, 0.54)$  に注目しよう。 $x$ - $y$  ともに  $3\sigma$  以内に共鳴が見られない。 $x$  の変化に対して  $x$  を固定させ、 $y$  の位相空間をいくつか描いても同様な図が得られる。 $y-p_y-x$  での 3 次元プロットは 2 自由度系での可積分性を直接見ることができる。図 5 に  $x$ - $y$  ともに  $3\sigma$  の初期値の粒子の運動を 3 次元位相空間で示す。概ね軌跡が厚さゼロの曲面を描いていることがわかる。これは可積

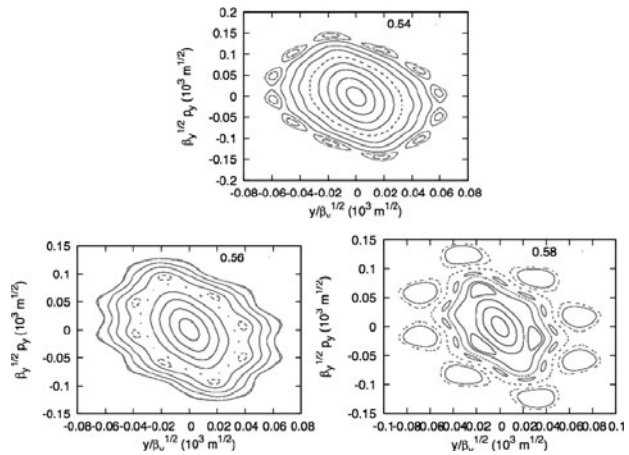


図 4 振幅  $0.5-5\sigma_y$  の粒子運動のポアンカレプロット。衝突ビーム条件  $\sigma_x \times \sigma_y = 104 \mu\text{m} \times 1.04 \mu\text{m}$ ,  $\Delta\nu_{xy} = 0.2$

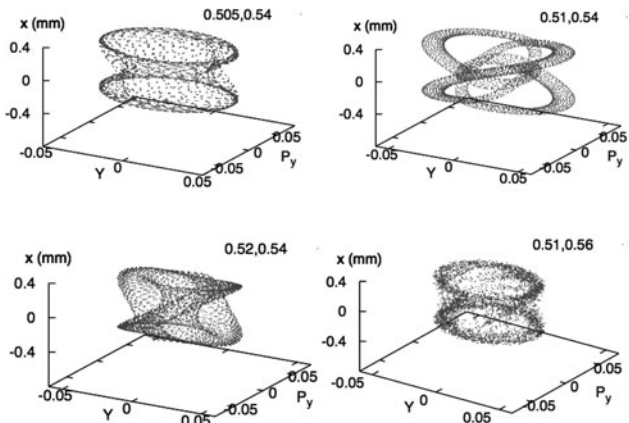


図 5 振幅  $3\sigma_x, 3\sigma_y$  の粒子の  $y$ - $p_y$ - $x$  空間での運動。

分であることを意味する。(0.51, 0.56)では図右下のようになり、不可積分になっている。(0.51, 0.54)でも可積分であるが  $x$ - $y$  の運動に相関が出ている。これは  $\nu_x = \nu_y$  の共鳴に近いためである。図には  $2\sigma_x$  の粒子の軌道も描いているが、 $x$  に近くに重なりを持っている。このような場合、放射励起により  $x$  方向にジャンプした際、 $y$  方向に大きな軌道に乗り移ることで  $y$  方向エミッタンスが大きくなる。

次にマクロ粒子を設計エミッタンスに対応するガウス分布に発生させ、多周回トラッキングしエミッタンスの増大をシミュレーションする[7]。初期エミッタンスは  $\epsilon_{x,y} = 1.8 \times 10^{-8}, 1.8 \times 10^{-10} \text{ m}$ ,  $\beta_{x,y} = 600, 6 \text{ mm}$ , ビームサイズは  $\sigma_y = (\beta_y \epsilon_y)^{1/2} = 1.04 \mu\text{m}$  である。図 6 に周回ごとのエミッタンスの変化を示す。左図はシンプレクティック系、右図は放射減衰、放射励起を考慮した結果である。放射減衰は 4000 周である。(0.505-0.51, 0.54)は放射光効果の有無にかかわらずエミッタンス増大が小さい。これは図 5 で見られる可積分性から理解できる。(0.52, 0.54)は増大は少ないが、トラッキング開始直後のエミッタンスが大きい。図 5 左下に見られる、 $X$ - $y$  結合ミスマッチによるものと考えられる。初期分布を設計エミッタンスの 6 次元楕円体ガウス分布としたが、位相空間が  $x$ - $y$  に関して強く結合しているため、周回直後に  $x$  の振動が  $y$  に回り込んでしまう。可積分性は図 5 でみられるので、シンプレクティック系ではエミッタンス増大は少ない。一方シンプレクティックを破る乱数的な放射減衰励起を入れた場合、粒子の軌跡が可積分に近いとはいえ、 $x$ - $y$  入り乱れた位相空間構造なので  $x$  方向の励起が  $y$  に回ってしまい、エミッタンス増大が起こる。 $\nu_y = 0.57$  は放射減衰励起の有無にかかわらずエミッタンス増大が見られる。放射励起によるシンプレクティック性の破れはエミッタンス増大を増幅させる。この図は放射減衰励起がない方がいいということの意味しない。放射減衰がなければずっと長時間 (数時間,  $10^8$  周) のエミッタンス増大を論じなければならない。

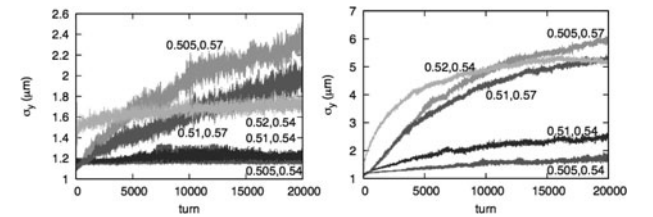


図 6 垂直エミッタンスの増大。左図はシンプレクティック系、右図は放射減衰、励起を考慮。

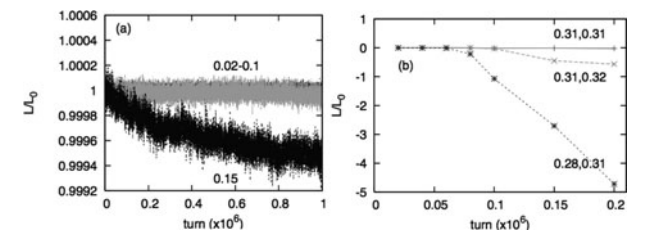


図 7 円形ビームでのエミッタンス増大によるルミノシティ低下 (LHC におけるシミュレーション例)。

LHCでもビームビーム限界は重要な問題である。LHCなどの陽子衝突器では放射光の効果が無視できるのでシンプレクティック系である。放射減衰がないので長時間のシミュレーションが必要である。KEKBでは扁平ビーム衝突であるが、LHCでは放射減衰励起がないので円形ビームで衝突させている。円形ビームでは $v_x = v_y$ とすることで角運動量が保存され、運動が $r$ 方向だけになる。実際には $v_x \approx v_y$ で加速器を運転すると、水平、垂直のチューンがちよっとした変動で入れ替わったり、不安定になるので、0.01くらい離している。ちなみにLHCでは0.31, 0.32である(図7)。

#### 4.2.4 まとめ

加速器における粒子運動のシンプレクティック積分の概略と、加速器の性能を左右するエミッタンス増大現象について述べた。運動の $10^4 - 10^9$ 周期の長時間安定性を要求するため、シンプレクティック積分は、加速器設計の場で常識的に使われている。

エミッタンス増大に対する理解と対策は加速器の高強度化にともない、ますます重要度を増している。ビームビーム相互作用以外にJ-PARCなどの高強度加速器における空

間電荷力はビームビーム衝突力と同型の力で、エミッタンス増大によりビームロスが起り、強度限界として性能を左右している。基本的には設計時にチューンシフトを小さく取ればいいが、概してハードウェアが大型化してしまう。与えられた条件でどこまでチューンシフトを大きくできるかがビーム物理の腕の見せ所である。

#### 参考文献

- [1] E.D. Courant and H.S. Snyder, *Ann. Phys.* **3**, 1 (1958).
- [2] Y. Kamiya, OHO'84, 高エネルギー加速器セミナー (1984).
- [3] M. Sands, *The physics of electron storage rings*, SLAC-121 (1970).
- [4] <http://acc-physics.kek.jp/SAD/>
- [5] 多和田正文: OHO'04 高エネルギー加速器セミナー (2004).
- [6] K. Ohmi *et al.*, *Phys. Rev. ST-AB* **7**, 104401 (2004).
- [7] K. Ohmi *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **92**, 214801 (2004).

全般的な教科書

- [8] OHO 高エネルギー加速器セミナー, テキストシリーズ, 高エネルギー加速器科学研究奨励会, 1984-2014.



おおみ かず ひと  
大見 和 史

高エネルギー加速器研究機構, 加速器研究施設教授。筑波大学物理学研究科博士課程修了。計算機で加速器の挙動を理解して、改善策を言い当てるのが趣味と実益。当初

田舎といわれたつくばに36年も在住。自転車で通勤, 畑を耕したり, ハイキングを楽しんでいます。収穫物を料理しながら, ちびちび飲むのも至福の時。