



講座 粒子運動論～惑星から荷電粒子まで

4. 応 用

4.1 太陽系力学に於けるシンプレクティック数値積分

4.1 Symplectic Integrators in Solar System Dynamics

伊 藤 孝 士

ITO Takashi

大学共同利用機関法人自然科学研究機構国立天文台天文シミュレーションプロジェクト

(原稿受付：2015年1月13日)

惑星や小惑星・彗星といった太陽系天体の運動はケプラー運動でよく近似できる。これらの天体の多くはより重い中心天体を周回し、そこに働く摂動は一般に小さい。また現代に於いては天体同士の衝突も稀であり、学的には太陽系を保存系と看做することも妥当である。これらの性質により太陽系力学はシンプレクティック数値積分、特に微小摂動系向けの計算方法と親和性が高い。本節では太陽系力学の様々な局面で利用されるシンプレクティック数値積分法のいくつかを紹介し、その現状と課題・将来の展望について簡潔に述べる。

Keywords:

solar system dynamics, symplectic integrator, nearly integrable system

4.1.1 太陽系力学の特徴

太陽系には惑星をはじめ小惑星や彗星、各惑星の衛星など多種類の天体が存在している。そうした天体の運動の特徴は基本的に中心天体の強い重力に支配されていること、つまり中心力場を運動していることにある。なおかつ多くの場合に中心力としての重力は相対論的効果を考えない古典的なもので十分であるから、結果的に太陽系天体の運動は重力二体問題、いわゆるケプラー運動でよく近似できる。周知のようにケプラー運動は可積分であり、解析解が知られている。よって太陽系天体の運動を知るには中心天体による中心力場でのケプラー運動を基本として考え、中心天体以外からの重力を微小な摂動として扱う方法が適している。太陽系天体の運動に関して古くから様々な摂動理論が発達してきたのはこのことが背景にある。また、微小天体の衝突合体が頻繁に発生していた太陽系初期の時代を除けば太陽系はほぼ保存系（無散逸系）であると看做し得る。即ち天体の運動が時間依存しないハミルトニアン系の力学でよく近似できるのである。こうした意味で太陽系天体の力学（太陽系力学）はシンプレクティック数値積分を応用するに好適な素材であり、そこでは積分可能な問題+微小摂動の力学系に特化した方法論が自然に発達してきた。

4.1.2 Wisdom-Holman map

シンプレクティック数値積分法が広く普及する以前、太陽系力学の現場では天体の運動方程式の数値積分のために多段型の予測子法やルンゲクッタ法、また高精度が要求される場合には補外法などが用いられていた。1989年に行われ

た調査[1]によると、当時は太陽系力学を含む天体力学の分野で使われる数値積分の方法としてルンゲクッタ法と多段法が70%以上を占めていたとされる。無論こうした方法は特段に劣るわけでもなく、21世紀の現在でも使われる場合がある。特に、誤差の制御が容易であり必要であれば丸め誤差水準にまで容易に精度を上げられる補外法は現在でも需要が多く、後述するようにシンプレクティック数値積分と組み合わせた方法も提案されている。しかし当時とりわけ広く普及していた多段型の予測子法は精度は高いものの初期値の準備が面倒だったり数値的安定性の問題が潜在するなど、誰にでも使い勝手がよいものとはいえなかった。また従来の数値積分法はハミルトニアン系としての太陽系力学の特質を考慮したものではなく、一般の常微分方程式系に適用される方法を借用しているに過ぎなかった。

本小特集の他記事にもあるように、シンプレクティック数値積分法の適用時にはハミルトニアン分割の方法が重要になる。様々な特徴を持つ様々な力学系には、各系の性質に特化したハミルトニアン分割のやり方があるはずである。太陽系のような重力多体力学系で最も基本的なハミルトニアン分割は $H = T(p) + V(q)$ であろう。 T と V は運動エネルギーとポテンシャル、 q と p は座標とそれに共役な運動量であり、ニュートン力学の範囲のみを考えればポテンシャル V は運動量 p に依存しない。すると T は p のみの関数、 V は q のみの関数となり、個別には積分可能なのでシンプレクティック数値積分がうまく適用できる。しかしこの分割は太陽系天体の運動の特徴、即ちケプラー運動+微小摂動という性質を何ら取り込んでいない。

Center for Computational Astrophysics, National Astronomical Observatory of Japan, Mitaka, TOKYO 181-8588, Japan

author's e-mail: ito.t@nao.ac.jp

太陽系力学の分野でシンプレクティック数値積分法が本格的に使われ出したのは1990年代初頭である。その大きな契機となった一編の論文[2]は上述した太陽系力学の特徴を取り込んだハミルトニアン分割とそれを使った数値積分スキームを提案し、具体的な実装までを行ってその高い計算効率と実用性を示した。太陽系天体の運動の典型が二体問題に微小摂動を加えたものであるという事実は、ハミルトニアン H を中心天体周りのケプラー運動を司る可積分なハミルトニアン H_{kep} および中心天体以外との重力相互作用（摂動）を表す部分 H_{int} に分割できることを意味する。

$$H = H_{\text{kep}} + H_{\text{int}} \quad (1)$$

という具合である。では、 $H = T(p) + V(q)$ という自明なハミルトニアン分割に比べて H を式(1)のように分割する利点は何か？それは太陽系天体の運動に於いてはケプラー運動に対する摂動が小さいという事実より、 H_{kep} と H_{int} の大きさに $H_{\text{int}}/H_{\text{kep}} \sim \epsilon \ll 1$ という関係があることである。一般にハミルトニアンを $H = T(p) + V(q)$ と分割できる系に n 次のシンプレクティック数値積分法を刻み幅 τ で適用すると、誤差を担うハミルトニアンの主要項は τ^n の大きさになる。けれども H が式(1)のように分割可能な場合にはその分割を適用すれば、誤差の主要項は $\epsilon \tau^n$ の大きさに留まる。摂動が小さい、つまり ϵ が微量の場合にはその分だけ誤差を軽減でき、より正確な計算が可能になるのである。これを逆に言えば、誤差を従来と同程度に保つならば式(1)の分割を施すことで計算の刻み幅を大きく取れることになる。新しい刻み幅を τ_{new} とすると二次の積分法であればこのことは $\epsilon \tau_{\text{new}}^2 \sim \tau^2$ 、つまり $\tau_{\text{new}} \sim \epsilon^{-1/2} \tau$ を意味する。典型的な太陽系天体の運動では $\epsilon = 10^{-3}$ 程度なので（これは最大の摂動天体である木星と太陽の質量比に相当する）、この場合には $\tau_{\text{new}} \sim 32\tau$ となる。即ち、ハミルトニアンの分割方法を変えるだけで誤差を増やさずに刻み幅を30倍以上に広げ、高速な数値積分が可能になるのである。ここで注目すべきは n 次の積分スキームでは τ_{new} と τ の関係が $\tau_{\text{new}} \sim \epsilon^{-1/n} \tau$ となり、積分法の次数が増すにつれて τ_{new} と τ の違いが減ることである。つまり低次のスキームの方が高速化の効率が低い。上記の事実より、式(1)の分割を実施する場合には大半の場合に低次、特に二次の方法が用いられる。

式(1)のハミルトニアン分割を元にしたシンプレクティック数値積分法の実装には、変数の選び方に関連する二つの課題がある。まずケプラー運動は二体問題の解であるとは言うものの、実際には中心天体を原点とする相対座標を使って系を形式的に「一体問題」化して得られる解である。よって通常その便宜上の原点である中心天体の運動は考慮されないが、現実には中心天体自身も系全体の重心を周回する。例えば太陽もわずかな動きではあるが太陽系全体の重心を周回している。これが原因し、単純に中心天体を原点とする相対座標系では式(1)の形式でのハミルトニアン分割が実現できず、中心天体の運動に関係する余計な項が発生してしまう。第二の課題はケプラー運動を表す正準変数の選び方にある。ハミルトニアン系の時間発展を表すポ

アソン括弧演算子を $e^F \equiv \exp\{\cdot, \tau F\}$ で定義すると、式(1)の分割に於いてケプラー運動を表す H_{kep} は座標 q と運動量 p の両方に依存するため、正準変数として q, p を使う限りは $e^K \equiv \exp\{\cdot, \tau H_{\text{kep}}\}$ による演算が閉じた形で表現されない（ポアソン括弧演算子を施すと無限級数が発生する）。ケプラー軌道要素の正準版ともいべき Delaunay 要素を使えば H_{kep} はその作用変数の一種 L のみに依存するから、変数を q, p から Delaunay 要素に変換しておけば e^K による演算結果は閉じた形になる（無限級数が発生しない）。しかし一般的な座標・運動量 q, p と Delaunay 要素を各刻み幅毎に変換する操作は大きな計算コストを産み、深刻な問題となる可能性がある。なお天体間の重力摂動を表す H_{int} は相対座標 q のみの関数であるから $e^I \equiv \exp\{\cdot, \tau H_{\text{int}}\}$ による演算結果は閉じた形で表され、こちらに関して問題はない。

上記の二課題を克服するために文献[2]は以下の方策を示した。第一の課題については古典的な三体問題の理論でよく使われている Jacobi 座標 [3など] を持ち込み、ハミルトニアンをこれで表現した。Jacobi 座標は力学的には N 体系の階層的重心を原点とする正準直交座標というべきものだが、これを用いると中心天体の運動を陽に扱わなくても式(1)の形式のハミルトニアン分割が実現できる。 H_{kep} 部分が Delaunay 変数 L のみの関数で書けることや H_{int} 部分が天体の相対座標のみに依存するという条件も満たされる。第二の課題は直交座標（Jacobi 座標）と Delaunay 要素（ケプラー軌道要素）の変換をいかに効率よく実行するのだが、実際には六種類の Delaunay 要素を毎度全て求める必要はない。演算子 e^K による時間発展を知るのに必要なのは或る時刻のケプラー軌道上で或る時間が経った時の天体の位置変化のみであり、それを知るのに必要なケプラー軌道要素は三種類のみである。そして、天体軌道決定の分野でよく知られるガウスの f, g 関数 [4など] を使えば軌道上の天体位置変化は効率よく計算される。また、 f, g 関数による軌道上の天体位置変化の計算結果は直交座標として返されるため、ケプラー軌道要素から直交座標への逆変換は実施しなくてよい。筆者自身の経験でも、この方法を使って太陽系の惑星運動を数値積分した際に変数変換に要する計算コストは全計算量の数%に過ぎなかった。しかもそのコストは天体総数のみに比例し、一方で天体相互の重力を計算するコストは天体総数の二乗に比例するから、扱う天体数が増えれば変数変換の相対的な計算コストは益々低くなる。

言語的な説明が長くなったが、典型的な二次の積分操作を演算子 e^K, e^I を使って記せば一刻み分では $e^{K/2} e^I e^{K/2}$ となる。 e^K ではその瞬間の軌道上の天体位置変化を計算し（三種類のケプラー軌道要素を元にした f, g 関数の適用）、 e^I では直交座標（Jacobi 座標）で表現される H_{int} を用いて各天体に与えられる運動量の変化を計算する。前記した変数変換は e^I から e^K へ移る段階毎に発生する。 $e^{K/2} e^I e^{K/2}$ という演算が真の系の時間変化を表す $e^H (= \exp\{\cdot, \tau H\})$ を近似したものであることはいうまでもない。この演算を連続実施すれば数値積分全体は $e^{K/2} e^I e^K e^I e^K e^I \dots e^{K/2}$ と表現

される。高次の方法も同様であり、適切な係数を用いた e^K と e^L の連続演算により系の時間発展が表現される[5など]。

文献[2]は上記の原理および実装方法を示し、なおかつそれを使って太陽系惑星の長期軌道進化を実際に計算してその有用性を実証した。そのために現在では原著者の名前を取ってこの積分スキームを Wisdom-Holman map (WH map) と呼ぶ人も多い。誤解を恐れずいえば、現在の太陽系力学に於いて使われるシンプレクティック数値積分法はほぼ一つ残らず WH map に基礎を置いている。筆者自身も太陽系天体や太陽系外惑星の軌道進化には基本的に WH map を利用し、計算精度を検証する際にのみ補外法を併用している。WH map が広く使われる理由には後述するように使いやすい公開ソースコードが流通していることもある。だが、文献[2]が基本原理の提示のみならず現実的な問題を例に取ってその有効性を精密に実証したことが何より大きいだろう。当然ながら文献[2]の被引用頻度は現在でも極めて高い。近年ではシンプレクティック数値積分の実装に有用なハミルトニアン分割方法として式(1)以外の方式も提唱されているが、その概念の基本は依然として式(1)である。

ところで、太陽系力学に於けるシンプレクティック数値積分の初期の発展には日本人の貢献も大きいことは記憶に値しよう[1, 5-8]。WH map 論文[2]で提案された概念についても日本の研究グループが同様なアイデアをほぼ同時期に発表している[9]。だが文献[9]では重力 N 体系への積分スキーム実装が行われず、論文内で例示された数値実験は摂動を受けた調和振動子と人工衛星の運動に限られていた。そのため、ほぼ同じ時期にほぼ同じ考えを提唱したにも関わらず文献[9]の被引用数は文献[2]に比べてだいぶ少ない。同じ日本人研究者として残念なところではある。

4.1.3 誤差の低減

本小特集の他記事でも述べられているようにシンプレクティック数値積分の特徴は系の時間発展がもつシンプレクティック性が保存され、その結果として幾つもの望ましい性質が導かれることである。だが周知のように、そこで得られる結果は真の系のハミルトニアン H が支配する系の時間発展ではなく、その近傍で短い周期の振動を繰り返す代理系のハミルトニアン (surrogate Hamiltonian) のものである。この振動現象を図示するため、太陽系力学の基本である二体問題をシンプレクティック数値積分で解いてみる。便宜上、ハミルトニアン分割は最も基本的な $H = T(p) + V(q)$ とする。この時の真の解はもちろんケプラー運動だが、数値積分法が内包する誤差により数値解は真の解とは少々異なる。その誤差を摂動と看做し、Lie変換に基づく正準摂動論[10]を適用してシンプレクティック数値積分による誤差を解析的に定量化することが可能である。これはもちろん二体問題に限らず適用できる方法だが、真の解が既知である二体問題なら結果の検証がより容易になる。二次の積分法を適用した結果が図1であり、天体の平均角速度についての数値解と真の解の差異が軌道上の天体

の出発地点にどう依存し、かつそれが軌道の離心率にどう関係するのかを示した[11]。これを見ると天体の出発地点(つまり数値積分の初期値)に依存して天体の平均的な角速度の誤差が大きく異なる。これが代理系の短周期振動を表す一側面である。

代理系の振動を回避または除去して真の系に近い解を得るために幾つかの提案が行われている。最も単純なのは誤差を最小とする初期値を探し出してそこから数値積分を出発する方法で、「逐次出発」と称される[11, 12]。図1の例では軌道の離心率がある程度より大きければ平均角速度の誤差が0になる出発点が存在するから、そこから出発すれば数値解は真の解にかなり近くなることが期待される。しかしこの方法ではそもそも誤差最小となる初期値を探す作業が面倒であり、実用性はあまり高くない。より簡便かつ機械的な方法として「暖機出発」も提案された[12]。これはハミルトニアンの変化が緩慢であれば作用変数は断熱不変量として保存される性質を利用したもので、数値積分の刻み幅を極めて小さな値から実用的に大きな値まで徐々に変化させることで作用変数の計算誤差を極小に保つ方法である。天体の運動に関する計算誤差の最たるものは天体の経度(軌道上の位置)に関するもので、通常は時間に比例して増え、その発生率は天体の軌道半長径の誤差量に比例する。軌道半長径はケプラー運動に於ける作用変数に直結する変数だから、作用変数の誤差が減れば天体の経度誤差も減る。図2には太陽と木星の重力を受けて運動する小惑星 Ceres の運動を二次の WH map で5万年間追跡した結果を示す。通常の方法で出発した場合に比べて暖機出発させた場合にはこの小惑星の経度誤差が二桁も小さくなっている。

この方面での研究で最も画期的であり将来的に有望なのは、WH map の創始者である Jack Wisdom 自らが開発した「シンプレクティック修正子」を使う方法であろう[13, 14]。

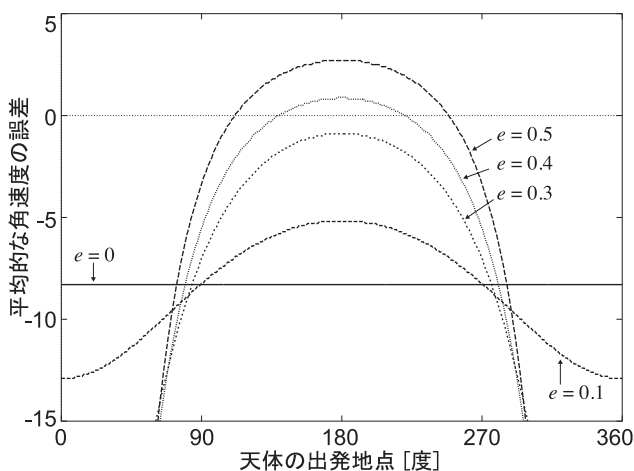


図1 重力二体問題を二次のシンプレクティック数値積分法で解いた際に発生する天体の平均角速度の誤差の、初期位置および離心率 e への依存性[11]。縦軸の単位は公転周期 $^{-1} \times 100$ 。正確に言えば横軸は天体の初期平均近点離角、縦軸は平均運動の永年誤差である。各々の曲線が縦軸の値=0の横点線と交差する出発地点が、その後の計算誤差を最小にするはずの初期値である。

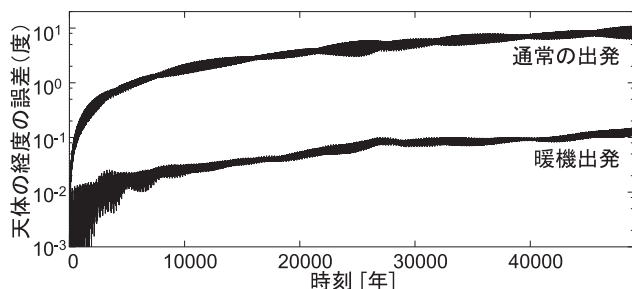


図2 木星と太陽の影響下にある小惑星 Ceres の運動を二次の WH map を用いて解き、通常の出発方法と暖機出発によるその経度誤差を比較したもの。刻み幅の極めて小さな高精度計算の結果を基準（擬似的な真の解）と看做した。

Wisdom は周期的 δ 関数を使った独自の定式化を用いて代理系ハミルトニアンがもつ短周期の振動成分を特定し、かつそれを除去するための正準変換の母関数を得る一般的な手続きを Lie 変換に基いて組み上げた。一旦この変換の母関数が得られればシンプレクティック数値積分のどの局面に於いてもそれを使って数値解を真の解に近付けられる。こうした手続きを取らない場合の WHmap に於ける代理系と真の系の差異は先述したように $\epsilon \tau^n$ の桁だが、この手続きによりそれを $\epsilon^2 \tau^n$ にまで低減できる (n 次のスキーム)。前述したように太陽系に於いては典型的に $\epsilon \sim 10^{-3}$ であるから、この違いは大きい。この研究は Lie 変換に基いた正準摂動論とシンプレクティック数値積分との深い関係を示すものとして理論的にも興味深いし、昨今ではシンプレクティック修正子を応用することでシンプレクティック数値積分法と相性の悪い可変刻み幅方式を実現する試みもある [15]。

4.1.4 課題と展望

前述のように太陽系力学では式 (1) のハミルトニアン分割が有効だが、それだけで話が済まない場合もある。その一例はある天体が他の天体（与摂動天体）と接近遭遇し、先の ϵ が微小量ではなくなる状況である。この状況は太陽系初期に惑星の前駆天体が相互に散乱と衝突を繰り返していた時代には日常的に発生していたと想像されるし、小惑星や彗星は現在でも惑星との近接遭遇を頻繁に起こしている。 ϵ が微小量でなくても式 (1) の形式でシンプレクティック数値積分を行うことは可能だが、その場合には刻み幅をだいたい小さくしないと誤差の増大が深刻になる。しかし刻み幅を小さくし過ぎると今度は通常のケプラー的な軌道に関する数値積分の効率が落ちる。この状況を打開するために幾つかの工夫が考えられてきた。例えば与摂動天体との近接遭遇時には細かいことを考えずに接近距離に応じて刻み幅を適宜縮小する方法である [16]（その際に厳密な意味でのシンプレクティック性は失われるが、それには目を瞑る）。この方法は理論的に美しいとは到底いえないが太陽系力学に於ける実用としては悪くない精度の解を与えることが知られており、多くの研究者が使っている。理論的に厳密な方法としては与摂動天体が及ぼす力を幾つもの力の和に再帰的に分割し、それぞれの力を被摂動天体から異なる距離・異なる頻度で有効にする方法がある [17, 18]。この再帰分割は天体同士の接近遭遇時にのみ発生し、そこで

は数値積分の刻み幅も自動的に縮小されるが、その場合にもシンプレクティック性が損なわれない工夫が編み出された。その際に必要となる新しいハミルトニアン分割として式 (1) の改良版も提案されている。更に直接的かつ実際的な方法としては、与摂動天体との接近遭遇が発生して相互作用ハミルトニアン H_{int} のどれかの項が極端に大きくなった場合にはそれを H_{kep} に滑らかに移動し、修正された H_{kep} 下での時間発展を補外法を使って精密に解く方式も提案されている [19]。この方法も厳密にはシンプレクティックではないが、補外法による数値積分は計算機精度の上限を達成し得るから、私達が手にする現実の範囲内で最高精度の“解析解”を求めることに相当する。

太陽系力学に於けるシンプレクティック数値積分が克服すべき課題は他にもある。小惑星や彗星の中には離心率が 1 に近い長楕円軌道を持つものもあるが、古典的な WH map はそうした軌道を扱うのが不得手である。その原因はいわゆる“刻み幅共鳴”にあるとされ [20]、この現象の回避は遠方から飛来する彗星などの数値積分に必須となる。その一対策として文献 [19] と同様に式 (1) のハミルトニアン分割を改良し、中心天体への接近を取って中心天体による摂動であると看做す手法が考案された [21]。ある天体が中心天体に接近し過ぎる場合には分割されたハミルトニアン間で適切に項を移動し、計算誤差の増大を巧みに抑制するものである。しかし理論的により洗練された方法は座標と時間変数を正則化し、中心天体への接近（衝突）を非特異点化することであろう。実際に、天体力学の業界では広く知られる Kusutaanheimo-Stiefel 正則化 [22 など] を WH map に持ち込んで修正したスキーム [23 など] は超長楕円軌道の天体運動を扱う際にも著しく高精度であり、かつ高速である [20]。正則化を組み込んだシンプレクティック数値積分法は構造が複雑になるためか応用例がまだ少ない。しかし天体力学に於ける正則化の研究は長い歴史をもち、膨大な量の知見があるから、太陽系力学の問題への適用例は増えていくだろう。

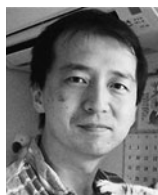
WH map の発表から 20 年以上を経た現在でも、太陽系力学に於けるシンプレクティック数値積分法の進歩は続いている。例えば昨今では太陽系以外の惑星系が夥しい数で発見される中、連星系を周回する惑星も確認され [24]、そうした天体の運動を効率良くシンプレクティック数値積分する方法も開発された [25]。また、天体の軌道運動よりも時定数が短いためにずっと高い精度を要求される天体の自転運動に関するシンプレクティック数値積分法も発表され、衛星-惑星系の潮汐進化計算などに応用されている [26, 27]。また、WH map とその発展型算法を実装したソースコード群が幾つか開発されて無償公開されており、多くの研究者に使われていることも注記に値しよう [16, 28]。今やそうした公開コードを GPU などの加速演算器上で動かす試みもある [29]。また式 (1) の意味するハミルトニアン分割の概念は太陽系力学の枠組みを超え、今や恒星系力学や自己重力流体に於ける数値計算にも導入されている [30-32 など]。

太陽系や惑星の進化を探る学問に於いては何十億年も前に存在した天体の運動状況を検証することも多く、その場

合には数値積分の精度や効率よりも力学モデルや初期値の不定性の方がずっと深刻な場合もある。しかし個々の計算に於ける数値積分が信頼できるか否かは研究業界全体の信頼にも直結し、とても重要である。そうした意味で、より高精度・高効率のシンプレクティック数値積分法に対する太陽系力学からの需要が終息することはないだろう。

参考文献

- [1] H. Kinoshita and H. Nakai, *Cel. Mech.* **45**, 231 (1989).
- [2] J. Wisdom and M. Holman, *Astron. J.* **102**, 1528, (1991).
- [3] H.C. Plummer, *An Introductory Treatise on Dynamical Astronomy* (Dover, New York, 1960).
- [4] J.M.A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics* (2nd edition, Willmann-Bell, Richmond, Virginia, 1992).
- [5] H. Yoshida, *Phys. Lett. A* **150**, 262 (1990).
- [6] H. Yoshida, *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **56**, 27 (1993).
- [7] T. Fukushima, *Astron. J.* **121**, 1768 (2001).
- [8] H. Yoshida, *Phys. Lett. A* **282**, 276 (2001).
- [9] H. Kinoshita *et al.*, *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **50**, 59 (1991).
- [10] G. Hori, *Publ. Astron. Soc. Japan* **18**, 287 (1966).
- [11] T. Ito and K. Tanikawa, *Publ. Astron. Soc. Japan* **64**, 35 (2012).
- [12] P. Saha and S. Tremaine, *Astron. J.* **1633**, 104 (1992).
- [13] J. Wisdom *et al.*, *Fields Inst. Commun.* **10**, 217 (1996).
- [14] J. Wisdom, *Astron. J.* **131**, 2294 (2006).
- [15] N. Kaib *et al.*, *Astron. J.* **141**, 3 (2011).
- [16] H.F. Levison and M.J. Duncan, *Icarus* **108**, 18 (1994).
- [17] R.D. Skeel and J.J. Biesiadecki, *Ann. Numer. Math.* **1**, 191 (1994).
- [18] M.J. Duncan *et al.*, *Astron. J.* **116**, 2067 (1998).
- [19] J.E. Chambers, *Mon. Not. R. Ast. Soc.* **304**, 793 (1999).
- [20] K.P. Rauch and M. Holman, *Astron. J.* **117**, 1087 (1999).
- [21] H.F. Levison and M. J. Duncan, *Astron. J.* **120**, 2117 (2000).
- [22] V.A. Brumberg, *Analytical Techniques of Celestial Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1995).
- [23] S. Mikkola, *Cel. Mech. Dyn. Astron.* **67**, 145 (1997).
- [24] J.A. Orosz *et al.*, *Science* **337**, 1511 (2012).
- [25] J.E. Chambers *et al.*, *Astron. J.* **123**, 2884 (2002).
- [26] J. Touma and J. Wisdom, *Astron. J.* **107**, 1189 (1994).
- [27] J. Touma and J. Wisdom, *Astron. J.* **108**, 1943 (1994).
- [28] J.E. Chambers and F. Migliorini, *BAAS* **29**, 1024 (1997).
- [29] S. Hellmich *et al.*, abstract of ACM2014, 3-1-2.10 (2014).
- [30] M. Fujii *et al.*, *Publ. Astron. Soc. Japan* **59**, 1095 (2007).
- [31] T.R. Saitoh, J. Makino, *Publ. Astron. Soc. Japan* **62**, 301 (2010).
- [32] G. Gonçalves Ferrari *et al.*, *Mon. Not. R. Ast. Soc.* **440**, 719 (2014).



いとう たかし
伊藤 孝士

自然科学研究機構国立天文台天文シミュレーションプロジェクト助教・副プロジェクト長。1995年東京大学大学院理学系研究科地球惑星物理学専攻博士課程中途退学、

博士(理学)。惑星科学、特に太陽系力学に理論的・数値的な側面から取り組んでいる。猫の扱いに長けており、関係者の間では熟練したキャット・シッターとして重宝されている。