J. Plasma Fusion Res. Vol.91, No.1 (2015) 51‐68

講座 粒子運動論～惑星から荷電粒子まで

2．Hamilton 力学系に対する Lie 変換摂動論と案内中心運動への応用

2. Lie Transform Perturbation Theory for Hamiltonian Systems and its Application to Guiding Center Motion

洲 鎌 英 雄
SUGAMA Hideo
核融合科学研究所

(原稿受付：2014年12月 5 日)

Hamilton力学における運動方程式は，位相空間上の軌道に沿った作用積分が停留値を取るという変分原理によって導かれる．微分幾何学的手法により，作用積分は，基本1‐形式とよばれる 1 次微分形式の積分として表され，Hamilton力学は，正準変数でない場合を含むより一般的な位相空間変数を用いて定式化される．Lie変換摂動法とよばれる手法によって，基本1‐形式を変形することにより，位相空間変数の変換と運動方程式の簡単化を系統的に行うことができる．強磁場下での荷電粒子の運動を表す基本1‐形式に対して Lie 変換摂動法を応用することにより，位相空間体積の不変性等のHamilton力学の特性を維持したまま高精度の案内中心運動方程式が導出される．

Keywords:
Lie transform perturbation theory, Hamiltonian system, guiding center motion

2.1　はじめに

LagrangianやHamiltonianを用いた解析力学[1]は，古典力学をより数学的に洗練された体系へと進化させ，物理学，工学等の科学の広範な分野で用いられている．解析力学では，Lagrangianの時間積分として定義される作用積分が停留値を取るという変分原理から運動方程式が導かれる．このように座標変数の取り方に依らない幾何学的な原理に基づくため，解析力学は，多様体等の概念に基づく微分幾何学[2,3]により，エレガントに定式化され[4]，座標系や運動方程式の変換，対称性と保存則や摂動論等の取り扱いを，微分幾何学的手法を用いて系統的に行うことが可能となる．

本講座では，Lie 変換摂動法[5‐7]とよばれる手法によって，Hamilton 系に対する基本1‐形式とよばれる，位相空間変数と時間変数を座標変数とする $(2n+1)$ 次元空間上の 1 次微分形式を変形することにより，新たな位相空間座標変数と簡単化された運動方程式を導出する手続きを解説し，その応用例として強磁場下での荷電粒子の案内中心に対する運動方程式の導出過程を示そう．

荷電粒子に対する Newton の運動方程式が 6 次元位相空間中の軌道を与えるのに対して，磁力線の回りの荷電粒子の速い旋回（ジャイロ）運動に関する平均化と磁気モーメントの保存により得られる案内中心運動方程式は 4 次元位相空間中の軌道を与える．磁気モーメントの保存から磁気ミラーの概念が導かれることからもわかるように，案内中心運動方程式は，磁場閉じ込めプラズマ研究分野において，重要な基礎方程式の一つであるが，その厳密な導出は，Lie 変換摂動法の格好の応用例にもなっている．後に述べるように，本講座で Lie 変換とよぶものは，微小パラメーターを含み，ベクトル場により生成される写像[Appendix 2.A の式(A.18)‐(A.19)参照］を指すが，正準変換摂動論では，Hamilton ベクトル場［式(41)参照］の場合に限定して，Lie 変換とよぶことが多い．本講座では，非正準変数の座標変換の取り扱いに便利なように，文献[5,6]に倣い，より一般のベクトル場の生成する写像を Lie 変換とよんでいることを断っておこう．ここで紹介する基本1‐形式に対する Lie 変換摂動法と案内中心運動方程式は，Littlejohn[8,9]によって示されたものであり，これにより，位相空間体積の不変性（Liouville の定理）等の Hamilton 力学の特性を保ったまま，摂動展開の高次オーダーまで正確に，案内中心座標変数と運動方程式を与えることが可能となった．

以下，本講座は次のように構成されている．第2.2節では，Hamilton 力学について復習し，正準変数と座標の時間に関する導関数の関数として与えられる Lagrangian の時間積分として作用積分を定義し，その作用積分に対する変分原理から，Hamilton の運動方程式を導出する．第2.3節では，正準変数でない場合も含むより一般的な位相空間変数に基づいて Hamilton 力学を表現し，その例として，電磁

National Institute for Fusion Science, Toki, GIFU 509-5292, Japan

author's e-mail: sugama.hideo@LHD.nifs.ac.jp

場中の荷電粒子の運動を第2.4節において取り扱う．第2.5節および第2.6節では，Lie 変換摂動法について説明する準備として，多様体，微分形式，ベクトル場等の微分幾何学の概念に基づき，Lagrangian の代わりに基本1-形式を用いて，第2.3節の Hamilton 力学を定式化しなおすとともに，多様体からそれ自身への写像に伴う座標系，ベクトル場や微分形式の変換について述べる．その後，第2.7節では，Lie 変換摂動法による基本1-形式の変形についての一般論を展開し，その応用例として，第2.8節において，案内中心運動方程式の導出を行う．最後に第2.9節において，まとめと他の関連研究について述べる．Appendix 2.A では，多様体，ベクトル場や微分形式に関する数学的補遺を，また Appendix 2.B では，案内中心座標のジャイロゲージ変換についての説明を与える．

2.2 Hamilton の正準運動方程式と変分原理

Hamilton 力学[1,4]では，系の状態を表す正準変数として，それぞれ n 個の成分からなる一般化座標 $\mathbf{q}=(q^i)_{i=1,\cdots,n}$ と正準運動量 $\mathbf{p}=(p_i)_{i=1,\cdots,n}$ を用い，系の状態の時間発展を表す Hamilton の正準運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{q}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{p}},\ \ \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\partial H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)}{\partial \mathbf{q}}, \tag{1}$$

のように書かれる．ここで，関数 $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ は Hamiltonian とよばれる．Hamilton の正準運動方程式は，以下で示すように，変分原理から導くことができる．Lagrangian L を

$$L(\mathbf{q},\mathbf{p},\dot{\mathbf{q}},t)=\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}}-H(\mathbf{q},\mathbf{p},t) \tag{2}$$

で与え，作用積分 I を Lagrangian L の時間積分

$$I=\int_{t_1}^{t_2} L(\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t),\dot{\mathbf{q}}(t),t)\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

として定義する．正準変数 $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ を座標とする $2n$ 次元位相空間における軌道 $(\mathbf{q}(t),\mathbf{p}(t))$ の仮想変位を考え，軌道の変分 $(\delta\mathbf{q}(t),\delta\mathbf{p}(t))$ に伴う作用積分 I の変分 δI は，

$$\begin{aligned}\delta I&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left(\delta\mathbf{p}\cdot\dot{\mathbf{q}}+\mathbf{p}\cdot\delta\dot{\mathbf{q}}-\delta\mathbf{q}\cdot\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}}-\delta\mathbf{p}\cdot\frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}}\right)\\&=\int_{t_1}^{t_2}\mathrm{d}t\left[-\delta\mathbf{q}\cdot\left(\dot{\mathbf{p}}+\frac{\partial H}{\partial\mathbf{q}}\right)+\delta\mathbf{p}\cdot\left(\dot{\mathbf{q}}-\frac{\partial H}{\partial\mathbf{p}}\right)\right]\end{aligned} \tag{4}$$

となる．ただし，ここでは，積分領域の両端において，$\delta\mathbf{q}(t_1)=\delta\mathbf{q}(t_2)=0$ と仮定し，$\mathbf{p}\cdot\delta\dot{\mathbf{q}}=\mathrm{d}(\mathbf{p}\cdot\delta\mathbf{q})/\mathrm{d}t-\dot{\mathbf{p}}\cdot\delta\mathbf{q}$ を用いた部分積分を行っており，また，$(\delta\mathbf{q},\delta\mathbf{p})$ に関して２次以上の微小量は無視している．式(４)からわかるように，Hamilton の正準運動方程式は，位相空間上で系が取るべき軌道は作用積分 I が極値を取る，即ち，$\delta I=0$ を満足するものであるという変分原理から導かれる．

2.3 非正準変数による Hamilton 力学の表現

位相空間の座標を表すために，正準変数 $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ 以外の変数を用いる方が便利なこともある．このような非正準変数の場合を含む，より一般的な座標変数を $\mathbf{z}=(z^i)_{i=1,\cdots,2n}$ で表そう．一般に，座標変数 $\mathbf{z}$ は，正準変数 $(\mathbf{q},\mathbf{p})$ および時刻 t の関数 $\mathbf{z}=\mathbf{z}(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ として表される．逆に，正準変数は，$\mathbf{z}$ および時刻 t の関数として，$\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{z},t)$，$\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{z},t)$ のように書かれる．これらを用いると，式(２)の Lagrangian は，$(\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}},t)$ の関数として，

$$L(\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}},t)=\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{z},t)\cdot\dot{\mathbf{z}}-h(\mathbf{z},t) \tag{5}$$

のように表される[8]．ここで，$\boldsymbol{\gamma}(\mathbf{z},t)=(\gamma_i(\mathbf{z},t))_{i=1,\cdots,2n}$ と $h(\mathbf{z},t)$ は，

$$\begin{aligned}\gamma_i(\mathbf{z},t)&=\mathbf{p}(\mathbf{z},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{q}(\mathbf{z},t)}{\partial z^i},\\ h(\mathbf{z},t)&=h_{\mathrm{can}}(\mathbf{q}(\mathbf{z},t),\mathbf{p}(\mathbf{z},t),t)-\mathbf{p}(\mathbf{z},t)\cdot\frac{\partial\mathbf{q}(\mathbf{z},t)}{\partial t}\end{aligned} \tag{6}$$

により与えられる．ここで，h_{can} は，第2.2節の正準変数に対する Hamiltonian $H(\mathbf{q},\mathbf{p},t)$ を意味する．

さて，位相空間上の系の軌道が満足すべき運動方程式を変数 $\mathbf{z}$ で表現するとどのようなものになるだろうか？ 変数 $\mathbf{z}$ によって表現された運動方程式を導くため，$2n$ 個の常微分方程式からなる Hamilton の正準運動方程式(１)に，変数変換の式 $\mathbf{q}=\mathbf{q}(\mathbf{z},t)$ および $\mathbf{p}=\mathbf{p}(\mathbf{z},t)$ を代入するのは一般に煩雑な手続きであり，それよりもずっとエレガントで便利な方法は，先に述べた変分原理を用いることである．系が位相空間上で取るべき経路は $\delta I=0$ から決められるという変分原理は，座標変数の取り方に依存しない幾何学的な主張であり，座標変数 $\mathbf{z}$ に対する運動方程式は，式(５)に示した Lagrangian を用いて，$\delta I=\delta\int_{t_1}^{t_2}L(\mathbf{z}(t),\dot{\mathbf{z}}(t),t)\,\mathrm{d}t=0$ から導かれ，次のような Euler-Lagrange 方程式として与えられる．

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\mathbf{z}}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\mathbf{z}}=0 \tag{7}$$

ただし，上式の導出において，積分領域の両端において $\delta\mathbf{z}(t_1)=\delta\mathbf{z}(t_2)=0$ であるという拘束条件が用いられている．式(５)および(７)より，$L(\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}},t)$ が k 番目の座標変数 z^k に依存しないとき（言い換えれば，$\boldsymbol{\gamma}$ と h がともに z^k に依存しないとき），$\gamma_k=\partial L/\partial\dot{z}^k$ が時間に依らない不変量となることがわかる．これは，Noether の定理として知られているものである．

ところで，任意の関数 $S(\mathbf{z},t)$ を用いて Lagrangian を

$$L'(\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}},t)=L(\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}},t)+\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}t} \tag{8}$$

のように置き換えてみても，Euler-Lagrange 方程式(７)は変化しない．ただし，上式において，$\mathrm{d}S/\mathrm{d}t=\partial S(\mathbf{z},t)/\partial t+\dot{\mathbf{z}}\cdot\partial S(\mathbf{z},t)/\partial\mathbf{z}$ である．$\delta\mathbf{z}(t_1)=\delta\mathbf{z}(t_2)=0$ であることから，$\delta\int_{t_1}^{t^2}L(\mathbf{z}(t),\dot{\mathbf{z}}(t),t)\,\mathrm{d}t=\delta\int_{t_1}^{t^2}L'(\mathbf{z}(t),\dot{\mathbf{z}}(t),t)\,\mathrm{d}t$ となるため，Lagrangian L と L' のどちらを用いても $\delta I=0$ から導かれる Euler-Lagrange 方程式(７)は同じものとなることがわかる．

Euler-Lagrange 方程式(7)は,

$$\sum_{j=1}^{2n} \omega_{ij} \frac{\mathrm{d}z^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial h}{\partial z^i} + \frac{\partial \gamma_i}{\partial t} \tag{9}$$

のように書き換えることができる．ここで,

$$\omega_{ij} = \frac{\partial \gamma_j}{\partial z^i} - \frac{\partial \gamma_i}{\partial z^j} \qquad (i, j = 1, \cdots, 2n) \tag{10}$$

とおいた．上式より，$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$ および

$$\frac{\partial \omega_{jk}}{\partial z^i} + \frac{\partial \omega_{ki}}{\partial z^j} + \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial z^k} = 0 \tag{11}$$

が導かれる．式(6)を(10)に代入すると,

$$\omega_{ij} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z^j} - \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z^j} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial z^i} = [z^i, z^j]_L \quad (i, j = 1, \cdots, 2n) \tag{12}$$

が得られ，$\omega_{ij} = [z^i, z^j]_L$ は，Lagrange 括弧とよばれる．

さて，変数 z^i と z^j の Poisson 括弧は,

$$J^{ij} = \{z^i, z^j\} = \sum_{\alpha=1}^{n} \left(\frac{\partial z^i}{\partial q^\alpha} \frac{\partial z^j}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial z^i}{\partial p_\alpha} \frac{\partial z^j}{\partial q^\alpha} \right) \tag{13}$$

で表され，$J^{ij} = -J^{ji}$ が成り立つ．ここで，式(12)と(13)を用いると,

$$\sum_{k=1}^{2n} J^{ik} \omega_{kj} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \tag{14}$$

が得られ，変数 $\mathbf{z} = (z^i)_{i=1,\cdots,2n}$ の Poisson 括弧の成分からなる $2n \times 2n$ 反対称行列 (J^{ij}) は，$2n \times 2n$ 反対称行列 (ω_{ij}) の逆行列であることがわかる．任意の関数 $F(\mathbf{z})$ と $G(\mathbf{z})$ に対する Poisson 括弧は,

$$\{F, G\} = \sum_{i,j} J^{ij} \frac{\partial F}{\partial z^i} \frac{\partial G}{\partial z^j} \tag{15}$$

により与えられ，$\{F,G\} = -\{G,F\}$ を満足する．任意の関数 $F(\mathbf{z})$，$G(\mathbf{z})$ および $H(\mathbf{z})$ に対して，次の Jacobi の恒等式が成り立つ．

$$\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 \tag{16}$$

Jacobi の恒等式(16)を変数 z の成分に対して書き表すと,

$$\{z^i, \{z^j, z^k\}\} + \{z^j, \{z^k, z^i\}\} + \{z^k, \{z^i, z^j\}\}$$

$$= \sum_l \left(J^{il} \frac{\partial J^{jk}}{\partial z^l} + J^{jl} \frac{\partial J^{ki}}{\partial z^l} + J^{kl} \frac{\partial J^{ij}}{\partial z^l} \right) = 0 \tag{17}$$

のようになる．上式(17)は式(11)と(14)を使って導くことができる．特に正準変数 $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ に対して，式(2)より，$\gamma_{\mathbf{q}}^{(\mathrm{can})} = (\gamma_{q^\alpha}^{(\mathrm{can})})_{\alpha=1,\cdots,n} = \mathbf{p}$ および $\gamma_{\mathbf{p}}^{(\mathrm{can})} = (\gamma_{p_\alpha}^{(\mathrm{can})})_{\alpha=1,\cdots,n} = 0$ となり，したがって，式(10)あるいは(12)より,

$$\begin{aligned} \omega_{q^\alpha p_\beta}^{(\mathrm{can})} &= -\omega_{p_\alpha q^\beta}^{(\mathrm{can})} = -\delta_{\alpha\beta} \\ \omega_{q^\alpha q^\beta}^{(\mathrm{can})} &= \omega_{p_\alpha p_\beta}^{(\mathrm{can})} = 0 \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, n) \end{aligned} \tag{18}$$

であり，式(14)より，正準変数間の Poisson 括弧は,

$$\begin{aligned} &\{q^\alpha, q^\beta\} = \{p_\alpha, p_\beta\} = 0, \\ &\{q^\alpha, p_\beta\} = -\{p_\alpha, q^\beta\} = \delta_{\alpha\beta} \qquad (\alpha, \beta = 1, \cdots, n) \end{aligned} \tag{19}$$

のようになる．ここで，$\delta_{\alpha\beta} = 1$（for $\alpha = \beta$），0（for $\alpha \neq \beta$）である．

式(9)，(14)および(15)を用いると，変数 $\mathbf{z} = (z^i)_{i=1,\cdots,2n}$ に対する運動方程式は,

$$\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}t} = \sum_j J^{ij} \left(\frac{\partial h}{\partial z^j} + \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} \right) = \{z^i, h\} + \sum_j \{z^i, z^j\} \frac{\partial \gamma_j}{\partial t} \tag{20}$$

のように表される．

$2n$ 次元位相空間における体積要素は，正準変数 $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ および $\mathbf{z}$ を用いて,

$$\mathrm{d}q^1 \cdots \mathrm{d}q^n \mathrm{d}p_1 \cdots \mathrm{d}p_n = D \, \mathrm{d}z^1 \cdots \mathrm{d}z^{2n}, \tag{21}$$

と書かれ，Jacobian D は,

$$D = \det \left[\frac{\partial (q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)}{\partial (z^1, \cdots, z^{2n})} \right] \tag{22}$$

で定義される $(\mathbf{z}, t)$ の関数であり，式(12)から

$$\det(\omega_{ij}) = D^2 \tag{23}$$

となることが示される．また，式(11)，(14)および(20)を使うと，上式(23)から

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{i=1}^{2n} \frac{\partial (D \dot{z}^i)}{\partial z^i} = 0 \tag{24}$$

が導かれる．ここで，$\dot{z}^i$ は，運動方程式(20)の右辺で定義される $(\mathbf{z}, t)$ の関数であると見なす．上式(24)は，式(21)で与えられる体積要素が式(20)に従う運動に沿って変化しないことを意味し，いわゆる Liouville の定理を表す．

2.4 電磁場中の荷電粒子の運動方程式

Hamilton 力学系の例として，電磁場 $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ の下での質量 m，電荷 e をもつ荷電粒子の運動を考えよう．電磁場 $(\mathbf{E}, \mathbf{B})$ は，静電ポテンシャル Φ とベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ により

$$\mathbf{E} = -\nabla \Phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \qquad \mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \tag{25}$$

で定義される．正準変数 $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ で表した Hamiltonian は,

$$h_{\mathrm{can}}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{2m} \left| \mathbf{p} - \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \right|^2 + e\Phi(\mathbf{q}, t) \tag{26}$$

で与えられる．一方，よく用いられる位相空間変数 $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ は，荷電粒子の位置ベクトル・速度ベクトルを表すが，非正準変数であり，正準変数 $(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ とは,

$$\mathbf{q} = \mathbf{x}, \qquad \mathbf{p} = m\mathbf{v} + \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \tag{27}$$

により，関係づけられる．非正準変数 $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{v})$ を用いて

Lagrangian L および Hamiltonian h を表すと，

$$L(\mathbf{z},\dot{\mathbf{z}},t)=\left(m\mathbf{v}+\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t)\right)\cdot\dot{\mathbf{x}}-h(\mathbf{z},t),$$
$$h(\mathbf{z},t)=\frac{1}{2}m|\mathbf{v}|^2+e\Phi(\mathbf{x},t) \tag{28}$$

のようになる．上式より，式(5)中の$\boldsymbol{\gamma}$の$\mathbf{x}$-および$\mathbf{v}$-成分は，

$$\gamma_{\mathbf{x}}=m\mathbf{v}+\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t),\qquad \boldsymbol{\gamma}_{\mathbf{v}}=0 \tag{29}$$

で与えられる．この$\boldsymbol{\gamma}$を用いると式(10)で定義されたω_{ij}は，

$$\omega_{x_\alpha x_\beta}=\frac{e}{c}\left(\frac{\partial A_\beta}{\partial x_\alpha}-\frac{\partial A_\alpha}{\partial x_\beta}\right)=\frac{e}{c}\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma,$$
$$\omega_{x_\alpha v_\beta}=-m\delta_{\alpha\beta},\qquad \omega_{v_\alpha v_\beta}=0\qquad(\alpha,\beta=1,2,3) \tag{30}$$

のように表される．ここで，

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}=\begin{cases}1 & ((\alpha,\beta,\gamma)=(1,2,3),(2,3,1),(3,1,2))\\ 0 & (\text{otherwise})\end{cases} \tag{31}$$

を用いた．また，式(30)により与えられる成分を持つ行列(ω_{ij})の逆行列を取ることにより，式(13)に示した各 Poisson 括弧の成分 $J^{ij}=\{z^i,z^j\}$ が，それぞれ，

$$\{x_\alpha,x_\beta\}=0,\qquad \{x_\alpha,v_\beta\}=\frac{1}{m}\delta_{\alpha\beta},$$
$$\{v_\alpha,v_\beta\}=\frac{e}{m^2c}\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_\gamma\qquad(\alpha,\beta=1,2,3) \tag{32}$$

のように求められる．上式(32)の Poisson 括弧と式(28)の Hamiltonian を用いると，式(20)から非正準変数$\mathbf{z}=(\mathbf{x},\mathbf{v})$に対する運動方程式が，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{v},$$
$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t}=e\left[\mathbf{E}(\mathbf{x},t)+\frac{\mathbf{v}}{c}\times\mathbf{B}(\mathbf{x},t)\right] \tag{33}$$

のように導かれる．

2.5 基本1-形式による Hamilton 力学の定式化

本節では，第2.3節で述べた Hamilton 力学を，微分形式（Appendix 2.A 参照）を用いて定式化しよう．式(5)で定義された Lagrangian L に対応して，位相空間と時間軸の直積として与えられる $(2n+1)$ 次元空間上の１次微分形式（1-形式）が，次のように与えられる[5,6]．

$$\gamma=\sum_{\mu=1}^{2n+1}\gamma_\mu(z)\,\mathrm{d}z^\mu=\sum_{i=1}^{2n}\gamma_i(\mathbf{z},t)\,\mathrm{d}z^i-h(\mathbf{z},t)\,\mathrm{d}t \tag{34}$$

このγは“基本1-形式（fundamental 1-form）”あるいは"Poincaré-Cartan form"とよばれ，$z=(z^\mu)_{\mu=1,\cdots,2n+1}=(\mathbf{z},t)$は$(2n+1)$次元空間上の座標変数を表す．時間$t$は$(2n+1)$次元空間中の$(2n+1)$番目の座標変数であり，上式より$\gamma$の$t$-成分は$\gamma_t=-h$である．また，作用積分$I$は，$(2n+1)$次元空間中の２点$(\mathbf{z}_1,t_1)$と$(\mathbf{z}_2,t_2)$を結ぶ経路$l$に沿った$\gamma$の積分として

$$I=\int_l\gamma \tag{35}$$

のように表される．２点$(\mathbf{z}_1,t_1)$と$(\mathbf{z}_2,t_2)$を固定した経路に沿った作用積分の変分が $\delta I=0$ となるとき，そのような経路に対して運動方程式(20)が成り立つことを第2.3節で述べた．式(8)のように Lagrangian を変換しても Euler-Lagrange 方程式(7)の形が変わらなかったことを思い起こそう．このことを基本1-形式γを用いて言い換えると，任意の関数$S(\mathbf{z},t)$によりγを

$$\gamma'=\gamma+\mathrm{d}S \tag{36}$$

に置き換えても，$\delta I=0$から導かれる運動方程式は式(20)のままで変わらないということになる．

式(34)のγの外微分として，$(2n+1)$次元空間上の２次微分形式（2-形式）ωが

$$\omega=\mathrm{d}\gamma=\sum_{i=1}^{2n}\mathrm{d}\gamma_i\wedge\mathrm{d}z^i-\mathrm{d}h\wedge\mathrm{d}t$$
$$=\sum_{i<j}\omega_{ij}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}z^j-\sum_i\left(\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial z^i}\right)\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}t \tag{37}$$

により与えられる[Appendix 2.A の式(A.32) 参照]．ここで，ω_{ij} は既に式(10)で定義されているものに等しい．時間 t を固定して考えると上式の

$$\hat{\omega}=\sum_{i<j}\omega_{ij}\mathrm{d}z^i\wedge\mathrm{d}z^j \tag{38}$$

の部分は，$\mathbf{z}=(z^i)_{i=1,\cdots,2n}$を座標とする$2n$次元位相空間上の2-形式を与え，Lagrange テンソルとよばれる．Lagrange テンソル $\hat{\omega}$ の座標系 $\mathbf{z}=(z^i)_{i=1,\cdots,2n}$ に関する成分 ω_{ij} は，第2.3節で見たように，反対称性 $\omega_{ij}=-\omega_{ji}$ を持ち，式(11)を満たす．式(11)は，$2n$ 次元位相空間上の2-形式である Lagrange テンソル $\hat{\omega}$ が閉じている，即ち，$\hat{\omega}$ の外微分 $d\hat{\omega}$ が０となることを意味する［Appendix 2.A の式(A.32)参照］．正準変数$(\mathbf{q},\mathbf{p})$では，式(18)から，$\hat{\omega}=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i$ のように表される．

第2.3節で見たように，$2n\times 2n$ 行列(ω_{ij})は，逆行列(J^{ij})をもち，それに対しても反対称性$J^{ij}=-J^{ji}$が成り立つ．因みに，Lagrange テンソル$\hat{\omega}$のように，その成分が反対称であり，かつ逆行列をもつ$2n\times 2n$ 行列により表されるような閉じた2-形式を，シンプレクティック構造とよび，シンプレクティック構造をもつ$2n$ 次元多様体をシンプレクティック多様体とよぶ．また，シンプレクティック構造 $\hat{\omega}$ をもつ $2n$ 次元シンプレクティック多様体からそれ自身への写像φで，

$$\varphi^*\hat{\omega}=\hat{\omega} \tag{39}$$

を満足するものを正準変換（canonical transformation）あ

るいはシンプレクティック変換（symplectic transformation）とよぶ．ここで，$\varphi^*\hat{\omega}$ は φ による $\hat{\omega}$ の引き戻し（pull back）を表す［Appendix 2.A の式(A.34)参照］．上式(39)より，正準変換 φ は，k 個（$k=1,\cdots,n$）の $\hat{\omega}$ の外積 $\hat{\omega}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}$ を保つ，即ち，$\varphi^*(\hat{\omega}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega})=\hat{\omega}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}$ が成り立つことがわかる．正準変数$(\mathbf{q},\mathbf{p})$を用いてシンプレクティック構造を $\hat{\omega}=\sum_{i=1}^n \mathrm{d}p_i\wedge\mathrm{d}q^i$ のように表すと，n 個（$k=1,\cdots,n$）の $\hat{\omega}$ の外積は，$\hat{\omega}\wedge\cdots\wedge\hat{\omega}=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} n!\,\mathrm{d}q^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^n\wedge\mathrm{d}p_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}p_n$ のように表され，上述のことから，正準変換は，$2n$ 次元位相空間の体積要素 $\mathrm{d}q^1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}q^n\wedge\mathrm{d}p_1\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}p_n$ を保つことがわかる．

Lagrange テンソル $\hat{\omega}$ に対して，次式で定義される $2n$ 次元位相空間上の2階の反対称な反変テンソル場

$$J=\sum_{i,j}J^{ij}\frac{\partial}{\partial z^i}\otimes\frac{\partial}{\partial z^i}=\sum_{i<j}J^{ij}\frac{\partial}{\partial z^i}\wedge\frac{\partial}{\partial z^i} \tag{40}$$

を Poisson テンソルとよぶ．また，$2n$ 次元位相空間上の実数値関数(スカラー場)F の微分 $\mathrm{d}F$ と Poisson テンソル J から，

$$X_F=\mathcal{J}\mathrm{d}F\equiv\sum_{i,j}J^{ij}\frac{\partial F}{\partial z^j}\frac{\partial}{\partial z^i} \tag{41}$$

によって，$2n$ 次元位相空間上の Hamilton ベクトル場 X_F が定義される．式(15)で定義されたPoisson括弧は，上述の Poisson テンソルや Hamilton ベクトル場を用いて，

$$\{F,G\}=J(\mathrm{d}F,\mathrm{d}G)=X_G F=-X_F G \tag{42}$$

と表すことができる．Poisson 括弧を用いると，前述の正準変換 φ とは，$2n$ 次元位相空間上の任意のスカラー場 F と G に対して，

$$\varphi^*\{F,G\}=\{\varphi^*F,\varphi^*G\} \tag{43}$$

を満足する写像であると言い換えることができる．ここで，写像 φ によるスカラー場 F の pull back φ^*F は，写像として F と φ を合成したもの $\varphi^*F=F\circ\varphi$ として定義される［Appendix 2.A の式(A.14)参照］．任意のスカラー場 F に対する Hamilton ベクトル場 X_F がつくる1パラメータ変換群 $\varphi_\varepsilon=\mathrm{Exp}(\varepsilon X_F)$［Appendix 2.A の式(A.18)および(A.19)参照］は Hamilton 相流とよばれ，各パラメータ ε に対して，φ_ε は正準変換となる．

さて，$2n$ 次元位相空間と時間軸の直積として与えられる $(2n+1)$ 次元空間上のベクトル場

$$X=\sum_{i=1}^{2n}X^i\frac{\partial}{\partial z^i}+X^t\frac{\partial}{\partial t} \tag{44}$$

を考えよう．ここで，このベクトル場 X は，$2n$ 次元位相空間上の軌道 $\mathbf{z}(t)=(z^i(t))_{i=1,\cdots,2n}$ の時間に関する常微分方程式と，

$$\frac{\mathrm{d}z^i}{\mathrm{d}t}=X^i(\mathbf{z},t)\qquad(i=1,\cdots,2n),$$
$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}t}=1=X^t \tag{45}$$

によって関係づけられているとしよう．このとき，ベクトル場 X と2-形式 ω の内部積［Appendix 2.A の式(A.28)参照］をとると，

$$\begin{aligned}i(X)\omega&=\sum_{\mu=1}^{2n+1}\sum_{\nu=1}^{2n+1}X^\mu\omega_{\mu\nu}\mathrm{d}z^\nu\\&=\sum_{j=1}^{2n}\left[\sum_{i=1}^{2n}X^i\omega_{ij}+X^t\left(\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial z^j}\right)\right]\mathrm{d}z^j\\&\quad-\sum_{i=1}^{2n}X^i\left(\frac{\partial\gamma_i}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial z^i}\right)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{46}$$

を得る．上式(46)より，

$$i(X)\omega=0\Leftrightarrow X^i=\sum_{j=1}^{2n}J^{ij}\left(\frac{\partial\gamma_j}{\partial t}+\frac{\partial h}{\partial z^j}\right)\ (i=1,\cdots2n) \tag{47}$$

が導かれ，ベクトル場 X と2-形式 ω の内部積が0となることと，ベクトル場 X が運動方程式(20)を与えることが同値となることがわかる．基本1-形式 γ，その外微分 $\omega=\mathrm{d}\gamma$ と流体力学における速度場 $\mathbf{v}$，渦度 $\omega=\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$（速度場の回転)との対応関係によるアナロジーから，$i(X)\omega=i(X)\mathrm{d}\gamma=0$ を満足する$(2n+1)$次元空間上のベクトル場 X の積分曲線［即ち式(45)の解の軌道］は，1-形式 γ の「渦線」とよばれる．運動方程式(20)は，変分原理 $\delta I=\delta\int_l\gamma=0$ から導かれるものであったが，それは基本1-形式の渦線の方程式でもある．

2.6 多様体における写像に伴う座標系，ベクトル場および微分形式の変換

次節において Lie 変換摂動法について述べる前に，本節では，多様体における写像に伴う座標系，ベクトル場および微分形式の変換について解説し，これらの変換に関わる2つの解釈，即ち，passive な描像と active な描像を紹介しよう．直感的に言えば，passive な描像とは，多様体における与えられた写像によって座標系が変換されることであるのに対して，active な描像とはベクトル場や微分形式が変換されることである．筆者の感じるところでは，この2つの描像は非常に重要な基本的概念であるにもかかわらず，文献によっては，これらに対する適切な説明がないために，ベクトル場や微分形式の成分表示に対する解釈やそれらの表記法に，誤り（もしくは不明瞭さ）がしばしば見受けられる．これらの描像を正しく理解することにより，次節において，Lie変換摂動法によって何が変換され，何が求まるのかを正しく解釈することができるようになるであろう．

M を m 次元の多様体とする．T を M から M 自身への微分同型写像とする（T は M から M の上への1対1写像で，T とその逆写像 T^{-1} はともに連続で微分可能である）．

$$T:M\ni a\longrightarrow T(a)\in M \tag{48}$$

多様体上の2つの座標系 z と $\bar{z}$ を考えよう．

$$z : M \ni a \to z(a) = (z^{\mu}(a))_{i=1,\cdots,m} \in \mathbb{R}^m$$
$$\bar{z} : M \ni a \to \bar{z}(a) = (\bar{z}^{\mu}(a))_{i=1,\cdots,m} \in \mathbb{R}^m \quad (49)$$

Appendix 2.A で述べるように，一般には，多様体の座標系は局所的に定義されるものであるが，ここでは，説明を簡単にするため，座標系 z と $\bar{z}$ は，多様体の全領域上で定義されているものとする．さて，座標系 $\bar{z}$ は，座標系 z の写像 T による pull back として定義しよう［Appendix 2.A の式(A.14)参照］．即ち，

$$\bar{z} = T^{*}z \equiv z \circ T$$
$$\bar{z}(a) = (T^{*}z)(a) \equiv z(T(a))$$
$$\bar{z}^{\mu}(a) = (T^{*}z^{\mu})(a) \equiv z^{\mu}(T(a)) \quad (i = 1,\cdots,m) \quad (50)$$

が成り立つものとする．さて，多様体 M 上の任意の関数

$$f : M \ni a \to f(a) \in \mathbb{R} \quad (51)$$

を上記の 2 つの座標系 z および $\bar{z}$ により，それぞれ，m 変数の空間 $\mathbb{R}^m$ 上の関数

$$F : \mathbb{R}^m \ni w = (w^{\mu})_{\mu=1,\cdots,m} \to F(w) \in \mathbb{R} \quad (52)$$

および

$$\overline{F} : \mathbb{R}^m \ni w = (w^{\mu})_{\mu=1,\cdots,m} \to \overline{F}(w) \in \mathbb{R} \quad (53)$$

を用いて表現してみよう．M 上の関数 f の座標系 z, $\bar{z}$ による表現 F，$\overline{F}$ とは，

$$f(a) = F(z(a)) = \overline{F}(\bar{z}(a)) \quad (54)$$

を満足するものである．上式(54)において，a を $T^{-1}(a)$ に置き換えると，

$$((T^{-1})^{*}f)(a) \equiv f(T^{-1}(a)) = \overline{F}(z(a)) \quad (55)$$

を得る．式(54)と(55)より，m 変数の空間 $\mathbb{R}^m$ 上の関数 $\overline{F}$ に対して 2 つの解釈が成り立つ．式 (54) は，$\mathbb{R}^m$ 上の関数 $\overline{F}$ が座標 $\bar{z} = T^{*}z$ で M 上の関数 f を表現していることを意味する．これは，写像 T による変換を受けたのは座標系の方であり（$\bar{z}$ は z の T による pull back），passive な描像とよばれる．passive な描像では，$\overline{F}(w)$ の独立変数 w は，座標 $\bar{z}$ の取る数値 $\bar{z}(a)$ である．一方，式(55)では，$\overline{F}$ は座標 z において関数 $(T^{-1})^{*}f$（T^{-1} による f の pull back）を表現している．この場合，写像 T による変換を受けたのは関数の方であり，active な描像とよばれる．active な描像では，$\overline{F}(w)$ の独立変数 w は，座標 z の取る数値 $z(a)$ である．

次に，多様体 M 上の任意のベクトル場 X を以下のように座標系 z と $\bar{z}$ で表現してみよう．

$$X = \sum_{\mu} X^{\mu}(z) \frac{\partial}{\partial z^{\mu}} = \sum_{\nu} \overline{X}^{\nu}(\bar{z}) \frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\nu}} \quad (56)$$

ここで，

$$\overline{X}^{\nu}(\bar{z}(a)) = X_a(\bar{z}^{\nu}) \quad (57)$$

は，多様体上の点 a において，座標系 $\bar{z}$ で表したベクトル場 X の成分 $\overline{X}^{\nu}(\bar{z}(a))$ は，ベクトル場 X を微分作用素として $\bar{z}^{\nu}$ に作用させて得られるものであることを意味し［Appendix 2.A の式(A.7)参照］，passive な描像による $\overline{X}^{\nu}$ の解釈であり，$\overline{X}^{\nu}(w)$ の独立変数 w は，座標 $\bar{z}$ の取る数値 $\bar{z}(a)$ であると見なされる．また式(56)におけるベクトル場 X の二つの表式より，

$$\overline{X}^{\nu}(\bar{z}(a)) = \sum_{\mu} \left(\frac{\partial \bar{z}^{\nu}}{\partial z^{\mu}}\right)_a X^{\mu}(z(a))$$
$$= (T_{*}X)_{T(a)}(z^{\nu}) \quad (58)$$

という関係が得られる［Appendix 2.A の式(A.16)参照］．さらに，上式において，a を $T^{-1}(a)$ に置き換えると，

$$\overline{X}^{\nu}(z(a)) = (T_{*}X)_a(z^{\nu}) \quad (59)$$

となる．上式は，$\overline{X}^{\nu}(z(a))$ は，多様体 M 上の点 a において，座標系 z によって表されたベクトル場 $T_{*}X$（写像 T による X の push forward）の成分であることを意味し，active な描像による $\overline{X}^{\nu}$ の解釈であり，$\overline{X}^{\nu}(w)$ の独立変数 w は，座標 z の取る数値 $z(a)$ であると見なされる．

今度は，多様体 M 上の任意の s 次微分形式（s-形式）θ を以下のように座標系 z と $\bar{z}$ で表現してみよう．

$$\theta = \sum_{\mu_1 < \cdots < \mu_s} \theta_{\mu_1 \cdots \mu_s}(z)\, \mathrm{d}z^{\mu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}z^{\mu_s}$$
$$= \sum_{\nu_1 < \cdots < \nu_s} \bar{\theta}_{\nu_1 \cdots \nu_s}(\bar{z})\, \mathrm{d}\bar{z}^{\nu_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\bar{z}^{\nu_s} \quad (60)$$

ここで，

$$\bar{\theta}_{\nu_1 \cdots \nu_s}(\bar{z}(a)) = \theta_a\left(\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\nu_1}}\right)_a, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\nu_s}}\right)_a\right) \quad (61)$$

であり［Appendix 2.A の式(A.25)参照］，$\bar{\theta}_{\nu_1 \cdots \nu_s}(\bar{z}(a))$ が，多様体上の点 a における s-形式 θ の座標系 $\bar{z}$ に関する成分であることを意味する．これは passive な描像による $\bar{\theta}_{\nu_1 \cdots \nu_s}$ の解釈を与え，$\bar{\theta}_{\nu_1 \cdots \nu_s}(w)$ の独立変数 w は，座標 $\bar{z}$ の取る数値 $\bar{z}(a)$ であると見なされる．また，式(60)の二つの表式より，

$$\bar{\theta}_{\nu_1 \cdots \nu_s}(\bar{z}(a)) = \theta_a\left(\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\nu_1}}\right)_a, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}^{\nu_s}}\right)_a\right)$$
$$= \sum_{\mu_1, \cdots, \mu_s} \left(\frac{\partial z^{\mu_1}}{\partial \bar{z}^{\nu_1}}\right)_a \cdots \left(\frac{\partial z^{\mu_s}}{\partial \bar{z}^{\nu_s}}\right)_a \theta_{\mu_1 \cdots \mu_s}(z(a))$$
$$= ((T^{-1})^{*}\theta)_{T(a)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial z^{\nu_1}}\right)_{T(a)}, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial z^{\nu_s}}\right)_{T(a)}\right) \quad (62)$$

が得られる［Appendix 2.A の式(A.16)(A.27)および(A.34)参照］．上式において，a を $T^{-1}(a)$ に置き換えると，

$$\bar{\theta}_{\nu_1 \cdots \nu_s}(z(a)) = ((T^{-1})^{*}\theta)_a\left(\left(\frac{\partial}{\partial z^{\nu_1}}\right)_a, \cdots, \left(\frac{\partial}{\partial z^{\nu_s}}\right)_a\right) \quad (63)$$

を得る．上式は，$\bar{\theta}_{\nu_1 \cdots \nu_s}(z(a))$ が，多様体上の点 a における s-形式 $(T^{-1})^{*}\theta$ の座標系 z に関する成分であることを意味する．これは，active な描像による $\bar{\theta}_{\nu_1 \cdots \nu_s}$ の解釈を与

え，$\overline{\theta}_{\nu_1\cdots\nu_s}(w)$ の独立変数 w は，座標 z の取る数値 $z(a)$ であると見なされる．

2.7　Lie 変換摂動法による基本1-形式の変形

本節では，Lie 変換摂動法による基本1-形式の変形[5, 6]について解説しよう．前節で説明した写像と座標変換の関係を踏まえて，第2.5節で述べた基本1-形式γを次式のように２つの座標系 z と $\overline{z}$ で表してみよう．

$$\gamma=\sum_\mu \gamma_\mu(z)\mathrm{d}z^\mu=\sum_\nu \overline{\gamma}_\nu(\overline{z})\mathrm{d}\overline{z}^\nu \tag{64}$$

座標系 z で表した基本1-形式 γ の成分は，

$$\gamma_\mu(z(a))=\gamma_a\left(\left(\frac{\partial}{\partial z^\mu}\right)_a\right) \tag{65}$$

であり，座標系 $\overline{z}$ で表した γ の成分は，

$$\overline{\gamma}_\nu(\overline{z}(a))=\gamma_a\left(\left(\frac{\partial}{\partial \overline{z}^\nu}\right)_a\right) \tag{66}$$

となる．上式は前節で述べた passive な描像を表し，関数 $\overline{\gamma}_\nu(w)$ は，座標 $\overline{z}=T^*z$ によって表現された基本1-形式γ の（ν 番目の）成分であると解釈され，この場合，$\overline{\gamma}_\nu$ が依存する変数 w は座標 $\overline{z}$ がとる数値 $\overline{z}(a)$ を表す．上式は，次のように書き換えることができる［式(62)参照］．

$$\begin{aligned}\overline{\gamma}_\nu(\overline{z}(a))&=\sum_\mu\left(\frac{\partial z^\mu}{\partial \overline{z}^\nu}\right)_a\gamma_\mu(z(a))\\&=((T^{-1})^*\gamma)_{T(a)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial z^\nu}\right)_{T(a)}\right)\end{aligned} \tag{67}$$

ここで，a を $T^{-1}(a)$ に置き換えると，ただちに，

$$\overline{\gamma}_\nu(z(a))=((T^{-1})^*\gamma)_a\left(\left(\frac{\partial}{\partial z^\nu}\right)_a\right) \tag{68}$$

を得る．上式は前節で述べた active な描像を表し，関数 $\overline{\gamma}_\nu(w)$ は，T^{-1} による基本1-形式 γ の pull back $(T^{-1})^*\gamma$ を座標 z によって表現した場合の成分であると解釈される．この場合，$\overline{\gamma}_\nu$ が依存する変数 w は座標 z がとる数値 $z(a)$ を表す．

以上に述べたことから，変換された座標系 $\overline{z}=T^*z$ による1-形式 γ の成分表示は，変換された1-形式 $\overline{\gamma}=(T^{-1})^*\gamma$ の座標系 z における成分表示に等しく，これらはともに $(\overline{\gamma}_\mu(w))_{\nu=1,\cdots,2n+1}$ で与えられる．基本1-形式が記述する系において，座標変数が満たす運動方程式は，式(20)でみたように，その座標系によって表現された基本1-形式の成分によって完全に決定されるから，1-形式 $\overline{\gamma}=(T^{-1})^*\gamma$ が記述する系における，座標系 z に対する運動方程式は，1-形式γが記述する系における，座標系$\overline{z}=T^*z$ に対する運動方程式と同じ形になることが結論づけられる．さらに，式(36) で示した基本1-形式の変換によって，基本1-形式から導かれる運動方程式は変わらないことを思い起こそう．したがって，基本1-形式 γ を次のような1-形式

$$\overline{\gamma}=(T^{-1})^*\gamma+\mathrm{d}S \tag{69}$$

に変換したとき，上式(69)で与えられた1-形式 $\overline{\gamma}$ から導かれる座標系 z に対する運動方程式は，もとの1-形式 γ から導かれる座標系 $\overline{z}=T^*z$ に対する運動方程式と同じ形であるということになる．もし，ある写像 T とスカラー関数 S により，式(69)のような変換から導かれた1-形式 $\overline{\gamma}$ の座標系 z に対する成分表現$(\overline{\gamma}_\mu(w))_{\mu=1,\cdots,2n+1}$ が都合のよい単純な形をしていれば，その成分表現から導かれる運動方程式，即ち元の1-形式 γ における座標系 $\overline{z}$ に対する運動方程式は，解くことが容易になる．例えば，$(\overline{\gamma}_\mu)_{\mu=1,\cdots,2n+1}$ が，ある座標 z^λ に依存しないようになっていれば，Noether の定理より直ちに，$\overline{\gamma}_\lambda$ が運動の不変量となり，解くべき運動方程式の数を減らすことができる．その例が，第2.8節で述べる磁場中の荷電粒子の案内中心運動方程式である．以上に述べた基本1-形式と運動方程式の変換に対する解釈が，以下に述べる Lie 変換摂動法とそれに伴う運動方程式の簡約化の手続きの根底にあることを注意しておこう．

さて，写像 T が，

$$T=\cdots T_3T_2T_1, \tag{70}$$

のように一連の写像 T_n（$n=1,2,3,\cdots$）の合成として表される場合を考えよう．ここで，T_n は，ベクトル場 G_n を用いて，以下のように Lie 変換として与えられるものとする［Appendix 2.A の式(A19)参照］．

$$T_n=\mathrm{Exp}(\varepsilon^n G_n) \tag{71}$$

写像 T_n による push forward $(T_n)_*$（写像 T_n の微分ともよばれる）および pull back $(T_n)^*$ は，それぞれ，

$$\begin{aligned}(T_n)_*&=\exp(-\varepsilon^n L_n)=1-\varepsilon L_n+\frac{\varepsilon^2}{2}(L_n)^2+\cdots\\(T_n)^*&=\exp(\varepsilon^n L_n)=1+\varepsilon L_n+\frac{\varepsilon^2}{2}(L_n)^2+\cdots\end{aligned} \tag{72}$$

のように表すことができる．上式において，L_n はベクトル場 G_n に沿った Lie 微分を表し，push forward $(T_n)_*$ の表式の中に現れる L_n はベクトル場 X に対して作用し，

$$L_nX=[G_n,X]=G_nX-XG_n \tag{73}$$

のようにベクトル場 G_n と X の交換子（Lie 括弧）により定義される［Appendix 2.A の式(A.11)参照］．一方，pull back $(T_n)^*$ の表式の中に現れる Lie 微分 L_n は，微分形式 θ に対して作用し，

$$L_n\theta=i(G_n)\mathrm{d}\theta+\mathrm{d}i(G_n)\theta \tag{74}$$

のように，内部積 $i(G_n)$ と外微分 d により表される［Appendix 2.A の式(A.37)参照］．式(70)で与えられる写像 T の逆写像 T^{-1}，push forward T_*，その逆 $(T_*)^{-1}=(T^{-1})_*=T_*^{-1}$，pull back T^* およびその逆$(T^*)^{-1}=(T^{-1})^*=T^{-1*}$ は，それぞれ，次のように表される．

$$T^{-1}=(T_1)^{-1}(T_2)^{-1}(T_3)^{-1}\cdots,$$

$$T_* = \cdots (T_3)_* (T_2)_* (T_1)_*,$$
$$T_*^{-1} = (T_1)_*^{-1} (T_2)_*^{-1} (T_3)_*^{-1} \cdots,$$

$$T^* = (T_1)^* (T_2)^* (T_3)^* \cdots,$$
$$T^{-1*} = \cdots (T_3)^{-1*} (T_2)^{-1*} (T_1)^{-1*} \tag{75}$$

写像Tによる座標変数zのpull backとして得られる座標変数$\bar{z} = T^* z$は，パラメータεによって，次式のように展開される．

$$\bar{z} = T^* z = (T_1)^* (T_2)^* (T_3)^* \cdots z$$
$$= \bar{z}_0 + \varepsilon \bar{z}_1 + \varepsilon^2 \bar{z}_2 + \cdots \tag{76}$$

ここで，εに関して0次，1次および2次のオーダーの$\bar{z}$の成分は，微分作用素としてのベクトル場G_n $(n = 0,1,2)$を用いて，以下のように表される．

$$\bar{z}_0 = z$$
$$\bar{z}_1 = G_1 z$$
$$\bar{z}_2 = \left(\frac{1}{2} (G_1)^2 + G_2 \right) z \tag{77}$$

式(69)におけるγ, $\bar{\gamma}$およびSをεに関して以下のように展開しよう．

$$\gamma = \gamma_0 + \varepsilon \gamma_1 + \varepsilon^2 \gamma_2 + \cdots,$$
$$\bar{\gamma} = \bar{\gamma}_0 + \varepsilon \bar{\gamma}_1 + \varepsilon^2 \bar{\gamma}_2 + \cdots,$$
$$S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \cdots \tag{78}$$

すると，式(69)は，εに関する各オーダーごとの式として，

$$\bar{\gamma}_0 = \gamma_0 + \mathrm{d}S_0$$
$$\bar{\gamma}_1 = \gamma_1 - L_1 \gamma_0 + \mathrm{d}S_1$$
$$\bar{\gamma}_2 = \gamma_2 - L_1 \gamma_1 + \left(\frac{1}{2} (L_1)^2 - L_2 \right) \gamma_0 + \mathrm{d}S_2 \tag{79}$$

のように書き換えられる．さて，Lie微分L_nに対する表式(74)の第2項は，微分の形となっているため，上式(79)におけるL_nのこの微分項の寄与は全て$\mathrm{d}S_n$の中に押し込めることができる．したがって，今後は，微分形式に作用するL_nの定義として，

$$L_n \theta = i(G_n) \mathrm{d}\theta \tag{80}$$

を採用することにする．上式(80)に従って，式(79)から$\bar{\gamma}_n$を計算しても，それは，式(79)中のS_nを変化させたものと見なすことができ，$\bar{\omega} = \mathrm{d}\bar{\gamma}$やそこから導かれるPoisson括弧式や運動方程式には影響しない．式(80)を用いると，例えば，1-形式$\theta = \sum_\mu \theta_\mu \mathrm{d}z^\mu$に対して，

$$(L_n \theta)_\mu = (L_n \theta) \left(\frac{\partial}{\partial z^\mu} \right) = \sum_n (G_n)^\nu \left(\frac{\partial \theta_\mu}{\partial z^\nu} - \frac{\partial \theta_\nu}{\partial z^\mu} \right) \tag{81}$$

となる．上式には，$\partial (G_n)^\nu / \partial z^\mu$のような$(G_n)^\nu$の偏微分項が現れず，式(74)で定義される$L_n$に比べて計算量が軽減される．

2.8 磁場中の荷電粒子に対する案内中心変数と案内中心運動方程式

本節では，前節で示したLie変換摂動法に従って，磁場中の荷電粒子に対する案内中心変数と案内中心運動方程式の導出を行う[8,9]．

2.8.1 ドリフトオーダーリング

第2.4節で扱った電磁場中の荷電粒子の運動に対するLagrangianとHamiltonianの表式(28)において，微小量を表す摂動展開パラメータεを導入し，

$$\frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) \to \varepsilon^{-1} \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \varepsilon t)$$
$$e\Phi(\mathbf{x}, t) \to e\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon t) \tag{82}$$

のような置き換えを行おう．すると電磁場中の荷電粒子の運動を記述する基本1-形式γは，

$$\gamma = \left(\varepsilon^{-1} \frac{e}{c} \mathbf{A}(\mathbf{x}, \varepsilon t) + m\mathbf{v} \right) \cdot \mathrm{d}\mathbf{x} - h\, \mathrm{d}t,$$
$$h = \frac{1}{2} m |\mathbf{v}|^2 + e\Phi(\mathbf{x}, \varepsilon t) \tag{83}$$

のように書かれる．この基本1-形式から導かれる運動方程式は，式(33)の中にパラメータεが入ったものとなり，

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{x}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{v},$$
$$m \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = e\, \mathbf{E}(\mathbf{x}, \varepsilon t) + \varepsilon^{-1} \frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{x}, \varepsilon t) \tag{84}$$

で与えられる．上式において，$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \varepsilon t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, \varepsilon t)$および

$$e\, \mathbf{E}(\mathbf{x}, \varepsilon t) = -e \nabla \Phi(\mathbf{x}, \varepsilon t) - \frac{e}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \tau}(\mathbf{x}, \varepsilon t) \tag{85}$$

である．上に示した電場の表式において，

$$\tau = \varepsilon t \tag{86}$$

により定義された時間変数τと$\partial/\partial t = \varepsilon \partial/\partial \tau$という関係式を用いた．式(83)のHamiltonian hにおいて，運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの大きさは同程度のオーダーであると見なされる．

$$e\Phi \sim mv^2 \tag{87}$$

一方，式(84)からわかるように，磁場によるLorentz力の大きさは電場によるそれよりもずっと大きく，εは前者の大きさに対する後者の大きさの比のオーダーを表すと解釈され，

$$\varepsilon \sim \frac{cE}{vB} \sim \frac{c\Phi}{vBl} \sim \frac{mcv}{eBl} \sim \frac{\rho}{l} \tag{88}$$

を得る．ここで，lはΦや$\mathbf{A}$等の背景場の空間変化のスケール長を表し，式(88)の導出において，式(87)，$E \sim \Phi/l$および$\rho \sim mcv/(eB)$を用いた．ρは磁場中の荷電粒子の旋回(ジャイロ)運動の半径の大きさの程度を表す．式(88)は，摂動展開パラメータとして用いられるεが，ジャイロ半径

と背景場の空間変化スケール長の比のオーダーを表すことを意味し，式(82)による ε の導入が，いわゆるドリフトオーダーリング $\varepsilon \sim \rho/l \ll 1$ の近似を用いることに対応していることがわかる．また，式(85)では，電場に対する静電ポテンシャルの勾配とベクトルポテンシャルの時間微分それぞれの寄与の大きさは同程度であると見なされ，背景場の変化の時間スケールを t_c で表すと，式(85)，(87)と(88)から，

$$t_c \sim \frac{Al}{c\Phi} \sim \frac{eBl^2}{mcv^2} \sim \left(\frac{\rho}{l}\right)^{-1} \frac{l}{v} \sim \varepsilon^{-1} t_{tr} \tag{89}$$

となる．上式において，$B = |\nabla \times \mathbf{A}| \sim A/l$ を用いた．式(89)からわかるように，ここでは，粒子がスケール長 l を通過する時間 (transit time) $t_{tr} \sim l/v$ に比べると，背景場の変化の時間スケール t_c は ε^{-1} 倍程度長いと見積もられている．因みに，磁場閉じ込め核融合プラズマの輸送理論では，背景場の変化の時間スケールはさらに長く，$\varepsilon^{-2} t_{tr}$ と仮定され，これは輸送オーダーリング[10]と呼ばれるが，その場合，電場におけるベクトルポテンシャルの時間微分の寄与は，静電ポテンシャルの勾配に比べ，ε 倍程度の微小量と見なされる．一方，プラズマ乱流を扱うジャイロ運動論等において，電磁場の乱流揺動成分の変化の時間スケールは transit time t_{tr} 程度であると仮定される[11]．

2. 8. 2　座標系 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$

ここで，式(83)で示した電磁場中の荷電粒子の運動を記述する基本1-形式が定義された7次元空間の座標系として，$z = (z^\mu)_{\mu=1,\cdots,7} = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ を導入しよう．$\mathbf{x}$ は粒子の位置ベクトルであり，τ は式(86)で定義された時間変数である．時刻 τ において，空間点 $\mathbf{x}$ ごとに正規直交基底ベクトルの組 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b})$ を設ける．ただし，$\mathbf{b}$ は磁場方向の単位ベクトル $\mathbf{b} \equiv \mathbf{B}/B\,(B \equiv |\mathbf{B}|)$ である．磁場に平行な方向の速度成分を $v_\parallel \equiv \mathbf{b}\cdot\mathbf{v}$ とおき，磁場に垂直な方向の速度ベクトル成分 $\mathbf{v}_\perp \equiv \mathbf{v} - v_\parallel \mathbf{b}$ の大きさを $v_\perp = |\mathbf{v}_\perp|$ で表す．$\mathbf{v}_\perp$ 方向の単位ベクトルを $\mathbf{c} \equiv \mathbf{v}_\perp/v_\perp$ とし，これを用いて，新たに正規直交基底ベクトルの組 $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ を設ける．このとき，$\mathbf{a} = \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ は荷電粒子のジャイロ半径ベクトル方向の単位ベクトルになる．ジャイロ位相 θ は，$\mathbf{a}$ と $\mathbf{e}_1$ がなす角として定義され，$(\mathbf{a},\mathbf{c})$ は $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ と以下の関係によって結びつけられる．

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \cos\theta\,\mathbf{e}_1 - \sin\theta\,\mathbf{e}_2,\\ \mathbf{c} &= -\sin\theta\,\mathbf{e}_1 - \cos\theta\,\mathbf{e}_2\end{aligned} \tag{90}$$

速度ベクトル $\mathbf{v}$ は，座標変数 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ を用いると，

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= v_\parallel \mathbf{b}(\mathbf{x}, \tau) + v_\perp \mathbf{c}(\mathbf{x}, \tau, \theta)\\ &= v_\parallel \mathbf{b}(\mathbf{x}, \tau) - v_\perp [\sin\theta\,\mathbf{e}_1(\mathbf{x}, \tau) + \cos\theta\,\mathbf{e}_2(\mathbf{x}, \tau)]\end{aligned} \tag{91}$$

のように表される．座標系 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ において，式(83)で示された基本1-形式 γ は次のように表される．

$$\gamma = \sum_\mu \gamma_\mu(z)\,\mathrm{d}z^\mu = \varepsilon^{-1}\gamma^{(0)} + \gamma^{(1)}$$

$$\gamma^{(0)} = \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x}, \tau)\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} - \left(\frac{1}{2}m(v_\parallel^2 + v_\perp^2) + e\Phi(\mathbf{x}, \tau)\right)\mathrm{d}\tau$$

$$\gamma^{(1)} = m\left[v_\parallel \mathbf{b}(\mathbf{x}, \tau) + v_\perp \mathbf{c}(\mathbf{x}, \tau)\right]\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} \tag{92}$$

2. 8. 3　予備的な Lie 変換

前節で導入した座標変数 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ から次節以降で導かれる最終的な案内中心変数へ変換を行う途中段階として，次式で与えられる予備的な Lie 変換を行う．

$$T^{(p)} = \mathrm{Exp}(\varepsilon G^{(p)}) \tag{93}$$

ここで，ベクトル場 $G^{(p)}$ は，

$$G^{(p)} = -\frac{cmv_\perp}{eB}\mathbf{a}\cdot\left(\nabla + \mathbf{R}\frac{\partial}{\partial\theta}\right) \tag{94}$$

により定義され，座標系 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ に関する $G^{(p)}$ の成分は，それぞれ，

$$\begin{aligned}(G^{(p)})^{\mathbf{x}} &= -\frac{cmv_\perp}{eB(\mathbf{x}, \tau)}\mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau),\\ (G^{(p)})^\theta &= (G^{(p)})^{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau),\\ (G^{(p)})^{v_\parallel} &= (G^{(p)})^{v_\perp} = (G^{(p)})^\tau = 0\end{aligned} \tag{95}$$

で与えられる．ここで，$\mathbf{R}$ はジャイロゲージ変換［Appendix 2.B 参照］に関わるベクトルであり，Appendix 2.B の式(B. 2)で定義される．上式で定義された $G^{(p)}$ は，ジャイロゲージの選び方によらない形をしていることがわかる［Appendix 2.B の式(B. 6)参照］．写像 $T^{(p)}$ による座標変数 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ の pull back により得られる座標変数 $z^{(p)} = (T^{(p)})^* z$ の各成分は，それぞれ，

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(p)} &= (T^{(p)})^*\mathbf{x} = \mathbf{x} - \varepsilon\frac{cmv_\perp}{eB(\mathbf{x},\tau)}\mathbf{a}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\ \theta^{(p)} &= (T^{(p)})^*\theta = \theta + \varepsilon(G^{(p)})^{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{R}(\mathbf{x}, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^2),\\ v_\parallel^{(p)} &= (T^{(p)})^* v_\parallel = v_\parallel,\\ v_\perp^{(p)} &= (T^{(p)})^* v_\perp = v_\perp,\\ \tau^{(p)} &= (T^{(p)})^*\tau = \tau\end{aligned} \tag{96}$$

となり，$\mathbf{x}$ 成分と θ 成分以外はもとのままであり，ε について1次のオーダーでは，$\mathbf{x}^{(p)}$ と $\mathbf{x}$ の差はよく知られたジャイロ半径ベクトル $(cmv_\perp/eB)\mathbf{a}$ で与えられており，ε に関する2次以上の高次項を除けば，$\mathbf{x}^{(p)}$ は従来よく用いられる案内中心の位置ベクトルを表していることがわかる．

さて，第2.7節で解説した手順に従い，$(T^{(p)})^{-1}$ による1-形式 γ の pull back は，

$$\overline{\gamma} = \exp(-\varepsilon L_p)\gamma = \varepsilon^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\overline{\gamma}^{(n)} \tag{97}$$

のように表される．1-形式の変換式(69)の右辺にあったスカラーの微分項 $\mathrm{d}S$ に対応するものは $\overline{\varpi} = \mathrm{d}\overline{\gamma}$ やそこから導かれる運動方程式には影響せず，上式(97)では省略されている．また，式(80)で説明したように，上式(97)における微分演算子 L_p として，

$$L_p = i(G^{(p)})\,\mathrm{d} \tag{98}$$

を用いることとする．ε による摂動展開の最低次では，1-形式は変わらず，

$$\bar{\gamma}^{(0)} = \gamma^{(0)} = \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},\tau)\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} - \left(\frac{1}{2}m\left(v_\parallel^2 + v_\perp^2\right) + e\Phi(\mathbf{x},\tau)\right)\mathrm{d}\tau \tag{99}$$

となる．次のオーダーでは，

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}^{(1)} &= \gamma^{(1)} - L_{\mathrm{p}}\gamma^{(0)} \\ &= mv_\parallel \mathbf{b}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{cmv_\perp}{B}\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{100}$$

であり，式(92)の $\gamma^{(1)}$ の中のジャイロ位相に依存する項 $mv_\perp\mathbf{c}$ が消去されたが，代わりに $\bar{\gamma}^{(1)}$ にはジャイロ位相依存性をもつ項 $(cmv_\perp/B)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E})$ が現れた．式(97)中の $\bar{\gamma}^{(2)}$ は，

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}^{(2)} &= -L_{\mathrm{p}}\gamma^{(1)} + \frac{1}{2}L_{\mathrm{p}}^2\gamma^{(0)} = \sum_\mu \bar{\gamma}_\mu^{(2)}\mathrm{d}z^\mu, \\ \bar{\gamma}_{\mathbf{x}}^{(2)} &= -\frac{m^2cv_\perp^2}{2eB}[\mathbf{R} + (\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}] \\ &\quad - \frac{m^2cv_\parallel v_\perp}{eB}[(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b} + (\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})\mathbf{c}], \\ \bar{\gamma}_\theta^{(2)} &= \frac{m^2cv_\perp^2}{2eB}, \\ \bar{\gamma}_{v_\parallel}^{(2)} &= \bar{\gamma}_{v_\perp}^{(2)} = 0\end{aligned} \tag{101}$$

で与えられる．ここで，$\bar{\gamma}_\tau^{(2)}$ の表式は以下では必要としないので省略した．$\bar{\gamma}$ のさらに高次成分である $\bar{\gamma}^{(3)}$ は，

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}^{(3)} &= \frac{1}{2}L_{\mathrm{p}}^2\gamma^{(1)} - \frac{1}{6}L_{\mathrm{p}}^3\gamma^{(0)} = \sum_\mu \bar{\gamma}_\mu^{(3)}\mathrm{d}z^\mu, \\ \bar{\gamma}_\theta^{(3)} &= -\frac{m^3c^2v_\perp^2}{e^2B^2}\left[\frac{v_\perp}{3}(\mathbf{a}\cdot\nabla B)/B + \frac{v_\parallel}{2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})\right], \\ \bar{\gamma}_{v_\parallel}^{(3)} &= \bar{\gamma}_{v_\perp}^{(3)} = 0\end{aligned} \tag{102}$$

のように表される．ここで，$\bar{\gamma}_{\mathbf{x}}^{(3)}$，$\bar{\gamma}_\tau^{(3)}$ および $\bar{\gamma}^{(n)}(n \geq 4)$ の表式は省略する．

式(101)における θ-成分である $\bar{\gamma}_\theta^{(2)} = m^2cv_\perp^2/(2eB)$ は，よく知られた磁気モーメントの表式 $\mu = mv_\perp^2/(2B)$ と定数 mc/e の積となっていることに注目しよう．もし，$\bar{\gamma}$ のすべての成分が，θ に依存していなければ，第2.3節で述べた Noether の定理より，$\bar{\gamma}$ から導かれる運動方程式に対して，$\mu = mv_\perp^2/(2B)$ が不変量となる．ところが，式(100)－(102)に示された $\bar{\gamma}$ の成分の中には，ベクトル $\mathbf{a}$ や $\mathbf{c}$ を通して θ-依存性が残されており，写像 $T^{(\mathrm{p})}$ による変換だけでは，$\mu = mv_\perp^2/(2B)$ の保存する運動方程式が得られない．

因みに，これまでの段階で既に得られている $\overline{\gamma_0}$[式(99)]，$\overline{\gamma_1}$[式(100)]および $\overline{\gamma_2}$[式(101)]までを残し，さらにその中で $\bar{\gamma}_\tau^{(1)}$，$\bar{\gamma}_\tau^{(2)}$ および $\bar{\gamma}_{\mathbf{x}}^{(2)}$ を無視するだけでも，θ-依存性をもつ成分がなくなり，その結果，通常最もよく用いられていいる形の Littlejohn の案内中心運動方程式を与える基本1-形式

$$\left(\frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},t) + mv_\parallel\mathbf{b}\right)\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} + \frac{m^2cv_\perp^2}{2eB}\mathrm{d}\theta$$
$$- \left(\frac{1}{2}m\left(v_\parallel^2 + v_\perp^2\right) + e\Phi(\mathbf{x},t)\right)\mathrm{d}t \tag{103}$$

が得られる（上式では，$\varepsilon = 1$，$\tau = t$ と置かれている）．しかしながら，より高次の精度をもつ案内中心運動方程式を求めたり，また案内中心変数を粒子変数から，より正確に定義するためには，次節に示すように，Lie変換を用いて基本1-形式の各成分からジャイロ位相をさらに除去していく必要がある．

2.8.4 ジャイロ位相に対する依存性の除去

第2.8.3節で予備的な Lie 変換 $T^{(\mathrm{p})}$ により基本1-形式 γ から得られた1-形式 $\bar{\gamma}$ をさらに式(69)にならって以下のように変換しよう．

$$\Gamma = (T^{-1})^*\bar{\gamma} + \mathrm{d}S \tag{104}$$

目標は，座標系 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ に関する Γ の成分が θ-依存性をもたなくなるようにすることである．ここで，写像 T は以下のように一連のLie変換 T_n（$n = 1, 2, 3, \cdots$）の合成として表されるものとする．

$$T = \cdots T_3T_2T_1, \qquad T_n = \mathrm{Exp}(\varepsilon^n G_n) \tag{105}$$

ところで，ベクトル場 $G_n\,(n = 1, 2, \cdots)$ は，第2.8.3節の $G^{(\mathrm{p})}$ と同様に，τ-成分をもたない（$G_n^\tau = (G^{(\mathrm{p})})^\tau = 0$）とする．これは，写像 $T^{(\mathrm{p})}$ と $T = \cdots T_3T_2T_1$ の合成による座標系 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ の pull back として最終的に定義される座標系 $Z = (TT^{(\mathrm{p})})^*z$ の時間成分が $(TT^{(\mathrm{p})})^*\tau = \tau$ のように，元の時間変数 τ のままで変わらないようにするためである．

式(104)の変換により得られる1-形式 Γ は，ε によって次式のように展開される．

$$\Gamma = \varepsilon^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^n\Gamma^{(n)} \tag{106}$$

ε に関して最低次のオーダーでは，

$$\begin{aligned}\Gamma^{(0)} &= \bar{\gamma}^{(0)} = \gamma^{(0)} \\ &= \frac{e}{c}\mathbf{A}(\mathbf{x},\tau)\cdot\mathrm{d}\mathbf{x} - \left(\frac{1}{2}m\left(v_\parallel^2 + v_\perp^2\right) + e\Phi(\mathbf{x},\tau)\right)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{107}$$

のように，$\Gamma^{(0)}$，$\bar{\gamma}^{(0)}$ および $\gamma^{(0)}$ は一致する．$\Gamma^{(0)}$ の座標系 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ に関する各成分は，ジャイロ位相に依存しないことに注意しよう．次のオーダーでは，

$$\Gamma^{(1)} = \bar{\gamma}^{(1)} - L_1\bar{\gamma}^{(0)} + \mathrm{d}S^{(1)} = \sum_\mu \Gamma_\mu^{(1)}\mathrm{d}z^\mu \tag{108}$$

となる．上式中の $L_1 = i(G_1)d$ を規定するベクトル場 G_1 や $S^{(1)}$ をどう選ぶかには任意性がある．ここで，簡単な選択は $S^{(1)} = 0$ および $G_1^{\mathbf{x}} = 0$ となるような G_1 を選ぶことである．すると，座標系 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ に関する $\Gamma^{(1)}$ の各成分は，

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathbf{x}}^{(1)} &= mv_\parallel\mathbf{b}, \\ \Gamma_{v_\parallel}^{(1)} &= \Gamma_\theta^{(1)} = \Gamma_{v_\perp}^{(1)} = 0, \\ \Gamma_\tau^{(1)} &= \frac{cmv_\perp}{B}\mathbf{a}\cdot\mathbf{E} + mv_\parallel G_1^{v_\parallel} + mv_\perp G_1^{v_\perp}\end{aligned} \tag{109}$$

で与えられる．上に示された$\Gamma^{(1)}$の各成分の中で$\mathbf{a}$を含んでいる$\Gamma_\tau^{(1)}$以外の成分の表式には，ジャイロ位相θに対する依存性が含まれていない．$\Gamma_\tau^{(1)}$からθ-依存性がなくなるように，$G_1^{v_\parallel}$と$G_1^{v_\perp}$を選ぶ必要がある．これらの選び方については，また後に述べよう．

2次のオーダーの1-形式$\Gamma^{(2)}$は，以下のように表される．

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)} &= \bar{\gamma}^{(2)} - L_1\bar{\gamma}^{(1)} + \left(\frac{1}{2}L_1^2 - L_2\right)\bar{\gamma}^{(0)} + \mathrm{d}S^{(2)} \\
&= \sum_\mu \Gamma_\mu^{(2)}\mathrm{d}z^\mu
\end{aligned}
\tag{110}
$$

$S^{(2)}=0$とおくと，$\Gamma_\tau^{(2)}$を除く$\Gamma^{(2)}$の各成分は，

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{\mathbf{x}}^{(2)} &= -\frac{cm^2v_\perp^2}{2eB}[\mathbf{R}+(\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\mathbf{b}] \\
&\quad -\frac{cm^2v_\parallel v_\perp}{eB}[(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\mathbf{b}+(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})\mathbf{c}] \\
&\quad - mG_1^{v_\parallel}\mathbf{b} - \frac{e}{c}\mathbf{B}\times G_2^{\mathbf{x}} \\
\Gamma_{v_\parallel}^{(2)} &= \Gamma_{v_\perp}^{(2)} = 0 \\
\Gamma_\theta^{(2)} &= \bar{\gamma}_\theta^{(2)} = \frac{m^2cv_\perp^2}{2eB}
\end{aligned}
\tag{111}
$$

となる．

さらに3次のオーダーの1-形式$\Gamma^{(3)}$は，

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(3)} &= \bar{\gamma}^{(3)} - L_1\bar{\gamma}^{(2)} + \left(\frac{1}{2}L_1^2 - L_2\right)\bar{\gamma}^{(1)} \\
&\quad + \left(-\frac{1}{6}L_1^3 + L_2L_1 - L_3\right)\bar{\gamma}^{(0)} + \mathrm{d}S^{(3)} \\
&= \sum_\mu \Gamma_\mu^{(3)}\mathrm{d}z^\mu
\end{aligned}
\tag{112}
$$

で与えられる．ここで，$\Gamma_{\mathbf{x}}^{(3)}$と$\Gamma_\tau^{(3)}$を除く$\Gamma^{(3)}$の各成分は，

$$
\begin{aligned}
\Gamma_{v_\parallel}^{(3)} &= m\,\mathbf{b}\cdot G_2^{\mathbf{x}} + \frac{\partial S^{(3)}}{\partial v_\parallel} \\
\Gamma_\theta^{(3)} &= -\frac{c^2m^3v_\perp^3}{3e^2B^3}(\mathbf{a}\cdot\nabla B) - \frac{c^2m^3v_\parallel v_\perp^2}{2e^2B^2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b}) \\
&\quad -\frac{cm^2v_\perp}{eB}G_1^{v_\perp} + \frac{\partial S^{(3)}}{\partial\theta} \\
\Gamma_{v_\perp}^{(3)} &= \frac{cm^2v_\perp}{eB}G_1^\theta + \frac{\partial S^{(3)}}{\partial v_\perp}
\end{aligned}
\tag{113}
$$

となる．

以上の式(109)の最後の式，(111)の最初の式および(113)を用いて，$\Gamma_\tau^{(1)}$，$\Gamma_{\mathbf{x}}^{(2)}$，$\Gamma_{v_\parallel}^{(3)}$，$\Gamma_\theta^{(3)}$，$\Gamma_{v_\perp}^{(3)}$から$\theta$-依存性がなくなるという条件を満たすよう，$G_1^{v_\parallel}$，$G_1^\theta$，$G_1^{v_\perp}$，$G_2^{\mathbf{x}}$および$S^{(3)}$を選ばなければならない．しかし，この条件だけでは，これらΓ, Gの成分や$S^{(3)}$を唯一通りに決定することはできない．ここでは，Γを最も単純な形にするため，

$$
\Gamma_{v_\parallel}^{(3)} = \Gamma_\theta^{(3)} = \Gamma_{v_\perp}^{(3)} = 0 \tag{114}
$$

という条件を追加しよう．Appendix 2.Bの式(B.8)で示されるように，ジャイロゲージ変換に伴い，1-形式の$\mathbf{x}$-成分は変化するため，ジャイロゲージの取り方によらず，$\Gamma_{\mathbf{x}}^{(2)}=0$と要請することはできない．Littlejohnが「標準案内中心変数（standard guiding center variables）」と称する場合に選択した条件は，

$$
\Gamma_{\mathbf{x}}^{(2)} = -\frac{m^2cv_\perp^2}{2eB}\mathbf{R} \tag{115}
$$

とおくことである．これは，ジャイロゲージの取り方によらない形になっている［式(B.9)参照］．式(109)，(111)，(113)-(115)を用いると，$\Gamma_\tau^{(1)}$の表式，

$$
\Gamma_\tau^{(1)} = -\frac{cm^2v_\parallel v_\perp^2}{4eB}(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b}) \tag{116}
$$

および$G_1^{v_\parallel}$，G_1^θ，$G_1^{v_\perp}$，$G_2^{\mathbf{x}}$，$S^{(3)}$に対する表式，

$$
\begin{aligned}
G_1^{v_\parallel} &= -\frac{cmv_\perp^2}{2eB}(\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) - \frac{cmv_\parallel v_\perp}{eB}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) \\
G_1^\theta &= +\frac{cmv_\perp}{eB^2}(\mathbf{c}\cdot\nabla B) - \frac{c}{v_\perp B}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{E}) \\
&\quad -\frac{cmv_\parallel}{4eB}(\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) + \frac{cmv_\parallel^2}{ev_\perp B}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) \\
G_1^{v_\perp} &= -\frac{c}{B}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E}) + \frac{cmv_\parallel v_\perp}{4eB}(3\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) \\
&\quad + \frac{cmv_\parallel^2}{eB}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) \\
G_2^{\mathbf{x}} &= \left[-\frac{c^2m^2v_\perp^2}{8e^2B^2}(\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\right. \\
&\quad \left.+\frac{2c^2m^2v_\parallel v_\perp}{e^2B^2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\right]\mathbf{b} + \frac{c^2m^2v_\parallel v_\perp}{e^2B^2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})\mathbf{a} \\
S^{(3)} &= -\frac{c^2m^3v_\perp^3}{3e^2B^3}(\mathbf{c}\cdot\nabla B) + \frac{c^2m^2v_\perp}{eB^2}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{E}) + \frac{c^2m^3v_\parallel v_\perp^2}{8e^2B^2} \\
&\quad \times(\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) - \frac{c^2m^3v_\parallel^2v_\perp}{e^2B^2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})
\end{aligned}
\tag{117}
$$

が導かれる．Littlejohnは，εに関するさらに高次のオーダーにおいて，

$$
\begin{aligned}
&\Gamma_{\mathbf{x}}^{(n)} = 0 \qquad (n \geq 3) \\
&\Gamma_{v_\parallel}^{(n)} = \Gamma_\theta^{(n)} = \Gamma_{v_\perp}^{(n)} = 0 \qquad (n \geq 4)
\end{aligned}
\tag{118}
$$

を満足する$G_n^{v_\parallel}$，G_n^θ，$G_n^{v_\parallel}(n\geq 2)$，$G_n^{\mathbf{x}}(n\geq 3)$および$S^{(n)}(n\geq 4)$が存在し，それによって標準案内中心変数が定義できることを示した．標準案内中心変数を採用すると，εに関するこれらの高次オーダー解析の1-形式Γに対する影響は，$\Gamma_\tau^{(n)}(n\geq 2)$のみに（換言すればHamiltonianの高次の補正項として）現れるだけであり，Γの他の成分およびそれから決まる座標変数間のPoisson括弧はさらなる高次オーダー解析によっても変化しない．

2.8.5 標準案内中心座標で表された基本1-形式と運動方程式

第2.8.1節で与えられた電磁場中の荷電粒子に対する基

本1-形式γは，次式が示すように，第2.8.2および2.8.3節で述べたLie変換により，1-形式Γへと変換された．

$$\Gamma=(TT^{(\mathrm{p})})^{-1*}\gamma+\mathrm{d}S=\sum_{\mu}\Gamma_{\mu}(z)\mathrm{d}z^{\mu} \tag{119}$$

上式を書き換えると，

$$\begin{aligned}\gamma&=(TT^{(\mathrm{p})})^{*}(\Gamma-\mathrm{d}S)\\&=\sum_{\mu}\Gamma_{\mu}(Z)dZ^{\mu}+\mathrm{d}S'\end{aligned} \tag{120}$$

となる．ここで，$S'=-(TT^{(\mathrm{p})})^{*}S$，$Z=T\bar{z}=TT^{(\mathrm{p})}z=(\mathbf{Z},\tau)$および$\mathbf{Z}=(Z)_{i=1,\cdots,6}=(\mathbf{X},U,\Theta,W)$である．第2.6および2.7節で解説したactiveおよびpassiveな描像の観点からすると，式(119)はactiveな描像に従い，$\Gamma_{\mu}(z)$は，1-形式Γの座標系$z=(\mathbf{x},v_{\parallel},\theta,v_{\perp},\tau)$に関する成分を表すことを意味し，式(120)は，同形の関数である$\Gamma_{\mu}(Z)$が，1-形式γの座標系$Z=T\bar{z}=TT^{(\mathrm{p})}z=(\mathbf{X},U,\Theta,W,\tau)$に関する成分であるというpassiveな描像を与える．以下では，後者のpassiveな描像に従うことにして，第2.8.4節の結果を用いると，$\Gamma_{\mu}(Z)$の成分が以下のように表される．

$$\begin{aligned}\Gamma_{\mathbf{X}}&=\varepsilon^{-1}\frac{e}{c}\mathbf{A}+mU\mathbf{b}-\varepsilon\frac{m^2cW^2}{2eB}\mathbf{R}\\\Gamma_U&=\Gamma_W=0\\\Gamma_{\Theta}&=\varepsilon\frac{m^2cW^2}{2eB}\\\Gamma_{\tau}&=-\varepsilon^{-1}H(\mathbf{X},U,W,\tau)\\&=-\varepsilon^{-1}\left[\frac{1}{2}m(U^2+W^2)+e\Phi(\mathbf{X},\tau)\right.\\&\qquad\left.+\varepsilon\frac{m^2cUW^2}{4eB}(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})+\mathcal{O}(\varepsilon)\right]\end{aligned} \tag{121}$$

上式において，$\mathbf{A}$，$\mathbf{b}$，Bおよび$\mathbf{R}$は，$(\mathbf{X},\tau)$の関数と見なされる．

ここからは，座標変数Wの代わりに，磁気モーメント$\mu=mW^2/2B$を用いることにし，最終的な標準案内中心座標系として$(\mathbf{X},U,\Theta,\mu,\tau)$を採用することにしよう．式(76)-(77)を参考にして，第2.8.3および2.8.4節で導かれたベクトル$G^{(\mathrm{p})}$およびG_nの各成分を用いると，標準案内中心変数$(\mathbf{X},U,\Theta,\mu)$は　粒子座標変数$(\mathbf{x},v_{\parallel},\theta,v_{\perp})$によって以下のように表される．

$$\begin{aligned}\mathbf{X}&=\mathbf{x}-\varepsilon\frac{mcv_{\perp}}{eB}\mathbf{a}\\&\quad+\varepsilon^2\frac{c^2m^2}{e^2}\left(\left[-\frac{v_{\perp}^2}{2B^3}(\mathbf{a}\cdot\nabla B)+\frac{v_{\parallel}v_{\perp}}{B^2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})\right]\mathbf{a}\right.\\&\quad\left.+\left[-\frac{v_{\perp}^2}{8B^2}(5\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}-\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})+\frac{2v_{\parallel}v_{\perp}}{B^2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})\right]\mathbf{b}\right)\\&\quad+\mathcal{O}(\varepsilon^3)\\U&=v_{\parallel}+\varepsilon G_1^{v_{\parallel}}+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\\\Theta&=\theta+\varepsilon\left[-\frac{cmv_{\perp}}{eB}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{R})+G_1^{\theta}\right]+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\\\mu&=\frac{mW^2}{2B(\mathbf{X},\tau)}\\&=\frac{mv_{\perp}^2}{2B(\mathbf{x},\tau)}+\varepsilon\frac{cm^2}{e}\left[-\frac{ev_{\perp}}{mB^2}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{E})\right.\\&\quad+\frac{v_{\parallel}v_{\perp}^2}{4B^2}(3\mathbf{a}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}-\mathbf{c}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})\\&\quad\left.+\frac{v_{\parallel}^2v_{\perp}}{B^2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})+\frac{v_{\perp}^3}{2B^3}(\mathbf{a}\cdot\nabla B)\right]+\mathcal{O}(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{122}$$

上に示した$\mathbf{X}$，θに対する表式の右辺およびμに対する表式の最右辺において，B，$\mathbf{b}$および$\mathbf{R}$の値は$(\mathbf{x},\tau)$において評価され，また$\mathbf{a}$と$\mathbf{c}$は$(\mathbf{x},\tau,\theta)$の関数と見なされる．

標準案内中心座標系$(\mathbf{X},U,\Theta,\mu,\tau)$では，式(120)の基本1-形式は次のように書ける．

$$\gamma=\varepsilon^{-1}\frac{e}{c}\mathbf{A}^*(\mathbf{X},U,\mu,\tau)\cdot\mathrm{d}\mathbf{X}+\varepsilon\frac{mc}{e}\mu\mathrm{d}\theta-\varepsilon^{-1}H(\mathbf{X},U,\mu,\tau)\mathrm{d}\tau \tag{123}$$

ここで，運動方程式に影響しない$\mathrm{d}S$の部分は落としてある．また，

$$\mathbf{A}^*(\mathbf{X},U,\mu,\tau)=\mathbf{A}(\mathbf{X},\tau)+\varepsilon\frac{mc}{e}U\mathbf{b}(\mathbf{X},\tau)-\varepsilon^2\frac{mc^2}{e^2}\mu\mathbf{R}(\mathbf{X},\tau) \tag{124}$$

とおいた．式(123)から，案内中心座標系$(\mathbf{X},U,\Theta,\mu,\tau)$におけるLagrangianおよびHamiltonianは，それぞれ，

$$\begin{aligned}&L\left(\mathbf{X},U,\mu,\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau},\varepsilon\tau\right)\\&=\varepsilon^{-1}\frac{e}{c}\mathbf{A}^*(\mathbf{X},U,\mu,\tau)\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}\tau}+\varepsilon\frac{mc}{e}\mu\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\tau}-\varepsilon^{-1}H(\mathbf{X},U,\mu,\tau)\end{aligned} \tag{125}$$

$$\begin{aligned}H(\mathbf{X},U,\mu,\tau)&=\frac{1}{2}mU^2+\mu B(\mathbf{X},\tau)+e\Phi(\mathbf{X},\tau)\\&\quad+\varepsilon\frac{mc\mu U}{2e}(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})+O(\varepsilon^2)\end{aligned} \tag{126}$$

のように与えられる．式(10)および(123)を用いると，案内中心座標系$\mathbf{Z}=(\mathbf{X},U,\Theta,\mu)$に関するLagrangeテンソルの各成分$\omega_{ij}$が求められ，その中で0でないものは，

$$\begin{aligned}\omega_{X_{\alpha}X_{\beta}}&=\varepsilon^{-1}\frac{e}{c}\sum_{\gamma=1}^{3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}B_{\gamma}^{*}\qquad(\alpha,\beta=1,2,3)\\\omega_{\mathbf{X}U}&=-\omega_{U\mathbf{X}}=-m\mathbf{b}\\\omega_{\mathbf{X}\mu}&=-\omega_{\mu\mathbf{X}}=\varepsilon\frac{mc}{e}\mathbf{R}\\\omega_{\Theta\mu}&=-\omega_{\mu\Theta}=-\varepsilon\frac{mc}{e}\end{aligned} \tag{127}$$

となる．行列(ω_{ij})の逆行列を求めることにより，Poisson括弧の各成分$J^{ij}=\{Z^i,Z^j\}$は計算され，その中で0でないものは，

$$\{X_{\alpha},X_{\beta}\}=-\varepsilon\frac{c}{eB_{\parallel}^{*}}\sum_{\gamma=1^3}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}b_{\gamma}\qquad(\alpha,\beta=1,2,3)$$

$$\{\mathbf{X}, U\} = -\{U, \mathbf{X}\} = \frac{\mathbf{B}^*}{mB_\parallel^*}$$
$$\{\mathbf{X}, \Theta\} = -\{\Theta, \mathbf{X}\} = \varepsilon \frac{c}{eB_\parallel^*}\mathbf{b}\times\mathbf{R}$$
$$\{U, \Theta\} = -\{\Theta, U\} = -\frac{\mathbf{B}^*\cdot\mathbf{R}}{mB_\parallel^*}$$
$$\{\Theta, \mu\} = -\{\mu, \Theta\} = \varepsilon^{-1}\frac{e}{mc} \tag{128}$$

となる．ここで，$\mathbf{B}^*$ および $B_\parallel^*$ は，

$$\mathbf{B}^*(\mathbf{X}, U, \mu, \tau) = \nabla\times\mathbf{A}^*(\mathbf{X}, U, \mu, \tau)$$
$$B_\parallel^*(\mathbf{X}, U, \mu, \tau) = \mathbf{B}^*(\mathbf{X}, U, \mu, \tau)\cdot\mathbf{b}(\mathbf{X}, \tau) \tag{129}$$

によって定義される．上式において，勾配作用素 ∇ は案内中心の位置ベクトル$\mathbf{X}$に関する微分$\nabla = \partial/\partial\mathbf{X}$として定義されるものとする．また，式(23)と(127)を用いると，位相空間変数$(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ から$(\mathbf{X}, U, \Theta, \mu)$ への変数変換に伴う Jacobian は，

$$D = \det\left[\frac{\partial(\mathbf{x},\mathbf{v})}{\partial(\mathbf{X},U,\Theta,\mu)}\right] = \frac{B_\parallel^*}{m} \tag{130}$$

で与えられ，これは式(24)に示した Liouville の定理を満たすことが保証されている．

式(20)および(123)より，案内中心座標変数の運動方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}Z^i}{\mathrm{d}t} = \varepsilon\frac{\mathrm{d}Z^i}{\mathrm{d}\tau} = \{Z^i, H\} + \{Z^i, \mathbf{X}\}\cdot\frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial\tau} \tag{131}$$

から導かれ，式(126)および(128)を用いると，各変数に対して

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{B_\parallel^*}\left[U^*\mathbf{B}^* + \varepsilon c\,\mathbf{b}\times\left(\frac{\mu}{e}\nabla B - \mathbf{E}^*\right)\right]$$
$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathbf{B}^*}{mB_\parallel^*}\cdot(\mu\nabla B - e\,\mathbf{E}^*)$$
$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}t} = \varepsilon^{-1}\frac{eB}{mc} + \frac{U}{2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b}) + \mathbf{R}\cdot\frac{\mathrm{d}\mathbf{X}}{\mathrm{d}t}$$
$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}t} = 0 \tag{132}$$

のように表される．上式に現れる U^* や $\mathbf{E}^*$ は，

$$U^* = U + \varepsilon\frac{c}{2e}\mu(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})$$
$$\mathbf{E}^* = -\nabla\Phi^* - \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}^*}{\partial\tau}$$
$$\Phi^* = \Phi + \varepsilon\frac{mc}{2e^2}\mu U(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b}) \tag{133}$$

によって定義される．上式(132)‐(133)では，摂動展開パラメーター ε が陽に現れているが，実際に数値計算等を行うときは，$\varepsilon = 1$，$\tau = t$ と置けばよい．案内中心運動方程式(132)の右辺はジャイロ位相 θ に依存せず，μ は定数パラメーターとして取り扱うことができ，結局，Lie変換による基本1‐形式の摂動展開を行うことにより，電磁場中の荷電粒子の 6 次元位相空間変数$(\mathbf{x},\mathbf{v})$ に対する運動論的方程式系(84)は，磁気モーメント μ をもつ案内中心の 4 次元変数$(\mathbf{X}, U)$ に対する常微分方程式系に置き換えられた．

ところで，第2.8.4節において説明したように本講座で用いた標準案内中心変数では，式(114)‐(116)が成り立つように定義されているが，他によく用いられる案内中心変数では，式(115)‐(116)の代わりに，

$$\Gamma_\tau^{(1)} = 0$$
$$\Gamma_\mathbf{x}^{(2)} = -\frac{m^2cv_\perp^2}{2eB}\mathbf{W}$$
$$\equiv -\frac{m^2cv_\perp^2}{2eB}\left[\mathbf{R} + \frac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})\mathbf{b}\right] \tag{134}$$

を要請することにより定義される［式(114)に示した条件はそのまま変わらず用いられる］．これに伴い，粒子座標変数から案内中心変数への変換公式は，若干修正される．このようにして新たに構成された案内中心変数を用いると，基本1‐形式［式(123)参照］や Lagrangian［式(125)参照］に現れる $\mathbf{A}^*$ は，式(124)において，$\mathbf{R}$ を $\mathbf{W} \equiv \mathbf{R} + \frac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})\mathbf{b}$ に置き換えることにより定義される．また，Hamiltonian は，式(126)において，$\mathcal{O}(\varepsilon)$ の項$(mc\mu U/2e)(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})$ を消去したものに置き換わる．その結果，式(127)‐(128)に示したLagrangeテンソルおよびPoisson括弧の成分の表式や運動方程式(132)においても，$\mathbf{R}$ は $\mathbf{W}$ に置き換わり，式(132)や(133)において，Hamiltonian の$\mathcal{O}(\varepsilon)$ の項に由来し，$\mathrm{d}\Theta/\mathrm{d}t$，$U^*$ や Φ^* の表式に現れる$(\mathbf{b}\cdot\nabla\times\mathbf{b})$ に比例する項は消え去る．

2.9　おわりに

本講座では，Hamilton 力学の基礎となる基本1‐形式に対する Lie 変換摂動法の適用法について述べ，プラズマ物理における重要な応用例として，強磁場下での荷電粒子に対する案内中心方程式の導出過程を示した．この方法の便利な点の一つは，Hamilton 力学に従う系に対して摂動法を適用するにあたって，正準変数でないものを含む，より一般的な位相空間変数を用いることができるところにある．Lie 変換を用いることにより，原理的に摂動展開の任意のオーダーまで，基本1‐形式からジャイロ位相依存性を系統的に除去し，磁気モーメントを含む案内中心座標変数を正確に定義し，高精度の案内中心運動方程式を導くことが可能となった．あるオーダーで打ち切っても基本1‐形式に基づくので，Hamilton 力学に従い，位相空間体積不変性(Liouville の定理) 等の性質を維持し，また，磁気モーメントの保存の例のように，Noether の定理に基づき対称性から直ちに保存則を導くことができる．他の保存量の例として，背景電磁場が時間に陽に依存しない場合に Hamiltonian が表す荷電粒子の運動エネルギーと静電ポテンシャルエネルギーの和や，トカマクのような軸対称磁場配位における正準トロイダル角運動量が挙げられる．

トーラス磁場に閉じ込められた高温プラズマの荷電粒子

がクーロン衝突散乱することにより引き起こされる新古典輸送[12]は，大きな平均自由行程をもつ粒子の案内中心軌道の幾何学的形状に強く影響され，新古典輸送の理論シミュレーション研究に案内中心の運動方程式は欠かせない．トーラス磁場における荷電粒子に対するBoozerの案内中心方程式[13]は，Hamilton正準方程式の形をとるものとして知られているが，トーラス磁場に対するBoozer磁気面座標[14]を用いて，本講座で扱ったLittlejohnの基本1-形式を書き換えることにより，容易に導くことができる[15].

上述の案内中心方程式やまた新古典輸送理論では，電磁場が時間的にも空間的にもゆっくり変化するものと仮定してきた．しかし，プラズマの背景密度や温度の勾配等により駆動される微視的な不安定性が乱流状態を生み出し，新古典輸送よりも大きなプラズマ乱流輸送を引き起こす．このような微視的不安定性や乱流輸送を扱うのがジャイロ運動論である[11, 16, 17]．プラズマの微視的な乱流揺動を取り扱うため，Littlejohnの基本1-形式に微視的な揺動電磁場を加えたものを出発点とし，Lie変換摂動法を用いて，乱流揺動の存在する場合においても保存するような磁気モーメントを含む位相空間変数（案内中心変数と区別してジャイロ中心変数とよばれることがある）およびそれらに対する運動方程式が導かれている．近年，磁場閉じ込めプラズマ乱流輸送の研究のため，大規模なジャイロ運動論的シミュレーションが精力的に行われている[18-20].

以上の例では，荷電粒子の運動を記述する基本1-形式あるいはLagrangianと運動方程式を扱ってきたが，荷電粒子の運動が生み出す電磁場に対する方程式も変分原理により導くため，粒子と電磁場の系全体を記述するLagrangianに基づくジャイロ運動論的な場の理論が構築され，それに基づいて，系全体のエネルギーや運動量の保存則あるいは輸送方程式の導出がなされている[21-23]．また，本講座で解説した微分幾何的な手法は，基本方程式やその保存則の導出のみならず，シンプレクティック数値積分法や変分積分法等の高度な数値計算手法の開発にも応用されている[24].

最後に，本講座の執筆にあたって貴重な助言をいただいた鳥取大学の古川勝氏に深く感謝いたします.

参 考 文 献

[1] H. Goldstein, *et al., Classical Mechanics,* 3rd ed. (Addison-Wesley, San Francisco, 2002).(邦訳，H．ゴールドスタイン，C．プール，J．サーフコ著，矢野忠・江沢康生・渕崎員弘訳：古典力学（上・下） 原著第３版（吉岡書店，2006，2009).

[2] 松島与三：多様体入門（裳華房，1965).

[3] 大森英樹：力学的な微分幾何（日本評論社，1980).

[4] V.I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer, New York, 1978).（邦訳，V.I.アーノルド著，安藤韶一・蟹江幸博・丹羽敏雄訳：古典力学の数学的方法，岩波書店，1980).

[5] R.G. Littlejohn, J. Math. Phys. **23** , 742 (1982).

[6] J.R. Cary and R.G. Littlejohn, Ann. Phys. **151** , 1 (1983).

[7] R.G. Littlejohn, Phys. Fluids **24**, 1730 (1981).

[8] R.G. Littlejohn, J. Plasma Phys. **29**, 111 (1983).

[9] R.G. Littlejohn, *Variational Principles of Guiding Center Motion,* Report PPG-611, Center for Plasma Physics and Fusion Engineering, Univ. of California, Los Angels 1982.

[10] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, *Plasma Confinement* (Addison-Wesley, Redwood City, California, 1992), Chap.8.1.

[11] 洲鎌英雄，渡邉智彦：日本物理学会誌 **68**, 296 (2013).

[12] P. Helander and D.J. Sigmar, *Collisional Transport in Magnetized Plasmas* (Cambridge University Press, Cambridge, 2002).

[13] A.H. Boozer, Phys. Fluids **23**, 904 (1980).

[14] A.H. Boozer, Phys. Fluids **24**, 1999 (1981).

[15] R.G. Littlejohn, Phys. Fluids **28**, 2015 (1985).

[16] 洲鎌英雄：プラズマ・核融合学会誌 **79**, 107 (2003).

[17] A.J. Brizard and T.S. Hahm, Rev. Mod. Phys. **79**, 421 (2007).

[18] 渡邉智彦，洲鎌英雄：プラズマ・核融合学会誌 **81**, 534 (2005).

[19] Y. Idomura *et al.*, Comptes Rendus Physique **7**, 650 (2006).

[20] X. Garbet *et al.,* Nucl. Fusion **50**, 043002 (2010).

[21] H. Sugama, Phys. Plasmas **7**, 466 (2000).

[22] H. Sugama *et al.,* Phys. Plasmas **21** , 012515 (2014).

[23] J.A. Krommes, Annu. Rev. Fluid Mech. **44** , 175 (2012).

[24] E. Hairer *et al., Geometric Numerical Integration: Structure-Preserving Algorithms for Ordinary Differential Equations,* 2nd ed. (Springer-Verlag, Berlin, 2006).

Appendix

2. A：多様体上のベクトル場と微分形式

ここでは，多様体，ベクトル場，微分形式等，本講座で用いられる微分幾何学の道具立てに関する補足説明を行う.

空間（より厳密には位相空間）M が n 次元の多様体とよばれる場合，M に対して座標近傍系 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が存在する．ここで，$M = \cup_{\alpha \in A} U_\alpha$ であり，M の各点 a は必ずある近傍 U_α に属する．ϕ_α は，U から $\mathbb{R}^n$ のある開集合 $E_\alpha = \phi_\alpha(U_\alpha)$ の上への１対１の連続な写像であり，その逆写像 ϕ_α^{-1} も連続であるとする．$\phi_\alpha(a) = (x_\alpha^1(a), \cdots, x_\alpha^n(a))$ は，座標近傍(U_α, ϕ_α)に関する点$a \in U_\alpha$の局所座標を表す．$a \in U_\alpha \cap U_\beta \neq \phi\phi$ のとき，a の二通りの座標 $\phi_\alpha(a) = (x_\alpha^1(a), \cdots, x_\alpha^n(a))$ と $\phi_\beta(a) = (x_\beta^1(a), \cdots, x_\beta^n(a))$ の間には，

$$x_\beta^i(a) = f_{\beta\alpha}^i(x_\alpha^1(a), \cdots, x_\alpha^n(a)) \qquad (i = 1, \cdots, n) \qquad (\mathrm{A.1})$$

なる関係式がある．ただし，上式において，$f_{\beta\alpha}^i\ (i = 1, \cdots, n)$ は，$u = (u^1, \cdots, u^n) \in \phi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ の関数として，

$$\begin{aligned} f_{\beta\alpha}(u) &= (f_{\beta\alpha}^1(u^1, \cdots, u^n), \cdots, f_{\beta\alpha}^n(u^1, \cdots, u^n)) \\ &= \phi_\beta \circ \phi_\alpha^{-1}(u) \end{aligned} \qquad (\mathrm{A.2})$$

により定義される．ここで，記号$\circ$は写像の合成を意味する．$f_{\beta\alpha}$ の逆写像は，$f_{\alpha\beta} = (f_{\beta\alpha})^{-1} = \phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} = (f_{\alpha\beta}^1, \cdots, f_{\alpha\beta}^n)$ により表される．M が可微分多様体であるとは，局所座標系 $\phi_\alpha = (x_\alpha^1, \cdots, x_\alpha^n)$ と $\phi_\beta = (x_\beta^1, \cdots, x_\beta^n)$ の間の変換を表す関数 $f_{\beta\alpha}^i$ および $f_{\alpha\beta}^i (i = 1, \cdots, n)$ が微分可能な関数であることを

意味する．

多様体M上で定義される実数値関数（スカラー場ともよばれる）fを考えよう．多様体M上の点$a\in U_\alpha$における関数fの値は，$u=(u^1,\cdots,u^n)\in\phi_\alpha(U_\alpha)$の関数$F_\alpha(u)=f\circ\phi_\alpha^{-1}(u)=F_\alpha(u^1,\cdots,u^n)$を使えば，局所座標系$\phi_\alpha=(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$に関して，

$$f(a)=F_\alpha(\phi_\alpha(a))=F_\alpha(x_\alpha^1(a),\cdots,x_\alpha^n(a)) \tag{A.3}$$

のように表現される．$a\in U_\beta$のときも同様に局所座標系$\phi_\beta=(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^n)$に関する$f(a)$の表現が，$\phi_\beta(U_\beta)$上の関数$F_\beta=f\circ\phi_\beta^{-1}$を使うことにより得られる．$a\in U_\alpha\cap U_\beta(\neq\phi)$の場合，2つの局所座標系$\phi_\alpha=(x_\alpha^1,\cdots,x_\alpha^n)$と$\phi_\beta=(x_\beta^1,\cdots,x_\beta^n)$に関して$f(a)$を表現する関数$F_\alpha$と$F_\beta$は，前述の$f_{\beta\alpha}=\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1}$を用いることによって，$F_\alpha=F_\beta\circ f_{\beta\alpha}$即ち

$$F_\alpha(u^1,\cdots,u^n)=F_\beta(f_{\beta\alpha}^1(u^1,\cdots,u^n),\cdots,f_{\beta\alpha}^n(u^1,\cdots,u^n)) \tag{A.4}$$

のように関係づけられる．座標変換を表す関数$f_{\beta\alpha}$および$f_{\alpha\beta}=f_{\beta\alpha}^{-1}$が可微分であることから，スカラー場$f$の局所座標系$\phi_\alpha=(x_\alpha^i)_{i=1,\cdots,n}$に関する表現$F_\alpha$が可微分であることと，$\phi_\beta=(x_\beta^i)_{i=1,\cdots,n}$に関する表現$F_\beta$が可微分であることが同値であることが，式(A.4)からわかる．したがって，スカラー場fが可微分であるとは，局所座標系に関してfを表現する関数F_αが可微分であることと定義することが，局所座標系の選び方によらずにできる．

多様体M上のベクトル場Xは，局所座標系$x=(x^i)_{i=1,\cdots,n}$を用いると，

$$X=\sum_{i=1}^n \xi^i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{A.5}$$

のように，M上の実数値関数fに対する微分作用素として解釈される．M上の点aにおけるベクトル場Xによるfの微分の値は，

$$X_af=\sum_{i=1}^n \xi^i(a)\frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \tag{A.6}$$

のように表される．

点aにおける微分作用X_aは，点aにおけるMの接ベクトルとよばれ，X_aがなすn次元ベクトル空間$T_a(M)=\{\sum_{i=1}^n v^i(\partial/\partial x^i)_a|(v^i)_{i=1,\cdots,n}\in\mathbb{R}^n\}$は，点$a$における$M$の接ベクトル空間とよばれる．また，$n$次元の多様体$M$の各点の接ベクトル空間の合併$T(M)=\cup_{a\in M}T_a(M)$は，接バンドルとよばれ，局所座標系$(x^i,v^i)_{i=1,\cdots,n}$を持つ$2n$次元の多様体となる．

式(A.5)からわかるように，局所座標系$x=(x^i)_{i=1,\cdots,n}$に関するベクトル場Xの成分ξ^iは，以下のようにXを微分作用素としてx^iに作用させたものである．

$$\xi^i=Xx^i \tag{A.7}$$

別の局所座標系$\overline{x}=(\overline{x}^i)_{i=1,\cdots,n}$に関するベクトル場$X$の成分$\overline{\xi}^i$は，$X$を微分作用素として$\overline{x}^i$に作用させることにより得られ，式(A.5)と(A.7)よりわかるように，2つの局所座標系$\overline{x}$とxに関するXのそれぞれの成分は，

$$\overline{\xi}^i=\sum_{j=1}^n\frac{\partial\overline{x}^i}{\partial x^j}\xi^j \tag{A.8}$$

によって関係づけられる．ベクトル場Xによるスカラー場fとgの積の微分に対して，Leibnizの規則とよばれる次の関係式が成り立つ．

$$X(fg)=Xf\cdot g+f\cdot Xg \tag{A.9}$$

多様体M上のスカラー場fの微分dfは，次式で表されるように，ベクトル場Xに対してスカラー場d$f(X)$を対応させるものとして定義される．

$$\mathrm{d}f(X)=Xf=\sum_{i=1}^n\xi^i\frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{A.10}$$

ベクトル場Xに対してLie微分L_Xという作用素が定められる．ベクトル場YのLie微分L_XYはベクトル場であり，以下のように$X=\sum_i\xi^i\partial/\partial x^i$と$Y=\sum_i\eta^i\partial/\partial x^i$の交換子積$[X,Y]$（Lie括弧積ともよばれる）として定義される．

$$L_XY=[X,Y]=XY-YX$$
$$=\sum_{i,j}\left(\xi^i\frac{\partial\eta^j}{\partial x^i}-\eta^i\frac{\partial\xi^j}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^j} \tag{A.11}$$

交換子積は，以下に示されるように，線形性，反対称性，Jacobiの恒等式を満足する．

$$[\lambda X+\mu Y,Z]=\lambda[X,Z]+\mu[Y,Z]$$
$$[X,Y]=-[Y,X]$$
$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0 \tag{A.12}$$

上式において，λ，μは実数定数である．

多様体Mから多様体M'への写像φを考えよう．写像φの微分（differential）あるいはpush forwardとよばれるφ_*は，以下に示す定義に従い，M上のベクトル場Xに多様体M'上のベクトル場φ_*Xを対応させるものである．

$$(\varphi_*X)_{\varphi(a)}f=((\varphi_*)_aX_a)f=X_a(\varphi^*f)=X_a(f\circ\varphi) \tag{A.13}$$

上式(A.13)は，M上の点aの接ベクトルX_aにM'上の点$\varphi(a)$の接ベクトル$(\varphi_*X)_{\varphi(a)}=(\varphi_*)_aX_a$を対応させる規則を表す．上式において，写像$\varphi$による$M$上の実数値関数$f$の引き戻し（pull back）は，

$$\varphi^*f=f\circ\varphi \tag{A.14}$$

のようにfとφの合成関数$[(f\circ\varphi)(a)=f(\varphi(a))]$として定義される．また，次式のように，push forwardと交換子積の順序を入れ換えることができることが示される．

$$\varphi_*[X,Y]=[\varphi_*X,\varphi_*Y] \tag{A.15}$$

$(x^i)_{i=1,\cdots,n}$をn次元多様体M上の点aの近傍における局所座標系，$(y^i)_{i=1,\cdots,m}$をm次元多様体M'上の点$\varphi(a)$の近傍における局所座標系としよう．すると，M'上の点$\varphi(a)$における接ベクトル$(\varphi_*X)_{\varphi(a)}$の局所座標系

$(y^i)_{i=1,\cdots,m}$ に関する各成分 $(\varphi_* X)_{\varphi(a)} y^i$ と，M 上の点 a における接ベクトル X_a の局所座標系 $(x^i)_{i=1,\cdots,n}$ に関する各成分 $X_a x^i = \xi^i(a)$ は，

$$(\varphi_* X)_{\varphi(a)} y^i = X_a(\varphi^* y^i) = X_a(\varphi^i) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \varphi^i}{\partial x^j}(a) \xi^j(a) \tag{A.16}$$

で表されるように，$(\partial \varphi^i / \partial x^j)(a)$ を (i,j) 成分とする $m \times n$ 行列によって関係づけられる．ただし，ここで，$\varphi^* y^i = y^i \circ \varphi = \varphi^i$ とおいた．

さて，φ_ε を，多様体 M からそれ自身への写像であり，微小パラメータ ε に依存し，

$$\varphi_{\varepsilon_1+\varepsilon_2} = \varphi_{\varepsilon_1} \circ \varphi_{\varepsilon_2} \tag{A.17}$$

を満足するものとしよう．さらに多様体 M 上の任意の点 a に対して $\varphi_0(a) = a$ であり，ε に関する微分方程式

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x^i(\varphi_\varepsilon(a))}{\mathrm{d}\varepsilon} &= X_{\varphi_\varepsilon(a)} x^i \\ &= \xi^i(x^1(\varphi_\varepsilon(a)), \cdots, x^n(\varphi_\varepsilon(a))) \end{aligned} \tag{A.18}$$

が成り立つものとする．上式(A.18)は，$\varphi_\varepsilon(a)$ がベクトル場 $X = \sum_i \xi^i \partial / \partial x^i$ の積分曲線を与えることを意味する．このようにして定義される φ_ε を

$$\varphi_\varepsilon = \mathrm{Exp}(\varepsilon X) \tag{A.19}$$

のように表記しよう．この $\varphi_\varepsilon = \mathrm{Exp}(\varepsilon X)$ が本講座で Lie 変換とよばれるものであり，参考文献[6]における Lie 変換の定義に対応するものである．ただし，他の文献では，ベクトル場 X が Hamilton ベクトル場[式(41)参照]のときに，$\varphi_\varepsilon = \mathrm{Exp}(\varepsilon X)$ を Lie 変換とよぶことが多いことを断っておこう．また，文献[2]等では，$\mathrm{Exp}(tX)$ の表記は $-\infty < t < \infty$ で定義された1パラメータ変換群を表すためのものであり，上述の微小パラメータ ε に対して定義された Lie 変換 φ_ε は1パラメータ局所群とよばれるものに対応することを注意しておこう．

k 次微分形式（k-形式あるいは k 次交代共変テンソル場）とよばれるものは，多様体上の k 個のベクトル場 $(X_1, \cdots, X_k)$ にスカラー場 $\omega(X_1, \cdots, X_k)$ を対応させる写像 ω で，以下のような線形性，

$$\begin{aligned} &\omega(X_1, \cdots, fX_i + gY_i, \cdots, X_k) \\ &\quad = f\omega(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_k) + g\omega(X_1, \cdots, Y_i, \cdots, X_k) \\ &\qquad (f, g：\text{スカラー場}) \end{aligned} \tag{A.20}$$

をもち，

$$\omega(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(k)}) = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(X_1, \cdots, X_k) \tag{A.21}$$

を満足するものである．ここで，σ は k 個の整数 $(1, \cdots, k)$ の置換であり，$\mathrm{sgn}(\sigma)$ は σ の符号［σ が偶（奇）置換のとき，$\mathrm{sgn}(\sigma) = 1(-1)$］を表す．$k$-形式 ω と l-形式 ψ の外積 $\omega \wedge \psi$ は，$(k+l)$-形式であり，

$$\begin{aligned} &(\omega \wedge \psi)(X_1, \cdots, X_{k+l}) \\ &\quad = \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{k+l}} \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, \cdots, X_{\sigma(k)}) \\ &\qquad \times \psi(X_{\sigma(k+1)}, \cdots, X_{\sigma(k+l)}) \end{aligned} \tag{A.22}$$

により定義される．ここで，$\mathfrak{S}_{k+l}$ は，$(k+l)$ 個の整数 $(1, \cdots, k+l)$ の置換全体のなす群を表す．この定義に従うと，外積の順序の入れ換えに対して，

$$\omega \wedge \psi = (-1)^{kl} \psi \wedge \omega \tag{A.23}$$

が成り立つ．局所座標系 $(x^i)_{i=1,\cdots,n}$ に関して k-形式 ω は，

$$\begin{aligned} \omega &= \sum_{i_1 < \cdots < i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \cdots, i_k} \omega_{i_1 \cdots i_k} \mathrm{d}x^{i_1} \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}x^{i_k} \end{aligned} \tag{A.24}$$

のように表現される．ここで，局所座標系 $(x^i)_{i=1,\cdots,n}$ に関する k-形式 ω の各成分は，

$$\omega_{i_1 \cdots i_k} = \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{i_k}}\right) \tag{A.25}$$

により与えられ，$(1, \cdots, k)$ の置換 σ に対して，

$$\omega_{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(k)}} = \mathrm{sgn}(\sigma)\omega_{i_1 \cdots i_k} \tag{A.26}$$

が成り立つ．局所座標系を $(x^i)_{i=1,\cdots,n}$ から $(\bar{x}^i)_{i=1,\cdots,n}$ に移すと，ω の成分は，

$$\begin{aligned} &\omega\left(\frac{\partial}{\partial \bar{x}^{i_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial \bar{x}^{i_k}}\right) \\ &\quad = \sum_{i_1, \cdots, i_k} \frac{\partial x^{j_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_k}}{\partial \bar{x}^{i_k}} \omega\left(\frac{\partial}{\partial x^{j_1}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^{j_k}}\right) \end{aligned} \tag{A.27}$$

のように変換される．また，ベクトル場 X と k-形式 ω の内部積 $i(X)\omega$ は $(k-1)$-形式であり，

$$(i(X)\omega)(X_1, \cdots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \cdots, X_{k-1}) \tag{A.28}$$

により定義される．

1-形式 $\theta = \sum_i \theta_i \mathrm{d}x^i$ は，ベクトル場 $X = \sum_i X^i \partial / \partial x^i$ に対して，スカラー場 $\theta(X) = \sum_i \theta_i X^i$ を対応させる．式(A.10)で定義されたスカラー場 f の微分は，$\mathrm{d}f = \sum_i (\partial f / \partial x^i) \mathrm{d}x^i$ のように表される1-形式の一つである．多様体 M 上の各点 a における $\theta(X)$ の値は，$\theta_a(X_a) = \sum_i \theta_i(a) X^i(a)$ と表され，接ベクトル $X_a = \sum_i X^i(a)(\partial / \partial x^i)_a$ と余接ベクトル $\theta_a = \sum_i \theta_i(a)(\mathrm{d}x^i)_a$ の内積と見なされる．接ベクトルが反変ベクトルともよばれるのに対して，余接ベクトルは共変ベクトルともよばれる．n 次元多様体 M 上の点 a における接ベクトル空間 $T_a(M)$ の双対空間である余接ベクトル空間は，$T_a^*(M) = \{\sum_{i=1}^n p_i (\mathrm{d}x^i)_a | (p_i)_{i=1,\cdots,n} \in \mathbb{R}^n\}$ で表され，M の各点の余接ベクトル空間の合併 $T^*(M) = \cup_{a \in M} T_a^*(M)$ は，余接バンドルとよばれ，局所座標系 $(x^i, p_i)_{i=1,\cdots,n}$ をもつ $2n$ 次元の多様体となる．

ベクトル場 X の定める Lie 微分 L_X は，微分形式にも作用

する．0次の微分形式，即ち，スカラー場 f の Lie 微分 $L_X f$ は，

$$L_X f = Xf \tag{A.29}$$

であり，ベクトル場 X に沿ったスカラー場 f の微分に過ぎない．一般の k -形式 ω の Lie 微分 $L_X\omega$ は，

$$(L_X\omega)(X_1,\cdots,X_k) = X(\omega(X_1,\cdots,X_k)) - \sum_{j=1}^{k}\omega(X_1,\cdots,[X,X_j],\cdots,X_k) \tag{A.30}$$

によって定義される．

外微分演算子 d とは，k -形式 ω に $(k+1)$ -形式 $d\omega$ を対応させるものであり，$(k+1)$ -形式 $d\omega$ は，

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_1,\cdots,X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1}X_i(\omega(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i<j}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,\hat{X}_j,\cdots,X_{k+1})\end{aligned} \tag{A.31}$$

によって定義される．上式の右辺において，$\hat{\cdot}$ の記号は，$\cdot$ が変数の中から取り除かれていることを表す．例えば，$(X_1,\cdots,\hat{X}_i,\cdots,X_{k+1})$ は，$(X_1,\cdots,X_{i-1},X_{i+1},\cdots,X_{k+1})$ を意味する．式（A. 24）で表された k - 形式 ω の外微分 $d\omega$ は，

$$\begin{aligned}d\omega &= \sum_{i_1<\cdots<i_k} d\omega_{i_1\cdots i_k}\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_k} \\ &= \frac{1}{(k+1)!}\sum_{i_1,\cdots,i_{k+1}}\left(\sum_{j=1}^{k+1}(-1)^{j+1}\frac{\partial\omega_{i_1\cdots\hat{i}_j\cdots i_{k+1}}}{\partial x^{i_j}}\right)dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_{k+1}}\end{aligned} \tag{A.32}$$

のように表すことができる．外微分のさらに外微分をとると 0 になる．

$$d^2 = 0 \tag{A.33}$$

多様体 M から多様体 M' への写像 φ による M' 上の k -形式 ω の引き戻し（pull back）$\varphi^*\omega$ とは，M 上の k -形式であり，

$$\begin{aligned}&(\varphi^*\omega)_a((X_1)_a,\cdots,(X_k)_a) \\ &= \omega_{\varphi(a)}((\varphi_* X_1)_{\varphi(a)},\cdots,(\varphi_* X_k)_{\varphi(a)})\end{aligned} \tag{A.34}$$

により定義される．局所座標系 $(x^i)_{i=1,\cdots,n}$ に関して，式（A.24）のように表された k - 形式 ω に対して，pull back $\varphi^*\omega$ は，

$$\varphi^*\omega = \sum_{i_1<\cdots<i_k}\varphi^*\omega_{i_1\cdots i_k}d\varphi^*x^{i_1}\wedge\cdots\wedge d\varphi^*x^{i_k} \tag{A.35}$$

のように書ける．pull back と外微分の演算の順序は，次式のように入れ換えることができる．

$$\varphi^* d\omega = d\varphi^*\omega \tag{A.36}$$

以上で定義されたベクトル場や微分形式に関する演算の間に成り立つ諸公式を以下に記しておく．

$$\begin{aligned}&L_{[X,Y]} = L_X L_Y - L_Y L_X, \\ &i([X,Y]) = L_X i(Y) - i(Y)L_X, \\ &L_X = di(X) + i(X)d, \\ &dL_X = L_X d, \\ &L_X(\omega\wedge\phi) = (L_X\omega)\wedge\phi + \omega\wedge(L_X\phi), \\ &i(X)(\omega\wedge\phi) = (i(X)\omega)\wedge\phi + (-1)^k\omega\wedge(i(X)\phi), \\ &d(\omega\wedge\phi) = (d\omega)\wedge\phi + (-1)^k\omega\wedge(d\phi)\end{aligned} \tag{A.37}$$

上式において，X と Y はベクトル場，ω と ϕ は微分形式であり，k は微分形式 ω の次数を表す．

2.B：ジャイロゲージ変換

第2.8.2節において，時刻 τ，空間点 $\mathbf{x}$ ごとに正規直交基底ベクトルの組 $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b})$ を設けたが，この中で，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ の取り方には任意性があり，これは，ジャイロ位相 θ を測るときの基準となる方向の取り方（これをジャイロゲージとよぶ）に任意性があることを意味している[7-9]．例えば，以下の式に示すように，$\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ の代わりに，新たに $\mathbf{e}'_1$，$\mathbf{e}'_2$ として，角度 ϕ だけ方向をずらしたものを採用すれば，新たに定義されるジャイロ位相 θ' も角度 ϕ だけずれる．

$$\begin{aligned}&\mathbf{e}'_1 = \cos\phi\,\mathbf{e}_1 + \sin\phi\,\mathbf{e}_2 \\ &\mathbf{e}'_2 = -\sin\phi\,\mathbf{e}_1 + \cos\phi\,\mathbf{e}_2 \\ &\theta' = \theta + \phi\end{aligned} \tag{B.1}$$

さて，$(\mathbf{x}, \tau)$ に依存するベクトル $\mathbf{e}_1$，$\mathbf{e}_2$ を用いて，次のようなベクトル $\mathbf{R}$ とスカラー σ を定義しよう．

$$\mathbf{R} = \nabla\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2, \qquad \sigma = \frac{\partial\mathbf{e}_2}{\partial\tau}\cdot\mathbf{e}_1 \tag{B.2}$$

式(B.1)に示されたジャイロゲージ変換に伴い，上記のベクトル $\mathbf{R}$ とスカラー σ は，ジャイロ位相角のシフト ϕ を用いて，

$$\begin{aligned}&\mathbf{R}' = \nabla\mathbf{e}'_1\cdot\mathbf{e}'_2 = \mathbf{R} + \nabla\phi \\ &\sigma' = \frac{\partial\mathbf{e}'_2}{\partial\tau}\cdot\mathbf{e}'_1 = \sigma - \frac{\partial\phi}{\partial\tau}\end{aligned} \tag{B.3}$$

のように変換される．上式で与えられた $\mathbf{R}$ と σ のジャイロゲージ変換は，それぞれ，電磁場に対するベクトルポテンシャルと静電ポテンシャルのゲージ変換と同じ形をしていることがわかる．

次に，$z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ を座標系とする7次元空間におけるベクトル場 G を，以下のように，座標系 $z = (\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ に関して表現してみよう．

$$G = \mathbf{G}^{\mathbf{x}}\cdot\nabla + G^{v_\parallel}\frac{\partial}{\partial v_\parallel} + G^{\theta}\frac{\partial}{\partial\theta} + G^{v_\perp}\frac{\partial}{\partial v_\perp} + G^{\tau}\frac{\partial}{\partial\tau} \tag{B.4}$$

式(B.1)に示したジャイロゲージ変換により，座標変数の中でジャイロ位相のみ変えた新しい座標系 $(\mathbf{x}, v_\parallel, \theta', v_\perp, \tau)$ に関するベクトル場 G の各成分を考えると，ジャイロ位相に関する成分だけが旧座標系に関する成分から，

$$G^{\theta'} = G^{\theta} + \mathbf{G}^{\mathbf{x}}\cdot\nabla\psi + G^{\tau}\frac{\partial\psi}{\partial\tau} \tag{B.5}$$

のように変化する．ここで，

$$G^{\theta} = (G^{\theta})_0 + \mathbf{R}\cdot\mathbf{G}^{\mathbf{x}} - \sigma G^{\tau} \tag{B.6}$$

とおくと，式(B.3)と(B.5)より，ジャイロゲージ変換により G^{θ} が変化するのは，上式(B.6)の右辺の $\mathbf{R}$ と σ の部分のみであり，$(G^{\theta})_0$ はジャイロゲージ不変な項であることがわかる．

こんどは，7次元空間上の1-形式 γ を座標系 $z=(\mathbf{x}, v_\parallel, \theta, v_\perp, \tau)$ に関して表現してみよう．

$$\gamma = \gamma_{\mathbf{x}}\cdot \mathrm{d}\mathbf{x} + \gamma_{v_\parallel}\mathrm{d}v_\parallel + \gamma_\theta \mathrm{d}\theta + \gamma_{v_\perp}\mathrm{d}v_\perp + \gamma_\tau \mathrm{d}\tau \tag{B.7}$$

式(B.1)のジャイロゲージ変換を行った座標系 $(\mathbf{x}, v_\parallel, \theta', v_\perp, \tau)$ に関する1-形式 γ の各成分を考えると，$\mathbf{x}$ と τ に関する成分のみが変化し，

$$\gamma'_{\mathbf{x}} = \gamma_{\mathbf{x}} - \gamma_\theta \nabla\psi,$$
$$\gamma'_\tau = \gamma_\tau - \gamma_\theta \frac{\partial\psi}{\partial\tau} \tag{B.8}$$

となる．ここで，

$$\gamma_{\mathbf{x}} = (\gamma_{\mathbf{x}})_0 - \gamma_\theta \mathbf{R},$$
$$\gamma_\tau = (\gamma_\tau)_0 + \gamma_\theta \sigma \tag{B.9}$$

とおくと，式(B.3)と(B.8)から，ジャイロゲージ変換により $\gamma_{\mathbf{x}}$，γ_τ の変化する部分は，上式(B.9)の右辺の $\mathbf{R}$ と σ の部分のみであり，$(\gamma_{\mathbf{x}})_0$，$(\gamma_\tau)_0$ はジャイロゲージ不変な項であることがわかる．

すがま ひでお
洲鎌英雄

自然科学研究機構核融合科学研究所ヘリカル研究部核融合理論シミュレーション研究系　教授．専門は，磁場閉じ込め核融合プラズマの物理．特に，ジャイロ運動論に基づくプラズマの微視的不安定性，新古典・乱流輸送の理論研究を行っている．休日，家族で中央高速をドライブし，温泉に行くのが楽しみである．