J. Plasma Fusion Res. Vol.91, No.1 (2015) 48‐50

講座

粒子運動論～惑星から荷電粒子まで

Particle Kinetics – from Planets to Charged Particles

1．はじめに

1. Introduction

古川　勝
FURUKAWA Masaru
鳥取大学大学院工学研究科

（原稿受付：2014年12月８日）

本講座「粒子運動論～惑星から荷電粒子まで」は，質点系の力学に関して，標準的な解析力学の教科書から先に進んだ理論およびその応用を，主に学部高学年から大学院修士課程の学生を対象として平易に解説するものである．

標準的な教科書から先の理論として，やはりV.I.Arnol'dによる幾何学的アプローチ（"Mathematical Methods of Classical Mechanics"，日本語訳は“古典力学の数学的方法”，訳：安藤，蟹江，丹羽）を外すことはできない．そこでは，力学理論が多様体や微分形式の言葉で語られ，Hamilton力学は相空間の幾何学と位置づけられている．幾何学は，ものの形の性質を座標系の取り方によらずに記述する学問であり，物理法則が座標変換に関して共変的であることを考えれば，この幾何学的アプローチは極めて理に適っている．そして，本講座でも取り上げる様々な分野で，この幾何学的アプローチに沿って洗練された研究が行われてきた．個々の分野におけるマイルストーン的な文献を挙げることは各章に譲るが，ともかく，最先端を切り拓く研究は，力学に関する題材であればやはりこのような幾何学的アプローチに基づいたものであろう．本講座でこれらの現代的な研究について学んでいただき，研究の最前線にいち早く辿り着き，また後世に残る研究をしていただければ幸いである．

本講座は，まず前半で基礎理論および必要な数学的知識を解説した上で，後半ではこのような洗練された力学理論を用いた応用研究を紹介し，読者がより具体的なイメージを湧かせることができるように構成した．この「はじめに」では，ごく簡単に解析力学の基礎を振り返った後，洗練された幾何学的アプローチが重要である問題提起を行い，２章以降の簡単な紹介を行う．

先述のように，本講座は力学理論の幾何学的アプローチに関するものである．そこで，標準的な解析力学の教科書に載っている程度の事項について，ごく簡単におさらいしておく．解析力学では，まず質点の位置を一般化座標 $q(t)$ で表す．これは，時間 t をパラメータとして質点の位置を表す量であればよく，距離の次元をもった量でなくて構わない．一般化座標の時間変化率を $\dot{q}(t)$ と書く．Lagrangian $L(q,\dot{q},t)=$（運動エネルギー）－（ポテンシャルエネルギー）を用いて作用積分 $I:=\int_{t_0}^{t_1}L(q,\dot{q},t)\mathrm{d}t$ を定義する．$q(t_0)$ と $q(t_1)$ は固定して $q(t)$ を様々に変化させるときに I が停留値となる変分原理から，Lagrange方程式 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0$ を得る．これを満たす $q(t)$ が物理的に正しい運動を与える．Lagrangianが座標 q に依らなければ（$\frac{\partial L}{\partial q}=0$），対応する一般化運動量 $p:=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}$ が保存量となる．Lagrangianはスカラーなので，座標変換に関して不変であるから，適切な一般化座標を選んで保存量をみつける作業，つまり運動を積分する作業を楽に行える．

このLagrange力学では，$\dot{q}(t)$ は $q(t)$ の時間変化率であるという関係があった．一般化運動量 $p=\frac{\partial L}{\partial\dot{q}}$ を $\dot{q}$ について解いて $\dot{q}(q,p)$ を求め，Hamiltonian $H(q,p,t):=p\dot{q}(q,p)-L(q,\dot{q}(q,p),t)$ を定義し，作用積分の停留条件を (q,p) の相空間で求めるとHamilton方程式（正準方程式）$\dot{q}(t)=\frac{\partial H}{\partial p}$ および $\dot{p}(t)=-\frac{\partial H}{\partial q}$ が得られる．Hamilton力学

Graduate School of Engineering, Tottori University, TOTTORI 680-8552, Japan

author's e-mail: furukawa@damp.tottori-u.ac.jp

では q と p は正準変数と呼ばれ，Lagrange 力学と違って q と p の間に従属な関係がない形に一般化されている．そのため，Lagrange 力学では Lagrangian が q に依らなければ p が保存量になるだけだったのに対し，Hamilton 力学では Hamiltonian が q に依らなければ p が保存量となるのと同時に，Hamiltonian が p に依らなければ q が保存量となる．やはり，運動を積分するには，どのような変数を用いるかが大変重要である．Lagrangian 同様，Hamiltonian もスカラーなので，変数変換の作業を楽に行える．正準方程式の形を変えない変数変換を正準変換といい，運動を積分する方法となる．Hamilton 力学では q と p が対等な立場になっているので，好ましい変数をみつける際に，位置と運動量が入れ替わるような変数変換も可能となっている．つまり変数変換の自由度が上がっている．正準変換には，変換前と変換後の変数が入り交じった母関数が用いられる．

さらに，もし正準変換によって Hamiltonian が恒等的にゼロとなれば，全ての q と p が一定ということになり，問題が解けたことになる．このような正準変換の母関数を見つけようとするのがHamilton-Jacobiの理論である．正準変換による Hamiltonian の変換則が，この母関数が満たす偏微分方程式である Hamilton-Jacobi 方程式を与える．Hamilton-Jacobi 方程式を解いて母関数を求めれば，直ちに変換後の正準変数，つまり運動の積分が求められる．

以上の力学理論は完成されたものだが，実際に解析的に解ける問題は限られている．このとき，我々には，問題を近似的に解くために２つの方向があり得るだろう．その１つは摂動論である．実際に解きたい問題が，解析的に解ける問題と少ししか違わない場合に，解析的に解ける問題を基準として摂動展開しようとするものである．摂動論にも長い歴史があるが，大きくは２つの考え方に分類できる．１つは正準変換の母関数を摂動展開し，逐次求めようとするもので，von Zeipel の方法が代表的なものである．しかし，前述した通り，母関数は変換前後の変数両方を含んでおり，高次の摂動展開を行う手続きは実際には非常に煩雑となる．もう１つはLie変換摂動論であり，変換前の変数のみによって摂動展開を行うことができ，高次までの摂動展開を系統的に行うことができる．本講座の第２章はこれに関する解説である．

もう１つの方向は，数値計算によって近似解を求めようとするものである．質点系の運動方程式，つまり常微分方程式を数値計算で解くといえば，Runge-Kutta 法はよく使われる方法の１つであろう．しかし，標準的な４次の Runge-Kutta 法で，例えば調和振動子の問題を解くと，時間と共にエネルギーが減少していくことがわかる．もちろん，このことが許容されるかどうかは，何をどの程度の精度で求めたいのかに依っている．しかし，例えば天文分野で，惑星の運動を非常に長時間に亘って正確に解きたいといった場合には，このような方法では問題がある．近年では，変数の時間発展を表す写像が，元の力学の問題がもつ性質，例えば時間反転対称性やシンプレクティック性を保持するように数値計算アルゴリズムを作る方向の研究が進んでいる．第３章はこの部分の解説である．

本講座の章立てと執筆者は次のようになっている：

第１章　はじめに（古川勝）
第２章　Hamilton 力学系に対する Lie 変換摂動論と案内中心運動への応用（洲鎌英雄）
第３章　離散シンプレクティック積分法の理論（徳田伸二）
第４章　応用
　第4.1節　太陽系力学に於けるシンプレクティク数値積分（伊藤孝士）
　第4.2節　ビーム物理学（大見和史）
　第4.3節　分子動力学における能勢熱浴とシンプレクティック数値積分（伊藤篤史）
　第4.4節　逃走電子のカオス（松山顕之）
　第4.5節　自由電子レーザー中の相対論的荷電粒子の運動（岸本泰明，今寺賢志）
第５章　おわりに（古川勝）

以下では，各章の内容をごく簡単に紹介し，講座の中での位置付けについて説明する．第１章は本章であり，講座全体の背景や意義，内容に関する説明を行っている．

第２章「Hamilton 力学系に対する Lie 変換摂動論と案内中心運動への応用」では，実際に問題を解く多くの場合に必要となる方法の１つである摂動論，特に Lie 変換摂動論に関する解説である．

具体例として，磁場閉じ込め核融合プラズマ中における荷電粒子の案内中心の運動が取り上げられる．ご存知の通り，磁気モーメントの保存と案内中心の運動は核融合プラズマの物理を理解するにあたって大変重要である．Lie 変換摂動論によれば，相空間体積の保存など，Hamilton 力学系の幾何学的性質を維持して案内中心の運動方程式を導くことができる．さらに時間的に変動する電磁場に拡張された理論（ジャイロ運動論）による研究も盛んに行われており，現代においては不可避の理論であるといえる．

また，本章には，多様体や微分形式といった数学的基礎の解説も含めていただいている．これらは，もちろん本章を読むために必要な事項を解説いただいたものであるが，より広く，力学理論の幾何学的アプローチを正確に理解するために不可欠の知識であり，本講座全体に役立つものである．ぜひ精読いただきたい．

第３章「離散シンプレクティック積分法の理論」では，実際に問題を解く際に摂動論と並んで重要となる数値計算法に関するものである．相空間における変分原理を離散化し，連続変数における力学の問題の幾何学的性質，つまりシンプレクティック性を保つ数値積分法が導かれている．調和振動子の例を含めて平易に解説いただいているので，実際に数値プログラムを作って試してみることをお薦めしたい．

第４章「応用」は，５つの節からなっている．紙面の都合もあり，それぞれ短くまとめていただいているが，本来ならば，これらの各節が単独の章，あるいは解説記事となるべき内容のものである．各章の分野は天文，ビーム，物

性，核融合，自由電子レーザーということで，第２章，第３章で解説された基礎理論が，実際に研究の最前線で幅広く使われていることがわかっていただけると思う．以下では極めて短く概要を述べるに止めるが，読まれた後はぜひ各節の参考文献を辿り，深く学んでいただきたいと考える．

第4.1節「太陽系力学に於けるシンプレクティク数値積分」は，太陽系天体の運動が Kepler 運動とそこからのずれと見做せることを利用して開発された，高精度な計算を可能とするシンプレクティック数値積分法について解説されている．

第4.2節「ビーム物理学」では，加速器におけるビーム粒子軌道，およびビーム同士の衝突効果を評価するために，シンプレクティック数値積分法が不可欠であることが，具体例と共に述べられている．

第4.3節「分子動力学における能勢熱浴とシンプレクティック数値積分」は，物性研究で分子動力学シミュレーションを行う際に，温度を一定に保つために導入される熱浴と，そのシミュレーションに用いられるシンプレクティック数値積分法に関する解説である．

第4.4節「逃走電子のカオス」では，トカマクプラズマの放電崩壊（ディスラプション）時に発生する逃走電子の運動に関する解説である．磁場摂動と相対論的粒子運動の共鳴と，粒子軌道のカオスについての数値的研究成果が解説される．

第4.5節「自由電子レーザー中の相対論的荷電粒子の運動」では，自由電子レーザー中での相対論的な荷電粒子の運動を，Lie 変換摂動論を用いて解析した研究について解説される．

第５章「おわりに」では，本講座全体を振り返りまとめると共に，将来展望について述べる予定である．

最後にもう一度，読者の皆さんには本講座で洗練された現代的な理論を学んでいただき，最前線で後世に残る研究をしていただければ幸いである．本講座を実現するにあたり，第２，３章および第４章１−５節を執筆くださった著者の皆様に感謝いたします．

ふる　かわ　　まさる
古　川　　勝

鳥取大学　大学院工学研究科　准教授．京都大学で学位（エネルギー科学）取得後，日本原子力研究所，東京大学を経て現職．専門はプラズマ物理学で，特にその数理的あるいは方法論的な部分に興味をもっている．２児の父．風呂係．