J. Plasma Fusion Res. Vol.90, No.4 (2014) 213‐227

解説

二流体およびジャイロ流体方程式系とそのMHD不安定性解析への応用

Two- and Gyro-Fluid Models and their Application to MHD Instabilities

石澤明宏
ISHIZAWA Akihiro
核融合科学研究所，総合研究大学院大学

（原稿受付：2014年1月14日）

強い磁場によって磁化されたプラズマの流体方程式は，磁場閉じ込め核融合プラズマに現れる揺動の記述に適している．この解説では，揺動の空間構造にフルート近似，時間変動にドリフトオーダリングを用い，ブラジンスキー方程式から導出される磁化プラズマの二流体方程式とジャイロ流体方程式（ジャイロ運動論方程式から導出される流体方程式）を比較する．そして，磁化プラズマの二流体方程式を用いたMHD不安定性の線形理論を紹介し，ドリフトオーダリングのもとでは反磁性ドリフトの影響でMHD不安定性が実周波数をもつことを示す．また，現代的な大型トーラスプラズマは高温なので，電気抵抗に代わって電子慣性が磁気リコネクションを起こし，不安定性が起こることを示す．最後に典型的な非線形理論である磁気島成長理論を紹介し，反磁性効果により分極電流効果が現れることを示す．

Keywords:
two-fluid, gyro-fluid, MHD instability, magnetic island, ballooning mode, kink mode, tearing mode, magnetic reconnection

1．はじめに

近年，磁場閉じ込めプラズマの周辺部における乱流を評価することやエッジローカライズドモード（ELM）の解析を行うために，二流体あるいはジャイロ流体を用いたシミュレーション研究がなされている（例えばEPADやBOUT＋＋コードなど）．これらの流体モデルはコアプラズマにおける異常輸送の物理を理解するために用いられてきた[1]．そして，異なる時空間スケールが関与する多階層プラズマのシミュレーションの研究にも用いられてきた[2,3]．一方，磁気島発生，長波長インターチェンジモード，外部共鳴摂動磁場のしみこみ問題[4]など，実験で磁場揺動計測が可能な巨視的MHD現象への二流体効果あるいは有限ラーマー半径効果が，議論されている[3]．これらの研究で用いられる二流体モデルとジャイロ流体モデルを概観および比較するとともに二流体モデルによるMHD解析を解説する．

本解説の前半では，二流体およびジャイロ流体方程式の導出過程を外観し，導出で用いられる仮定を整理することにより，これら流体方程式の適用範囲を確認する．二流体モデルは衝突性プラズマを考え，主に巨視的MHD現象へ適用される．一方，ジャイロ運動論およびジャイロ流体方程式は無衝突または弱衝突プラズマを考え，乱流輸送の解析に用いられてきた．MHD不安定性解析では反磁性効果などの導入により適用範囲を広げた数値シミュレーションが行われつつある．また，ジャイロ運動論／流体モデルは有限ベータプラズマの乱流輸送解析のために電磁効果を導入したシミュレーションが進んでいる．その結果，両者のモデルは似てくるので，これらのモデルの相違点を明らかにすることは実験解析への応用を考える上で有用であると考える．

後半では，二流体モデルに基づく線形MHD不安定性理論と磁気島の理論（非線形理論）を紹介する．トーラスプラズマ実験ではMHD不安定性の理解に伴いMHD（磁場のプラズマへの凍りつきが成立する理想MHD）安定または弱不安定な放電が可能になり，実験で観測されるMHD不安定性はアルヴェン時間に比して非常に遅く成長する．その結果，1.2節で説明するドリフトオーダリングが有用になる．そして$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$速度が反磁性速度と同程度の大きさになりMHD不安定性が実周波数をもつ．MHD不安定性の回転周波数は実験での観測が可能であるにもかかわらず理論との比較がなされない場合が多いので，流体モデルの範囲で導出可能な回転周波数を含んだ分散関係式を提示する．たとえば，モードの回転方向が電子あるいはイオンの反磁性方向どちらであるかは，実験と比較可能である．さらに，現代的な大型トーラスプラズマは高温であるため電気抵抗に代わって電子慣性によって磁気リコネクションが起こり，MHD不安定性が生じることを説明する．最後に磁気島の非線形理論を紹介する．

National Institute for Fusion Science, Toki, GIFU 509-5292, Japan

author's email: ishizawa@nifs.ac.jp

この解説は，教科書[5]においてMHD近似を用いた部分の二流体モデルなどへの拡張に対応すると考えることもできる．2から4節は[5]のChap.7 Stability of Confined Plasmas, Part 1: Shear Alfven Waves，5節は[5]のChap.7，Part 3: Resistive Stability および Part 4: Poloidal Localization，6節はChap.9 Nonlinear Process，9.1 Magnetic islandsの拡張に対応する．

始めに，フルート近似やドリフトオーダリングなど，磁場閉じ込めで発生する不安定性がもつ時空構造の基本的性質を紹介する．

1.1　空間構造への仮定（フルート近似）

強い磁場で磁化されたプラズマでは，ランダウ減衰およびアルヴェン波の伝搬機構である磁力線折り曲げ安定効果が強く働く．実際これらの効果は揺動の磁力線方向波数 $k_{/\!/}$ に比例する．したがって，磁場閉じ込めプラズマで現れる揺動は磁力線方向波数が垂直方向波数と比して非常に小さくなる（**図1**）．これは，$\mathbf{b}\cdot\nabla f/\nabla_\perp f\approx\varepsilon\ll1$，または

$$k_{/\!/}/k_\perp\approx\varepsilon\ll1, \tag{1.1.1}$$

で表され，フルート近似と呼ばれる．ここで，$\mathbf{b}=\mathbf{B}/B$ は磁力線方向単位ベクトル，$\nabla_\perp=\nabla-\mathbf{b}\cdot\nabla$．この性質は磁場閉じ込めで生じる不安定性に共通し，磁化プラズマの二流体方程式およびジャイロ流体方程式の基本的な仮定である．磁気流体不安定性やドリフト不安定性はフルート型の不安定性なので，この近似を用いることにより，これらの不安定性の線形および非線形発展を精度よく記述できる．

1.2　時間変化への仮定（ドリフトオーダリング）

電場揺動が強く，その $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 流がイオン熱速度と同程度の速さをもつような時間変化（熱速度とプラズマの特徴的な長さ，例えば小半径，から見積もられる時間と同程度）をMHDオーダリングと呼ぶ（この時，電場揺動は誘導部分に支配される）．一方，電場揺動がそれほど強くなくその $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 流速度がイオンの熱速度 v_{Ti} より十分遅く（熱速度とプラズマの特徴的な長さから見積もられる時間より十分遅い）$v_{\mathrm{E}}\simeq\varepsilon v_{\mathrm{Ti}}$ 程度に小さい場合をドリフトオーダリングと呼ぶ．この解説ではドリフトオーダリングを用いる．その結果，運動量保存則において圧力テンソル項が他の項と同じオーダーになるとともに反磁性ドリフト速度が現れる．5節以降で，このオーダリングに従うMHD現象を説明する．

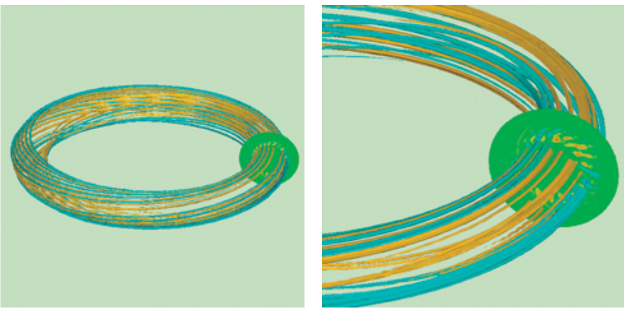

図1　微視的乱流で生じた静電ポテンシャル揺動の等値面と断面分布．トーラス全体(左)と断面付近(右)．揺動は磁力線垂直方向に細かい構造を持ち，磁力線平行方向にゆっくり変化する．

2．磁化プラズマの二流体方程式

衝突性プラズマを考え，対象の時間スケールが局所的に速度分布が緩和する時間より十分遅いと仮定するブラジンスキー方程式から磁化プラズマの二流体方程式を導出する過程を概観するとともに，この方程式に従う磁化プラズマの性質を説明する．流体方程式は運動論方程式から速度モーメント量が従う方程式を導くことによって得られる．このとき，あるモーメント量の方程式は必ず高次のモーメント量を含む（詳細は3.2節）．方程式系を閉じるために，高次のモーメント量を低次のモーメント量で表す．これをクロージャと呼ぶ．ブラジンスキー二流体方程式は対象の時間スケールが衝突周波数より十分遅いことおよび空間スケールが粒子の平均自由行程より十分大きいことを仮定してクロージャを行う．また，粒子のジャイロ周波数が衝突周波数より十分大きいことを仮定する．

2.1　二流体方程式

二流体方程式は

$$\partial_t n_{\mathrm{s}}=-\nabla\cdot n_{\mathrm{s}}\mathbf{v}_{\mathrm{s}}, \tag{2.1.1-1}$$

$$m_{\mathrm{s}}n_{\mathrm{s}}(\partial_t\mathbf{v}_{\mathrm{s}}+\mathbf{v}_{\mathrm{s}}\cdot\nabla\mathbf{v}_{\mathrm{s}})=q_{\mathrm{s}}n\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}_{\mathrm{s}}\times\mathbf{B}\right)-\nabla p_{\mathrm{s}}-\nabla\cdot\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{s}}+\mathbf{R}_{\mathrm{s}}, \tag{2.1.1-2}$$

$$\frac{3}{2}(\partial_t p_{\mathrm{s}}+\mathbf{v}_{\mathrm{s}}\cdot\nabla p_{\mathrm{s}})+\frac{5}{2}p_{\mathrm{s}}\nabla\cdot\mathbf{v}_{\mathrm{s}}=-\nabla\cdot\mathbf{q}_{\mathrm{s}}-\boldsymbol{\pi}_{\mathrm{s}}:\nabla\mathbf{v}_{\mathrm{s}}. \tag{2.1.1-3}$$

ここで n は密度，$\boldsymbol{v}$ は流体速度，p は圧力，q は電荷，$\mathbf{E}$ は電場，$\mathbf{B}$ は磁場，$\boldsymbol{\pi}$ は圧力テンソル，$\mathbf{R}$ は抵抗力，$\mathbf{q}$ は熱流速を表す．また，速度添え字sは粒子種を表し，イオンはs = i，電子はs = eである．方程式系を閉じるため圧力テンソルおよび熱流束の時間発展方程式が必要になる．しかし，ドリフトオーダリングなど磁化プラズマの記述で用いられる近似のもとでは，圧力テンソル方程式はジャイロ粘性相殺と呼ばれる関係式に帰着する[5,6]．その結果，圧力テンソル項とイオン反磁性速度のラグランジュ微分項[5]またはイオン反磁性速度による対流項[6]が相殺する．Hazeltineの形式を用いると式(2.1.1-2)は以下のように書くことができる

$$m_{\mathrm{s}}n(\partial_t\mathbf{v}_{\mathrm{E}}+\mathbf{v}_{\mathrm{s}}\cdot\nabla\mathbf{v}_{\mathrm{E}}+\partial_t\mathbf{v}_{/\!/\mathrm{s}}+\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\cdot\nabla\mathbf{v}_{/\!/\mathrm{s}})=q_{\mathrm{s}}n\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{v}_{\mathrm{s}}\times\mathbf{B}\right)-\nabla p_{\mathrm{s}}+\mathbf{R}_{\mathrm{s}}. \tag{2.1.2}$$

ここで $\mathbf{v}_{\mathrm{E}}=c\mathbf{E}\times\mathbf{B}/B^2$ は $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ ドリフト速度，$\mathbf{v}_{/\!/}=(\mathbf{v}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}$ は磁力線方向速度を表す．

2.2　磁化プラズマの二流体方程式

ここでは，Hazeltineの方法に従って二流体方程式から磁化プラズマの二流体方程式（簡約化二流体方程式）を導出する[5,7,8]．運動量保存式(2.1.2)を粒子種について和を取ることにより電場 $\mathbf{E}$ の項を消去し，$\mathbf{R}_{\mathrm{e}}=-\mathbf{R}_{\mathrm{i}}$ を用いた式は

$$m_{\mathrm{i}}n(\partial_t\mathbf{v}_{\mathrm{E}}+\mathbf{v}_{\mathrm{i}}\cdot\nabla\mathbf{v}_{\mathrm{E}}+\partial_t\mathbf{v}_{/\!/\mathrm{i}}+\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\cdot\nabla\mathbf{v}_{/\!/\mathrm{i}})=\mathbf{J}\times\mathbf{B}-\nabla p$$

となる．ここで電子イオン質量比オーダーの項は無視した．また $\boldsymbol{J}=\sum_s q_s\frac{n}{c}\boldsymbol{v}_s$，$p=\sum_s p_s$．この式と電子密度式（式(2.1.1-1)の電子成分）と電子運動量式（式(2.1.1-2)の電子成分）に以下の近似を用いて磁化プラズマの二流体方程式を導出する．具体的には

1）フルート近似
2）ドリフトオーダリング
3）トロイダル磁場 B_{T} はポロイダル磁場 B_{p} より十分大きい
4）二流体効果を表すイオン表皮長はプラズマ小半径より十分小さい
5）高ベータオーダリング
6）プラズマ小半径 a は大半径 R より十分小さい（大アスペクト比近似）

$$\frac{B_{\mathrm{P}}}{B_{\mathrm{T}}}\approx\frac{k_{/\!/}}{k_\perp}\approx\beta\approx\frac{d_{\mathrm{i}}}{a}\approx\frac{a}{R}\approx\frac{a}{v_{T\mathrm{i}}}\omega\approx\varepsilon,$$

を仮定する．ここで $\beta=4\pi p/(B^2/2)$．そして，2.1および2.2で紹介した二流体方程式系を微小パラメータ ε で展開することにより磁化プラズマの二流体方程式系を得る（密度方程式の圧縮性については ε の一つ高次までとる）．ここで紹介する磁化プラズマの二流体方程式は

$$\frac{D}{Dt}\nabla_\perp^2\phi=-\mathbf{b}^*\cdot\nabla J-2\beta\mathbf{b}\cdot\kappa\times\nabla p-d_{\mathrm{i}}\beta\nabla_\perp\cdot[(\mathbf{v}_{\mathrm{di}}\cdot\nabla_\perp)\nabla_\perp\phi],\quad(2.2.1\text{-}1)$$

$$\frac{Dn}{Dt}=-\mathbf{b}^*\cdot\nabla u_{\mathrm{e}/\!/}+2\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}\times\nabla(\phi-d_{\mathrm{i}}\beta p_{\mathrm{e}}),\quad(2.2.1\text{-}2)$$

$$-d_{\mathrm{e}}^2\frac{DJ}{Dt}+\frac{\partial A_{/\!/}}{\partial t}=-\mathbf{b}^*\cdot\nabla\phi+d_{\mathrm{i}}\beta\,\mathbf{b}^*\cdot\nabla p_{\mathrm{e}}+\frac{1}{S}J,\quad(2.2.1\text{-}3)$$

$$\frac{Du_{/\!/}}{Dt}=-\beta\mathbf{b}^*\cdot\nabla p.\quad(2.2.1\text{-}4)$$

式(2.2.1-1)-(2.2.1-4)はそれぞれ渦度方程式，電子密度式，一般化オーム則（または電子の磁力線方向速度式），磁力線方向速度式を示す．ϕ は静電ポテンシャル，$A_\parallel$ はベクトルポテンシャルの平衡磁場平行方成分，n は密度，$p=p_{\mathrm{i}}+p_{\mathrm{e}}$ は圧力，p_{i} はイオン圧力，p_{e} は電子圧力，$u_\parallel$ はイオンの磁力線方向速度，$u_{\mathrm{e}\parallel}=u_\parallel+d_{\mathrm{i}}J$ は電子の磁力線方向速度，$J=-J_{/\!/}=\nabla_\perp^2A_{/\!/}$ は磁力線方向電流密度，β はプラズマベータ，$d_{\mathrm{s}}=c/\omega_{\mathrm{ps}}=v_{\mathrm{A}}/\Omega_{\mathrm{s}}=\rho_{T\mathrm{s}}/\sqrt{\beta_{\mathrm{s}}}$ は表皮長を表す（ρ_{Ts} はラーマー半径）．$S=\tau_{\mathrm{R}}/\tau_{\mathrm{A}}$ はLundquist数（無次元化した磁気拡散係数の逆数）を表す（$\tau_{\mathrm{A}}=a/v_{\mathrm{A}}$，$\tau_{\mathrm{R}}=4\pi a^2/(\eta c^2)$）．イオンおよび電子温度は一定とした $p_{\mathrm{i}}=T_{\mathrm{i0}}n$，$p_{\mathrm{e}}=T_{\mathrm{e0}}n$．規格化は簡約化磁気流体方程式と同じで，長さに小半径 a，時間にアルヴェン時間 v_{A} を用いた $tv_{\mathrm{A}}/a\to t$，$x/a\to x$，$\phi/(B_0v_{\mathrm{A}}a)\to\phi$，$A_\parallel/(\varepsilon B_0a)\to A_\parallel$，$u_\parallel/v_{\mathrm{A}}\to u_\parallel$，$n/n_0\to n$，$T/T_0\to T$，$p/(n_0T_0)\to p$．式(2.2.1)中の非線形項は $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ およびイオン反磁性ドリフト対流項（またはジャイロ圧力テンソル項）と磁場揺動によるものの三種類で以下のようにポアソン括弧で書かれる．

$$Df/Dt=\partial f/\partial t+\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\cdot\nabla f,\quad\mathbf{b}^*\cdot\nabla f=\varepsilon\partial_\zeta-[A_{/\!/},f].\quad(2.2.2)$$

そして，

$$\mathbf{v}_{\mathrm{E}}=\mathbf{b}\times\nabla\phi,\qquad\mathbf{v}_{\mathrm{E}}\cdot\nabla f=\mathbf{b}\times\nabla\phi\cdot\nabla f=[\phi,f].\quad(2.2.3)$$

ここで $[A,B]=\mathbf{b}\cdot\nabla A\times\nabla B$．また，

$$\mathbf{b}^*=\mathbf{b}+\tilde{\mathbf{b}},\quad\tilde{\mathbf{b}}\cdot\nabla f=-\mathbf{b}\times\nabla A_{/\!/}\cdot\nabla f=-[A_{/\!/},f].\quad(2.2.4)$$

イオン反磁性ドリフト対流項（またはジャイロ圧力テンソル項）は $\mathbf{v}_{\mathrm{di}}=\mathbf{b}\times\nabla p_{\mathrm{i}}$，$\mathbf{v}_{\mathrm{di}}\cdot\nabla\nabla f=-[\nabla f,p_{\mathrm{i}}]$，なので

$$-\nabla_\perp\cdot[(\mathbf{v}_{\mathrm{d}i}\cdot\nabla_\perp)\nabla_\perp\phi]=[\nabla_\perp\phi;\nabla_\perp p_{\mathrm{i}}]=-\frac{1}{2}([p_{\mathrm{i}},\nabla_\perp^2\phi]+[\phi,\nabla_\perp^2p_{\mathrm{i}}]+\nabla_\perp^2[p_{\mathrm{i}},\phi]),$$

のように，ポアソン括弧を用いて書くことができる[7]．$\boldsymbol{\kappa}$ を含む項は磁力線曲率ドリフトによる対流項で，悪い曲率領域（トーラス外側）にバルーニング型不安定性を生じる．この項は大アスペクト比近似（大半径 R は小半径 a より十分大きい）のもとでは曲率が $\boldsymbol{\kappa}=-\varepsilon\nabla(r\cos\theta)$ であるので $\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}\times\nabla f=[r\cos\theta,f]$ とポアソン括弧で書くことができる．ここで r と θ は小半径とポロイダル角を表す．磁場および密度は大アスペクト比近似を用いているので $\mathbf{B}=B_0\mathbf{e}_z/(1+\varepsilon\cos\theta)+\varepsilon b\,\mathbf{e}_z+\mathbf{e}_z\times\nabla A_{/\!/}$，$A_{/\!/}=A_{/\!/eq}(r)+A_{/\!/1}$，$n=n_0(1+n_{eq}(r)+n_1)$，ここで $n_{\mathrm{eq}}\approx n_1\approx\varepsilon n_0$，$A_{/\!/}\approx\varepsilon B_0a$ のように表される．

この二流体方程式から導かれる二次の保存式は

$$\mathrm{d}H/\mathrm{d}t=D.\quad(2.2.5)$$

ここで $H=\delta S+\delta W_{\mathrm{es}}+\delta W_{\mathrm{em}}$，

$$\delta S=\sum_s\delta S_{\mathrm{s}},\quad D=\sum_s D_{\mathrm{s}},\quad\delta S_{\mathrm{i}}=\int\left(T_{\mathrm{i}}\frac{n^2}{2}+\frac{u_{/\!/}^2}{2}\right)\mathrm{d}V,$$

$$\delta S_{\mathrm{e}}=\int\left(T_{\mathrm{e}}\frac{n^2}{2}+d_e^2\frac{J^2}{2}\right)\mathrm{d}V,\quad D_{\mathrm{e}}=-\frac{1}{S}\int\frac{J^2}{2}\mathrm{d}V,$$

$$\delta W_{\mathrm{es}}=\int\frac{|\nabla_\perp\phi|^2}{2}\mathrm{d}V,\quad\delta W_{\mathrm{em}}=\int\frac{|\nabla_\perp A_{/\!/}|^2}{2}\mathrm{d}V,$$

$D_{\mathrm{i}}=0$ である．導出では $\int A[B,C]\mathrm{d}V=\int B[C,A]\mathrm{d}V$ を用いる．

二流体効果はイオン表皮長 d_{i} によって表わされ，二流体項は，渦度方程式(2.2.1-1)の右辺第3項である非線形効果を含むイオンの反磁性効果，および一般化オーム則(2.2.1-3)の右辺第2項である電子の反磁性項である．これらの項により，ドリフト不安定性（ドリフトアルヴェン不安定性，抵抗性ドリフト不安定性など）および二流体効果に影響された磁気流体不安定性（バルーニングモード，テアリングモードなど）の線形および非線形発展が記述可能になる．そして，イオン表皮長および電子イオン質量比が十分小さい極限（$d_{\mathrm{i}}\ll1$，$m_{\mathrm{e}}/m_{\mathrm{i}}\ll1$）で簡約化MHD方程式

$$\frac{D}{Dt}\nabla_\perp^2\phi=-\mathbf{b}^*\cdot\nabla J-2\beta\mathbf{b}\cdot\kappa\times\nabla p,$$

$$\frac{Dn}{Dt}=-\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla u_{/\!/}+2\mathbf{b}\cdot\kappa\times\nabla\phi,$$

$$\frac{\partial A_{/\!/}}{\partial t}=-\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla\phi+\frac{1}{S}J,$$

$$\frac{Du_{/\!/}}{Dt}=-\beta\,\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla p, \tag{2.2.6}$$

を得る．このMHD方程式は圧力駆動型不安定性（バルーニングモード，交換型不安定性）を記述できる．さらにβが十分小さい極限（低ベータオーダリング）で非圧縮MHD方程式系を得る．この方程式系は電流駆動型不安定性（テアリングモードなど）の解析に用いられる．イオンラーマー半径，イオン表皮長および反磁性周波数などの時空間スケールは，磁気流体方程式系から二流体方程式系への拡張により現れたプラズマの特徴的時空間スケールである．場の量は$f=f_{\rm eq}+f_1$のように平衡量と揺動量を含むことに注意する．

渦度方程式の書き方は，Hazeltineの形式[7]とChang-Callenの形式[6]に対応して二種類ある．ここでは，Hazeltineの形式[7]に従い，静電ポテンシャルϕによる表示を用いた．一方，流れ関数$\Phi=\phi+{\rm d_i}\beta{\rm p_i}$によるChang-Callenの形式の場合[6]，イオン反磁性項の符号が逆になることに注意する．また，温度の空間変動がある場合は後者のほうがよいといわれる[6]こともあるが議論は収束していない．

ここで，この方程式系(2.2.1)の性質を概観するために，この方程式系が記述できる波を調べる．一様な磁場，温度，密度勾配分布を仮定することによりこの方程式系の分散関係式を得る．

$$[-\omega(\omega-\omega_{*\rm i})+\omega_{\rm s}^2]\{\omega[-\omega(1+d_{\rm e}^2k_\perp^2)-\omega_{*\rm e}]+\omega_{\rm A}^2\}$$
$$+\omega(\omega_{*\rm i}-\omega_{*\rm e})(\omega_{\rm A}^2-\omega_{\rm s}^2)-\omega^2\omega_{\rm A}^2\rho_{\rm s}^2k_\perp^2=0. \tag{2.2.7}$$

ここで $\omega_{\rm A}=\pm k_{/\!/}v_{\rm A}$, $\omega_{*\rm e}=d_{\rm i}T_{\rm e}k_\perp/(BL_{\rm n})$, $\omega_{*\rm i}=-d_{\rm i}T_ik_\perp/(BL_n)$，$\omega_s=\pm k_{/\!/}c_{\rm s}$はアルヴェン周波数，電子の反磁性ドリフト周波数，イオンの反磁性ドリフト周波数，音波の周波数をそれぞれ表す．ここで$L_{\rm n}={\rm d}(\ln n)/{\rm d}r$は密度勾配長を表す．1.1節で説明したように，アルヴェン波の伝搬速度は磁力線方向波数に比例する．そして，これは磁力線折り曲げに対する復元力が$k_{/\!/}$に比例することを意味する．この分散関係式は長波長極限でMHD分散関係式を与える．

$$(\omega^2-\omega_{\rm A}^2)(\omega^2-\omega_{\rm s}^2)=0. \tag{2.2.8}$$

ここで，速い音波（圧縮性アルヴェン波）が取り除かれていることに注意する．アルヴェン波の分枝は運動論的アルヴェン波を表し，電子磁力線方向運動方程式(2.2.1-3)左辺第二項と右辺第一項が主につり合う

$$\omega^2=\frac{\omega_{\rm A}^2(1+\rho_{\rm s}^2k_\perp^2)}{1+d_{\rm e}^2k_\perp^2}. \tag{2.2.9}$$

式(2.2.1-3)右辺第一，二項が主につり合う静電的なドリフト波の分枝は

$$\omega=\frac{-\omega_{*\rm e}}{1+\rho_{\rm s}^2k_\perp^2}, \tag{2.2.10}$$

となる．

2.3 長谷川・若谷方程式と長谷川・三間方程式

前節で紹介した磁化プラズマの二流体方程式は長谷川・若谷方程式および長谷川・三間方程式を包含することを説明する．式(2.2.1-1)-(2.2.1-4)において，磁場揺動および磁力線方向速度，電子慣性を無視し（$A_\parallel=0$，$d_{\rm e}=0$，$u_\parallel=0$），イオン圧力電子圧力を密度で書き（$p_{\rm i}=T_{\rm i0}n$，$p_{\rm e}=T_{\rm e0}n$），さらに冷たいイオン近似（$T_{\rm i0}=0$，$v_{\rm di}=0$）を用いると長谷川・若谷方程式

$$\frac{D}{Dt}\nabla_\perp^2\phi=-\mathbf{b}\cdot\nabla J-2\beta T_{\rm e0}\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}\times\nabla n, \tag{2.3.1-1}$$

$$\frac{Dn}{Dt}=-d_{\rm i}\mathbf{b}\cdot\nabla J+2\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}\times\nabla(\phi-d_{\rm i}\beta T_{\rm e0}n), \tag{2.3.1-2}$$

$$J=S\,\mathbf{b}\cdot\nabla(\phi-d_{\rm i}\beta T_{\rm e0}n), \tag{2.3.1-3}$$

を得る．通常，密度式右辺第2項の静電ポテンシャルϕを無視し，平均曲率を用いる$\kappa=\nabla\Omega(r)$．式(2.3.1-3)は電子応答が断熱応答から電気抵抗散逸分ずれることを示す．ドリフト波不安定性はこのずれによって生ずる．

式(2.2.1-1)と(2.2.1-2)の差を取り電流密度を消去する．そして，(2.2.1-3)式でLundquist数が十分大きいと仮定することにより電子の断熱応答$\mathbf{b}\cdot\nabla\phi=d_{\rm i}\beta T_{\rm e0}\mathbf{b}\cdot\nabla n$から得られるマクスウェルボルツマン関係式$\phi=d_{\rm i}\beta T_{\rm e0}n$を用いる（ゾーナルポテンシャル$\langle\phi\rangle$は無視する）と長谷川・三間方程式

$$\frac{D}{Dt}(\phi-\rho_{T\rm s}^2\nabla_\perp^2\phi)=-2d_{\rm i}\beta T_{\rm e0}\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}\times\nabla\phi, \tag{2.3.2}$$

を得る．ここで$d_{\rm i}^2\beta T_{\rm e0}=\rho_{T\rm i}^2T_{\rm e0}=c_{\rm s}^2/\Omega_{\rm i}^2=\rho_{T\rm s}^2$を用いた．また，通常，$\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}\times\nabla\phi=\mathbf{b}\cdot\nabla\Omega(x)\times\nabla\phi=\Omega'(x)\partial_y\phi$が用いられる．これらの方程式は，ドリフト波不安定性（抵抗性交換型不安定性）やゾーナル流生成[9]を記述する基礎モデルである．

3．ジャイロ流体方程式

この節では，無衝突あるいは弱衝突プラズマを考え，ジャイロ運動論方程式からジャイロ流体方程式を導出する．具体的には，電磁的ジャイロ運動論方程式の速度モーメント方程式系を導出し，クロージャの問題について説明する．二流体では衝突による局所的な速度分布の緩和が十分速いことを仮定した．一方，ジャイロ流体ではジャイロ運動論の計算結果を再現するためにクロージャを工夫する．特に磁力線平行方向にランダウ減衰効果を含めることが重要である．ジャイロ流体方程式の対象は，イオン温度勾配不安定性や運動論的バルーニングモードなど捕捉粒子の影響が小さい不安定性である．

3.1 ジャイロ運動論方程式

ここでは分布関数を平衡部分と揺動部分に分け，揺動部分が従うジャイロ運動論方程式（デルタエフと呼ばれる）

を紹介する．ジャイロ運動論方程式をボルツマン方程式から導出する際に用いられる仮定は

$$\frac{\delta f_{\rm s}}{F_{\rm Ms}} \approx \frac{k_{/\!/}}{k_\perp} \approx \frac{e\phi}{T_{\rm s}} \approx \frac{\omega}{\Omega_{\rm s}} \approx \frac{\rho_{\rm s}}{L} \approx \sqrt{\frac{m_{\rm s}}{m_{\rm i}}}\varepsilon$$

の ε が十分小さいことである．ジャイロ運動論方程式系の導出は他の解説に譲る（例えば参考文献[10]）．ジャイロ中心座標 $(\mathbf{X}, v_{/\!/}, \mu)$ で書いた分布関数を平衡部分と揺動部分に分け $f_{\rm s} = F_{\rm Ms} + \delta f_{\rm s}$，揺動部分を $\delta f_s = \sum_{\rm k} \delta f_{\rm sk} \exp(iS_{\rm k})$，$\nabla S_{\rm k} = \mathbf{k}_\perp$ のようにアイコナール表示することで有限ラーマー半径効果を解析的にベッセル関数を用いて表現することが可能になる．そして二流体方程式との対応をみる際に長波長近似をすることが容易になる．平衡部分にはマクスウェル分布を仮定する．

$$F_{\rm Ms} = \frac{n_0}{(2\pi T_{\rm s}/m_{\rm s})^{3/2}} \exp\left(-\frac{m_{\rm s} v_{/\!/}^2}{2T_{\rm s}} - \frac{\mu B}{T_{\rm s}}\right). \tag{3.1.1}$$

ジャイロ運動論方程式は以下のようになる．

$$\begin{aligned}\frac{D\delta f_{sk}}{Dt} + v_{T{\rm s}} v_{/\!/} \mathbf{b}^* \cdot \nabla \delta f_{sk} - v_{T{\rm s}} \mu \mathbf{b} \cdot \nabla B \frac{\partial \delta f_{sk}}{\partial v_{/\!/}} = \\ -i\, \mathbf{v}_{\rm ds} \cdot \mathbf{k}_\perp \left(\delta f_{sk} + \frac{q_{\rm s}}{T_{\rm s}} F_{M{\rm s}} \phi_k J_{0s}\right) \\ + i\, \mathbf{v}_{*{\rm s}} \cdot \mathbf{k}_\perp \frac{q_{\rm s}}{T_{\rm s}} F_{M{\rm s}} (\phi_k - v_{Ts} v_{/\!/} A_{/\!/k}) J_{0s} \\ + v_{Ts} v_{/\!/} \frac{q_s}{T_s} F_{M{\rm s}} E_{/\!/k} + C(\delta f_{sk}).\end{aligned} \tag{3.1.2}$$

ここで μ は磁気モーメント，C は衝突項を表す．この方程式と以下のジャイロ運動論ポアソン方程式とアンペール式

$$\begin{aligned}\lambda_{\rm Di}^2 k_\perp^2 \phi_k &= \sum_s \left(q_{\rm s} \delta n_{sk} - \frac{q_s^2}{T_s}[1 - \Gamma_{0s}]\phi_k\right), \\ k_\perp^2 A_{/\!/k} &= \beta_i \sum_s q_{\rm s} v_{Ts} \delta u_{/\!/sk},\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

でジャイロ運動論方程式系を構成する．ここで

$$E_{/\!/k} = -\mathbf{b}^* \cdot \nabla \phi_k J_{0s} - \frac{\partial A_{/\!/k}}{\partial t} J_{0s}, \quad \begin{aligned}\delta n_{sk} &= \int {\rm d}v^3 \delta f_{sk} J_{0s}, \\ \delta u_{/\!/sk} &= \int {\rm d}v^3 v_{/\!/} \delta f_{sk} J_{0s},\end{aligned}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{B}[\phi J_{0s},\ ]_k, \qquad \mathbf{b}^* \cdot \nabla = \mathbf{b} \cdot \nabla - \frac{1}{B}[A_{/\!/} J_{0s},\ ]_k$$

である．また，

$$\mathbf{v}_{\rm ds} = \frac{1}{m_{\rm s} \Omega_{\rm s}} \mathbf{b} \times (\mu \nabla B + m_{\rm s} v_{/\!/}^2 \kappa),$$

$$\mathbf{v}_{*{\rm s}} = \frac{T_s}{m_{\rm s} \Omega_{\rm s}} \mathbf{b} \times \nabla \ln F_{\rm Ms}$$

はそれぞれ磁気ドリフト速度，反磁性速度を表す．磁場揺動の磁力線方向成分を作る $A_\perp$ はプラズマベータが 1 より十分小さいとして無視した．前節の二流体方程式の対流微分および磁力線方向微分（式(2.2.2)）と比較して有限ラーマー半径効果である 0 次ベッセル関数 $J_{0s} = J_0(b_{\rm s})$ がポアソン括弧の中に含まれる．ここで $b_s = k_\perp^2 \rho_s^2$，$\Gamma_{0s} = I_0(b_s)\exp(-b_s)$ で $I_0(b_{\rm s})$ は変形 0 次ベッセル関数を表す．また，MHD 近似で $E_{/\!/} = 0$ が成立することに注意する．無次元化は前節の二流体方程式と異なり $tv_{\rm Ti}/L_{\rm n} \to t$，$k_\perp \rho_{\rm Ti} \to k_\perp$，$\delta f_{\rm s} L_{\rm n} v_{\rm Ti}^3/(\rho_{\rm Ti} n_0) \to \delta f_{\rm s}$，$e\phi L_{\rm n}/(\rho_{\rm Ti} T_{\rm i}) \to \phi$，$A_\parallel L_{\rm n}/(B_0 \rho_{\rm Ti}^2) \to A_\parallel$，$v_\parallel/v_{\rm Ts} \to v_\parallel$，$v_{Ts}/v_{\rm Ti} \to v_{Ts}$，$n/n_0 \to n$，$T/T_{0{\rm i}} \to T$．電荷と質量は $q_s/e \to q_s$，$m_s/m_i \to m_s$ と無次元化したので $q_i = 1$，$q_e = -1$，$m_{\rm i} = 1$，m_e は m_e/m_i を表す．

この方程式系から導かれる二次保存量の式は

$${\rm d}H/{\rm d}t = F + D. \tag{3.1.4}$$

ここで

$$\delta S_{\rm s} = \left\langle \sum_k \int \frac{T_{\rm s}|\delta f_{sk}|^2}{2F_{Ms}} d^3 v \right\rangle,\quad \delta W_{\rm em} = \left\langle \sum_s \frac{k_\perp^2 |A_{/\!/k}|^2}{2\beta_{\rm i}} \right\rangle,$$

$$\delta W_{\rm es} = \left\langle \sum_k \left(\lambda_{Di}^2 k_\perp^2 + \sum_s \frac{q_s^2}{T_s}(1 - \Gamma_{0s})\right) \frac{|\phi_k|^2}{2} \right\rangle,$$

$$D_{\rm s} = \left\langle \sum_k \int \left(\delta f_{sk} + \frac{q_{\rm s} F_{M{\rm s}}}{T_{\rm s}} \phi_k J_{0s}\right)^* C(\delta f_{sk}) d^3 v \right\rangle.$$

式(3.1.4)が二流体モデルにおける二次の保存式(2.2.5)に対応する．後で説明するように自由エネルギー項 $F = \sum_{\rm s}(\Theta_{\rm s}/L_{\rm Ts} + \Gamma_{\rm s}/L_{\rm ps})$ は平衡量と揺動量を分けたことによって生じた．4.2節で，平衡量と揺動量を分けることにより式(2.2.5)が式(3.1.4)と同様になることを示す．ここで $1/L_{\rm ps} = 1/L_{T{\rm s}} + 1/L_n$，$1/L_{T{\rm s}} = {\rm d}(\ln T_{\rm s})/{\rm d}r$

$$\begin{aligned}\Theta_{\rm s} = {\rm Re} \sum_k \Big\langle &\left(\frac{\delta p_{/\!/{\rm sk}}}{2} + \delta p_{\perp{\rm sk}} - \frac{5}{2} T_{\rm s} \delta n_{\rm sk}\right) \frac{ik_y \phi_k^*}{B} \\ &+ \left(\frac{\delta q_{/\!/{\rm sk}}}{2} + \delta q_{\perp{\rm sk}}\right) \frac{-ik_y A_{/\!/k}^*}{B} \Big\rangle,\end{aligned}$$

$$\Gamma_{\rm s} = {\rm Re} \sum_k \left\langle \delta n_{\rm sk} \frac{ik_y \phi_k^*}{B} + \delta u_{/\!/{\rm sk}} \frac{ik_y A_{/\!/k}^*}{B} \right\rangle.$$

3.2 モーメントおよびクロージャ

ここではジャイロ流体方程式に従う流体量（モーメント量）および方程式系を閉じるために必要なクロージャについて説明する．ここで説明するクロージャ[11]はジャイロ運動論によるイオン温度勾配不安定性の線形成長率を近似的に再現するようにつくられた．一方，このクロージャを用いた非線形ジャイロ流体シミュレーションが，ジャイロ運動論シミュレーションより大きな乱流輸送レベルを与える事例が報告されており，未だ改善すべき点も残されている．

前節3.1で紹介したジャイロ運動論方程式(3.1.2)の速度モーメントを取ることにより，モーメント量

$$n_{sk} = \int {\rm d}v^3 \delta f_{sk}, \qquad u_{/\!/sk} = \int {\rm d}v^3 v_{/\!/} \delta f_{sk},$$

$$p_{/\!/sk} = \int {\rm d}v^3 m_{\rm s} v_{/\!/}^2 \delta f_{sk}, \quad p_{\perp sk} = \int {\rm d}v^3 m_{\rm s} B\mu \delta f_{sk},$$

$$q_{/\!/sk} = \int {\rm d}v^3 m_{\rm s} v_{/\!/}^3 \delta f_{sk} - 3m_{\rm s} v_{Ts}^2 u_{/\!/sk},$$

$$q_{\perp sk}=\int \mathrm{d}v^3 m_s B\mu v_{/\!/}\delta f_{sk}-3m_s v_{Ts}^2 u_{/\!/sk},$$

$$r_{/\!/,/\!/sk}=\int \mathrm{d}v^3 m_s v_{/\!/}^4\delta f_{sk},\quad r_{/\!/,\perp sk}=\int \mathrm{d}v^3 m_s v_{/\!/}^2 B\mu\delta f_{sk},$$

$$s_{/\!/,/\!/sk}=\int \mathrm{d}v^3 m_s v_{/\!/}^5\delta f_{sk}-15m_s v_{Ts}^2 u_{/\!/sk},$$

$$s_{/\!/,\perp sk}=\int \mathrm{d}v^3 m_s v_{/\!/}^3 B\mu\delta f_{sk}-3m_s v_{Ts}^4 u_{/\!/sk},$$

$$r_{\perp,\perp sk}=\int \mathrm{d}v^3 m_s (B\mu)^2\delta f_{sk},$$

$$s_{\perp,\perp sk}=\int \mathrm{d}v^3 m_s v_{/\!/}(B\mu)^2\delta f_{sk}-2m_s v_{Ts}^4 u_{/\!/sk},$$

が従うジャイロ流体方程式を得る．表記を簡単にするため，今後は揺動量を表すδを省く．計算の際$dv^3=2\pi B dv_{/\!/}d\mu$および$\nabla B$が有限なことに注意する．

ジャイロ運動論方程式(3.1.2)は磁力線平行方向速度$v_{/\!/}$および磁気モーメントμ（磁力線垂直方向速度）を含むため，あるモーメント量の時間発展式には必ず高次のモーメント量が含まれる．この高次のモーメント量を低次のモーメント量で表すことをクロージャと呼ぶ．通常のジャイロ流体方程式は３次のモーメントである熱流速$q_{/\!/s}$，$q_{\perp s}$の式まで用いる．従って４次以上のモーメント量を３次以下のモーメントで近似的に表す．クロージャにはジャイロ運動論方程式，式(3.1.2)中の１)磁力線平行方向移流項（左辺第二項）に表れる磁力線平行方向項クロージャ，２)磁気ドリフト項（右辺第一項）によるトロイダル項クロージャ，３)磁気ミラー項（左辺第三項）によるミラー項クロージャがある．ここでは参考文献[11]と同様のクロージャを用いる．磁力線平行方向項クロージャ$\nabla_{/\!/}r_{/\!/,/\!/}$と$\nabla_{/\!/}r_{/\!/,\perp}$にはランダウクロージャ

$$r_{/\!/,/\!/sk}=3(2p_{/\!/sk}-n_{sk})+\beta_{/\!/}T_{/\!/sk}-\sqrt{2}D_{/\!/}i|k_{/\!/}|q_{/\!/sk}/k_{/\!/},$$

$$r_{/\!/,\perp sk}=p_{/\!/sk}+p_{\perp sk}-\sqrt{2}D_{\perp}i|k_{/\!/}|q_{\perp sk}/k_{/\!/},$$

を用いる．それぞれの最後の項がランダウ減衰を表す．この項が$k_{/\!/}$に比例することは1.1節で説明した．ランダウ減衰係数は$D_{/\!/}=2\sqrt{\pi}/(3\pi-8)$，$D_{\perp}=\sqrt{\pi}/2$である．文献[11]では$\beta_{/\!/}=(32-9\pi)/(3\pi-8)$および(3.3.1-5)の$\alpha_{/\!/}=6$であるが，ここでは２次保存量を得るために$\beta_{/\!/}=-3/2$，$\alpha_{/\!/}=3$とする．トロイダル項クロージャ$\mathbf{v}_{ds}\cdot\mathbf{k}_{\perp}(r_{/\!/,/\!/}+r_{/\!/,\perp})$，$\mathbf{v}_{ds}\cdot\mathbf{k}_{\perp}(r_{\perp,\perp}+r_{/\!/,\perp})$，$\mathbf{v}_{ds}\cdot\mathbf{k}_{\perp}(s_{/\!/,/\!/}+s_{/\!/,\perp})$，$\mathbf{v}_{ds}\cdot\mathbf{k}_{\perp}(s_{\perp,\perp}+s_{/\!/,\perp})$には

$$r_{/\!/,/\!/sk}+r_{/\!/,\perp sk}=7p_{/\!/sk}+p_{\perp sk}-4n_{sk},$$
$$r_{/\!/,\perp sk}+r_{\perp,\perp sk}=p_{/\!/sk}+5p_{\perp sk}-3n_{sk},$$
$$s_{/\!/,/\!/}+s_{/\!/,\perp}=s_{\perp,\perp}+s_{/\!/,\perp}=0,$$

を用いる．ここでトロイダルドリフトによる位相混合散逸効果は無視した．ミラー項クロージャ$r_{/\!/,/\!/}\nabla_{/\!/}B$，$r_{/\!/,\perp}\nabla_{/\!/}B$，$r_{\perp,\perp}\nabla_{/\!/}B$では揺動分布関数をマクスウェル分布であると仮定する．

$$r_{/\!/,/\!/sk}=6p_{/\!/sk}-3n_{sk},\qquad r_{/\!/,\perp sk}=p_{/\!/sk}+5p_{\perp sk}-n_{sk},$$
$$r_{\perp,\perp}=4p_{\perp sk}-2n_{sk}.$$

上述のクロージャのほかに，ジャイロ運動論方程式(3.1.2)の$J_{0s}=J_0(\rho_s k_{\perp})$中のラーマー半径$\rho_s$が$v_{\perp}$を含むので，ここでもクロージャが必要になる．有限ラーマー半径効果クロージャと呼ばれるこのクロージャは通常$\langle J_0\rangle\approx\Gamma_0^{1/2}$が用いられる．

3.3 ジャイロ流体方程式

3.2節で説明したようにジャイロ運動論方程式(3.1.2)のモーメント式を求めると以下の様に密度，磁力線平行速度，磁力線平行（垂直）温度，磁力線平行（垂直）熱束の式を得る．

$$\frac{Dn_{sk}}{Dt}+v_{Ts}B\,\mathbf{b}^*\cdot\nabla\frac{u_{/\!/sk}}{B}+[b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime}\phi,T_{\perp s}]_k-[b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime}A_{/\!/},q_{\perp s}]_k=$$
$$-i\,\mathbf{v}_{dsf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\left(p_{/\!/sk}+p_{\perp sk}+\frac{q_s}{T_s}(2\Gamma_{0s}^{1/2}+b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime})\phi_k\right)+(1+\eta_s b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime})i\,\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\frac{q_s}{T_s}\phi_k,\quad(3.3.1\text{-}1)$$

$$\frac{Du_{/\!/sk}}{Dt}+[b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime}\phi,q_{\perp s}]_k-v_{Ts}[b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime}A_{/\!/},T_{\perp s}]_k=-v_{Ts}\mathbf{b}^*\cdot\nabla p_{/\!/sk}-v_{Ts}\frac{q_s}{T_s}\left(\mathbf{b}^*\cdot\nabla\phi_k+\frac{\partial A_{/\!/k}}{\partial t}\right)$$
$$-i\,\mathbf{v}_{dsf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}(q_{/\!/sk}+q_{\perp sk}+4u_{/\!/sk})+v_{Ts}(p_{/\!/sk}-p_{\perp sk}+b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime}\phi_k)\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B-i\,\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}v_{Ts}\frac{q_s}{T_s}(1+\eta_s+\eta_s b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime})A_{/\!/k},\quad(3.3.1\text{-}2)$$

$$\frac{DT_{/\!/sk}}{Dt}+v_{Ts}B\,\mathbf{b}^*\cdot\nabla\frac{2u_{/\!/sk}}{B}+v_{Ts}B\,\mathbf{b}^*\cdot\nabla\frac{q_{/\!/sk}}{B}+[b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime}\phi,q_{\perp s}]_k=$$
$$i\,\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\frac{q_s}{T_s}\eta_s\phi_k-i\,\mathbf{v}_{dsf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\left(6T_{/\!/sk}+2n_{sk}-\frac{2q_s}{T_s}\phi_k\right)-2v_{Ts}T_s(q_{\perp sk}+u_{/\!/sk})\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B,\quad(3.3.1\text{-}3)$$

$$\frac{DT_{\perp sk}}{Dt}+v_{Ts}\mathbf{b}\cdot\nabla\frac{q_{\perp sk}}{B}=+v_{Ts}T_s(q_{\perp sk}+u_{/\!/sk})\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B-i\,\mathbf{v}_{dsf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\left[4T_{\perp sk}+n_{sk}-\frac{1}{T_s}\left(1+\frac{3}{2}b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime}+b_s(b_s\Gamma_{0s})^{1/2\prime\prime}\right)\phi_k\right]$$
$$+i\,\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\frac{q_s}{T_s}[1+b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime}+(1+b_s\Gamma_{0s}^{1/2\prime}+b_s(b_s\Gamma_{0s}^{1/2})'')\eta_s]\phi_k,\quad(3.3.1\text{-}4)$$

$$\frac{Dq_{/\!/sk}}{Dt}+v_{Ts}(3+\beta_{/\!/})\mathbf{b}^*\cdot\nabla T_{/\!/sk}=-i\,\mathbf{v}_{dsf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}(3q_{/\!/sk}-3q_{\perp sk}-\alpha_{/\!/}u_{/\!/sk})-3i\,\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\frac{v_{Ts}q_s}{T_s}\eta_s A_{/\!/k}-\sqrt{2}v_{Ts}D_{/\!/}|k_{/\!/}|q_{/\!/sk},\quad(3.3.1\text{-}5)$$

$$\frac{Dq_{\perp sk}}{Dt}+v_{\mathrm{Ts}}\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla T_{\perp sk}+[b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2\prime}\phi,u_{/\!/\mathrm{s}}]_{k}+[b_{\mathrm{s}}(b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2})''\phi,q_{\perp s}]_{k}=$$
$$-i\mathbf{v}_{\mathrm{dsf}}\cdot\mathbf{k}_{\perp}(-q_{/\!/sk}-q_{\perp sk}+u_{/\!/k}+b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2\prime}A_{/\!/k})-i\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\frac{v_{T\mathrm{s}}q_{\mathrm{s}}}{T_{\mathrm{s}}}[\eta_{\mathrm{s}}+b_{\mathrm{s}}(b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2})''\eta_{\mathrm{s}}+b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2\prime}+b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2\prime}(1+\eta_{\mathrm{s}})]A_{/\!/k}$$
$$+v_{\mathrm{Ts}}[p_{/\!/sk}-p_{\perp sk}+(b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2\prime}+b_{\mathrm{s}}(b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2})'')\phi_{k}]\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B+q_{s}\left(\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2\prime}\phi_{k}+\frac{\partial}{\partial t}b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2\prime}A_{/\!/k}\right)$$
$$+[b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2\prime}+b_{s}(b_{s}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2})''A_{/\!/},T_{\perp\mathrm{s}}]_{k}-\sqrt{2}v_{T\mathrm{s}}D_{\perp}|k_{/\!/}|q_{\perp sk}. \tag{3.3.1-6}$$

ここで

$$\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2}=e^{-b_{s}/2},\qquad b_{\mathrm{s}}\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2\prime}=b_{\mathrm{s}}\frac{\partial\Gamma_{0\mathrm{s}}^{1/2}}{\partial b_{\mathrm{s}}}=-\frac{b_{\mathrm{s}}}{2}e^{-b_{\mathrm{s}}/2},$$

は有限ラーマー半径効果を表す．また，$p_{/\!/sk}=n_{sk}+T_{/\!/sk}$，$p_{\perp sk}=n_{sk}+T_{\perp sk}$．ジャイロ流体方程式に現れる $b_{\mathrm{s}}=(\rho_{\mathrm{Ts}}k_{\perp})^{2}$ 中のラーマー半径で速度が熱速度に置き換えられていることに注意する $v_{\perp}\to v_{\mathrm{Ts}}$．また，

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{B}[\Gamma_{0}^{1/2}\phi,\ ]_{k},\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla=\mathbf{b}\cdot\nabla-\frac{1}{B}[\Gamma_{0}^{1/2}A_{/\!/},\ ]_{k}, \tag{3.3.2}$$

は有限ラーマー半径効果を含む部分が二流体の場合の式(2.2.2)‐(2.2.3)と異なる．これらの式とジャイロ運動論ポアソン方程式とアンペール式(3.1.3)を連立した方程式系がジャイロ流体方程式系である．ここで衝突項は無視した．磁場ドリフト速度 $v_{\mathrm{dsf}}=-T_{\mathrm{s}}/(q_{s}RB)$ に比例する項はトロイダル効果（円柱プラズマでは現れない）を表し，トーラス外側の磁場曲率が悪い場所で不安定性が生じる原因となる．反磁性速度 $v_{*\mathrm{sf}}=-T_{\mathrm{s}}/(q_{s}L_{n}B)$ に比例する項は温度勾配 $\eta_{s}=L_{n}/L_{Ts}$ を含み不安定性に寄与する（高波数では安定化にも寄与する）．これら方程式中の各項の意味は後の二流体モデルとの対応でより明らかになる．トーラスプラズマでは揺動の波長はデバイ長より十分長いと仮定して，ポアソン方程式（準中性条件）およびアンペール式は以下のようになる．

$$0=\sum_{s}\left(q_{s}(\Gamma_{0s}^{1/2}n_{sk}+b_{s}\Gamma_{0s}^{1/2\prime}T_{\perp sk})-\frac{q_{s}^{2}}{T_{s}}[1-\Gamma_{0s}]\phi_{k}\right), \tag{3.3.3-1}$$

$$k_{\perp}^{2}A_{/\!/k}=\beta_{i}\sum_{s}q_{s}v_{Ts}(\Gamma_{0s}^{1/2}u_{/\!/sk}+b_{s}\Gamma_{0s}^{1/2\prime}q_{\perp sk}). \tag{3.3.3-2}$$

ジャイロ流体が対象とする現象の波長は，電子の有限ラーマー半径より十分大きく，電子流体に対して電子有限ラーマー半径効果を無視し $b_{\mathrm{e}}=(\rho_{\mathrm{e}}k_{\perp})^{2}\to 0$，以下のような式(3.3.4-1)‐(3.3.4-6)を用いる．また，後で二流体方程式と比較するために有限ラーマー半径を無視すると，ジャイロ流体方程式(3.3.1-1)‐(3.3.1-6)は以下のようになる．

$$\frac{Dn_{sk}}{Dt}+v_{\mathrm{Ts}}B\,\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla\frac{u_{/\!/sk}}{B}=-i\mathbf{v}_{dsf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\left(p_{/\!/sk}+p_{\perp sk}+\frac{q_{\mathrm{s}}}{T_{\mathrm{s}}}2\phi_{k}\right)+i\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\frac{q_{\mathrm{s}}}{T_{\mathrm{s}}}\phi_{k}, \tag{3.3.4-1}$$

$$\frac{Du_{/\!/sk}}{Dt}=-v_{\mathrm{Ts}}\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla p_{/\!/sk}-v_{Ts}\frac{q_{s}}{T_{s}}\left(\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla\phi_{k}+\frac{\partial A_{/\!/k}}{\partial t}\right)$$
$$-i\mathbf{v}_{dsf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}(q_{/\!/sk}+q_{\perp sk}+4u_{sk})+v_{Ts}(p_{/\!/sk}-p_{\perp sk})\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B-i\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}v_{Ts}\frac{q_{\mathrm{s}}}{T_{\mathrm{s}}}(1+\eta_{s})A_{/\!/k}, \tag{3.3.4-2}$$

$$\frac{DT_{/\!/sk}}{Dt}+v_{\mathrm{Ts}}B\,\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla\frac{2u_{/\!/sk}}{B}+v_{Ts}B\,\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla\frac{q_{/\!/sk}}{B}=$$
$$i\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\frac{q_{\mathrm{s}}}{T_{\mathrm{s}}}\eta_{s}\phi_{k}-i\mathbf{v}_{\mathrm{dsf}}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\left(6T_{/\!/sk}+2n_{sk}-\frac{2q_{s}}{T_{s}}\phi_{k}\right)-2v_{T\mathrm{s}}T_{\mathrm{s}}(q_{\perp sk}+u_{/\!/sk})\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B, \tag{3.3.4-3}$$

$$\frac{DT_{\perp sk}}{Dt}+v_{\mathrm{Ts}}\mathbf{b}\cdot\nabla\frac{q_{\perp sk}}{B}=+v_{Ts}T_{s}(q_{\perp sk}+u_{/\!/sk})\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B-i\mathbf{v}_{\mathrm{dsf}}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\left[4T_{\perp sk}+n_{sk}-\frac{1}{T_{s}}\phi_{k}\right]+i\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\frac{q_{\mathrm{s}}}{T_{\mathrm{s}}}[1+\eta_{s}]\phi_{k}, \tag{3.3.4-4}$$

$$\frac{Dq_{/\!/sk}}{Dt}+v_{\mathrm{Ts}}(3+\beta_{/\!/})\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla T_{/\!/sk}=-i\mathbf{v}_{dsf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}(3q_{/\!/sk}-3q_{\perp sk}-\alpha_{/\!/}u_{/\!/sk})-3i\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\frac{v_{\mathrm{Ts}}q_{\mathrm{s}}}{T_{\mathrm{s}}}\eta_{s}A_{/\!/k}-\sqrt{2}v_{Ts}D_{/\!/}|k_{/\!/}|q_{/\!/sk}, \tag{3.3.4-5}$$

$$\frac{Dq_{\perp sk}}{Dt}+v_{\mathrm{Ts}}\mathbf{b}^{*}\cdot\nabla T_{\perp sk}=-i\mathbf{v}_{\mathrm{dsf}}\cdot\mathbf{k}_{\perp}(-q_{/\!/sk}-q_{\perp sk}+u_{/\!/sk})-i\mathbf{v}_{*sf}\cdot\mathbf{k}_{\perp}\frac{v_{\mathrm{Ts}}q_{\mathrm{s}}}{T_{\mathrm{s}}}\eta_{s}A_{/\!/k}$$
$$+v_{\mathrm{Ts}}(p_{/\!/sk}-p_{\perp sk})\mathbf{b}\cdot\nabla\ln B-\sqrt{2}v_{Ts}D_{\perp}|k_{/\!/}|q_{\perp sk}, \tag{3.3.4-6}$$

ここで

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+\frac{1}{B}[\phi,\ ]_{k},\ \mathbf{b}^{*}\cdot\nabla=\mathbf{b}\cdot\nabla-\frac{1}{B}[A_{/\!/},\ ]_{k},$$

であり非線形項は二流体方程式と同じである．ポアソン方程式およびアンペール式(3.3.3)はさらに長波長近似を用いて以下のようになる．

$$0=\sum_{s}\left(q_{s}n_{sk}-\frac{q_{s}^{2}}{T_{s}}[1-\Gamma_{0s}]\phi_{k}\right), \tag{3.3.5-1}$$

$$k_\perp^2 A_{//k} = \beta_i \sum_s q_s v_{Ts} u_{//sk}. \qquad (3.3.5\text{-}2)$$

２次の保存式(3.1.4)では δS_s と D_s を以下のように置き換える．

$$\delta S_s = \frac{1}{2} T_s \left\langle \sum_k \left(|n_{sk}|^2 + \frac{1}{2} |u_{//sk}|^2 + \frac{1}{T_s^2} \left(\frac{1}{2} |T_{//sk}|^2 + |T_{\perp sk}|^2 + \frac{1}{3} |q_{//sk}|^2 + |q_{\perp sk}|^2 \right) \right) \right\rangle,$$

$$D_s = \left\langle \sum_k T_s \left(-\sqrt{2} v_{Ts} \left(\frac{D_{//}}{qR} |q_{//sk}|^2 + \frac{D_\perp}{qR} |q_{\perp sk}|^2 \right) \right) \right\rangle.$$

ジャイロ流体方程式はトーラスプラズマのコア領域で生じるイオン温度勾配不安定性[12]やエッジ領域で生じる運動論的バルーニングモードの解析に用いられてきた．線形不安定性の評価に対してはジャイロ運動論の計算結果と良く一致する．一方で，補足粒子を正確に記述できずゾーナル流の残留値を正しく評価できないことから，非線形シミュレーションではジャイロ運動論シミュレーションと比較して精度が低いとされている．近年，ゾーナル流の残留値をジャイロ運動論解析と同程度の精度で評価できるクロージャの開発も進められている．

４．二流体方程式とジャイロ流体方程式の関係

この節では，２節で導出した磁化プラズマの流体方程式と３節で導出したジャイロ流体方程式の比較を行う．

4.1 長波長ジャイロ流体方程式と二流体方程式の対応

対象とする不安定性の波長に比べてイオンおよび電子のラーマー半径が十分小さく有限ラーマー半径効果が無視できる場合 $b_s = (\rho_{Ts} k_\perp)^2 \to 0$ を考える．そしてイオン・電子温度は一様であると仮定する．この極限でジャイロ流体方程式の０次および１次モーメント式が二流体方程式に対応することを見る（準中性条件中の分極効果はイオンラーマー半径の最低次を残す $1-\Gamma_{0i} \approx \rho_{Ti}^2 k_\perp^2$，$1-\Gamma_{0e} \approx 0$）．密度式(3.3.4-1)は以下のようになる．

$$\frac{Dn_{sk}}{Dt} + v_{Ts} B \mathbf{b}^* \cdot \nabla \frac{u_{//sk}}{B} = -i \mathbf{v}_{\rm dsf} \cdot \mathbf{k}_\perp \left(p_{//sk} + p_{\perp sk} + 2 \frac{q_s}{T_s} \phi_k \right) + i \mathbf{v}_{*sf} \cdot \mathbf{k}_\perp \frac{q_s}{T_s} \phi_k.$$

この式に電荷をかけて粒子種について和を取りポアソン方程式（準中性条件）(3.3.5)およびアンペールの式(3.1.3)を用いると，渦度方程式を得る．さらに等方圧力を仮定すると二流体方程式の渦度方程式(2.2.1-1)を得る．

$$\frac{D}{Dt} k_\perp^2 \phi_k + \frac{1}{\beta_{\rm i}} B \mathbf{b}^* \cdot \nabla \frac{k_\perp^2 A_{//k}}{B} = -2i \mathbf{v}_{\rm df} \cdot \mathbf{k}_\perp p. \qquad (4.1.1)$$

トロイダル曲率項の対応には $\mathbf{v}_{\rm df} = \mathbf{b} \times \boldsymbol{\kappa}$ を用いる．考えている揺動の波長はラーマー半径より十分長いと仮定したので D/Dt 中の有限ラーマー半径効果は１である($\Gamma_{0s}^{1/2} = 1$)．

また，電子密度の式は

$$\frac{Dn_{\rm ek}}{Dt} + v_{\rm Te} B \mathbf{b}^* \cdot \nabla \frac{u_{//ek}}{B} = -i \mathbf{v}_{\rm df} \cdot \mathbf{k}_\perp \left(p_{\rm ek} - \frac{2}{T_{\rm e}} \phi_k \right) + i \mathbf{v}_{*{\rm ef}} \cdot \mathbf{k}_\perp \frac{\phi_k}{T_{\rm e}}, \qquad (4.1.2)$$

となる．式(4.1.2)が式(2.2.1-2)に対応する．

磁力線方向速度の式（一次のモーメント式）は以下のように近似される．

$$m_{\rm s} \frac{Du_{//sk}}{Dt} = -\mathbf{b}^* \cdot \nabla p_{//sk} - q_{\rm s} \left(\mathbf{b}^* \cdot \nabla \phi_k + \frac{\partial A_{//k}}{\partial t} \right) + (p_{//sk} - p_{\perp sk}) \mathbf{b} \cdot \nabla \ln B - i \mathbf{v}_{df} \cdot \mathbf{k}_\perp q_s m_s (q_{//sk} + q_{\perp sk} + 4u_{//sk}) - i \mathbf{v}_{*sf} \cdot \mathbf{k}_\perp q_s (1+\eta_s) A_{//k}.$$

等方圧力，温度勾配は０および電子の質量は十分小さいとして電子の磁力線方向速度の式は

$$m_{\rm e} \frac{DJ_k}{Dt} = -\mathbf{b}^* \cdot \nabla p_{ek} + \mathbf{b}^* \cdot \nabla \phi_k + \frac{\partial A_{//k}}{\partial t} + i \mathbf{v}_{*ef} \cdot \mathbf{k}_\perp A_{//k}, \qquad (4.1.3)$$

となる．ただし電子慣性の効果は残し，電流密度は電子流が支配的であるとした $u_{\rm e\parallel} \approx -J_\parallel = J$．式(4.1.3)が式(2.2.1-3)に対応する．

次に，磁力線方向速度の式を粒子種について和を取り，等方圧力を仮定する．$u_{//k} = \sum_{\rm s} m_{\rm s} u_{//sk}$ を使い，さらに磁場曲率ドリフトおよび反磁性ドリフトを無視すると磁力線平行方向速度の式(2.2.1-4)を得る．

$$\frac{Du_{//k}}{Dt} = -\mathbf{b}^* \cdot \nabla p_k. \qquad (4.1.4)$$

このようにして，長波長近似を行って有限ラーマー半径効果を無視することにより０次および一次のジャイロ流体方程式(4.1.1)-(4.1.4)が，２節で紹介した４つの二流体方程式(2.2.1-1)-(2.2.1-4)にそれぞれ対応することが示された．具体的には，密度式（０次モーメント式）を粒子種について和を取った式(4.1.1)が渦度方程式(2.2.1-1)，電子の密度式（０次モーメント式(4.1.2)）が式(2.2.1-2)，電子磁力線平行方向速度式（１次モーメント式(4.1.3)）が一般化オーム式(2.2.1-3)，磁力線方向速度式（１次モーメント式(4.1.4)）が式(2.2.1-4)に対応する．

ジャイロ流体は無または弱衝突プラズマを対象とし，二流体は衝突性プラズマを対象とするので，それぞれのクロージャは異なる．クロージャに依存しない０次および１次モーメント式は似た形になる．２次以上のモーメント式はクロージャの違いから大きく異なる．

4.2 反磁性ドリフト項

二流体方程式(2.2.1-2)-(2.2.1-3)には，式(4.1.2)-(4.1.3)中の反磁性項 $\boldsymbol{v}_{*{\rm f}} \cdot \boldsymbol{k}_\perp$ に対応する項がなかった．これは，ジャイロ運動論方程式(3.1.2)が，分布関数を平衡部分と揺動部分に分けて，アイコナール表示した揺動部分に対する式であることに起因する．同様に，式(2.1.1-2)-(2.1.1-3)中の密度を時間変動しない平衡部分と時間変動する揺動部分に分けることによって $n = n_{\rm eq} + n_1$，反磁性項

を得る.

$$\frac{\partial n_1}{\partial t}+[\phi_1,n_0]=-\mathbf{b}\cdot\nabla(u_{/\!/1}+d_iJ_1)+[A_{/\!/1},\mathrm{d}_iJ_0]$$
$$+2\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}\times\nabla(\phi_1-d_i\beta p_{e1}),\quad(4.2.1)$$

$$-d_e^2\left(\frac{\partial J_1}{\partial t}+[\phi_1,J_0]\right)+\frac{\partial A_{/\!/1}}{\partial t}=$$
$$-\mathbf{b}\cdot\nabla\phi_1+d_i\beta(\mathbf{b}\cdot\nabla p_{e1}-[A_{/\!/1},p_{e0}])+\frac{1}{S}J_1.\quad(4.2.2)$$

この節以後は表記を簡単にするために f_{eq} を f_0 と表示する．また，電流密度なども平衡部分と揺動分布に分け $\phi_0=0$ を仮定した．電子密度式(4.2.1)の左辺第2項は $[\phi_1,n_0]=-v_{*\mathrm{ef}}\partial_y\phi_1/T_{e0}$ で式(4.1.2)右辺最終項に対応し，一般化オーム則(4.2.2)右辺第3項は $[A_{/\!/1},p_{e0}]=-v_{*\mathrm{ef}}\partial_y A_{/\!/1}$ で(4.1.3)最終項に対応する．ここで $v_{*\mathrm{ef}}=T_{e0}n_0'$ である．この節以降は再び2.2節の無次元化を用いることに注意する．

上述同様の議論により，二次の保存式(2.2.5)は式(3.1.4)と同様になる

$$dH/dt=F+D.\quad(4.2.3)$$

自由エネルギー項は $F=\sum_s\Gamma_s/L_{\mathrm{ps}}+Y$,

$$\Gamma_i=\mathrm{Re}\int\beta(n_1\partial_y\phi_1^*-u_{/\!/1}\partial_yA_{/\!/1}^*)dV,$$

$$\Gamma_e=\mathrm{Re}\int\beta(n_1\partial_y\phi_1^*-u_{e/\!/1}\partial_yA_{/\!/1}^*)\mathrm{d}V,$$

$$Y=\mathrm{Re}\int J_0'[-(\phi_1+d_i\beta p_1)\partial_yA_{/\!/1}^*+\mathrm{d}_e^2J_1\partial_y\phi_1^*]\mathrm{d}V,$$

$1/L_{\mathrm{ps}}=p_{s0}'$ である．Y はジャイロ流体方程式にはなかった電流輸送項であり，この方程式系が電流駆動型不安定性を記述することを意味する．H と D は式(2.2.5)中の H と D を揺動量で書く（添え字1を付ける）.

最後にイオン反磁性項（ジャイロ粘性項）について説明する．渦度方程式(2.2.1-1)右辺最後の項に対応する項がジャイロ流体方程式(4.1.1)にはない．これは，ジャイロ流体方程式はジャイロ中心座標で書かれ，一方，二流体方程式は粒子中心座標で書かれていることに由来する．ジャイロ中心座標から，粒子中心座標に変換することにより，イオン反磁性項（ジャイロ粘性項）を得る[13].

5．流体方程式に基づく線形 MHD 不安定性

前節で，ジャイロ流体方程式の低次モーメント式（0次と1次）は長波長近似することにより二流体方程式に対応することを見た．したがって，この極限で，ジャイロ流体方程式系は，2節で示した波の分散関係式を持ち，シアアルヴェン波の伝搬を記述する．したがって，これらのモデルは MHD 不安定性の記述に適当である．この節では圧力駆動型不安定性（バルーニングモード）および電流駆動型不安定性（テアリングモードおよび内部キンクモード）を説明する．時間変化にドリフトオーダリングを用いた結果，これらの不安定性は反磁性効果の影響をうけ，実周波数をもつ．このような実周波数をもつ MHD 不安定性は，非線形発展において，ゾーナル流を生成し得る．この節以降は $A_{/\!/}$ を ϕ と書く．場の量を $f=f_{\mathrm{eq}}+f_1$ のように平衡量と揺動量に分けて揺動量の二乗項を無視し，2.2節で紹介した二流体方程式(2.2.1)を線形化すると以下の式を得る.

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp^2\phi_1=-\mathbf{b}\cdot\nabla J_1+[\phi_1J_0]-2\beta\mathbf{b}\cdot\kappa\times\nabla p_1-d_i\beta[p_{i0},\nabla_\perp^2\phi_1],$$
$$-d_e^2\left(\frac{\partial J_1}{\partial t}+[\phi_1,J_0]\right)+\frac{\partial\phi_1}{\partial t}=$$
$$-\mathbf{b}\cdot\nabla\phi_1+d_i\beta(\mathbf{b}\cdot\nabla p_{e1}+[\phi_1,p_{e0}])+\frac{J_1}{S},$$
$$\frac{\partial n}{\partial t}=-[\phi_1,n_0].\quad(5.1)$$

ここで磁力線方向流れおよび径電場の平衡成分はないこと $u_{/\!/0}=0$, $\phi_0=0$ および非圧縮性を仮定した．そして f_{eq} を f_0 と表示する.

5.1 バルーニング不安定性

圧力勾配不安定性を解析するので，電流駆動型不安定性を生じる平衡の電流密度勾配項（後述のエネルギー積分(5.1.3)の第4項に対応）を無視する($[J_0,\ ]=0$)．また，電気抵抗は無視する $1/S=0$．そして，3節同様のアイコナール表示および複素振動数表示 $f_1=\sum_k f_1\exp(-i\omega+iS_k)$ を行うと式(5.1)は,

$$i\omega k_\perp^2\phi_1=-\mathbf{b}\cdot\nabla k_\perp^2\phi_1-2\beta(T_i+T_e)\mathbf{b}\cdot\kappa\times\nabla n_1-i\omega_{*i}k_\perp^2\phi_1,$$
$$-i\omega n_1=i\omega_*\phi_1,$$
$$-i\omega(d_e^2k_\perp^2+1)\phi_1=-\mathbf{b}\cdot\nabla\phi_1+d_i\beta T_e\mathbf{b}\cdot\nabla n_1-i\omega_{*e}\phi_1.$$

ここで温度が一様であることを用いた $p_1=(T_i+T_e)n_1$, $p_{e1}=T_en_1$．一つの式にまとめるとバルーニングモードを記述する方程式を得る.

$$\omega(\omega-\omega_{*i})k_\perp^2\phi_1=-\frac{\omega-\omega_{*e}}{\omega(d_e^2k_\perp^2+1)-\omega_{*e}}\mathbf{b}\cdot\nabla k_\perp^2\mathbf{b}\cdot\nabla\phi_1$$
$$-2\beta(T_i+T_e)\omega_*\mathbf{b}\cdot\kappa\times\mathbf{k}_\perp\phi_1.\quad(5.1.1)$$

数値シミュレーションで得たバルーニングモードの静電ポテンシャル分布を**図2**に示す．悪い曲率領域であるトーラス外側（図右側）にモードが現れる．このバルーニングモードは，トロイダルモード数 $n=15$，ポロイダルモード数 $m=25\sim35$ の共鳴フーリエモードから構成され，その包絡線が図右側の $q(r)=2$ 近傍 $(r\sim0.5a)$ に拡がる．包絡線形成はフーリエモードのトロダル結合によって起こる．これは2.2節で説明したように，磁気ドリフト項は $\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}\times\nabla f=[r\cos\theta,f]$ となるので，この項により (m,n) モードが $(m\pm1,n)$ モードと結合することに起因する.

MHD 極限 $d_e\ll1$, $\omega_{*i}=\omega_{*e}=0$, でこの式は

$$\omega^2k_\perp^2\phi_1=-\mathbf{b}\cdot\nabla k_\perp^2\mathbf{b}\cdot\nabla\phi_1-2\beta(T_i+T_e)\omega_*\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}\times k_\perp\phi_1.\quad(5.1.2)$$

最終項の曲率を含む部分は $\mathbf{b}\cdot\boldsymbol{\kappa}\times\mathbf{k}_\perp=v_{\mathrm{df}}\cdot\mathbf{k}_\perp=\omega_d$ のように書き直せる．悪い曲率領域と呼ばれるトーラス外側では $\omega_d\omega_*>0$ となり不安定である．この式において磁力線方向

微分をバルーニング座標で表すとバルーニング方程式を得る．そして，バルーニング方程式の可解条件からメルシエ条件を得る．MHD 極限式(5.1.2)の右辺第一項が磁場折り曲げによる安定化効果（アルヴェン波の伝搬）を表し，MHD エネルギー積分

$$W=\frac{1}{2}\int \mathrm{d}\mathbf{r}\left(|\mathbf{B}_{1\perp}|^2+\frac{5}{3}p_0|\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}_1|^2+\left|\mathbf{B}_{1/\!/}-\mathbf{B}_0\frac{\boldsymbol{\xi}_1\cdot\nabla p_0}{B_0^2}\right|^2 -\frac{\mathbf{J}_0\cdot\mathbf{B}_0}{B_0^2}(\boldsymbol{\xi}_1\times\mathbf{B}_0)\cdot\mathbf{B}_1-2(\boldsymbol{\xi}_1\cdot\nabla p_0)(\boldsymbol{\xi}_1\cdot\boldsymbol{\kappa})\right), \quad (5.1.3)$$

の右辺第一項に対応する．したがって，式(5.1.1)右辺第一項（磁力線折り曲げ項）は反磁性効果ω_*を受ける．さらに，式(5.1.1)で電子慣性効果 d_e によりこの安定化効果が減少することがわかる．また，式(5.1.2)の右辺第二項がエネルギー積分(5.1.3)の最終項に対応し，圧力駆動型不安定性を駆動する．ここで $\boldsymbol{\xi}$ はプラズマ変位を表し，添え字0は平衡量，添え字1は揺動量を表す．エネルギー原理による安定条件は $W>0$ である．第1から3項目までは正であるので，安定化に寄与する．磁力線垂直方向波数ベクトルは例えば磁気座標を用いて $\mathbf{k}_\perp=\mathbf{k}_\alpha=(\nabla\alpha+\theta_k\nabla q)$, $\alpha=\zeta-q\theta$ と表される．また，一様プラズマを仮定すると二流体バルーニング方程式を導く式(5.1.1)は2.2節で示した波の分散関係式（$c_s=0$ の場合）に帰着する．

5.2 電流駆動型不安定性

磁化プラズマの二流体方程式系を用いて，安全係数が有理数 $q(r)=m/n$（例えば $q=1$，1.5，2 など）となる面（有理面）に共鳴して発生する電流駆動型不安定性（テアリングモード，非理想内部キンクモード）を説明する．そしてMHD 近似では記述できない反磁性効果による不安定性の実周波数および高温プラズマで重要になる電子慣性効果を示す．

有理面では $k_{/\!/}=0$ であり $\omega_A=0$ となるので，この面は共鳴面とも呼ばれ，揺動の振幅は大きく変化する．**図3**に動径方向プラズマ変位 ξ_{1r} の動径方向分布を示す．有理面 $r=r_s$ で内部キンクモードやテアリングモードの振幅が大きく変化する．そして，この面で電子慣性や電気抵抗が重要となり，MHD 条件 $E_{/\!/}=0$ が破れ磁力線のつなぎ代わり（磁気リコネクション）が起こる．その結果，磁力線折り曲げ効果による安定化効果が失われ，理想 MHD 的に不安定（$W<0$）でなくとも不安定になる．以上の説明は，例えば前節における式(5.1.1)の右辺第一項の説明に対応する．

図4は，数値的に求めた内部キンクモードの電流密度揺動 J_1 分布とプラズマ変位 $\xi_{1r}=-k_\theta\phi/\omega$ 分布を示す．このような共鳴型の不安定性を調べるには，揺動が動径方向に急激に変化する領域（内部領域）と，それ以外の動径方向にゆっくり変化する領域（外部領域）を分けて解析する境界層理論が有効である．後で説明する層の厚さ ε が小さい場合，**図4**中で変化がより急になる．

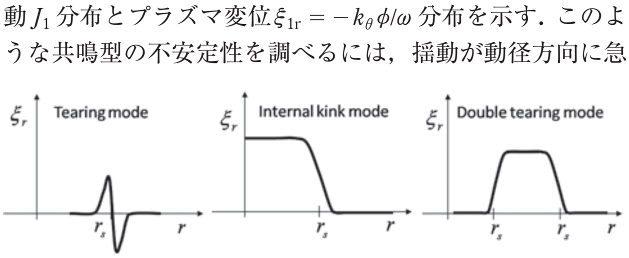

図3 プラズマ変位 ξ_{1r}（テアリングモード，内部キンクモード，ダブルテアリングモード）の小半径方向分布．r_s が有理面の位置を表す．

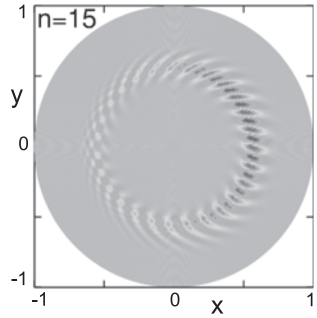

図2 バルーニングモードの静電ポテンシャル揺動分布．トロイダルモード数は n=15．以降の図で横軸縦軸は $x=(R-R_0)/a$，$y=Z/a$．(R,θ,Z)は円柱座標．

解析では，線形二流体方程式(5.1)でトロイダル効果を無視する（$\boldsymbol{\kappa}=0$）．

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp^2\phi_1=-\mathbf{b}\cdot\nabla J_1+[\phi_1,J_0]-d_i\beta[p_{i0},\nabla_\perp^2\phi_1], \quad (5.2.1\text{-}1)$$

$$-d_e^2\left(\frac{\partial J_1}{\partial t}+[\phi_1,J_0]\right)+\frac{\partial\psi_1}{\partial t}= -\mathbf{b}\cdot\nabla\phi_1+d_i\beta(\mathbf{b}\cdot\nabla p_{e1}+[\psi_1,p_{e0}])+\frac{J_1}{S}, \quad (5.2.1\text{-}2)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t}=-[\phi_1,n_0]. \quad (5.2.1\text{-}3)$$

時間変化にドリフトオーダリング $\omega\approx\omega_{*s}\approx\varepsilon v_{\mathrm{Ti}}/a=\varepsilon v_A/(\sqrt{\beta}a)$ を用いているので，アルヴェン波が小半径距離を伝わる時間 $\tau_A=a/v_A$ より十分遅く，なおかつ電流の衝突しみこみ時間 $\tau_R=S\tau_A$ より十分早く成長する不安定性を考える $\tau_A\ll 1/\gamma\ll\tau_R$．

5.2.1 外部領域

上の時間スケールを考えると，共鳴有理面以外の領域（外部領域）では時間微分項は無視でき，また $1/S$ および d_e は十分小さとする．さらに外部領域では反磁性効果を無視すると式(5.2.1-1)は

$$0=-\mathbf{b}\cdot\nabla J_1+[\phi_1,J_0], \quad (5.2.1.1)$$

のように近似される．外部領域の揺動はこの Newcomb 方程式（低ベータ）に従う．この式の第一項は MHD エネル

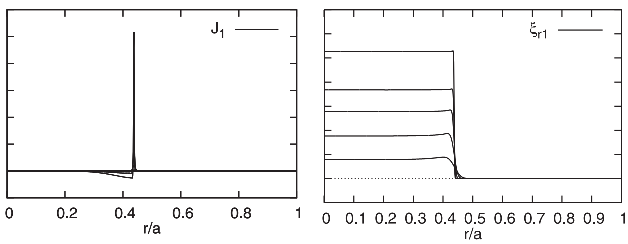

図4 内部キンクモードの電流密度揺動 J_1(左)とプラズマ変位 ξ_{1r}(右)の小半径方向分布．有理面近傍で揺動の勾配が非常に大きい．5本の線は図5の5つの成長率に対応する．

ギー積分(5.1.3)の第一項に対応し，磁力線折り曲げによる安定効果を表す．第二項は(5.1.3)の第4項に対応し，電流密度勾配 $J_0'(x)$ によって駆動されるキンク不安定化項を表す．

角柱プラズマを考え，動径方向を x，ポロイダル波数に対応する波数を k_y とすると Newcomb 方程式(5.2.1.1)は以下のように書くことができる．

$$B_0(x)(\partial_x^2-k_y^2)\hat{\phi}_1-J_0'\hat{\phi}_1=0. \tag{5.2.1.2}$$

ここで $\phi_1=\sum_k\hat{\phi}_1(x)\exp(ik_yy)$．トーラスプラズマの有理面は $B_0(x)=0$ を満たす場所に対応する．この面ではアルヴェン波が伝搬しないので共鳴面と呼ばれる．この面では式(5.2.1.2)の最高微分項が0になるため特異点（面）とも呼ばれる．

例えば，幅 a をもつ電流層（ハリスシート平衡）$B_0(x)=A\tanh(x/a)$，に対して，方程式(5.2.1.2)の解は以下のようになる．

$$\hat{\phi}_1=\exp(-k_y|x|)(1+(\tanh|x/a|)/(k_ya)). \tag{5.2.1.3}$$

ここで境界条件 $\hat{\phi}_1(x\to\pm\infty)=0$ を用いた．特異点 $x=0$ でこの解の微分は不連続である．

5.2.2 内部領域

不安定性の分散関係式を得るためには，共鳴有理面近傍のプラズマ応答を求める必要がある．共鳴有理面近傍のプラズマを記述する式は，式(5.2.1)に有理面近傍であることを用いて磁場をテイラー展開した第一項で近似し $B_y=B_0x/L_s$，さらに $\partial/\partial x\gg\partial/\partial y$ を行って得られる．そして，式(5.2.1)中の全ての項が同オーダーになるように（キンク項と(5.2.1-2)左辺カッコ内の第二項を除く）微小パラメータを用いて時間 t と動径方向座標 x を引き延ばすと内部領域方程式を得る．

$$\begin{aligned}
&(\hat{s}-i\hat{\omega}_{*\mathrm{i}})\frac{d^2\tilde{\phi}_{in}}{d\hat{x}^2}=-\hat{x}\frac{d^2\tilde{\psi}_{\mathrm{in}}}{d\hat{x}^2},\\
&(\hat{s}-i\hat{\omega}_{*\mathrm{e}})\tilde{\psi}_{\mathrm{in}}-\hat{x}(\tilde{\phi}_{\mathrm{in}}-T_{\mathrm{e}}\tilde{n}_{\mathrm{in}})=\hat{s}_{\mathrm{d}}\frac{d^2\tilde{\psi}_{\mathrm{in}}}{d\hat{x}^2},\\
&\hat{s}T_{\mathrm{e}}\tilde{n}_{\mathrm{in}}=i\hat{\omega}_{*\mathrm{e}}\tilde{\phi}_{\mathrm{in}}.
\end{aligned} \tag{5.2.2.1}$$

ここでポロイダル方向にモード展開するとともに複素成長率 $s=\gamma+i\omega$ を用いて揺動を表した $f=\tilde{f}(x)\exp(st-ik_yy)$．また，引き延ばされた変数に ^ を付け，有理面近傍の量であることを表す添え字 in を付ける．また，内部層では抵抗性 MHD 極限($d_{\mathrm{e}}=0$)と無衝突極限($1/S=0$)のそれぞれを考え，前者に対して $\hat{s}_{\mathrm{d}}=1$ 後者に対して $\hat{s}_{\mathrm{d}}=\hat{s}$ である．

ここで，不安定性の時間スケールと磁気リコネクション層（境界層）の厚さを考える．引き延ばされた変数は $\hat{x}=x/(\varepsilon a)$，$\hat{s}=s\tau_{\mathrm{A}}/(\varepsilon k_ya)$ である．抵抗性 MHD の場合，$\varepsilon=(Sk_ya)^{-1/3}$ で抵抗性 MHD 不安定性（抵抗性内部キンクモード，交換型不安定性）の成長率 $\varepsilon k_ya/\tau_{\mathrm{A}}$ および抵抗層の厚さ εa は抵抗の1/3乗に比例する．無衝突プラズマの場合 $\varepsilon=d_{\mathrm{e}}/a$ で無衝突 MHD 不安定性の成長率 $\varepsilon ka/\tau_{\mathrm{A}}$ および抵抗層の厚さ εa は電子の表皮長 d_{e} に比例する．このように，境界層の厚さや時間スケールは，方程式の解を得なくとも方程式中の項のバランスから評価できる．例えば航空機の翼上で発生する中性流体の境界層において，移流項と粘性項のバランスから層の厚さ（空間引き延ばしパラメータ）は，レイノルズ数の $-1/2$ 乗に比例する．

不安定性の分散関係式を得るために3つの式(5.2.2.1)を一つにまとめる．

$$\Lambda\left[\frac{d^2\chi}{\mathrm{d}\bar{\hat{x}}^2}-\frac{2}{\hat{x}}\frac{d\chi}{\mathrm{d}\hat{x}}\right]-(\bar{\hat{x}}^2+\Lambda^2)\chi=\bar{\hat{x}}^2\psi_\infty. \tag{5.2.2.2}$$

ここで，

$$\Lambda=[\hat{s}(\hat{s}-i\hat{\omega}_{*\mathrm{i}})(\hat{s}-i\hat{\omega}_{*\mathrm{e}})/\hat{s}_{\mathrm{d}}]^{1/3},\qquad \chi=\hat{x}^2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\hat{x}}\frac{\tilde{\phi}_{in}}{\hat{x}},$$

$$\bar{\hat{x}}=\hat{x}/\alpha=x/(\varepsilon a\alpha),$$

$$\alpha=(\hat{s}(\hat{s}-i\hat{\omega}_{*\mathrm{i}}))^{1/2}/\Lambda.$$

文献[5]の表記との関係は $E=\chi+\psi_\infty$ であり，式(5.2.2.2)は二流体への拡張である．方程式(5.2.2.2)の解は

$$\chi=-\psi_\infty+\psi_\infty\frac{\Lambda^{3/2}}{2^{5/2}}\int_0^1 y^{(\Lambda^{3/2}-5)/4}\sqrt{1+y}\,\exp\left(\frac{-(\bar{\hat{x}})^2}{2\Lambda^{1/2}}\frac{1-y}{1+y}\right)\mathrm{d}y,$$

である．導出は参考文献[14]およびその中の参考文献を参照する．

5.2.3 漸近接続

外部領域解の有理面近傍漸近展開は

$$\hat{\phi}_1(x)=\hat{\phi}_1(0)(1+\Delta'x/2+\cdots),\qquad x\to+0$$

ここで

$$\Delta'=\frac{1}{\hat{\phi}_1(0)}\left[\frac{\mathrm{d}\hat{\phi}_1(x)}{\mathrm{d}x}\right]_{-0}^{+0}, \tag{5.2.3.1}$$

である．また，$\phi=\psi/(sx)$ なので，$x\ll1$ で ϕ は $1/x$ に比例し，$x=0$ が特異点であることがわかる．内部領域解の漸近展開は

$$\tilde{\psi}_{\mathrm{in}}(x,s)=\psi_\infty(1+\Delta_{\mathrm{in}}'x/2+\cdots),\qquad \hat{x}\to+\infty.$$

ここで

$$\Delta_{\mathrm{in}}'=\frac{1}{(\hat{s}(\hat{s}-i\hat{\omega}_{*\mathrm{i}}))^{1/2}\varepsilon a}\frac{-\pi\Lambda^{9/4}}{8}\frac{\Gamma(\Lambda^{3/2}/4-1/4)}{\Gamma(\Lambda^{3/2}/4+5/4)}.$$

これらの接続により分散関係式を得る．

$$[\hat{s}(\hat{s}-i\hat{\omega}_{*i})]^{1/2}\Delta'=\frac{-\pi\Lambda^{9/4}}{8\varepsilon a}\frac{\Gamma(\Lambda^{3/2}/4-1/4)}{\Gamma(\Lambda^{3/2}/4+5/4)}. \tag{5.2.3.2}$$

ここで現れる接続パラメータ Δ' は，磁気面が壊れるような（磁気リコネクションを許す）揺動に対する電流駆動型不安定性の自由エネルギーを表す．

5.2.4 Δ' が大きい場合（内部キンクモード）

角柱プラズマでは平衡電流層幅が十分狭い場合($a\ll1$)，電流密度勾配は大きく Δ' は非常に大きな値を取る．このことは後で導く式(5.2.5.1)からもわかる．

また，トロイダルプラズマでは安全係数 q の最小値が1以下の場合，$q=1$ 有理面が現れ，ポロイダルモード数 $m=1$，トロイダルモード数 $n=1$ の揺動がこの面に共鳴する．この揺動に対してエネルギー積分 W (5.1.3)はトロイダルプラズマでは $W<0$ となり得て，その場合，内部キンクモードが不安定である．一方，円柱近似では $W=0$ となり，理想 MHD 極限で安定境界にある．そして $\Delta'\propto 1/W$ なので，Δ' は非常に大きくなる．このような場合，有理面近傍（内部領域）での電子慣性や電気伝導度が不安定性を支配する．

このような接続パラメータ Δ' が十分大きく，微小パラメータ ε の逆数と同程度な場合（$\Delta' a\approx 1/\varepsilon$），前節の分散関係式(5.2.3.2)は Γ 関数の特異点 $\Lambda=1$ を与える．この式が Δ' が大きい場合の分散関係式を与える．

無衝突プラズマの場合（$\hat{s}_{\rm d}=\hat{s}$），内部キンクモードの分散関係式は，式(5.2.3.2)より

$$(s-i\omega_{*{\rm i}})(s-i\omega_{*{\rm e}})=(\varepsilon ka/\tau_{\rm A})^2$$

である．ここで $\varepsilon=d_{\rm e}/a$．反磁性効果がない場合は実周波数をもたず成長率は $\gamma=\varepsilon k_y a/\tau_{\rm A}=d_e k_y/\tau_{\rm A}\equiv\gamma_0$ となり，成長率が電子の表皮長 $d_{\rm e}$（電子の慣性長）に比例する（**図5**）．そして，有理面近傍の非理想 MHD 領域の厚さもこの長さになる．**図4** で示したプラズマ変位 $\xi_{1{\rm r}}$ の5つの分布はそれぞれ**図5**中の5つの $d_{\rm e}$ に対応する．表皮長が長いほど**図4**のプラズマ変位は有理面近傍で緩やかに変化する（境界層は厚くなる）．**図6**は反磁性効果による内部キンクモードの安定化を示す．反磁性周波数 $|\omega_{*{\rm i}}|+|\omega_{*{\rm e}}|$ の増大に伴い成長率 γ が減少し，反磁性周波数が成長率程度になると成長率は三分の一程度に下がる．

抵抗性 MHD 極限で分散関係式は

$$s(s-i\omega_{*{\rm i}})(s-i\omega_{*{\rm e}})=(\varepsilon ka/\tau_{\rm A})^3$$

となる．ここで $\varepsilon=(Sk_y a)^{-1/3}$．反磁性効果がない場合，成長率は $\gamma=S^{-1/3}(k_y a)^{2/3}/\tau_{\rm A}$ で，電気伝導度の三分の一乗に比例する．そして，有理面近傍の非理想 MHD 領域（抵抗層）の厚さも電気伝導度の三分の一乗に比例する．内部キンクモードの成長による磁気面の変化を**図7**に示す．有理面 $q=1$ 内側のプラズマが，（**図4**に示したように磁気軸近傍が剛体的に）右へ移動し，図右側で磁気リコネクションが起こる．そしてコア領域の磁束が磁気リコネクションにより減少しつつある状態を示す．

5.2.5 Δ' が小さい場合（テアリングモード）

角柱プラズマにおいて，平衡電流層が厚く，揺動の波長が長い場合，テアリングモードが不安定になりうる．例えば，式(5.2.5.1)のように，$k_y a<1$ で $\Delta'>0$ となりこのモードは不安定となる．

トーラスプラズマでは，安全係数 q が1より大きく，小さな整数の組み合わせで表すことができる有理数（$q(r)=1.5,\ 2,\ 2.5$）となる面がある場合，揺動によるエネルギー積分(5.1.3)は正となり，理想 MHD に対して安定である．そして $\Delta'\propto 1/W$ なので $a\Delta'\approx 1$．

このような接続パラメータ Δ' が微小パラメータ ε の逆数より十分小さい場合（$\Delta'\ll 1/\varepsilon$），式(5.2.3.2)からテアリングモードの分散関係式

$$[s(s-i\omega_{*{\rm i}})]^{1/5}(s-i\omega_{*{\rm e}})^{3/5}=\frac{2\Gamma(5/4)}{\pi\Gamma(3/4)}\frac{\Delta'^{4/5}}{\tau_{\rm A}}(\varepsilon k_y a)^{9/5},$$

を得る．抵抗性 MHD で反磁性効果がない場合

$$\gamma=\frac{1}{\tau_t}\left[\frac{2a\Gamma(5/4)}{\pi\Gamma(3/4)}\Delta'\right]^{4/5},$$

である．ここで $\tau_t=\tau_{\rm A}S^{3/5}/(ka)^{2/5}$，であり，電気抵抗が大きいほど，その5分の3乗に比例して成長率が大きい．また Δ' が正の場合，不安定になる．例えば，5.2.1で求めたハリスシート解(5.2.1.3)の場合，

$$\Delta'=\frac{2}{a}\left(\frac{1}{k_y a}-k_y a\right), \qquad (5.2.5.1)$$

なので，長波長 $k_y a<1$ でテアリングモードが不安定である．**図8**はテアリングモードによって生じた二つの磁気島と静電ポテンシャル分布を示す．静電ポテンシャル分布は

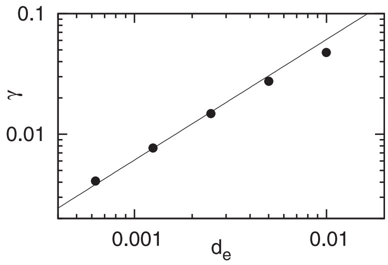

図5　内部キンクモードの成長率 γ の電子表皮長 $d_{\rm e}$ への依存性．成長率(点)は表皮長に比例する線に一致する．

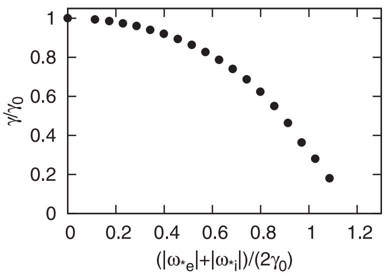

図6　成長率の反磁性周波数 $|\omega_{*{\rm i}}|+|\omega_{*{\rm e}}|$ 依存性（点）．内部キンクモードの反磁性効果による安定化を示す．

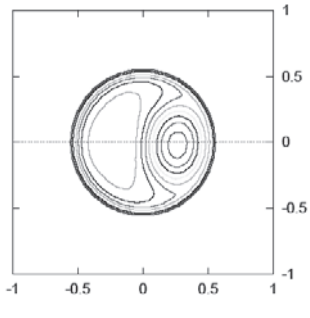

図7　内部キンクモード（ポロイダルモード数 $m=1$，トロイダルモード数 $n=1$）の磁気面．有理面 $q=1$ の右側で磁気リコネクションが起きる．また，反磁性効果でイオン反磁性方向（時計回り）に少し回転する．

$q=2$ 有理面近傍で動径方向に急激に変化する．そして，赤色の周りで反時計回りの $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 流があり青色の周りでは時計回りの $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}$ 流があるので，磁気軸から有理面上の X 点（リコネクション点で図の右と左）への流れがある．また，反磁性効果でこれらの分布は歪む．**図 2** で説明したトロイダルモード結合により，ポテンシャル分布中で，$(m,n)=(2,1)$ モードの外側（$r=0.8$）に $q=3$ 有理面に共鳴する $(m,n)=(3,1)$ モードが弱く現れる．

6．流体方程式に基づく非線形MHD不安定性（磁気島の理論）

現代的なトカマクでは，5 節で解説したテアリングモードは安定な場合が多い．しかし，高ベータではメタステイブル状態にあり，非線形不安定である．この磁気島成長は新古典テアリングモードと呼ばれ，現代的なトカマクの到達ベータを規定する[15]．この非線形不安定性を記述する方程式としてラザフォード方程式が用いられる．この方程式は，ヘリカル系での磁気島の振る舞いにも用いられる．

初めに，抵抗性 MHD 方程式を用いて磁気島の非線形発展を記述するラザフォード方程式を導く．その後，ITER などの大型装置における磁気島の形成に対する予測（ρ_* スケーリング）を行う上で重要な分極電流効果を理論的に説明する．

分極電流について以下に簡単に説明する．磁気島の周りにプラズマの流れがある場合，プラズマは磁気島によって生じた歪んだ磁気面に沿って流れて加速を受ける．この加速が分極電流を生じ，磁気島の成長に影響を与える．トカマクプラズマ中の磁気島は，幅が十分大きく MHD 近似がよい場合，プラズマに凍りついて動くため，磁気島周りの流れは極めて小さく，分極電流は無視できる．磁気島の幅がラーマー半径の数倍程度に小さく反磁性効果が有効な場合，磁気島周りの流れが生じ，分極電流効果が顕著になる．したがって，将来の大型装置における磁気島励起に対する $\rho_*=\rho_{\rm i}/a$ スケーリングを予測する上で分極効果の理解が重要である．

6.1　ラザフォード方程式

ここで磁気島の時間発展がドリフトオーダリングの時間スケールより十分遅い状況を考え（例えばテアリングモードの成長が飽和した状態），反磁性効果を無視する．そして，再び角柱プラズマを考える．角柱プラズマの場合 $\boldsymbol{\kappa}=0$ となり，さらに考えている磁気島の波長がイオン表皮長 d_i より十分大きいと仮定すると，2 節で導いた簡約化二流体方程式は二場簡約化 MHD 方程式になる．

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla_\perp^2\phi+[\phi,\nabla_\perp^2\phi]=-\nabla_{/\!/}J, \tag{6.1.1}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\nabla_{/\!/}\phi+\frac{1}{S}J. \tag{6.1.2}$$

ここで $\nabla_{/\!/}=b^*\cdot\nabla$．磁気島を含む磁場は

$$\psi=\psi_0+\psi_1,\ \ \psi_0=x^2/(2L_{\rm s}),\ \ \psi_1=\Psi\cos(k_y y)$$

で表わされる（**図 9** 参照）．ここで $k_{\rm y}=2\pi k/L_{\rm y}$，$k=1$，$\Psi$ は一定と仮定する．

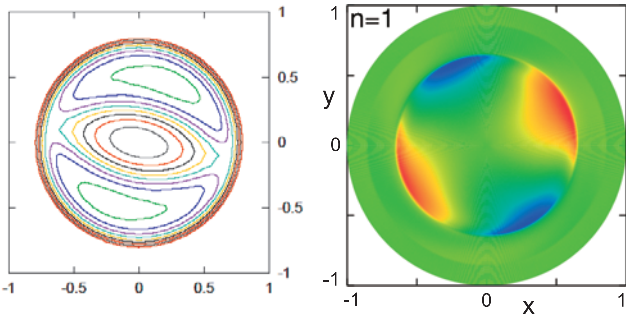

図 8　テアリングモード（$m=2$, $n=1$）の磁気面（$m/n=2/1$ へリカル磁束の等値面）および静電ポテンシャル揺動分布（右）．有理面 $q=2$（$r=0.65a$）で磁気リコネクションが起こる．

磁気リコネクションが十分遅く磁気島成長が遅い場合，式(6.1.1)左辺の時間微分項は無視できる．さらに慣性項（分極項）は無視できると仮定し，式(6.1.1)左辺のすべての項を無視すると $\nabla_{/\!/}J=0$ を得る．したがって，この場合，電流密度は磁気面関数（磁気島を含む）$J=J(\psi)=\langle J\rangle$ になる．ここで $\langle\ \rangle$ は磁気島を含む磁気面平均を表す．

一方，慣性項（分極項）が無視できない場合は，電流密度が磁気面関数（磁気島を含む）にならない，この理由から磁気面関数からのずれを分極電流と呼ぶ．

$$J=\langle J\rangle+J_{\rm pol}. \tag{6.1.3}$$

オーム則(6.1.2)を磁気面平均し，さらに式 $\langle B\nabla_{/\!/}f\rangle_\psi=0$ を用いると，$\int\langle\partial\psi/\partial t\rangle\cos(k_y y)dx=\int\eta(J-J_{pol})\cos(k_y y)dx$ を得て，磁気島幅 $W=4\sqrt{\Psi L_s}$ の時間発展方程式であるラザフォード方程式

$$SC\frac{{\rm d}W}{{\rm d}t}=\Delta'+\Delta_{\rm pol}, \tag{6.1.4}$$

を得る．ここで

$$C=\int_{-1}^{\infty}\left[\left(\int_0^{2\pi}\frac{\cos\theta\, d\theta}{\sqrt{z+\cos\theta}}\right)^2\Big/\int_0^{2\pi}\frac{{\rm d}\theta}{\sqrt{z+\cos\theta}}\right]{\rm d}z$$

で数値は約 0.8[5]．また

$$\Delta'=\frac{1}{\Psi}\left[\frac{{\rm d}\psi}{{\rm d}x}\right]_{-W/2}^{+W/2}, \tag{6.1.5}$$

$$\Delta_{\rm pol}=-\overline{\left(\frac{J_{\rm pol}}{\Psi}\cos k_y y\right)}. \tag{6.1.6}$$

ここで

$$\overline{\cdots}=\int_0^{L_x}\int_0^{L_y}\cdots\frac{{\rm d}x}{L_x}\frac{{\rm d}y}{L_y}$$

は体積平均を表す．Δ' の定義式(6.1.5)は(5.2.3.1)と異なり，磁気島幅を用いて定義され，非線形効果が含まれる．線形理論同様に Δ' が磁気島成長を駆動する自由エネルギーを表す．そして，$\Delta_{\rm pol}$ が分極電流による磁気島の駆動あるいは抑制を表す．次節でこの項の被積分関数 $J_{\rm pol}$ の導出過程を概観する．

最後に磁気島の回転について簡単に述べる．磁気島の回

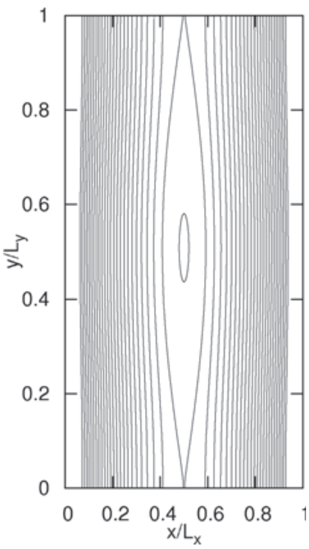

図9　磁気島が作る磁気面（ϕ の等値面）.

転はポロイダル方向（y 方向）の運動量保存式（あるいは渦度方程式を動径方向積分した式）から導出する.

$$\frac{\mathrm{d}\overline{v_y}}{\mathrm{d}t}=F_y+\Theta_y+D_y. \tag{6.1.7}$$

ここで $F_y=-\overline{J\partial_y\psi_1}$ はローレンツ力, Θ_{y} は外力, D_y は粘性による抗力を表す. 例えば, 新古典テアリングモードの励起時に磁気島の回転を評価する場合, $\Theta_{\mathrm{y}}=D_{\mathrm{y}}=0$ とみなせるので, $F_{\mathrm{y}}=0$ が励起時の磁気島回転を規定する.

6.2　分極電流の評価

この節では参考文献[16]に従い分極効果の理論を概観し J_{pol} を導出する. 冷たいイオン, 質量のない電子を考え, また, 平衡磁力線方向の速度を無視する. プラズマが磁気面に沿って流れようとする応答は磁気島の時間発展より十分速いので, ここでは反磁性効果が重要になる. 式(2.2.1-1)-(2.2.1-3)は

$$[\phi,\nabla_{\perp}^2\phi]=-\nabla_{/\!/}J, \tag{6.2.1}$$
$$[\phi,n]=-\nabla_{/\!/}J, \tag{6.2.2}$$
$$0=\nabla_{/\!/}(-\phi+d_{\mathrm{i}}\beta T_{\mathrm{e0}}n), \tag{6.2.3}$$

となる. 式(6.2.2)と式(6.2.3)から

$$\phi-d_{\mathrm{i}}\beta T_{\mathrm{e0}}n=H(\psi), \tag{6.2.4}$$

$$\nabla_{/\!/}J=-[\phi,n]=\frac{1}{d_{\mathrm{i}}\beta T_{\mathrm{e0}}}\frac{dH}{d\psi}[\psi,\phi], \tag{6.2.5}$$

を得る. ここで $H(\psi)$ は ψ の任意関数である. $\nabla_{/\!/}J$ を磁力線方向に積分すると J を得て分極電流

$$J_{\mathrm{pol}}=J-\langle J\rangle=\frac{1}{d_{\mathrm{i}}\beta T_{\mathrm{e0}}}\frac{dH}{d\psi}(\phi-\langle\phi\rangle), \tag{6.2.6}$$

を得る. 静電ポテンシャル ϕ の分布を得るためには, 式(6.2.1)と式(6.2.2)を使って得られる $[\phi,\nabla_{\perp}^2\phi-n]=0$ を使い, $\nabla_{\perp}^2\phi-n=K(\phi)$ を得るので, 式(6.2.4)を用いると静電ポテンシャル ϕ が満たす式を得る.

$$\nabla_{\perp}^2\phi=I(\phi)-H(\psi). \tag{6.2.7}$$

式(6.2.7)はグラッド・シャフラノフ方程式に似た形であり同様の解法で静電ポテンシャル ϕ を得る. 静電ポテンシャル ϕ を求め, 式(6.2.6)を用いて分極電流 J_{pol} を得る. そして, 式(6.1.6)を用いて Δ_{pol} を得る. 以上の手順により磁気島発展式(6.1.4)中の分極電流効果 Δ_{pol} を得る.

6節のはじめに述べたように, トカマクプラズマ中では, 外部摂動磁場によるロッキング効果がない場合, 磁気島が自由に回転できるため, 磁気島の幅が大きい場合, 分極電流効果は無視できる. このことは以下のように確かめられる. 磁気島の幅がイオン表皮長あるいはラーマー半径より十分大きい場合（$d_{\mathrm{i}}\to 0$）, MHD 近似がよくなる. その結果式(6.2.3)より $\phi=\phi(\psi)$ で $\langle\phi\rangle=\phi$ となり式(6.2.6)より分極電流はなくなる（$J_{\mathrm{pol}}=0$）. したがって, 磁気島の幅がラーマー半径の数倍程度に小さく反磁性効果が効果をもつ場合, 磁気島周りの流れが生じて分極電流効果が顕著になる.

7．おわりに

前半は, 磁化プラズマの流体方程式を概観し, 衝突性プラズマを対象とする二流体モデルと弱小衝突プラズマを対象とするジャイロ流体モデルの関係を示した. 両モデルにおいて一様温度を仮定すると, 0次と1次のモーメント式（密度と平行方向速度式）は対応があることを示した. 0次と1次モーメント式で, 不安定性を駆動するのは密度, 温度, 電流の勾配であり, どちらの流体方程式にも共通である. また, 平行方向伝搬, 磁気ドリフト, 反磁性効果も対応する. 非線形項に関しては, どちらの方程式でも静電ポテンシャルとベクトルポテンシャルを含むポアソン括弧で書かれる（式(2.2.2)と式(3.3.2)）. 2次以上のモーメント式に対しては衝突性と弱衝突性でクロージャが大きく異なるため対応は難しい.

後半は, 二流体効果（反磁性および電子慣性効果）を含んだMHD不安定性の解析を紹介した. MHD不安定性の回転周波数は反磁性効果（二流体効果）で規定され, 分散関係式はイオンと電子の反磁性周波数を含むことが示された. また, 無衝突プラズマでは電気抵抗（磁気拡散係数）に代わって, 電子の表皮長が成長率および磁気リコネクション層の幅を規定することを示した. 最後に, 磁気島成長の理論を紹介し, 二流体効果がある場合, トカマクプラズマにおける磁気島成長に分極電流効果が影響することを示した.

流体モデルに基づくシミュレーションは3次元空間内の計算であるため, 速度空間を含む5次元位相空間内の分布関数時間発展を計算するジャイロ運動論シミュレーションと比較して計算コストが飛躍的に低いという大きな利点がある. ジャイロ流体についてはジャイロ運動論と同程度の乱流輸送を得るためのクロージャの開発が進められている[17]. 特に, 流体モデルのシミュレーションは, ジャイロ運動論シミュレーションでは計算コストの観点から難しい

磁場揺動を含む微視的または巨視的不安定性のグローバルな解析において有用である．その典型的な例が 6 節で紹介した磁気島成長の問題である．将来コンピュータの演算能力が向上した場合，ここで解説した MHD 現象さらにはトロダルアルヴェン固有モードに対するジャイロ運動論シミュレーションが期待される．

この解説で用いられた図の作成には参考文献[18]のシミュレーションコードを用いた．最後に，議論していただいた渡邉智彦教授，洲鎌英雄教授，中島徳嘉教授に感謝いたします．

参 考 文 献

[1] 岸本泰明：プラズマ・核融合学会誌 **76**, 1280 (2000).

[2] 岸本泰明：プラズマ・核融合学会誌 **79**, 460 (2003).

[3] 中島徳嘉　他：プラズマ・核融合学会誌 **85**, 105 (2009).

[4] 山﨑耕造　他：プラズマ・核融合学会誌 **88**, 151 (2012).

[5] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, *Plasma Confinement* (Addison-Wesley Publishing Company, 1992).

[6] Z. Chang and J.D. Callen, Phys. Fluids B **4**, 1766 (1992).

[7] R.D. Hazeltine *et al.,* Phys. Fluids **28**, 2466 (1985).

[8] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, Phys. Rep. **121**, 1 (1985).

[9] 伊藤公孝，伊藤早苗：プラズマ・核融合学会誌 **81**, 972 (2005).

[10] 洲鎌英雄：プラズマ・核融合学会誌 **79**, 107 (2003).

[11] M.A. Beer and G.W. Hammett, Phys. Plasmas **3**, 4046 (1996).

[12] 洲鎌英雄，矢木雅敏：プラズマ・核融合学会誌 **76**, 1007 (2000).

[13] E.V. Belova, Phys. Plasmas **8**, 3936 (2001).

[14] 石澤明宏：プラズマ・核融合学会誌 **77**, 995 (2001).

[15] 小関隆久，諫山明彦：プラズマ・核融合学会誌 **77**, 409 (2001).

[16] J.W. Connor *et al.,* Phys. Plasmas **8**, 2835 (2001).

[17] H. Sugama *et al.,* Phys. Plasmas **14**, 022502 (2007).

[18] A. Ishizawa and N. Nakajima, Phys. Plasmas **14**, 040702 (2007).

いし ざわ あき ひろ
石 澤 明 宏

自然科学研究機構核融合科学研究所ヘリカル研究部助教．磁場閉じ込めプラズマにおける電磁的乱流およびそれによって生じる乱流輸送の研究を行っている．特に最近はヘリカルプラズマの実験配位を用いた電磁的ジャイロ運動論シミュレーションを進めている．また，電磁的乱流の基礎物理として磁気リコネクションや磁気島形成の研究も進めている．詳細は http://www.nifs.ac.jp/fts/ishizawa/参照．