J. Plasma Fusion Res. Vol.88, No.10 (2012) 610‐617

講座 輻射流体シミュレーション

2．非等方性の強い輻射場における輸送計算：超新星爆発におけるニュートリノ輻射輸送の例

住 吉 光 介
沼津工業高等専門学校・教養科物理

（原稿受付：2012年 8 月25日）

輻射流体シミュレーションの記述において，輻射のエネルギー・角度分布が重要となる場合について，宇宙物理における重力崩壊型超新星の問題を例として概説する．重い星の進化の最期には，超新星爆発という華々しい天体現象が起こる．その爆発メカニズムの解明では，高温高密度の極限状態におけるニュートリノ粒子の反応・輸送過程が重要な役割を担っている．超新星においてニュートリノ輻射輸送の緻密な記述が果たす役割を解説して，ニュートリノ輻射輸送計算による発展について概観し，多次元計算における近似手法から 6 次元ボルツマン方程式の直接解法による最新の計算手法までを紹介する．

Keywords:
radiation transfer, Boltzmann equation, neutrino, supernova

2.1 宇宙物理分野における輻射輸送

輻射流体計算は，宇宙分野においても多く現れ，様々な天体のダイナミクスにおいて重要な鍵を握っている．銀河や星などの形成過程においては，輻射によるエネルギー・運動量の輸送が流体への影響を与えて，天体の構造や進化が変わってくることになる．一方，星が進化して，やがて最期にどうなるのか，というのも根源的な疑問である．重たい星はやがて潰れてしまい，大爆発（超新星爆発）を起こすことが知られている．この爆発現象の鍵を握るのが，輻射輸送である．ただし，この場合は，ニュートリノという素粒子がダイナミクスにおける輸送過程を担っている．このニュートリノ輻射輸送と呼ばれる過程を扱うことは，宇宙物理分野における重要な課題の一つであり，様々な計算手法が開発されて，数値シミュレーションにより爆発メカニズムの解明が行なわれてきた．特に，現象記述には，エネルギー・角度分布について緻密な取り扱いが要求されるため，様々な近似を越えて，より厳密な計算手法の開発が行われてきた．本章では，超新星爆発におけるニュートリノ輻射輸送流体計算を例に取って，ボルツマン方程式を扱う計算手法の最近の発展について解説を行う．

2.2 超新星爆発とニュートリノ

2.2.1 重力崩壊型超新星とは

太陽の質量の10倍を越える質量をもつ重たい星は，進化の最期に自らを支えることができず，重力崩壊を起こして潰れてしまう．高温高密度になった中心コアで跳ね返り（バウンス）が起こり，発生した衝撃波がやがて星全体を吹き飛ばし，きわめて明るい輝きを放ち，やがて暗くなってしまう．こうした天体現象は，重力崩壊型超新星と呼ばれ，古くから観測例があり，年間を通じて数多くの観測がなされている．なかでも有名なものとして，例えば1054年に観測された記録が存在する超新星爆発があり，その残骸であるカニ星雲（中心部にパルサー）が知られている．また，1987年に観測された超新星爆発は，宇宙からのニュートリノ粒子を初めて検出したことが日本人のノーベル物理学賞の受賞へと繋がり，一般社会へも広く知られることとなった．

爆発のあと，中心には高密度天体（中性子星あるいはブラックホール）が残されて，外層においては爆発的な元素合成が行われて外部へまき散らされる．これらの物質放出がもとで，新たな星が生まれる材料となり，星の集まりである銀河の進化にも影響を及ぼしている．我々の経済・生活に関わりのある貴金属（プラチナ・金など）や原子力エネルギーの燃料であるウランなどは超新星爆発のような爆発的な現象により作られたとされているが，まだ起源はよくわかっていない．

このように宇宙・物質の発展の源である重力崩壊型超新星であるが，その爆発メカニズムは，40年以上にわたる精力的な研究にも関わらず，未だ爆発の引き金となる根源的な部分が解明されていない[1,2]．実際のところ，超新星爆発の数値シミュレーションにおいて，星の重力崩壊から爆発を再現することは難しく，爆発した場合であっても起源となるメカニズムを確定できずにいるのが現状である．この難しさの原因は，超新星コアにおける極限状態での物質の性質とニュートリノ輻射輸送の様相が絡みあって，流体ダイナミクスが複雑になっていることにある．中でも，

2. Computations of Radiation Transfer with Anisotropic Distributions: Examples of the Neutrino Transfer in Supernova Explosions
SUMIYOSHI Kohsuke *author's e-mail: sumi@numazu-ct.ac.jp*

©2012 The Japan Society of Plasma Science and Nuclear Fusion Research

ニュートリノ粒子が高温高密度の物質において，どのように相互作用して伝搬したり輸送されるのかが問題の鍵となる．

2.2.2　超新星爆発メカニズム

まず，爆発に至るまでの超新星ダイナミクスを簡単に説明したい（**図 1**）．星の中心にある鉄コアは重力崩壊により圧縮されて，すぐに中心での密度は3×10^{14} g/cm^3（原子核物質密度）を越え，温度は10^{11} Kにも達する．この密度は，通常の原子核内部で陽子・中性子が安定に存在する状態を越えている．密度上昇により，核力による斥力が急激に働きだすため，内部コアはこれ以上圧縮できず，堅くなり反発してコアバウンスする．引き続き外部コアは重力により落下してくるので，この両者の間に衝撃波が発生する．バウンスによる外向きの衝撃波が，鉄コア表面まで突き抜けることができれば，星の最外層に達して，超新星爆発となる．

ここで重要な役割をするのがニュートリノである．重力崩壊の際に，原子核が電子捕獲反応を起こしてニュートリノが発生するほか，高温部分では熱的にニュートリノ対が大量に発生する．これらのニュートリノは，中心密度が高いために，すぐさま逃げることはできず，中心コアに閉込められた状態にある（**図 1 ニュートリノ閉じ込め**）．物質と頻繁に反応・散乱しながら，やがて外へ向けて飛んでいく．こうして放出された大量のニュートリノの一部を，地球上で検出したものが，先に述べた超新星ニュートリノである．

このニュートリノ発生・放出過程は，エネルギー移行の観点からも重要であり，その一部が爆発に寄与していると

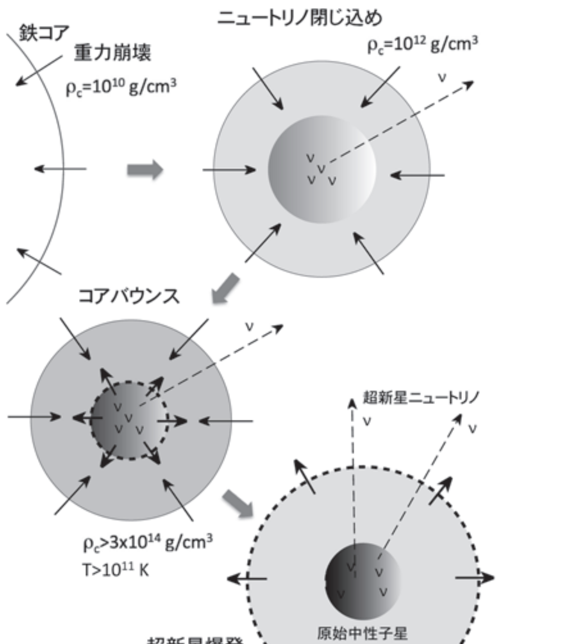

図 1　鉄コアの重力崩壊から超新星爆発に至るまでの概略．中心密度が上がるにつれて，ニュートリノは逃げ出すことができなくなり，物質中に閉じ込められる．中心コアの跳ね返りで衝撃波が発生して，外層部分を吹き飛ばす．中心には高密度天体が残される．

考えられている．大まかにエネルギーの移り変わりを見ると，重力崩壊によって鉄コア（太陽質量の 1.4 倍程度の質量）の半径が小さくなる（～10^3 km から～10 km へ）ことにより重力エネルギーが解放される．このエネルギーは，10^{53} erg 程度であり，圧縮による温度上昇に伴い熱エネルギーに転換されて，その後はニュートリノ対の生成へと使われる．ニュートリノのほとんどは外に逃げてしまい，超新星ニュートリノとなる．地上の検出器により測定されたニュートリノのエネルギーと個数から，ニュートリノ放出の合計エネルギーは 10^{53} erg であることが判明したため，星の重力崩壊によるエネルギー解放という大枠のシナリオは正しいことが明らかとなった．

一方，外層が吹き飛ばされる際の爆発エネルギーは 10^{51} erg であることが観測からわかっており，このエネルギーをどのように説明するのかが課題である．最近の数値シミュレーションによる結果では，コアバウンスによる衝撃波は，伝搬途中のエネルギー損失のため，途中で停滞してしまうことがわかっており，何らかのエネルギー的な手助けが必要である．放出されるニュートリノのうち，一部は物質を加熱することに使われて，衝撃波を後押しすること（ニュートリノ加熱）もわかっており，この量が十分かを明らかにすることが重要な課題である．つまりニュートリノ放出分のうち，約 1 %のエネルギーを物質に与えて，爆発エネルギーに寄与するか否かを明らかにするため，ニュートリノ輻射エネルギーの一部が移行される過程を扱う，緻密な輻射輸送計算が必要不可欠ということである．

2.3　超新星爆発の数値シミュレーション

2.3.1　必要な物理過程

爆発メカニズムを解明すべく，重力崩壊型超新星のダイナミクスを記述するためには，大枠となる流体力学とニュートリノ輻射輸送の記述，高温高密度における物質の熱力学的性質（状態方程式）とニュートリノ・物質間の相互作用（反応率）の詳細なミクロ物理データが必要である．超新星の構造・ダイナミクスは重力の支配下にあり，自然界の 4 つの基本的な力（重力，弱い相互作用，強い相互作用，電磁相互作用）のすべてが関与する系となっている．

この中で，流体計算自体については，計算法や計算機資源の発展により，3 次元空間であっても高い解像度での計算が可能になってきた．しかし，ニュートリノ輻射による流体ダイナミクスへの影響（圧力の寄与，加熱・冷却）が大きく，流体の状態変化によりニュートリノ反応・輻射が変動するため，流体とニュートリノ輻射の両者を同時に解くことが必要である．さらに，ニュートリノ輻射を求めるにあたっては，後述のように単純な近似を用いることができない．特に，ニュートリノ反応率は，ニュートリノの種類・エネルギー・角度に依存しており，個々の反応過程の詳細を計算に取り入れる必要がある．また，実験室では到達できない高温高密度領域での物質の状態方程式，ニュートリノ・物質の相互作用は，原子核物理の手法を駆使して理論的に求めて，広範囲をカバーする核データとして整備しなければならない．

2.3.2　ニュートリノ輻射の役割

ニュートリノ輻射は，超新星のダイナミクスの各ステージで重要な役割を果たしている．なかでも爆発か否かを決めるのに重大な局面となるのはコアバウンスで打ち上げられた衝撃波が，途中で停滞してしまった状況である．コアバウンス後100 ms程度で衝撃波は100 kmを越えたあたりで停滞して，外へは進まなくなってしまう．伝搬の際にエネルギー損失（鉄を核子に分解するためにエネルギーが消費される）があり，コアバウンス自体による初期の衝撃波エネルギーは使い果たしてしまうためである．この時点で，中心には（のちに中性子星となる）原始中性子星が誕生し，密度・温度が高くニュートリノを多く含んだ状態にあり，表面からニュートリノが徐々に外へ流れ出している．ニュートリノは物質からエネルギーを持ち出して伝搬するので，物質にとっては冷却過程となる．これらのニュートリノが，外部へ逃げ出す途中で物質に吸収されると，ニュートリノの持つエネルギーが物質へ与えられることになり，物質にとっての加熱過程となる．これらの冷却・加熱領域がどのような配置となるのか，そしてエネルギー移行量はどれくらいなのかを定量的に求めなければならない．**図2**には，バウンス後の速度および加熱率の典型的な分布例を示した．150 km付近で停滞した衝撃波の付近にニュートリノ加熱領域が存在する．その内側はニュートリノを放出する冷却領域である．

このエネルギー移行過程を探る問題が難しい理由の一つは，超新星コアの中心から表面までの密度・温度の範囲が非常に広く，輻射輸送の様相が大きく変動していることにある．**図3**に示すように，超新星コアの中心密度は10^{14} g/cm^{3}以上，鉄コア表面密度は10^5 g/cm^{3}程度であるので，シミュレーション計算でカバーすべき密度範囲は10桁に及ぶ．中心温度は10^{11} K，表面温度は10^9 K程度である．こうした高温高密度物質の中でニュートリノが相互作用しながら，どのように分布して，輸送されるのかを調べなければいけない．ここで物質とは，ニュートリノ以外の構成粒子で，陽子・中性子・原子核・電子・陽電子・光子の集まりである．これらの粒子群は強い（核力）相互作用と電磁気相互作用により，十分短い時間スケールで頻繁に反応をして常に熱統計平衡状態に保たれている．一方で，ニュートリノは弱い相互作用によってのみ物質と相互作用をしており，その反応時間スケールが長い場合には平衡が成り立たないため，物質とは分けて，ニュートリノのエネルギー・角度分布を記述する必要がある．つまり，流体力学で追う部分は物質の部分であり，ニュートリノは輻射の部分として扱い，両者が結合した輻射流体力学を解くこととなる．

超新星コアにおけるニュートリノ輻射輸送は，中心における準平衡状態から外部へ向けて自由伝搬するまで，非常に幅広い過程を経由するものとなっている．**図4**のように重力崩壊時には，ニュートリノ閉じ込めにより徐々に数密度が増えていき，Fermi-Dirac分布・等方分布に近づいていく．密度温度が高くなった中心部ではニュートリノ・物質間の相互作用は頻繁に起こっており，ニュートリノ吸

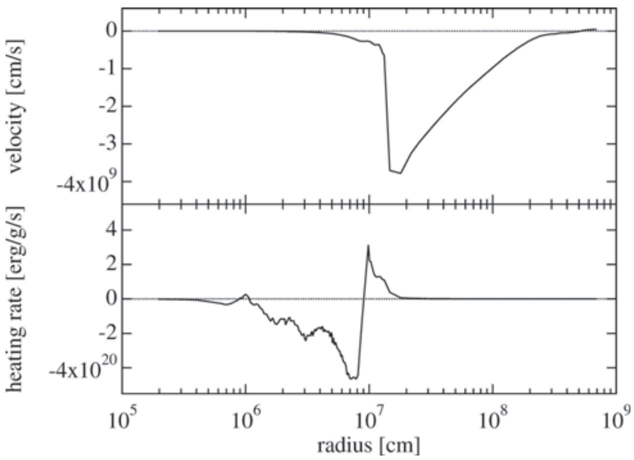

図2　コアバウンス後100 msにおける速度（停滞衝撃波）と加熱率（負では冷却）の分布を半径の関数として示した．球対称のニュートリノ輻射流体計算では衝撃波が100 km付近で停滞してしまう．原始中性子星の表面ではニュートリノが放出されて冷却領域となり，ニュートリノの一部は衝撃波付近の物質に吸収されて，その付近において加熱領域を構成する．

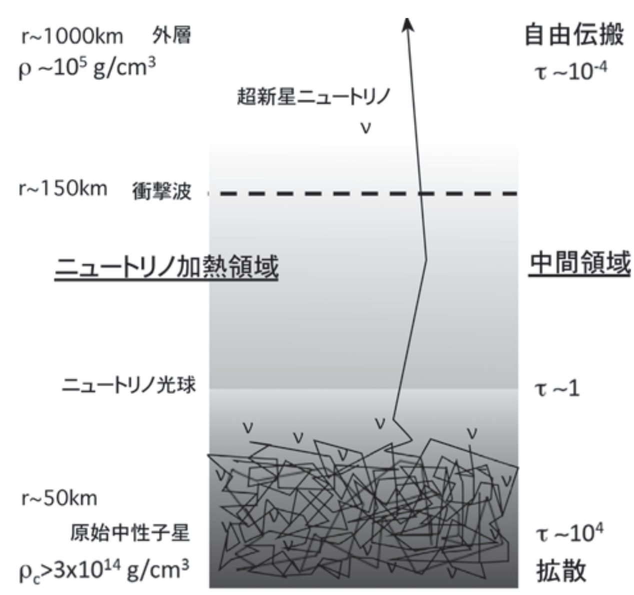

図3　コアバウンス後に衝撃波が停滞した頃のニュートリノ輻射輸送の様子．中心にはニュートリノを多く含み高温高密度の原始中性子星が誕生している．拡散領域で徐々に放出されたニュートリノは，低密度の外層では自由伝搬となる．停滞衝撃波付近ではニュートリノ加熱が重要となるが，この辺りは拡散でも自由伝搬でもない中間領域である．光学厚さは桁で大きく変わり，光学的に厚い領域から薄い領域まで存在する．

収・放出・散乱により，熱・化学平衡状態に達している．ニュートリノのエネルギー分布は，物質の温度と化学ポテンシャルで決まる，Fermi-Dirac分布と一致しており，角度分布は等方である．もちろん物質分布は一様ではなく，密度・温度・組成の空間分布に従ってニュートリノ分布にも勾配ができる．この勾配に従って拡散現象により，ニュートリノの輸送が進む．この領域では，角度分布が等方から若干ずれている程度である．外へ向かって密度・温度が下がっていくと，ニュートリノ反応率が下がり，もはや平衡を保つことはできなくなる．密度が10^{11} g/cm^{3}程度になる

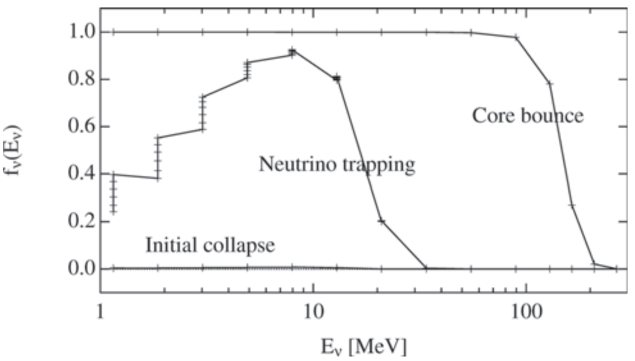

図4　重力崩壊における中心部でのニュートリノエネルギー分布の例．中心で発生したニュートリノは，初期（Initial collapse）にはわずかに溜まる程度だが，中心密度が 10^{12} g/cm^{3}程度（Neutrino trapping）になると物質内に閉込められ，分布値が大きくなり始める．この時点では，角度分布は等方ではなく，同じエネルギーでも伝搬角度によって値が異なっている．コアバウンス（Core bounce）までにはニュートリノ閉じ込めは十分となり，熱・化学平衡に達して，等方なフェルミ分布に従っている．

と，ニュートリノ反応が稀になり，ニュートリノは放出されて，外へ伝搬して出ていくようになる．これは，光子で言うところの光球(photosphere)に対応しており，ニュートリノ光球(neutrinosphere：**図3**における光学厚さ $\tau\sim1$ 付近）という．これより十分に外部へ到達すれば，非常に薄い物質分布においてニュートリノは自由伝搬しており，その角度分布は，伝搬方向の前方ピークへ集中している．しかし，拡散・ニュートリノ光球から，自由伝搬になるまでの途中では，一部のニュートリノが物質と相互作用して，吸収・散乱を受ける．このように超新星コアでは，エネルギー分布において平衡分布ではなく，角度分布において等方でも前方ピークでもない，中間領域が存在している．

爆発メカニズム解明において鍵となっているのは，この中間領域である．ニュートリノを放出する領域（原始中性子星の表面）では物質の冷却が進むが，その放出率は物質の組成やニュートリノエネルギーに依って大きく異なるため，ニュートリノ輻射の詳細計算が必要である．例えば，一口にニュートリノ光球といっても，相互作用のエネルギー依存性が強いため，その位置はエネルギーごとに違っている．つまり，ある半径から平衡分布でニュートリノを放出している，という様な単純化をすることはできず，放出ニュートリノのエネルギー・角度分布（スペクトル）および空間分布が必要である．一方，ニュートリノを吸収する領域では物質の加熱が進むが，その吸収率は，ニュートリノ放出スペクトルの詳細を元にして得られるニュートリノ輻射に基づいて，エネルギーごとに物質分布との反応率を計算して評価しなければならない．この加熱領域においては，ニュートリノは自由伝搬にはなっておらず，ニュートリノ流束を解析的あるいは近似的に扱うことはできない．つまり，ニュートリノ放出・吸収および爆発への影響を調べるには，ニュートリノ輻射の全領域における振る舞いを解くことが不可欠である．

2.4　輻射流体計算シミュレーションの発展

2.4.1　計算手法の発展と爆発メカニズム解明

超新星爆発の研究は，流体力学とニュートリノ輻射輸送の両者を解く計算手法の発展とともに進んできており，新しく近似や次元数をあげた計算により新たな知見が得られる，という歴史をたどってきたといっても過言ではない．ニュートリノ輻射輸送の記述によっては，爆発に有利／不利に働くこともあり，注意深く近似の影響を評価しながら進めなければいけない．例えば，重力崩壊時になるべくニュートリノをたくさん溜め込んでおき，バウンス後にそのエネルギーを多く放出するとともに，衝撃波付近で物質加熱に十分に寄与することが起きれば，爆発には有利である．これらの要因は，ニュートリノ輻射輸送の記述により左右される事柄であり，近似方法によっては効果を過大／過小評価してしまう恐れがある．

一方，空間次元数も爆発の可否に大きな影響を与える要因である．計算規模の拡大に応じて制約を外していくと，新たな流体力学的不安定性に伴う現象が現れて，爆発メカニズムの本質ともいえる効果が明らかになってきた．球対称から軸対称計算へ拡張した際には対流の効果が現れて，さらに赤道面対称性の制限を外した計算では，上下非対称となる定在降着衝撃波の不安定性が発見されるなど，多次元的な発展に応じてニュートリノ加熱効率が変わり，爆発へ転ずる後押しになりうることが判明した[3]．それでは，軸対称性を外した3次元計算ではどうなっているのか，ニュートリノ輻射の影響とともに調べることが，現在の研究の焦点となっている[4]．

2.4.2　ニュートリノ輻射輸送計算手法の発展

超新星におけるニュートリノ輻射輸送の計算は，計算資源の規模に応じて近似計算から厳密計算へと発展している．現在までに，1次元（球対称）においてはニュートリノ輻射輸送を厳密に解く手法が確立しており，第一原理計算的な意味合いで，ニュートリノ輻射流体計算が行われるようになった．Multi-energy group に対する輻射輸送を，ボルツマン方程式により直接解く S_N 法あるいはEddington factorを介したモーメント法により解いており，ニュートリノ輻射輸送方程式と流体力学方程式を組み合わせて，重力崩壊からコアバウンス，そして衝撃波伝搬が爆発に至るか，までを系統的に調べることが行われている．多くのグループによる数値シミュレーションの結果，球対称計算においては爆発を再現できないことが確実となった[5]．また，球対称におけるニュートリノ輻射流体の第一原理計算は，ニュートリノ・原子核物理がダイナミクスへ及ぼす影響の検証や超新星ニュートリノのスペクトル・時間変動を予測することにも用いられている[5,6]．

球対称における近似計算から厳密計算へ至る過程では，近似法の影響が詳細に調べられて，のちの多次元計算での応用・近似評価に活かされている．近似手法としては，初期の light bulb，leakage 法のほか，flux limiter を用いた拡散近似が広く用いられてきた．light bulb 法では，あらかじめ決めたニュートリノ光球から，温度・化学ポテンシャルにより指定した平衡分布を持ってニュートリノが外へ流れ

出してくる，という単純化を行う．これらは流体力学的不安定性や元素合成過程などを系統的に調べる際に今も用いられている．leakage 法では，ある決められた密度（ニュートリノ光球）より高密度領域には，ニュートリノが閉じ込められており，（拡散・伝搬時間スケールで決める）Escape 時間スケールに従ってニュートリノが自由伝搬して流出する，という近似を行う．flux limited diffusion 法は，大枠の計算方法として拡散近似を取り，自由伝搬領域においてニュートリノ伝搬速度が光速を超えないように，拡散係数に対して，関数形（flux limiter）により制限を与えておくものである（第1章を参照）．

拡散近似においては，中心部分での記述には問題がないが，原始中性子星表面から衝撃波付近までの中間領域では，flux limiter によって与えられる関数形に頼る方法となっている．この拡散近似による結果を，モンテカルロ法や輻射を厳密に解く方法での結果と比較することにより，近似による影響を定量的に評価することができる．例えば，半径 r における（核子一個あたり）ニュートリノ加熱率 Q_ν を求めるには，全核子数に対する陽子・中性子の個数比 Y_i，ニュートリノ光度・エネルギー(L_ν, E_ν)，角度因子が関わっており，

$$Q_\nu \sim 110 \cdot \frac{L_{\nu,52} \langle E_{\nu,15}^2 \rangle Y_i}{r_7^2 \langle \mu_\nu \rangle} \left[\frac{\mathrm{MeV}}{\mathrm{s \cdot nucleon}} \right] \qquad (1)$$

のように表され，ニュートリノ分布における角度変数*1の1次モーメント$\langle \mu_\nu \rangle$で測られる前方集中度の値に反比例している．ここで，$\langle\ \rangle$はニュートリノ分布による平均を表す．光度 $L_{\nu,52}$，エネルギー $E_{\nu,15}$，半径 r_7 は，それぞれ，10^{52} erg/s, 15 MeV，10^7 cm の値で規格化してある*2．この時，拡散近似では角度因子$\langle \mu_\nu \rangle$が過大に評価されており，加熱率を過小評価してしまうことが明らかになっている[7]．コアバウンス後の衝撃波付近（～150 km）では，**図5**のように角度因子（μ_ν の1，2次モーメント）は，拡散と自由伝搬での極限値の間にあり，これらを精密に求めなければいけない．

空間2次元（軸対称）においては，ニュートリノ輻射輸送計算は近似手法ながら，ミクロ物理も詳細に取り入れた緻密な数値シミュレーションが行われている．拡散近似を用いた計算では，動径方向以外のニュートリノ輻射輸送の記述において有利であるが，中間領域での角度分布推移には問題点が残されている．他方，中間領域での記述における信頼度の高い方法としては，ray-by-ray 法が用いられている．これは，球対称輻射輸送計算コードを活用するもので，中心から様々な空間角度方向について，独立に球対称ニュートリノ輻射輸送問題を解いて，流体計算と結合するものである．この場合，動径方向以外の輻射輸送については記述することができず，空間角度依存性が強すぎるという欠点が残っている．

空間3次元におけるニュートリノの扱いは，簡単なモデル化から脱却して，ニュートリノ輻射輸送を組み込む方向にある．3次元における流体不安定性の探索においては，light bulb 法などの簡単化によりニュートリノ加熱効果を取り入れて計算が行われている．拡散近似をベースとして ray-by-ray 法と組み合わせた3次元計算が計算機資源の限界まで使って行われて，最初の爆発シミュレーション結果が得られるようになった[4]．

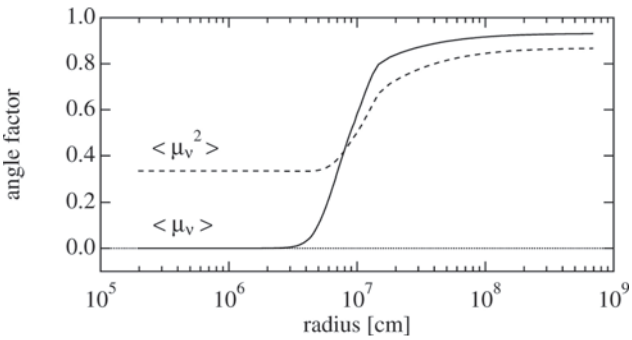

図5　コアバウンス後 100 ms におけるニュートリノ角度因子の分布：停滞衝撃波（図2）での流体力学量分布の状況でニュートリノ輻射輸送計算を行って得られたニュートリノ分布関数により角度変数 $\mu_\nu = \cos\theta_\nu$ の1, 2次モーメント$\langle \mu_\nu \rangle$，$\langle \mu_\nu^2 \rangle$を計算した．2つのモーメント量は，等方分布ではそれぞれ0，1/3，前方ピーク集中では1の極限値を取る．中間の値となる衝撃波付近（～100 km）の分布が重要である．

こうした2次元・3次元計算においては，ある程度の爆発過程が見られるようになっているが，複数の爆発メカニズム候補の是非について結論に至るところまでは達していない．爆発エネルギーが十分でないことや，研究グループ間において計算手法と結果が異なることも多く，いまだ議論が残っている．なかでも主流となっているのは，多次元における流体力学的不安定性とニュートリノ加熱の組み合わせである．衝撃波面が大きく歪んで非対称になり，一部が大きな半径に達した際に，ニュートリノ加熱を起こす時間と領域が増えて，爆発へ達するだけのエネルギーを得る．というのが大筋のシナリオである．（**図6**左）ここで問題となるのが，ニュートリノ輻射輸送である．多次元的な流体分布におけるニュートリノ輻射を信頼度の高い方法で計算して，ニュートリノ加熱率を緻密に評価しなければ，近似への疑いを拭いさった最終的な答えを見いだすことはできない．つまり，3次元ニュートリノ輻射輸送を近似なく解くことが課題である．

2.5　3次元ニュートリノ輻射輸送計算

2次元・3次元になると，輻射輸送問題の難易度は一気に上がってしまう．ニュートリノ分布の記述には，空間3次元とニュートリノ運動量3次元を合わせた6次元位相空間が必要である*3．空間2，3次元の超新星計算は，位相空間5，6次元での扱いとなり，メモリ・計算量ともに巨大となってしまうため，ニュートリノ輻射輸送計算については近似を行うのが現実的である．拡散近似ではニュート

＊1　ニュートリノ伝搬方向を動径(r)方向から測った角度 θ_ν により決まる変数 $\mu_\nu = \cos\theta_\nu$

＊2　核子1個あたりの加熱率100 MeV/s/nucleonは，換算すると1 gあたりの加熱率およそ10^{20} erg/g/sに対応する．（**図2**を参照）

＊3　空間3次元およびニュートリノ運動量3次元（ニュートリノエネルギー1つ E_ν と伝搬方向を指定する角度2つ θ_ν，ϕ_ν）

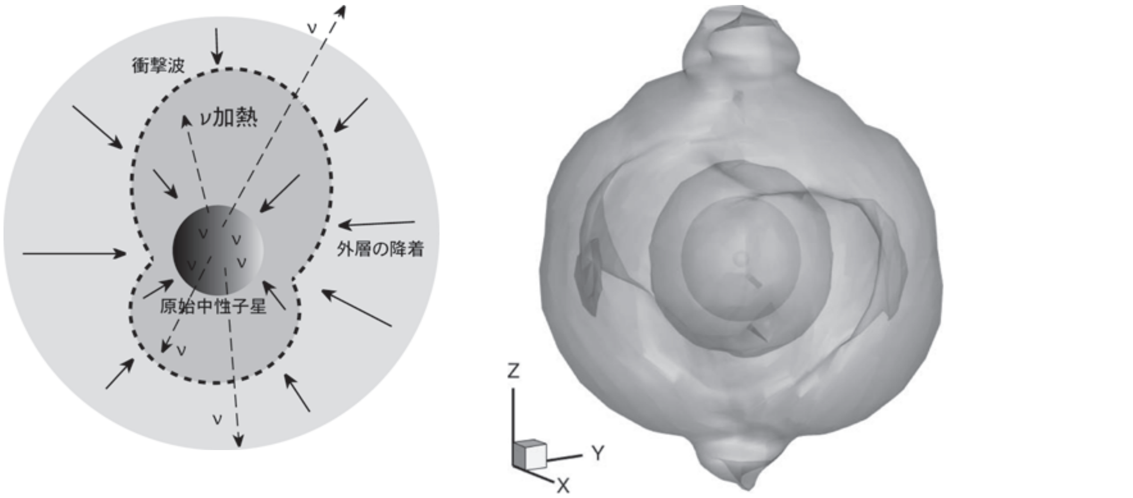

図６　(左) ３次元超新星爆発におけるニュートリノ輻射輸送の状況を模式図で示した．流体不安定性により歪んだ衝撃波面に対して，引き続き外層から物質が降り積もっている．中心の原始中性子星から放出されたニュートリノが多次元の流体分布においてどのように輸送されるのかが，ニュートリノ加熱の大きさおよび爆発の可否を決める鍵である．(右) ６次元ボルツマン方程式計算コードにより得られるニュートリノ密度分布の例．３次元超新星計算での中心コア分布を与えて，ニュートリノ輻射輸送計算を行った．

リノエネルギー１つのみ，ray-by-ray 近似では，エネルギー１つ・角度１つを方向ごとに扱って，計算を軽量化している．現在のところ，多次元ニュートリノ輻射輸送を近似せずに解いた例は２次元における数例ほどしかなく，３次元では例がない．筆者らは，こうした状況を打破すべく，空間３次元におけるボルツマン方程式を解く計算コードを開発して，３次元ニュートリノ輻射輸送を解くことに成功した[8]．

2.5.1　６次元ボルツマン方程式

ここで S_N 法による計算の概略を簡単に説明しておきたい．角度依存性を積分したモーメント法とは異なり，S_N 法では，輻射の角度分布もグリッド上で定義して輻射輸送方程式を離散化して扱う方針を取る．これにより，角度分布について仮定することなく，拡散領域から自由伝搬領域までを扱うことができる．中間領域における任意の角度分布を扱えることがメリットであるが，計算量が膨大になるというデメリットもある．また，光源から遠いところでの自由伝搬においては，角度グリッドが有限であるために前方ピークの分布を記述するのが難しいという数値的な問題もある[9]．ただし，超新星爆発の場合においては，ニュートリノ源となる中心天体の半径が 50 km 程度であるのに対して，衝撃波およびニュートリノ加熱領域の位置は数 100 km 程度であるので，ある程度の角度グリット数を設定することで対応できる．

ニュートリノ輻射輸送では，フェルミ粒子を扱うこともあり，分布関数自体を解く手法が用いられている．ニュートリノ分布関数に対するボルツマン方程式は，

$$\frac{1}{c}\frac{\partial f_\nu}{\partial t}+\frac{\partial f_\nu}{\partial s}=\left[\frac{1}{c}\frac{\delta f_\nu}{\delta t}\right]_{\mathrm{collision}} \qquad (2)$$

である．ここでニュートリノ分布関数は６次元位相空間での関数である．これを３次元球座標を用いて表して，さらに保存形に直すと

$$\frac{1}{c}\frac{\partial f_\nu}{\partial t}+\frac{\mu_\nu}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 f_\nu)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \mu_\nu}[(1-\mu_\nu^2)f_\nu]$$
$$+\frac{\sqrt{1-\mu_\nu^2}\cos\phi_\nu}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta f_\nu)-\frac{\sqrt{1-\mu_\nu^2}}{r}\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\phi_\nu}(\sin\phi_\nu f_\nu)$$
$$+\frac{\sqrt{1-\mu_\nu^2}\sin\phi_\nu}{r\sin\theta}\frac{\partial f_\nu}{\partial\phi}=\left[\frac{1}{c}\frac{\delta f_\nu}{\delta t}\right]_{\mathrm{collision}} \qquad (3)$$

の形となる[10]．空間３次元による微分項に加えて，ニュートリノの進行方向を指定する角度空間２次元による微分項が含まれている．ニュートリノの伝搬方向を記述する角度変数 ($\mu_\nu=\cos\theta_\nu$, ϕ_ν) については，グリットの配置に条件があり，ガウス積分で用いられる重み係数を用いてグリットを定義する等の工夫が行われる．これは，ボルツマン方程式を離散化する際に，複数の微分項による差分表現の間で同時に満たすべき関係式が存在するためである[8,9]．また，定式化には座標系の指定による相対論の取り扱いも問題となる．式(３)による保存形のボルツマン方程式に従い，式を差分化して数値計算を行う．この時，計算負荷としては重くなるが，時間差分に関しては陰解法を採用する．ニュートリノ反応のエネルギー依存性により反応率が何桁も違っており方程式が堅いこと，陽解法ではニュートリノが光速で伝搬することによる時間ステップの制限が厳しいこと，ニュートリノ分布が熱・化学平衡解へ到達するための安定性を保証すること，などが理由である．実際に，球対称計算においては陰解法による取り扱いが用いられており，爆発に至るかどうかの長時間計算で役立っている．移流項の差分化については，セル境界でのニュートリノ分布値を用いて表している．この際，中央差分と風上差分を採用しており，拡散・自由伝搬の間で重みをつけて切り換える方式を取っている．

衝突項には，ニュートリノ反応による生成・消滅過程

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\delta f_\nu}{\delta t}\right]_{\mathrm{emis-abs}}=-R_{\mathrm{abs}}(p)f_\nu+R_{\mathrm{emis}}(p)(1-f_\nu) \qquad (4)$$

および，散乱過程

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\delta f_\nu}{\delta t}\right]_{\mathrm{scat}} = -\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} R_{\mathrm{scat}}(p,p') f_\nu (1-f'_\nu) + \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} R_{\mathrm{scat}}(p',p) f'_\nu (1-f_\nu) \quad (5)$$

を組み入れる[8]．それぞれ陽子・中性子・原子核・電子等をターゲットとする過程があり，反応率を代表的に $R_{\mathrm{abs}}(p)$，$R_{\mathrm{emis}}(p)$，$R_{\mathrm{scat}}(p,p')$（以下同様）などと表した．これらはニュートリノのエネルギー・角度に依存しており，詳細釣り合いを加味して，反応過程ごとに具体的な表式を組み込む必要がある．また，輻射における光子（ボーズ粒子）の扱いと異なり，ニュートリノはフェルミ粒子であり，分布関数 f_ν は0から1の間に制限されている．フェルミ統計に従って，ニュートリノが生成される際に，行き先の量子状態が満たされている場合には抑止される効果，ブロッキングファクターが必要である．f_ν が1の時は反応レートがゼロとなるように，$(1-f_\nu)$ の形で衝突項に組み込む．またニュートリノ・反ニュートリノで対生成・消滅する過程

$$\left[\frac{1}{c}\frac{\delta f_\nu}{\delta t}\right]_{\mathrm{pair}} = -\int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} R^{\mathrm{pair}}_{\mathrm{anni}}(p,p') f_\nu \bar{f}_\nu + \int \frac{d^3p'}{(2\pi)^3} R^{\mathrm{pair}}_{\mathrm{emis}}(p,p')(1-f_\nu)(1-\bar{f}_\nu) \quad (6)$$

もある．$\bar{f}_\nu$ は反ニュートリノの分布関数である．この場合には，２つのニュートリノ分布が積として現れるため，方程式が非線形となるが，これらの過程は高温高密度の平衡状態に近い領域でのみ起こるため，片方の分布を固定して線形化することができる．

反応率の計算では，高温高密度物質での組成（陽子・中性子・原子核・電子・陽電子・光子）の詳細が必要となる．高温高密度や中性子過剰な領域では，核子・原子核の性質も変化しており，ニュートリノ反応率自体へも影響が及ぶ．

ここまでの式を陰解法の形

$$\frac{\boldsymbol{f}^{n+1}-\boldsymbol{f}^{n}}{\Delta t} = F[\boldsymbol{f}^{n+1}] \quad (7)$$

で表現して，整理すると線形方程式 $A\boldsymbol{f}^{n+1}=\boldsymbol{b}$ の形となる．ここで $\boldsymbol{f}$ は，6次元空間グリット上でのニュートリノ分布関数 f_ν を順番に並べたベクトルである．計算の手順としては，時間ステップ n におけるニュートリノ分布のもとで，移流・衝突項による行列要素を計算して，大規模疎行列による線形方程式を解いて，次の時間ステップ $n+1$ におけるニュートリノ分布を求める．

行列 A は特定のパターンを持った大規模疎行列であり，時間発展の対角要素，移流項による非対角要素，衝突項によるニュートリノ状態変化を表す対角ブロック行列からなる．この疎行列による方程式を解くためには，反復法による数値解法[11]を用いており，前処理と反復法の手法選択も重要な点である．現在の計算ではpoint Jacobi前処理と Bi-CGSTAB 法を組み合わせて用いているが，反復法が収束しにくい場合にも対応できる新たな解法[12]を開発して採用することも行っている．

2.5.2　3次元超新星コアでのニュートリノ輻射輸送計算

完成した6次元ボルツマン方程式を解く計算コードは，実際の超新星コアにおけるニュートリノ輻射を解く問題への適用が行われて，これまでの近似的な方法では扱えなかった新たな様相が明らかになりつつある．**図6**右には，３次元超新星計算での流体分布をもとに6次元ボルツマン方程式計算コードによりニュートリノ分布の時間発展を追った輻射輸送計算でのニュートリノ密度分布の例を示した．2次元・３次元に変形した超新星コアにおいて，ray-by-ray 近似によるニュートリノ輻射輸送計算では動径方向のニュートリノ伝搬のみ記述していたが，６次元ボルツマン方程式計算コードによる結果では，動径方向だけでなく，非動径方向（３次元球座標での θ，ϕ の変わる方向）へのニュートリノ伝搬（流束）を記述することができる．また，拡散領域の外でも多次元的なニュートリノ輻射輸送の記述が可能である．実際の超新星ダイナミクスへ適用するには，流体計算とニュートリノ輻射輸送計算を結合して，時間発展を解かなければならない．現在，多次元流体計算コードと6次元ボルツマン方程式計算コードを組み合わせた，ニュートリノ輻射流体計算コードの開発テストを行っている．また並列化により大規模化へ向けた対応も進んでいる．

2.6　大規模計算シミュレーション

S_{N} 法による3次元ニュートリノ輻射輸送計算が可能になってきた．しかし，現状の計算機資源では不十分なため，いくつかの制約をおいて進まざるを得ない．ここで3次元超新星爆発でニュートリノ輻射輸送を解く際に必要な計算機資源について述べて，将来のスーパーコンピュータに向けた展望を記しておきたい．

6次元ボルツマン方程式において，ある時間ステップでのニュートリノ分布を保存するには，６次元配列が必要となる．空間3次元のグリット数を N_{space}，ニュートリノ空間３次元のグリット数を N_ν とすると，$N_{\mathrm{space}}N_\nu$ がニュートリノ分布に必要な配列の並び数である．現状の計算資源での実行規模として，$N_{\mathrm{space}}=256\times32\times64$，$N_\nu=8\times12\times14$ を想定すると，ニュートリノ3種の分布情報だけで20 GB程度の規模となる．

ボルツマン方程式を陰解法で解くために，大規模疎行列による線形方程式の解法が主な計算負荷であり，行列要素を納めるためのメモリが大規模となる．大規模疎行列の対角に並ぶブロック行列のサイズ M は，ニュートリノ反応の寄与でサイズが異なり，エネルギーが変わる散乱過程を含めない計算では，$M=N_{\theta_\nu}N_{\phi_\nu}$ であり，必要なメモリは $M^2N_{\epsilon_\nu}N_{\mathrm{space}}$，演算量は $M^3N_{\epsilon_\nu}N_{\mathrm{space}}$ でスケールする＊4．上記のメッシュ数の場合，行列要素の格納に2 TB程度が必要であり，浮動小数点演算数は，ニュートリノ分布の時間

＊4　反復法の演算量をブロック行列の前処理（反転を想定）による演算回数で見積もった．

１ステップ更新で 6×10^{12}程度となる．すべての反応（および相対論）を考慮する場合には，ブロック行列がさらに大きくなり，メモリと演算量が巨大となる[2]．

超新星爆発の計算では，鉄コアの重力崩壊を初期条件として，コアバウンスを経て，衝撃波が停滞・復活するまでの長時間発展（約１秒）を追う必要がある．一方，ニュートリノ輻射輸送計算における時間ステップは，陰解法では（空間解像度に依るが典型的に）10^{-5} s 程度であり，10^5 時間ステップの計算が必要である．系統的な計算を行うことを考えると現在の計算資源では，次元を落とすか，グリッド数を抑えて，長時間発展計算を行うのが精一杯である．京コンピュータでは，空間２次元での解像度が高い系統計算が可能となるが，空間３次元での長時間発展計算は Exaflops スケール以上のスーパーコンピュータが必要である．さらに，一般相対論での検証，重元素合成過程の探求が控えている．計算規模を順次スケールアップしていき，究極の爆発計算により超新星現象の全貌を明らかにしていくことが将来にわたる課題である．

2.7 まとめ

星の進化の最期におきる超新星爆発という華々しい現象では，ニュートリノ輻射輸送が重要な役割を果たしている．超新星コアでは，拡散から自由伝搬まで幅広い環境が存在しており，輻射輸送を一貫して記述する必要がある．途中で停滞してしまう衝撃波を後押しするニュートリノ加熱過程が働くのは，ニュートリノ分布が非等方な中間領域である．爆発か否かを探索するには，緻密なニュートリノ輻射輸送計算が不可欠である．

本章では，超新星爆発におけるニュートリノ輻射輸送の役割と最近の発展について解説した．球対称計算では，第一原理的なニュートリノ輻射流体計算が可能となっており，系統的な研究が行われている．球対称計算では爆発を再現することができないことが判明しており，多次元での数値シミュレーションが盛んに行われている．この時，ニュートリノ輻射輸送については主に近似手法が用いられており，爆発メカニズムの新たな様相が明らかになってきた．最後に，ニュートリノ輻射輸送の近似をせずに扱う方向として，S_N 法に基づいて空間３次元でのボルツマン方程式を解く計算手法について紹介した．６次元位相空間での時間発展を追うために，計算資源・時間ともに膨大なものとなるが，近年のスーパーコンピュータの急速な進展により，ボルツマン方程式を直接解く計算手法が現実のものとなった．

こうした研究では，計算機・並列アルゴリズム等の研究者との連携が欠かせない．シミュレーション計算の規模が大きくなるにつれて，一つの分野だけではなく，総合的に技術を蓄積して応用していくことが不可欠である．超新星爆発は宇宙物理の話ではあるが，工学分野との情報交換や協力を通じて，極限状態での物質・反応・流体の複合３次元問題へのチャレンジを，広く他分野での問題へも活かしていきたいと考えている．

謝 辞

本解説は，山田章一，長倉洋樹，固武慶，滝脇知也，松古栄夫，今倉暁，櫻井鉄也氏らとの多次元超新星爆発の研究プロジェクト［新学術領域研究（20105004，20105005），科研費（22540296，24244036），HPCI 戦略プログラム分野５］に基づいたものである．３次元ニュートリノ輻射輸送計算は KEK，京都大学 YITP，東京大学，大阪大学 RCNP におけるスーパーコンピュータを用いて行われた．

参 考 文 献

[1] H.-T. Janka, K. Langanke, A. Marek, G. Martínez-Pinedo and B. Muller, Phys. Rep. **442**, 38 (2007).
[2] K. Kotake, K. Sumiyoshi, S. Yamada, T. Takiwaki, T. Kuroda, Y. Suwa and H. Nagakura, Prog. Theor. Exp. Phys. **2012**, 01A301 (2012).
[3] N. Ohnishi, K. Kotake and S. Yamada, Astrophys. J. **641**, 1018 (2006).
[4] T. Takiwaki, K. Kotake and Y. Suwa, Astrophys. J. **749**, 98 (2012).
[5] K. Sumiyoshi, S. Yamada, H. Suzuki, H. Shen, S. Chiba and H. Toki, Astrophys. J. **629**, 922 (2005).
[6] K. Nakazato, K. Sumiyoshi, H. Suzuki and S. Yamada, Phys. Rev. D **81**, 083009 (2010).
[7] S. Yamada, H.-T. Janka and H. Suzuki, Astron. Astrophys. **344**, 533 (1999).
[8] K. Sumiyoshi and S. Yamada, Astrophys. J. Suppl. **199**, 17 (2012).
[9] J.I. Castor, *Radiation Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
[10] G.C. Pomraning, *The Equations of Radiation Hydrodynamics* (Pergamon Press, Oxford, 1973).
[11] R. Barrett *et al.*，長谷川里美，長谷川秀彦，藤野清次（訳）：反復法 Templates（朝倉書店，1996）．
[12] A. Imakura, T. Sakurai, K. Sumiyoshi and H. Matsufuru, JSIAM (2012) *in press.*

住吉光介（すみよしこうすけ）

東京都立大学大学院出身，理化学研究所等を経て，現在は沼津工業高等専門学校教養科教授．専門は原子核と宇宙にまたがる物理で，超新星爆発が主な研究テーマ．スパコンに関わる仕事も多く，原子核データ整備・天文数値シミュレーション・計算科学と広く共同研究を展開中．東京都郊外の育ちだが，両親の影響で江戸っ子の職人気質を受け継ぐ．長年の Macintosh ユーザ．こだわりの趣味を我慢しつつ，端末に向かう日々．