



1. 輻射流体シミュレーションの基礎

大西直文

東北大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻

(原稿受付：2012年5月25日)

輻射流体シミュレーションの基本的な構造と、解くべき方程式系の性質について概説する。また、現在利用されている代表的な輻射輸送計算手法について紹介し、それらの特徴と利点、欠点についていくつかの観点から比較を行う。現在の輻射流体シミュレーションにおいては、輻射モーメント方程式に基づく数値解法が最もよく輸送計算に用いられているため、その背景を説明した後に、古典的な流束制限拡散法に始まり非等方性を考慮できる手法までエディントン因子の評価法という側面からまとめて紹介する。

Keywords:

radiation transfer, laser-produced plasma, astrophysical flow, flux-limited diffusion, Eddington factor

1.1 はじめに

高温プラズマでは、電磁波や中性子、ニュートリノなど、輻射と呼ばれる比較的長い自由行程の長いエネルギーキャリアが、しばしばプラズマの流体力学的挙動を大きく左右する。特に、エネルギー密度の高い爆発的現象において輻射の寄与が顕著となることが多く、それゆえ衝撃波の物理とともに研究されてきた[1]。そのような輻射流体力学的現象は、宇宙物理においては古くから研究されており、実験室においてもレーザー生成プラズマの基本的挙動を決定する。例えば重力崩壊型の超新星爆発では、原始中性子星から放射されるニュートリノがバウンス時に生成される衝撃波を加熱し、爆発現象に大きく寄与すると考えられている[2]。また、慣性核融合ではそもそも輻射によって爆縮を駆動する方式もあるため、現象の予測に輻射流体力学の理解が不可欠である[3]。

ところが、そこでは連続体と飛程の異なる粒子（光子を含む）が混在した輸送現象や、さらにその粒子の生成、消失過程が複雑に絡んでいる。光と流体という異なる時間・空間スケールの現象を含む物理の解析的な取り扱いが難しく、数値シミュレーションの担う役割が極めて重要になってくる。現在、世界的に見ると、輻射流体コードと呼ばれるものは宇宙物理と慣性核融合のコミュニティを中心として多数存在する。しかし、輻射流体力学は、流体力学、熱力学、統計力学、運動論、原子核物理など、専門性の異なるいくつかの要素から構成されるため、コード開発には分野を横断する複数の研究者によるプロジェクト的な枠組みが必要である。残念ながらそのような組織的研究が得意な我が国では、成熟した輻射流体コードが存在しているとは言い難く、したがって輻射流体コードに関する指南書も十分でないのが現状である。輻射流体コードは大きく分けて流体、輻射輸送、およびそれらの相互作用を決定する流

体中の原子過程という3つの要素で構成されるが、本講座ではそのうち後者2つに焦点を当て、それらの計算手法の概要を紹介することで、これから輻射流体コード開発を試みる読者の一助としたい。

輻射輸送方程式の解法や流体計算との結合方法は、プラズマの光学的厚さや輻射強度に応じて適切に選択する必要がある。次節に続く本章では、代表的な輻射輸送計算手法を挙げながらどのような手法を選択すべきかを述べる。典型的な輻射流体シミュレーションでは、輻射輸送計算に全計算時間の9割以上を費やすため、なるべく計算負荷の低い手法を選択することが求められる。また、レーザープラズマのように輻射場が等方に近い場合に用いられる輻射モーメント方程式の解法について詳説し、そこに非等方効果を取り入れることのできる可変エディントン因子法を紹介する。第2章では、超新星爆発におけるニュートリノ輸送を例に、非等方性の強い輻射場における輸送計算手法について紹介する。角度方向の情報を保持する輸送計算手法は一般に計算負荷が高くなるが、大型計算機の発展に伴い、そのような手法を用いた輻射流体計算が実現可能になってきている。代表的な手法である S_N 法について、ニュートリノ輸送計算への応用を紹介する。最後に第3章では、輸送計算に必要な放射係数、吸収係数がどのように算出されるかについて述べる。流体の輻射特性は、それを構成する原子が輻射の放出・吸収によって状態遷移することによって決まる。この過程を原子過程と呼び、適切なモデル化が必要となる。代表的なモデル化とその計算手法、および輻射スペクトルの表現方法について解説する。

1.2 輻射流体コードの構造

輻射流体力学の方程式は、輻射と相互作用する物質（以降、流体と表現する）を支配する流体方程式をベースに

し、輻射との相互作用項を付加するという形で表すことができる。例えば流体が非粘性圧縮性である場合、輻射流体方程式は以下ようになる[4]。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial (\rho \mathbf{u} + \mathbf{F}/c^2)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p + \mathbf{P}) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial (\varepsilon + E)}{\partial t} + \nabla \cdot [(\varepsilon + p) \mathbf{u} + \mathbf{F}] = \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (3)$$

ここで ρ , \mathbf{u} , p , ε はそれぞれ密度、流速、圧力、流体の全エネルギーを表す。流体に対する付加項は、運動方程式に輻射エネルギー流束 \mathbf{F} の時間微分項と輻射圧力テンソル \mathbf{P} の発散項、エネルギー保存式には輻射エネルギー密度 E の時間微分項と輻射エネルギー流束の発散項、および輻射圧による仕事の項 $\mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P})$ が入る。ただし、流れ場が相対論的である場合、相互作用を流体の共動系で評価する必要があるため、方程式の形が若干異なってくる。また、宇宙流体現象ではしばしば流体の圧力に比べて輻射圧が卓越するが、レーザー生成プラズマでは無視できる場合が多いため、式(2)の輻射に関連する項、および式(3)の右辺は省略されることが多い。輻射流体力学方程式の詳しい導出については、参考文献を参照されたい[4-6]。

輻射に関連する量 E , \mathbf{F} , \mathbf{P} は、周波数 ν の輻射強度 (specific intensity) I_ν に対する伝播方向 Ω のモーメントとして定義される。

$$E \equiv \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{1}{c} I_\nu d\Omega d\nu = \int_0^\infty E_\nu d\nu \quad (4)$$

$$\mathbf{F} \equiv \int_0^\infty \int_{4\pi} I_\nu \Omega d\Omega d\nu = \int_0^\infty \mathbf{F}_\nu d\nu \quad (5)$$

$$\mathbf{P} \equiv \int_0^\infty \int_{4\pi} \frac{1}{c} I_\nu \Omega \Omega d\Omega d\nu = \int_0^\infty \mathbf{P}_\nu d\nu \quad (6)$$

ここで、 c , E_ν , \mathbf{F}_ν , \mathbf{P}_ν はそれぞれ光速、周波数 ν における輻射エネルギー密度、輻射エネルギー流束、輻射圧力テンソルである。そして位置 \mathbf{r} と方向ベクトル Ω の関数である $I_\nu = I_\nu(\mathbf{r}, \Omega, t)$ は、後述する輻射輸送方程式によって支配される。ただし、輻射流体力学と呼ばれる現象においては、流体と輻射の方程式が独立に成立するのではなく、流体中の原子過程に従って輻射が流体から発せられ、また同時に流体に吸収、散乱されるため、それらは相互に依存している。さらに、流体の内部エネルギーは電子とイオンの熱運動だけでは決まらず、特に部分電離プラズマではイオン化ポテンシャルの部分比熱 C_v の大部分を占めることになるため、原子過程を適切に考慮することで状態方程式という形でこの効果を流体へ取り入れる必要がある。すなわち輻射流体力学は複合系の力学であり、方程式系は高度に非線形となる。

長い距離を伝搬する輻射、中距離の輸送を担う流体、そして微視的スケールの原子過程と、輻射流体力学は多階層構造の問題とみることもできる。このような輻射流体力学の現象論的構造を示したのが、図1である。この図はその

まま輻射流体コードの構造を表す。輻射流体コードを構成する3つの要素に対しては、それぞれ独立に数値計算手法が発展している。多くの輻射流体コードでは、各要素に対応した支配方程式を別々の手法で解き、要素間で物理量のやりとりをすることで結合計算を行う方式を採用している。図にはそのやりとりに用いられる代表的な物理量を記している。

数値計算法の紹介に入る前に、もう少し支配方程式系の性質、特に解を得るにあたっての困難さの要因となるものについて述べておく必要がある。まずはこの方程式系が極めて多次元の問題であることに注意されたい。それは、後述するように輻射輸送方程式が輻射を担う粒子に対するボルツマン方程式であること、さらには、原子過程が多電子系の量子力学に支配されることに由来する。したがって、輻射流体力学の方程式系を「真面目に」解くことは断念せざるを得ない。さらに方程式系には硬直性がある。例えば多くの場合、流体の伝搬速度は音速であり、輻射の伝搬速度は光速であるため、それらの違いが硬直性を招くことは容易に想像できる。このため、収束解を得るには多大な演算量を費やすことになる。

以上のことから、輻射流体シミュレーションには如何に「サボる」という観点が必要となる。実のところ、輻射流体力学の解を正確に知ることなど、ほとんどの場合不可能なのである。つまり、輻射流体力学の妥当な解を得ることは、「適当な」近似をして演算量を減らし、必要な計算精度と使用できる計算資源のトレードオフの中でベストな解を探す作業になる。したがって輻射流体シミュレーションの研究者には、様々な近似解法とその適用範囲を知り、場合によって解法を使い分けることが求められる。次節では輻射輸送方程式について概要を説明した後、代表的な近似解法をいくつか紹介する。

1.3 輻射輸送方程式

以降本章では輻射は光子(電磁波)であるとし、また、相対論的な効果は無視する。輻射輸送方程式は、光子の分布関数 Ψ についてのボルツマン方程式から導出でき、輻射強度 $I_\nu = ch\nu\Psi$ について以下のように記述される。

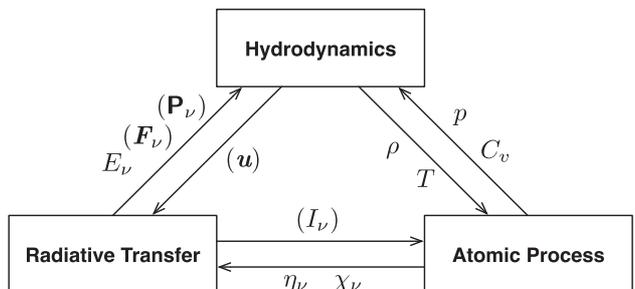


図1 輻射流体コードの構造。輻射流体コードは大きく3つの要素に分けられ、それぞれの要素間で物理量のやり取りが行われる。図中の括弧で囲った物理量は、レーザープラズマでは通常考慮されないが、状況によっては(慣性系の変換や輻射による原子の励起および電離)必要になる情報を表す。

$$\frac{1}{c} \frac{\partial I_\nu}{\partial t} + \boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla I_\nu = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu + \sigma_\nu \int_{4\pi} [I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}', t) \phi(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega}) - I_\nu(\mathbf{r}, \boldsymbol{\Omega}, t) \phi(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{\Omega}')] d\boldsymbol{\Omega}' \quad (7)$$

ここで、 η_ν 、 χ_ν はそれぞれ放射係数、吸収係数を表す。また、 σ_ν は散乱係数で、 $\phi(\boldsymbol{\Omega}', \boldsymbol{\Omega})$ は方向 $\boldsymbol{\Omega}'$ から方向 $\boldsymbol{\Omega}$ への散乱カーネルを表す。 I_ν は定義より明らかなようにエネルギー流束の単位を持つが、独立変数として位置 3 次元と方向 2 次元を持つため、ある点におけるある方向のみの、つまり単位立体角中のエネルギー流束を表しており、ベクトル量としてのエネルギー流束 \mathbf{F}_ν とは異なる。

光子はその性質から伝搬速度が変化しない。したがって、式(7)の左辺には通常のボルツマン方程式にみられるような加速度による速度空間の移流項がない。右辺は流体との相互作用項であり、第1項と第2項はそれぞれ放射の放出、吸収を表す。これらの項によって、流体から放出されたエネルギーは放射に、放射が吸収された場合は流体へとエネルギーが移動する。式(7)の右辺第3項は散乱項である。ここでは、コンプトン散乱等のエネルギー変化を生じる散乱は考えていない。そのため、放射は流体によって散乱するが、流体へのエネルギーフィードバックはない。散乱によって光子の伝搬方向は変化するため、積分中の第1項は別の方向から考えている方向に入ってくる (scattered-in) 光子、第2項は今の方向から別の方向に移動する (scattered-out) 光子の寄与を表している。

ここで後の議論のために、放射輸送方程式に対し方向ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ のモーメントを取ってみる。簡単のため散乱の寄与を無視すると、0次および1次のモーメント方程式はそれぞれ以下のように表される。

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F}_\nu = 4\pi\eta_\nu - c\chi_\nu E_\nu \quad (8)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{F}_\nu}{\partial t} + c \nabla \cdot \mathbf{P}_\nu = -\chi_\nu \mathbf{F}_\nu \quad (9)$$

これらの両辺をさらに周波数 ν で積分すると、

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{F} = \int (4\pi\eta_\nu - c\chi_\nu E_\nu) d\nu \quad (10)$$

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + c \nabla \cdot \mathbf{P} = -\int \chi_\nu \mathbf{F}_\nu d\nu \quad (11)$$

となり、式(2)、(3)に現れる放射に関連した項は、これらの方程式を用いて書き換えることができる。

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + p) = -\int \chi_\nu \mathbf{F}_\nu d\nu \quad (12)$$

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \nabla \cdot [(\epsilon + p) \mathbf{u}] = \int (4\pi\eta_\nu - c\chi_\nu E_\nu) d\nu + \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (13)$$

例えば、式(13)の右辺第2項を無視すると、流体のエネルギー方程式のソース項がその時刻での η_ν 、 χ_ν 、 E_ν の積分だけで表されることを意味している。つまり、式(8)、(9)から E_ν や \mathbf{F}_ν が求まるのであれば、放射流体計算には I_ν

が必要ないことがわかる。この事実が、後に述べるモーメント方程式を用いた放射流体方程式の解法に繋がる。

放射輸送方程式の解は、方程式中の相互作用項がどの程度、あるいはどのように寄与するか大きく依存する。本節の残りでは、いくつかの重要となる概念を挙げ、それらを基にした解の性質の分類について述べる。また、最後に放射輸送方程式の近似解法を数例紹介し、その特徴についてまとめる。

1.3.1 光学厚さ

放射輸送方程式の解の性質を分類するために最もよく使われる指標が光学厚さである。光学厚さ τ_ν は以下のように定義される。

$$\tau_\nu = \int (\chi_\nu + \sigma_\nu) ds \quad (14)$$

ここで、 s は放射の伝搬距離を表す。ほぼ同じ概念に光学深さがあるが、光学深さは特定の区間に対して使われるのに対し、光学厚さは系全体の値として語られる場合が多い。ここでは、特定の区間について議論するわけではないので、光学厚さという言葉を使う。

さて、この光学厚さであるが、吸収係数や散乱係数がそれぞれに対応する平均自由行程 $l = 1/na$ の逆数で与えられることから、積分区間を通して光子がどれだけ流体と衝突するかを表す。ここで、 n は衝突相手の数密度、 a は衝突断面積である。 $\tau_\nu \gg 1$ であれば光子にとって流体場は不透明 (opaque) であり光学的に厚い (optically thick)、 $\tau_\nu \ll 1$ であれば流体場は透明 (transparent) で光学的に薄い (optically thin) という。

まず、光学的に厚い場合を考えよう。光学的に厚い場合、光子は流体中ですぐに吸収あるいは散乱されてしまう。ところで、局所熱平衡 (local thermodynamic equilibrium: LTE) 状態にある系ではキルヒホッフの法則から放射係数が吸収係数に比例する。

$$\eta_\nu = \chi_\nu B_\nu \quad (15)$$

ここで、 B_ν はプランク関数で温度の関数である。そのため、吸収が顕著な場合は放射係数も高くなっており、多数の光子が放出されている。放出された多数の光子がその周辺で吸収されると、そこで無視できない加熱が起こり再び放出が起こる。結果として光子は吸収、放出を繰り返し、放出は等方的に起こるため、光子は実効的にランダムウォークする状況になる。散乱が卓越する場合も多数の散乱を繰り返すため、やはりランダムウォークする。したがって、光学的に厚い場合、放射輸送は拡散的な現象になり、後述するように放射輸送方程式は方向 2 次元を落として放射エネルギー密度の拡散方程式へと帰着することができる。

では、光学的に薄い場合はどうだろうか。光学的に薄い場合、光子はほとんど流体と衝突することなく系をすり抜けていく。したがって、光子がただ移流する自由流 (free-stream) の状況となる。この場合、問題は非常に簡単になったように感じられる。確かに、まったく放出以外の相

相互作用がなければ、単に輻射冷却が起こるだけあり、輻射輸送方程式を解く必要すらなくなる。つまり、図1の上と右の要素だけで系を表現することができる。ところが、流体の挙動に無視できないぐらいの吸収が起こるとなると、やはり何らかの形で輸送方程式を解く必要が生じる。光学的に薄い場合、流体の時間スケールでは伝搬速度の大きい輻射はほぼ定常になるため、輸送方程式の時間微分項を省略できる場合が多い。ただし、非等方性が重要となるため、方向の次元を落とすことはできない。

1.3.2 LTE と non-LTE

図1に示したように、輻射流体計算において、流体と輻射輸送の橋渡しをするのが原子過程で決まる物質の輻射特性である。物質が局所的に熱平衡にあるとするLTEの場合、物質の熱力学的状態は密度と温度に従い、その状態によって輻射特性も決定づけられる。これは、プラズマが比較的低温で高密度のときに成立する。ところが、レーザープラズマのように高温で低密度な領域が含まれる場合や、物質の状態が瞬時に変化するような状況では必ずしもLTEが成立しない。このような状態を非局所熱平衡 (non-LTE) という。

LTE でなければ non-LTE なので、一口に non-LTE といっても様々な状態が考えられる。最もLTEから遠い状況下では輻射特性に寄与する束縛電子の量子力学的状態が統計的分布に従わないため、時々刻々状態遷移過程を追跡する必要がある。しかし、多くの場合、ある熱力学的条件下での定常状態を仮定できるため、non-LTE といっても時間依存のないある種の平衡状態を表す。これを準定常状態 (quasi-steady state: QSS) という。最もよく仮定されるQSSは衝突輻射平衡 (collisional radiative equilibrium: CRE) あるいは衝突輻射定常状態 (collisional radiative steady state: CRSS) と呼ばれる状態で、電子衝突過程として電離・再結合および励起・脱励起が起こると同時に、輻射過程としては再結合・脱励起だけが起こると仮定し、それらが全体としてつり合っている状態である[7]。比較的高温である程度密度が高いときにこの仮定は成り立つ。一方、アブレーションプラズマのように高温かつ低密度な場合は衝突過程がほとんど起きないので、基底状態からの電子衝突と輻射遷移のみによってQSSになっており、これをコロナ平衡とよぶ。

流体計算や輻射輸送計算に使用する放射係数や吸収係数は、密度や温度といった熱力学的諸量のみによって決定されなければ、膨大な数の状態遷移を記述する大規模な連立レート方程式をインラインで解く必要がある。そのため、通常は上記のようなQSSを仮定し、輻射流体計算に必要な物理量を密度と温度の関数として予めテーブル化しておく。それらの具体的な計算手法については、本講座の第3章を参照されたい。

1.3.3 多群近似

輻射強度 I_ν は周波数 ν 、つまり光子エネルギー $h\nu$ の関数である。したがって I_ν は光子エネルギー空間にも次元をもっており、数値計算するためには、自然な発想としてこの空間についても離散化することを考える。輻射スペクトル

は量子力学的な準位間の遷移過程によって決まるので、電子の束縛状態間の遷移はいわゆる線スペクトルとなって、エネルギー空間における変動が激しい。エネルギー空間の粗視化を行わず、特定の光子エネルギーへのすべての輻射遷移過程を逐次評価する手法を line-by-line 法とよぶが、この手法は輻射スペクトルの詳細を知りたいときには有効であるものの、膨大な計算時間を要するため輻射流体計算には不向きである。

そこで、エネルギー空間をある幅を持った領域で分割し、その領域ごとに輻射輸送方程式を解くといった方針が取られる。このようにエネルギー空間を有限のエネルギー群 (bin ともいう) に分割することを多群近似、あるいはマルチバンドモデルとよぶ[8]。分割数が多いほど実際のスペクトルに近づけることができるが、それに比例して計算量も増大するため、不必要に分割すべきではない。また、輻射流体シミュレーションは、通常、流体力学的な挙動に注目している場合が多く、輻射スペクトルの詳細まで再現することは求められない。実際、エネルギー空間の解像度が低くても流体の挙動は十分予測できるため、分割数は通常数十のオーダーで、多くても百前後であることが多い。ただし、特定のスペクトルがエネルギー輸送に大きく貢献しており、かつそのスペクトル構造が輸送に大きく影響する場合はその限りではない。

ちなみに、まったくエネルギー空間の分割を行わず、平均化された放射係数や吸収係数を用いて輸送計算を行うことを灰色 (gray) 近似とよぶ。特に、光学的に薄い場合にはプランク平均、光学的に厚い場合にはロッセランド平均とよばれる平均化が施される[1]。

1.3.4 様々な解法

さて、上述のような輻射輸送方程式の性質を考えながら、いくつかの代表的な解法について概観してみる。

まず、モンテカルロ法はおそらく最も古くから輻射輸送方程式に用いられている解法の一つであろう。モンテカルロ法では、サンプル粒子となる光子をランダムに発生させ、それに確率論的な衝突イベントを繰り返し与えることで、輻射場の発展を追う[9]。光子発生の試行回数が多いほど正確な解を得ることができるが、逆に少ないと統計的な誤差が生じるため、ノイズの多い解となる。モンテカルロ法は、多次元問題の解の概形を得るには適しているが、高精度の解を得るには膨大な数のサンプル粒子が必要となる。また、光学的に厚い場合、衝突が頻繁に起こるため、自由行程を衝突区間にとると光子がほとんど空間を移動できないという問題も生じる。そのため、どちらかというと言学的に薄い場合に適した解法である。また、散乱が容易に導入できるのも特徴の一つである。

非等方性の強い輻射場、つまり光学的に薄い系の解法として、現在最もよく用いられるのは通称 S_N 法とよばれる離散座標 (discrete ordinate) 法であろう[10]。これは輻射輸送方程式を伝搬方向も含めて離散化して解く手法である。ただし、当然ながら他の手法に比べて演算量が多い。また、方向次元の離散化が不十分であると、遠くの発光源が捉え難くなるいわゆる ray effect と呼ばれる問題が生じ

る[11]. ただし, 散乱も考慮することができ, モンテカルロ法のような統計ノイズもないため, 計算資源さえ許せば広範な問題に適用することができる. この手法の応用例については, 第2章で詳しく説明する.

解の定常性を仮定することができれば, 最も簡単な手法は光線追跡法であろう. この手法では, 解を必要とする場所に向かって, 外部境界から輸送方程式を光路に沿って積分するだけである. ただし, この手法でも S_N 法と同様に ray effectが生じるので, なるべく多くの方向に対して積分を実行する必要がある. 局所的な発光が重要になる場合, それを遠くで捉えるためには膨大な光線数を必要とする. また, そのままでは散乱を扱うことが難しいため, 定常かつ散乱の無視できる系で有効である.

最後に, 本章の後半で詳しく説明するモーメント方程式に基づく解法は, 光学的に厚い系で用いられる手法である. 輻射輸送方程式の方向モーメントを取った方程式を扱うため, 方向の次元がない分, 演算量を大幅に削減できる. ただし, 非等方性を捉えることが苦手であり, それを克服するためには後述する付加的な手続きを必要とする. 輻射と流体との相互作用が強い領域は光学的に厚い場合が多いため, 輻射流体シミュレーションでは安定で演算量も少ないモーメント方程式に基づく手法が最もよく用いられる.

以上, これらの手法をまとめると表1のようになる. 光学厚さの程度, 散乱の重要性に加え, 何らかの解を得ようとするならば, 計算精度の重要度, 計算資源の限界等を考慮した上で計算手法を選定する必要がある.

1.4 モーメント方程式の解法

ここから本章の残りを使って, モーメント方程式(8), (9)の解法について解説する. 前節で述べたように, 輻射流体シミュレーションにおける輸送計算で最もよく用いられる手法である. モーメント方程式は元の輻射輸送方程式よりも方向ベクトルの分だけ次元が少ないが, その代わり未知変数が I_ν から E_ν , F_ν , P_ν の3つに増えている. ところがモーメント方程式は2つであるから, このままでは解を得るための式が足りない. 式の数を増やすためにさらに高次のモーメントを取ったとしても, また新しく未知変数が追加されるため, 方程式系を閉じることができない. そこでいわゆるクロージャーとして, 次のエディントン因子(テンソル)を導入する.

表1 輻射輸送計算手法の比較. これらの評価はあくまで筆者の経験によるものであり, 数値的裏付けはない. それぞれに提案されている改良法やプログラミング技法によっても相対的評価は異なってくるが, 各々の手法の基本的なアイデアにそのような評価にした.

	moment eqs.	S_N	ray trace	Monte Carlo
computational cost	low	high	high	medium
required memory	small	large	large	medium
anisotropic field	poor	fine	fine	fine
opaque field	fine	medium	medium	poor
scattering field	N/A	available	complicated	available
time-dependence	available	available	N/A	available

$$\mathbf{f}_\nu \equiv \frac{\mathbf{P}_\nu}{E_\nu} = \frac{\int I_\nu \boldsymbol{\Omega} \Omega d\Omega}{\int I_\nu d\Omega} \quad (16)$$

もしこの \mathbf{f}_ν を何らかの方法で決めることができるなら, \mathbf{P}_ν を E_ν で表すことができるので, 式(8), (9)からなる方程式系を閉じることができる. これは, 流体の方程式における状態方程式の役割に似ており, モーメント方程式に基づく数値解の信頼性はエディントン因子の決定方法に大きく依存する.

エディントン因子の決定方法の詳細については後の議論に譲ることとして, まずは \mathbf{f}_ν が何らかの方法で得られた場合に, モーメント方程式を如何に離散化するかを考える. $\mathbf{P}_\nu = \mathbf{f}_\nu E_\nu$ を式(9)に代入すると, 以下の式を得る.

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{F}_\nu}{\partial t} + c \nabla \cdot (\mathbf{f}_\nu E_\nu) = -\chi_\nu \mathbf{F}_\nu \quad (17)$$

このとき, \mathbf{F}_ν の時間微分が無視できるとすると, $\mathbf{F}_\nu = -(c/\chi_\nu) \nabla \cdot (\mathbf{f}_\nu E_\nu)$ と表せるので, 式(8)から以下の式を得る.

$$\frac{\partial E_\nu}{\partial t} - \nabla \cdot \left(\frac{c}{\chi_\nu} \nabla \cdot (\mathbf{f}_\nu E_\nu) \right) = 4\pi\eta_\nu - c\chi_\nu E_\nu \quad (18)$$

この式は E_ν に対する拡散方程式になっており, 一般的な拡散方程式の解法を用いて数値解を得ることが可能となる. また, 前節で説明したように光学的に厚い系では輻射場が拡散的になるため, 上式はそのような状況下で成り立つ式であると考えられる. 特に, 光学的に十分厚ければ, $\mathbf{f}_\nu = (1/3) \mathbf{I}$ (\mathbf{I} は単位テンソル) となって, 問題は最も簡単化される. 例えば, 平板次元であれば有限体積法とオイラー陰解法によって次のように離散化できるであろう.

$$\frac{E_i^{n+1} - E_i^n}{\Delta t} - \frac{c}{\Delta x} \left[\frac{f_{i+1}^n E_{i+1}^{n+1} - f_i^n E_i^{n+1}}{\chi_{i+1/2}^n \Delta x} - \frac{f_i^n E_i^{n+1} - f_{i-1}^n E_{i-1}^{n+1}}{\chi_{i-1/2}^n \Delta x} \right] = 4\pi\eta_i^n - c\chi_i^n E_i^{n+1} \quad (19)$$

ここでは添字の ν は省略し, 等間隔格子を仮定した. 簡単のために η, χ, f はすべて n ステップでの値を用いたので, 上式は E_i^{n+1} に関する連立一次方程式になっており, それをSORやICCGなどの連立一次方程式の解法を用いて解くことで E_i の時間発展を得ることができる[12]. ただし, 採用する解法によって解を得るまでの計算時間が大きく変わるため, 適切な解法の選択が必要である.

式(16)からわかるとおり, エディントン因子は輻射強度 I_ν で定義されるため, 定義どおりに求めようとする I_ν のために元の輻射輸送方程式を解かなければならない. したがって, 何らかの仮定の元に近似的に決定すべきである. 特に, 流れ場の状態に従ってエディントン因子を変化させる手法を可変エディントン因子 (variable Eddington factor: VEF) 法という. エディントン因子の決定方法は大きく分けて2つある. 1つは局所的な物理量のみによって

決める方法であり、もう1つは非局所的な影響も取り入れる方法である。光学的に厚い状況では、光子が遠くまで衝突なしに進むことができないため、輻射場は局所的な情報で決まり、前者の取り扱いが適用できる。局所的な取り扱いでは、あまり多くの演算を必要としないため、効率的な計算が期待できる。しかし、光学的に薄い場合は輻射場が遠くの光源によって決まる可能性があるため、後者のような取り扱いが必要となる。

1.4.1 エディントン因子の局所近似法

エディントン因子を局所的に決定する方法は、これまでいくつも試みられている。基本的には、光学的に厚い限界で拡散近似に、薄い限界では自由流になるように構築される。ただし、光学的に薄い場合にエディントン因子を局所的に決定可能な根拠は原理的に存在しないため、決定的な手法はない[13]。したがって、光学的に薄い領域での解がそれほど重要でないが、厚い領域と混在しているような場合に、安定かつ効率的に両方の領域をカバーするための手法とみるべきであり、以下に挙げる様々な方法から実際にどれを使用するかは、そのような観点で選択されるべきである。

流束制限拡散法

流束制限拡散 (flux-limited diffusion: FLD) 法は、エディントン因子の決定法というよりは $f_{\nu} = (1/3)1$ としたときの式(18)の近似解法である。エディントン因子が一定の値を取るとき、式(18)におけるエネルギー流束は $F_{\nu} = -(c/3\chi_{\nu})\nabla E_{\nu}$ で表されるため、光学的に薄くなって χ_{ν} が小さくなったり、 E_{ν} の勾配が急峻になると、流束が光速から決まる限界値 (free-stream limit) である cE_{ν} を超える可能性がある。その場合、非物理的な流束となるため、これを超えないように流束を制限する必要がある。

制限方法はいくつか考えられるが、例えば以下のようなものが挙げられる。

$$F_{\nu} = -\frac{c}{3\chi_{\nu} + |\nabla E_{\nu}|/E_{\nu}} \nabla E_{\nu} = -D_{\text{FLD}} \nabla E_{\nu} \quad (20)$$

ここで、 D_{FLD} は流束制限された拡散係数である。一見、これはエディントン因子を操作しているようにもみえるが、それとは若干思想が異なる。本来、次元で考えた場合、エディントン因子は光学的に厚い領域から薄い領域に向けて $1/3$ から 1 に変化するように構築されるべきである[14]。拡散近似では輻射場はあくまで等方なままなので、いくら流束を制限したところで、非等方な自由流を表現することは難しい。また、上記の表現では光学的に厚い領域でも0次精度しか達成できないという指摘もあり、他の流束制限法が提案されている[15]。

P_1 法と $P_{1/3}$ 法

P_1 および $P_{1/3}$ 法では、エディントン因子を一定とするが、代わりにエネルギー流束の時間発展方程式も解くことで、エネルギー流束が流束限界を超えないようにする。例えば、 P_1 法では $f_{\nu} = (1/3)1$ 、 $P_{1/3}$ 法では $f_{\nu} = 1$ とする[13]。

エネルギー流束は式(17)の時間微分を残したまま解くことによって求めるが、時間微分項が重要になってくるのは

光学的に薄い場合であり、 $|F_{\nu}| \sim cE_{\nu}$ となっていると考えられる。したがって、式(17)は実質的に移流方程式になる。このときの移流速度は光速で決まり、陽解法で安定に計算するためには Δt を小さく設定する必要がある。そのため離散化は陰的に行われるべきであり、例えば平板次元であれば以下のような離散式が考えられる[16]。

$$E_i^{n+1} = E_i^n + \Delta t \left(4\pi\eta_i^n - c\chi_i^n E_i^{n+1} - \frac{F_{i+1/2}^{n+1} - F_{i-1/2}^{n+1}}{\Delta x} \right) \quad (21)$$

$$F_{i+1/2}^{n+1} = \frac{F_{i+1/2}^n}{1 + c\chi_{i+1/2}^n \Delta t} - \frac{c^2 \Delta t}{1 + c\chi_{i+1/2}^n \Delta t} \left(\frac{f_{i+1}^n E_{i+1}^{n+1} - f_i^n E_i^{n+1}}{\Delta x} \right) \quad (22)$$

ここで添字 ν は省略し、 E_i 、 $F_{i+1/2}$ はスタッガード格子で定義している。このような離散化であれば、結果として E_i^{n+1} の連立一次方程式に帰着させることができる。

ただし、 P_1 法では光学的に薄い限界で伝搬速度が $c/\sqrt{3}$ に漸近することが指摘されており、そのような領域では c に正しく漸近する $P_{1/3}$ 法が好ましいとされている[17]。

最大エントロピー法

ボーズ-アインシュタイン統計に従う光子がエントロピーを最大にするように分布関数を求め、そこから決まるエディントン因子を用いる方法が Minerbo の最大エントロピー法である[18]。輻射場の軸対称性を仮定すると、エディントン因子は以下のように表される。

$$f_{\nu} = \frac{1}{2}(1-f) + \frac{1}{2}(3f-1)nn \quad (23)$$

ただし、 $n = F_{\nu}/|F_{\nu}|$ である。Minerbo の原論文では、 f は $\tilde{F} = |F_{\nu}|/cE_{\nu}$ の関数として与えられており、そのような表現は後述の M_1 法にも使用することができる。

一方、一種のFLDとして使用されることも多く、式(20)と同様に F_{ν} が E_{ν} の勾配で表現されるとすると、 f は $R = |\nabla E_{\nu}|/(\chi_{\nu} E_{\nu})$ をパラメータとして

$$f = \lambda + \lambda^2 R^2 \quad (24)$$

と表される[19]。このとき、 $n = \nabla E_{\nu}/|\nabla E_{\nu}|$ である。また、 λ は流束制限関数であり、最大エントロピー法では以下のようなようになる。

$$\lambda(R) = \begin{cases} 2/(3 + \sqrt{9 + 12R^2}) & \text{if } 0 \leq R \leq 3/2 \\ (1 + R + \sqrt{1 + 2R})^{-1} & \text{if } 3/2 < R < \infty \end{cases} \quad (25)$$

Levermore-Pomraning 法と M_1 法

輻射場の角度依存性を示す規格化した輻射強度を定義し、それが時間的、空間的に十分緩やかに変化するという仮定に基づいてエディントン因子を決定することもできる[20]。この Levermore-Pomraning (L-P) 法も FLD として使用されることが多く、 $R = |\nabla E_{\nu}|/(\chi_{\nu} E_{\nu})$ をパラメータとすると、以下のような λ の近似式を使って式(23)、(24)からエディントン因子を求めることができる[14]。

$$\lambda(R) = \frac{2+R}{6+3R+R^2} \quad (26)$$

最大エントロピー法とL-P法で評価した f を図2にそれぞれ示した。 R は光学厚さの程度を示しており、光学的に厚いとき R は小さくなり、 f は1/3に近づく。光学的に薄い場合は R が大きくなり、 f が1に漸近することがわかる。ここで、 f は式(23)中の変数であるが、一次元のときにはこれがそのままエディントン因子になる。

Levermoreはこれとは別に、現在 M_1 法のクロージャーとしてよく用いられるエディントン因子の決定法も提案している[19]。 M_1 法は主に宇宙物理における輻射流体計算で採用されており、式(8)、(17)を F_ν と E_ν から求まるエディントン因子を用いて解く手法である。この場合、 $\bar{F} = |F_\nu/cE_\nu|$ を用いて、

$$f = \frac{3 + 4\bar{F}^2}{5 + 2\sqrt{4 - 3\bar{F}^2}} \quad (27)$$

という式からエディントン因子が求められ、光学的に薄い状況下の検証も行われている[21]。

1.4.2 非局所的に決定するエディントン因子

局所的にエディントン因子を決定する場合、遠くの光源の影響をうまく取り入れることができない。モーメント方程式に基づく解法は本来そのような状況に適していないが、これを克服するために非局所的なエディントン因子の評価が試みられている。

式(16)の定義に立ち戻ると、エディントン因子を評価するためには I_ν が求まっていればよい。ところが、そもそも I_ν は輻射輸送方程式を解かなければ決められないので、これを用いてエディントン因子を定義するのは本末転倒であろう。しかし、計算負荷を小さく抑えながらある程度の輸送方程式の解が得られるのなら、その解からエディントン因子だけを評価し、時間発展はモーメント方程式を用いて評価するという手続きが可能となる。これは、エディントン因子を評価するための輻射輸送計算にはそれほど精度を求めず、精度が重要となるエネルギー輸送の評価に関してはモーメント方程式の解法に委ねるといった発想から導かれており、連続的なアプローチと運動論的手法のハイブ

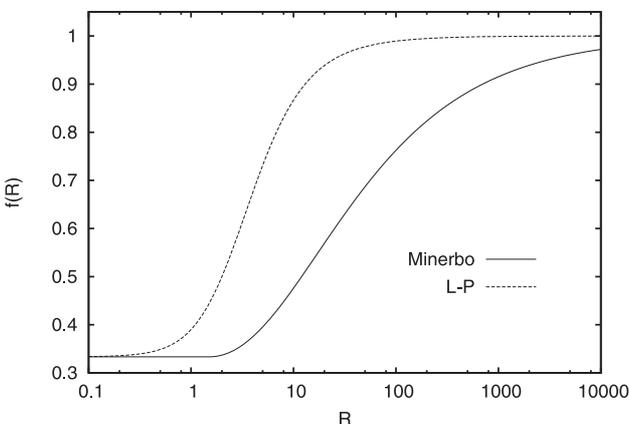


図2 エディントン因子の近似法の比較。実線は最大エントロピー法で破線はL-P法。一次元のときのエディントン因子となる f は光学厚さを表すパラメータ $R = |\nabla E|/(\chi E)$ に対して1/3から1まで変化する。

リッドと捉えることができる。

光線追跡法によるエディントン因子の評価

エディントン因子は流体の時間スケールにおいて定常であると仮定すると、エディントン因子を評価するための輸送方程式の時間微分項を無視できる。そこで、以下の定常な輸送方程式を光線追跡法で解くことを考える。

$$\Omega \cdot \nabla I_\nu = \frac{d}{ds} I_\nu = \eta_\nu - \chi_\nu I_\nu \quad (28)$$

ただし、 s は光路に沿った距離を表し、簡単のため散乱項は省略した。光線追跡のアルゴリズムは単純であり、 I_ν は場所と方向の関数であるから、エディントン因子を得たい場所 P からある方向に遡る光路と外部境界との交点 O を求め、点 O から点 P に向かって上式を積分すれば点 P での I_ν が求まる。このとき、 η_ν や χ_ν はセルで定義される値なので、通過するセルをどれだけ横切るかを逐次評価する必要がある。

上記のような計算はlong characteristics法とよばれる[22]、手続きとしては単純であるが、エディントン因子が必要なすべての格子点で、ある程度の方向離散点の数だけ光線追跡を行わなければならない、演算量はたちまち膨大なものとなる。そこで、図3に示すように、光線追跡は隣りのセル境界からのみ行い、初期値となる境界での輻射強度は周辺の値を補間することによって評価するshort characteristics法が提案されている[16, 23]。

short characteristics法によって演算量を抑えることはできるが、光源から遠くにいくほど非等方向性が失われてしまう問題がある。一方long characteristics法では、演算量を厭わなければ精度よくエディントン因子を得ることができるが、有限の方向離散点ではいずれ遠くの光源を捉えられなくなるという光線追跡法の根本的な問題は避けることができない[24]。

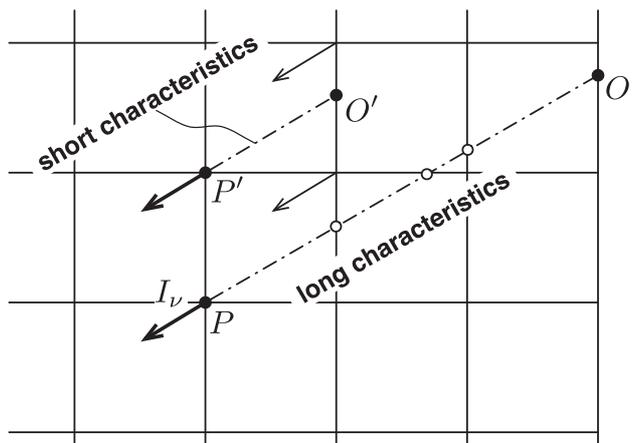


図3 光線追跡法によるエディントン因子評価法の概念図。long characteristics法では、ある方向の輻射強度が点 P で必要な場合、そこから光路を遡って外部境界との交点 O を求め、そして、点 O から P に向かって、輸送方程式を積分する。一方、short characteristics法で点 P' の輻射強度を評価する場合、隣のセル境界との交点 O' から P' の間のみ積分する。積分の初期値となる点 O' における輻射強度は、周辺の輻射強度から補間して求める。

モンテカルロ法とのハイブリッド計算

連続体に対する方程式と運動論的方程式のハイブリッド解法を考えると、計算格子ベースの手法と粒子の手法の結合計算が最も現実的な選択である。実際、光線追跡法も一種の粒子の手法であり、そのような発想の範疇を脱しない。ところが、光線追跡法は粒子の飛行経路を固定した計算手法であるため、予め用意した飛行経路にない情報を取り入れることができないという意味では、計算格子ベースの手法と解釈することもできる。すなわち、計算空間中の点光源を隈なく捉えるためには網羅的に飛行経路、つまり離散方向を設定する必要がある、それは計算資源の面から考えて到底現実的ではない。

そこで、もう一つの粒子の手法としてモンテカルロ法を考えると有益であろう[25]。前節で述べたように、モンテカルロ法は解の統計誤差を除去するために多くのサンプル粒子を必要とするが、解の概形を得るだけであれば、比較的少ない計算負荷で目的を達成することができる。エディントン因子を評価するだけであれば、多くの計算負荷を必要としない可能性が高い。発生確率を放射係数で重み付けすることで、光源からより多くのサンプル粒子を生成し、点光源の寄与をなるべく全域に行き渡らせることも可能である[9, 25]。

参考文献

- [1] Y.B. Zel'dovich and Y.P. Raizer, *Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena* (Dover, New York, 2002).
- [2] K. Kotake, K. Sato and K. Takahashi, *Rev. Prog. Phys.* **69**, 971 (2006).
- [3] S. Atzeni and J. Meyer-ter-Vehn, *The Physics of Inertial Fusion: Beam Plasma Interaction, Hydrodynamics, Hot Dense Matter* (Oxford University Press, Oxford, 2004).
- [4] D. Mihalas and B.W. Mihalas, *Foundations of Radiation Hydrodynamics* (Dover, New York, 1999).
- [5] G.C. Pomraning, *The Equations of Radiation Hydrodynamics* (Pergamon Press, Oxford, 1973).
- [6] J.I. Castor, *Radiation Hydrodynamics* (Cambridge University Press, Cambridge, 2004).
- [7] D. Salzmänn, *Atomic Physics in Hot Plasmas* (Oxford University Press, Oxford, 1998).
- [8] D.E. Cullen and G.C. Pomraning, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **24**, 97 (1980).
- [9] Y. Wu, M.F. Modest, and D.C. Haworth, *J. Comput. Phys.* **223**, 898 (2007).
- [10] 小林啓祐：原子炉物理（コロナ社，東京，1996）。
- [11] P.J. Coelho, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **73**, 231 (2002).
- [12] 小国力 編著，村田健郎，三好敏郎，J.J.ドンガラ，長谷川秀彦著：行列計算ソフトウェア-WS，スーパーコン，並列計算機（丸善，東京，1991）。
- [13] G.L. Olson, L.H. Auer and M.L. Hall, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **64**, 619 (2000).
- [14] N.J. Turner and J.M. Stone, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **135**, 95 (2001).
- [15] J.E. Morel, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **65**, 769 (2000).
- [16] J.C. Hayes and M.L. Norman, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **147**, 197 (2003).
- [17] K.H. Simmons and D. Mihalas, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **66**, 263 (2000).
- [18] G.N. Minerbo, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **20**, 541 (1978).
- [19] C.D. Levermore, *J. Quant. Spectrosc. Radiat. Transfer* **31**, 149 (1984).
- [20] C.D. Levermore and G.C. Pomraning, *Astrophys. J.* **248**, 321 (1981).
- [21] D. Aubert and R. Teyssier, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **387**, 295 (2008).
- [22] 梅村雅之，中本泰史：ながれ **15**, 457 (1996).
- [23] J.M. Stone, D. Mihalas and M.L. Norman, *Astrophys. J. Suppl. Ser.* **80**, 819 (1992).
- [24] N. Ohnishi, K. Sugai and Y. Ogino, *J. Phys. Conf. Ser.* **244**, 022078 (2010).
- [25] N. Ohnishi, Toward an accurate numerical simulation of radiation hydrodynamics in laser ablation plasmas, *Proc. 9th International Conference on High Energy Density Laboratory Astrophysics*, 2012.



おおにし なおふみ
大西直文

東北大学大学院工学研究科航空宇宙工学専攻准教授。2001年3月大阪大学大学院工学研究科電気工学専攻にて学位を取得（博士（工学））。専門は輻射流体力学，高温気体

力学。出身は島根県で大学は大阪，就職は関東を飛び越して仙台，と東にシフトし，おかげで大きな地震に2度遭いました。帰省が大変で，毎年盆には家族を乗せて仙台から島根を走破します。関西より西の道路で関東ナンバーを見ると，勝ったと思っています。