



4. ITER 実験での課題と新たな取り組み

4.3 電磁波測定における相対論的效果の導入

北條 仁士, 間瀬 淳¹⁾

九州大学産学連携センター¹⁾

(原稿受付: 2011年5月30日)

プラズマ中電磁波伝搬の理論およびプラズマの電磁波計測を議論する際、計測の対象とする電子の温度の効果は無視されることが多い。電子温度が上昇し、速度分布が 10–100 keV に分布してくると、相対論的效果を無視することができなくなる。本講座 2 章で紹介した透過干渉測定、反射測定、および電子サイクロトロン放射測定への相対論的效果を導入した場合の影響について記述する。

Keywords:

plasma diagnostics, electromagnetic waves, relativistic effect, interferometry, reflectometry, ECE

4.3.1 はじめに

第 2 章では、プラズマ中電磁波伝搬の基礎方程式から、プラズマのパラメータ（密度、磁場）および電磁波の周波数の関数で表される誘電率（屈折率）の表式を導出し、計測に利用する手法を記述した。その際、電磁波との相互作用の対象となるプラズマの電子温度を無視する低温プラズマ近似を適用した。電子温度 10 keV 以下の場合、低温プラズマ理論による誘電率の表式は良い近似で成り立つ。近年の大型実験装置や ITER プラズマでは、電子温度が 10 keV 以上となるため、温度の効果（相対論的效果）を含める必要がある[1-4]。本節では、特に ITER マイクロ波計測でも重要な役割を果たすと期待されている、透過干渉計測、反射計測を中心に相対論的效果について記述する。

本節における式の導出および実験シミュレーションには、主として有限差分時間領域 (Finite Difference Time Domain: FDTD) 法コードによる計算を利用した。装置が大型化するにつれ、計測システムの設計・製作を効率よく進めていくために、計算機を用いた装置のシミュレーションを行っていくことが極めて有効な手段と考えられる[5]。

4.3.2 基礎方程式と分散関係

計算のための基礎方程式は、第 2 章でも記述したように、電場 $\mathbf{E}$ および磁場 $\mathbf{B}$ に対するマクスウェル方程式と誘導電流密度 $\mathbf{J}$ に対する式で構成される。

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} &= -\nabla \times \mathbf{E} \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} &= c^2 \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{\epsilon_0} \mathbf{J},\end{aligned}\quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{J} = \epsilon_0 \omega_{pe}^2 \mathbf{E} - \frac{e}{m_e} \mathbf{J} \times \mathbf{B}_0$$

ただし、 $\omega_{pe} (= (e^2 n_e / m_e \epsilon_0)^{1/2})$ は電子プラズマ振動数、 c は光速、 ϵ_0 は真空中の誘電率、 m_e は電子の静止質量、 $\mathbf{B}_0$ は外部磁場である。(1)式は、外部磁場に垂直に伝搬する、正常波、異常波いずれの場合も記述することができる。 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$ ($\mathbf{e}_z$ は z 方向の単位ベクトル) のとき、 E_z 成分をもつ正常波は次の分散関係をもつ。

$$\omega^2 = \omega_{pe}^2 + c^2 k^2. \quad (2)$$

ω および k は電磁波の振動数と波数である。他方、 E_x および E_y 成分を有する異常波の分散関係は次式で表される。

$$\left(\frac{kc}{\omega}\right)^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cdot \frac{\omega^2 - \omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{ce}^2}, \quad (3)$$

ただし、 ω_{ce} は電子サイクロトロン振動数である。

高温プラズマにおける電磁波伝搬の場合、上式における電子の質量に相対論的效果を導入することが必要となる。以下、透過干渉測定および反射測定に対してこの影響を議論する。

4.3.3 透過干渉測定における相対論的效果[6]

相対論的效果を導入した正常波 (O-mode) の分散関係は、マクスウェル分布をしたプラズマでは、(2)式より、

$$\frac{kc}{\omega} = \left[1 - \frac{1}{A} \left(\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (4)$$

となる。 A は電子の質量への相対論的效果による補正係数であり、次式で与えられる

$$A = \frac{3K_2(\rho)}{\rho^2 \int_0^\infty dp (p^4/\gamma^2) e^{-\rho\gamma}}, \quad (5)$$

ただし, $\rho = m_e c^2 / T_e$, $\gamma = (1 + p^2)^{1/2}$, $p = |p| / (m_e c)$, $\mathbf{p} = \gamma m_e \mathbf{v}_{te}$. T_e は電子温度, v_{te} は電子の熱速度, $K_2(\rho)$ は変形ベッセル関数である.

相対論的効果がそれほど強くない場合について補正係数 A の値を評価してみよう.

$$e^{-\rho\gamma} \cong e^{-\rho} e^{-\rho \frac{p^2}{2}} \left(1 + \rho \frac{p^4}{8}\right) \quad (6)$$

と近似することができるので,

$$\begin{aligned} A &= \frac{3K_2(\rho)}{\rho^2 \int_0^\infty dp (p^4/\gamma^2) e^{-\rho\gamma}} \\ &\cong \frac{3K_2(\rho)}{\rho^2 e^{-\rho} \int_0^\infty dp p^4 e^{-\rho \frac{p^2}{2}} \left(1 + \rho \frac{p^4}{8}\right)} \\ &\cong \frac{3e^{-\rho} \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}} \left(1 + \frac{15}{8\rho}\right)}{\rho^2 e^{-\rho} \left(\frac{2}{\rho}\right)^{5/2} \frac{3\sqrt{\pi}}{8} \left(1 - \frac{5}{8\rho}\right)} \cong 1 + \frac{5}{2\rho} \end{aligned} \quad (7)$$

となる.

Mazucatto の論文では, $A = (1 + 5/\rho)^{1/2}$ が導かれている [4]. 近似式は, $T_e \sim 60$ keV まで, 元の A の値とよく一致していることが示されている [6].

干渉計では, 2 章 (25) 式で記述した透過波と参照波の間の位相差を測定する. $n_e \ll n_c$ の時, 位相差 $\phi(x)$ は次式のようにになる.

$$\begin{aligned} \phi(x) &\cong \frac{\pi}{\lambda n_c} \int_{Y_1}^{Y_2} \frac{n_e(r)}{A} dy \cong \frac{2\pi}{\lambda n_c} \int_x^a \frac{n_e(r)}{A} \frac{r dr}{\sqrt{r^2 - x^2}}, \\ r &> x, \end{aligned} \quad (8)$$

ここで, $n_c = \omega^2 m_e \epsilon_0 / e^2$ は入射波の周波数に対応するカットオフ密度, a はプラズマの半径である.

説明を簡単にするため, 密度分布として軸対称なパラボリック分布を仮定すると,

$$n(r) = n_e \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \quad (9)$$

で表わされ, 位相差 (8) 式は次のようになる.

$$\phi(x) = \frac{4\pi a}{3\lambda} \frac{n_e}{A n_c} n_e \left[1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2\right]^{3/2}. \quad (10)$$

図 1 の縦軸は, (10) 式で与えられる位相の径方向分布において, 電子温度を 0 とおき, $x = 0$ での値で規格化したもので, 電子温度が 20 keV になると, 電子温度を無視した場合 (低温近似) と比較して約 10% の差が生じることになる.

軸対称性の仮定より, アーベル変換を用いた再構成

$$n(r) = -\frac{\lambda n_c}{\pi^2} \int_r^a \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \quad x > r, \quad (11)$$

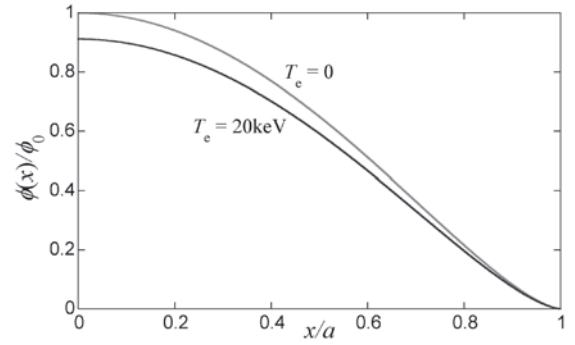


図 1 異なる電子温度に対する位相の径方向分布.

を計算する. (10) 式を (11) 式に代入すると, 次式が得られる.

$$n(r) = \frac{n_e}{A} \left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right] \quad (12)$$

再構成された電子密度は, 元の分布 (9) 式と比較して係数 A の値だけ低く表示されることになる. これは, 再構成に使用するアーベル変換の式 ((11) 式) に相対論的効果が含まれていないために生じるものである. アーベル変換の式を

$$n(r) = -A \frac{\lambda n_c}{\pi^2} \int_r^a \frac{d\phi}{dx} \frac{dx}{\sqrt{x^2 - r^2}}, \quad x > r \quad (13)$$

のように修正することにより, 正しい密度分布を導出することが可能となる.

4.3.4 反射測定における相対論的効果

反射計測定では, 相対論的効果による電子の質量の変化によるカットオフ層の変位が直接影響することになる. 電子の質量 m_e を $m_e (1 + 5/\rho)^{1/2}$ とおくと, 相対論的効果を考慮した場合と考慮しない場合のカットオフ密度の変化は,

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n_c} &= \frac{n_{c,rel} - n_c}{n_c} \cong \sqrt{1 + 5/\rho} - 1 \cong \frac{5}{2} \rho \quad (\text{O-mode}) \\ &\quad \frac{\sqrt{1 + 5/\rho} - 1}{1 - \omega_{ce}/\omega} \quad (\text{X-mode}) \end{aligned} \quad (14)$$

となる. これより, 異常波モード (X-mode) の場合その影響が顕著になることがわかる.

図 2 および図 3 に, FDTD コードを用いてプラズマ中の電磁波伝搬 (電界成分およびポインティングベクトルの成分) を計算した結果を示す. 伝搬モードは異常波, 計算の条件は, 周波数 70 GHz, 外部磁場 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_y$, $B_0 = 2$ T, 電子温度は一様などである. また, 密度分布は次式とした.

$$n(x) = n_0 \exp[-(\bar{x}/L_n)^2], \quad \bar{x} = x - 180, \quad (15)$$

ただし, $n_0 = 4 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $L_n = 75 \text{ mm}$ である. カットオフの位置は, $T_e = 0.1 \text{ keV}$ に対して $x_c = 98.2 \text{ mm}$, $T_e = 20 \text{ keV}$ に対して $x_c = 112.5 \text{ mm}$ が導出され, 図 2 から評価される値とよく一致していることがわかる.

実際に反射計による密度分布再構成への影響を, パルス

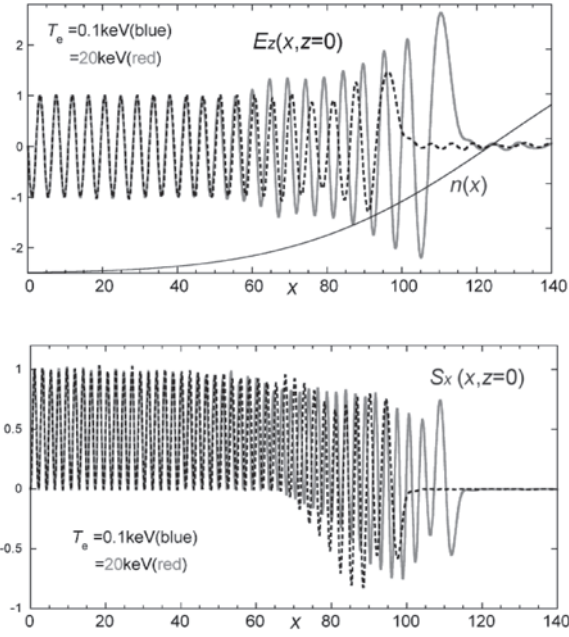


図2 異なる電子温度に対する電磁界の振る舞い：(上)電界 $E_z(x, z, t)$ ($z=0$), (下)ポインティングベクトル成分 $S_x(x, z, t)$ ($z=0$) ($T_e = 20$ keV (実線), 0.1 keV (点線)) [7].

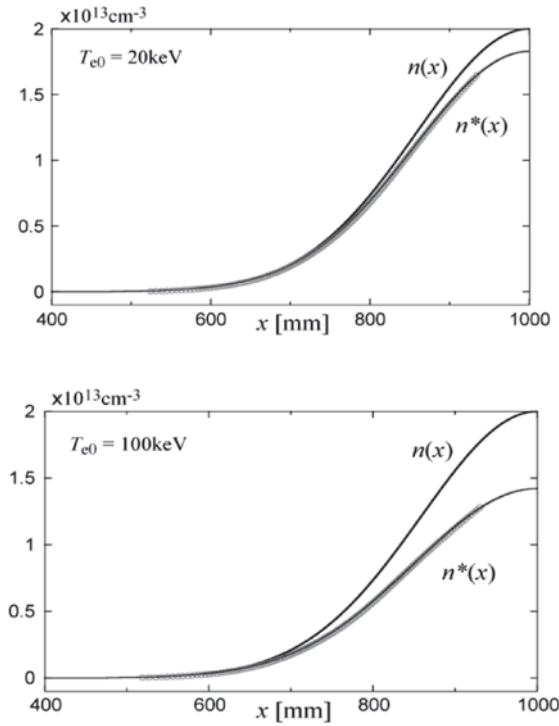


図3 異なる電子温度に対する密度分布再構成 [7].

反射計に対する計算機シミュレーションで調べてみる。プラズマの条件は、

$$\begin{aligned} n(x) &= n_0 \exp[-(\bar{x}/L_n)^2], \bar{x} = x - 1000 \\ T_e(x) &= T_{e0} \exp[-(\bar{x}/L_T)^2], \bar{x} = x - 180, \end{aligned} \quad (16)$$

ただし, $n_0 = 2 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, $L_n = 200 \text{ mm}$, $L_T = 300 \text{ mm}$,

$T_{e0} = 20 \text{ keV}$ および 100 keV , 外部磁場 $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_y$, $B_0 = 1 \text{ T}$ である。また, 入射波は, パルス幅 16.7 ps のガウシアンパルスとする。

パルス反射計 (レーダ) では群遅延 $\tau(\omega)$ が得られ, 密度分布は, 次式で表わされるアーベル変換公式から導出される。

$$x(\omega_{pe}) = \int_0^{\omega_{pe}} d\omega \frac{c\tau(\omega)}{\pi\sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2}}. \quad (17)$$

図3に, $T_e = 20 \text{ keV}$ および 100 keV に対して, (17) 式を用いて再構成した密度分布を示す。 $n(x)$ はモデルとして与えた密度分布, $n^*(x)$ が相対論的效果を導入した場合の密度分布である。

$$n^*(x) = \frac{n(x)}{\sqrt{1 + \frac{5T_e(x)}{m_e c^2}}}. \quad (18)$$

電子温度が 100 keV になると相対論的效果による密度分布のずれが顕著になっていることがわかる。

干渉計の場合と同様, アーベル変換について考察する。群遅延は群速度 v_g を用いて計算することができる。群速度は正常波モードの分散関係 (4) 式より

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = c \sqrt{1 - \frac{1}{A} \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega} \right)^2} \quad (19)$$

となる。したがって, 群遅延は

$$\tau(\omega) = 2 \int_{-x_0}^{x_r} \frac{dx}{v_g} = \frac{2(x_0 - a)}{c} + \frac{a}{c} \lambda \ln \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right) \quad (20)$$

となる。

相対論的效果を考慮しないアーベル変換の式は,

$$\begin{aligned} x_r &= \frac{c}{\pi} \int_0^{\omega_{pe}} \frac{\tau(\omega)}{\sqrt{\omega_{pe}^2 - \omega^2}} d\omega \\ &= \frac{c}{\pi} \int_0^\beta \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - y^2}} \left[\frac{2(x_0 - a)}{c} + \frac{a}{c} y \ln \left(\frac{1 + \lambda}{1 - \lambda} \right) \right] dy \\ &= x_0 - a + \frac{a}{\pi} \int_0^\beta \frac{\sqrt{\beta^2 - y^2}}{1 - y^2} dy \\ &= x_0 + \frac{2a}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{1/\beta^2 - 1}{1/\beta^2 - 1 + \cos^2 \theta} dy \\ &= x_0 + a \sqrt{1 - \beta^2} = x_0 + a \sqrt{1 - A \frac{n(x)}{n_0}}, \\ \beta^2 &= A (\omega_{pe}/\omega_{p0})^2 = A n(x)/n_0 \end{aligned} \quad (21)$$

となるため, この式を用いて再構成された密度分布は,

$$n(r) = \frac{n_0}{A} \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (22)$$

となる。一方, 相対論的效果を考慮したアーベル変換

$$x_r = \frac{c}{\pi} \int_0^{\omega_{pe}/\sqrt{A}} \frac{\tau(\omega)}{\sqrt{\omega_{pe}^2/A - \omega^2}} d\omega. \quad (23)$$

を適用することにより、当初モデルとして与えた

$$n(r) = n_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right] \quad (24)$$

が得られる。

図4に $T_e = 20$ keV および 40 keV に対して、(21)式および(23)式のアーベル変換を用い再構成した密度分布を示す。

電子温度の違いが密度分布再構成に影響することを利用して、反射計測定を電子温度の評価に利用することが可能か考察する。密度分布 $n(r)$ が別の計測手段により求められたとすると、反射計で得られた再構成分布 $n^*(r)$ から電子温度は(18)式を用いて、

$$T_e(r) = \frac{m_e c^2}{5} \left[\left(\frac{n}{n^*} \right)^2 - 1 \right] \quad (25)$$

とおくことができる。

図5に反射計により得られた電子温度分布を示した。(25)式の n^* には、図3で得られた分布を適用している。電子温度が高くなると、モデル分布に近くなることが見られる。

4.3.5 サイクロトロン放射測定における相対論的效果の影響

第2章で記述したように、電子サイクロトロン放射(ECE)測定では、放射周波数でのプラズマの光学的厚さが1より大きいときには、放射パワーを測定することにより電子温度を決定することができる。また、放射周波数(ECE周波数)は閉じ込め磁場の関数であるため、受信パワーの周波数スペクトルから電子温度の半径方向分布が得

られることになる。

ECE測定における相対論的效果の研究は、高温プラズマの電子温度測定における最も大きな課題の一つとなっており、いくつかの報告がある[8,9]。ここでは、最近の話題について記述する。

大型磁場閉じ込め装置におけるECE測定で大きな問題となっているのは、Harmonic overlap と呼ばれる、装置の外側、すなわち弱磁場側でみた場合のECEの低次高調波と高次高調波の重なりがある(第2章図6参照)。このとき、ECEパワーの周波数スペクトルから電子温度分布を導出することができる領域が限定されることになる。放射の吸収領域の広がりも測定を困難にする[10-12]。図6にITERプラズマで想定される密度および温度に対するX-mode ECEの吸収領域 Contour plot を示す。Contour plot の分布の色が白い領域では $\log a > 0$ 、すなわち $a > 1$ であり光学的厚さも大きく、放射が吸収されることになる。

高調波の重なりがなく、相対論的效果も無視できる場合には、ECE放射は、例えば、第2高調波周波数のところでのみ光学的厚が大きく、その他の領域では光学的に薄い。半径方向の全領域で受信し、電子温度分布を求めることができたが、図6の特に高温・低密度(下図)のような場合には、ECE第2高調波を弱磁場側から観測する場合、 $R = 4.5 - 5$ m の領域からの放射は、第3高調波が受信パワーに寄与することになる。また、 $R = 5 - 6$ m の領域からの放射は強い吸収を受けることになる。

4.3.4において、反射計測定から電子温度分布導出の可能性について議論したが、ECE計測においても、相対論的效果を用いて電子密度を評価する可能性についての報告もある[13]。ECEをトーラス内側(強磁場側)から観測した

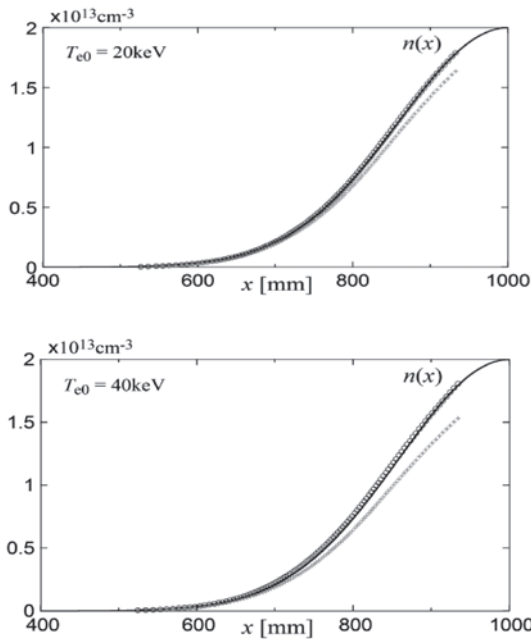


図4 アーベル変換により再構成された密度分布。実線：モデル分布、×印：(21)式による再構成、○印：(23)式による再構成結果。

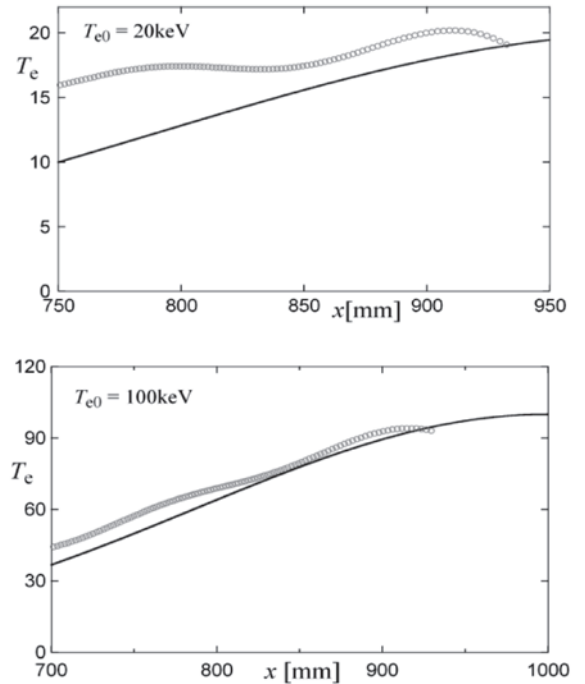


図5 電子温度 $T_e = 20$ keV および 100 keV に対する電子温度の再構成結果：実線はモデル分布、○印は反射計により得られた再構成分布。

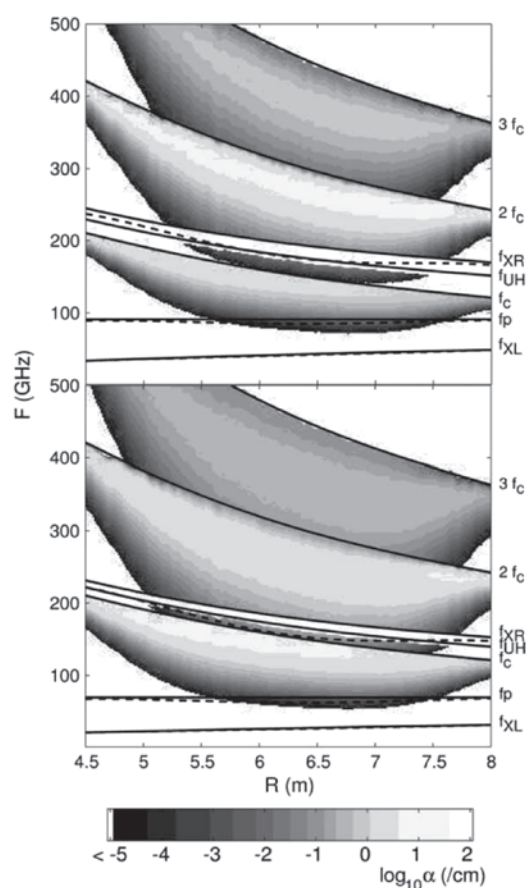


図6 ITER プラズマにおける X-mode ECE 吸収領域：(上) $T_e = 27$ keV, line averaged density is $1.0 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$, (下) $T_e = 45$ keV, line averaged density is $0.6 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ [11, 12].

場合、ECE 周波数が相対論的效果により低い周波数側に大きくシフトするが、この周波数のずれは電子温度にほぼ単調に比例し、電子密度に依存する。この依存性から電子密度を評価するものである。

4.3.6 まとめ

透過干渉法、反射法、および放射 (ECE) 法について、相対論的效果を導入した場合の影響について記述した。これ

ら計測法は基本的なものであり、計測原理そのものは確立されたものであるが、ITER のような燃焼プラズマ装置に対しては、様々な新しい課題が生じることになる。ここで記述した相対論的效果の影響については、現在主要な課題の一つであり、二、三次元 (Full Wave) コードを用いた電磁波伝搬解析が、実際の計測システムの設計・製作にも大きな役割を果たすと考えられている。

あとがき

本節は、北條仁士先生が発表された論文をもとに記述したものである。参考にした研究成果は、科学研究費特定領域研究 (No.16082205, No.20026003) により行われた。

参考文献

- [1] D.B. Batchelor, R.C. Goldfinger and H. Weitzner, Phys. Fluids **27**, 2835 (1984).
- [2] H. Bindslev, Plasma Phys. Control. Fusion **33**, 1775 (1991).
- [3] H. Bindslev, Plasma Phys. Control. Fusion **35**, 1093 (1993).
- [4] E. Mazzucatto, Phys. Fluids **B4**, 3460 (1992).
- [5] H. Hojo, Y. Kurosawa and A. Mase, Rev. Sci. Instrum. **70**, 983 (1999).
- [6] H. Hojo, A. Mase and K. Kawahata, Plasma Fusion Res. **4**, 010 (2009).
- [7] H. Hojo, A. Mase and K. Kawahata, Plasma Fusion Res. **2**, S1022 (2007).
- [8] M. Bornatici and U. Ruffina, in "Diagnostics for Experimental Thermonuclear Fusion Reactors 2" eds. P. Stott, G. Gorini, P. Prandoni, and E. Sindoni (Plenum, New York and London, 1998) p. 181-184.
- [9] M. Sato, N. Isei and S. Ishida, Jpn. J. Appl. Phys. **34**, L708 (1995).
- [10] H.J. Hartfuss, R. Konig and A. Werner, Plasma Phys. Control. Fusion **48**, 83 (2006).
- [11] A.J. H. Donne, Int. Workshop on Microwave and Laser Diagnostics (IWMM2008), Fukuoka (2008).
- [12] M.E. Austin *et al.*, Review of ITER ECE System, Final Report (U. Texas, 2007).
- [13] M. Sato, A. Isayama, N. Iwama and K. Kawahata, Jpn. J. Appl. Phys. **44**, L672 (2005).