



4. 画像処理技術について -FFT と SVD-

西野 信博, 大館 暁¹⁾

広島大学大学院工学研究科, ¹⁾核融合科学研究所

(原稿受付日: 2010年9月28日)

今までの章では、高速カメラを使用して様々なデータを取得する計測手法とその結果について概説してきた。本講座の題中にもある計測とはデータを取るだけでなく、取得したデータからいかに有意な情報を得るかということも含まれる。そこで、本章では、高速カメラの画像から物理的に意味のある情報をどのようにして取り出すかという解析手法について、一部ではあるが、簡単に説明する。そして、画像認識についても同時に考える。

Keywords:

plasma diagnostics, image, image analysis, FFT, singular value decomposition

4.1 フーリエ変換を使った画像データ解析

プラズマ計測における画像解析とは、何が写っていて、何が起きているのかを調べることであろう。すなわち、一枚の画像に写っている空間情報と、それらがコマ送りされる毎にどのように時間進展するかを調べることであろう。すると、解析手法としては空間情報（波数空間）の解析と時間進展（周波数空間）の解析、あるいは、その両方を併せ持つ解析が考えられる。ここでは、代表的な周波数解析手法であるフーリエ変換を利用した手法と時間・空間情報解析を併せ持つ手法である特異値分解について概説する。

4.1.1 はじめに

フーリエ変換は、時間、あるいは、空間の変動をスペクトル解析する手法として代表的な手法であることは言うまでもない。ここでは、各画素の時系列データの時間に関するフーリエ変換を利用した手法を概説する。時系列のフーリエ変換の結果は周波数として現れるので、時間変化を追うには時間依存フーリエ変換を使用する。その場合、必要な時間分解能をあらかじめ選定し、撮影速度であるFPSから必要なコマ数を決定する。現象を再現するための必要最小限の時間分解能は、通常 ms 程度かそれ以下である場合が多く、FFT に有力なコマ数としては、2 のべき乗の 32, 64, 128, 256 枚などを選ぶため、撮影速度は最低でも 40000FPS 以上が望まれる。

4.1.2 プラズマ中の波動解析

1 章で説明したように、速い撮影速度を持つカメラとしての高速カメラ計測では、通常 H_α 光の測定が主となる。この場合、周辺プラズマからの情報がほとんどで、内部の情報はペレットなどの能動的な手法を使用しなければ得られない。このように単純な高速カメラ計測の場合、圧力変動

が光量の変動として見られると仮定する[1]と、画像の中で明るい部分は圧力が相対的に高い部分となることは容易に想像がつく。通常のガスパフ、GPI (gas puff imaging) や SMBI (Supersonic Molecular Beam Injection) 程度であれば、それらの状況に大きな違いはないと考えられる。ところで、物理現象としての圧力変動の空間・時間変化は波である。すなわち、画像中の光量の時間変化は波の移動を表していると考えることができる。すると、画像中の波の空間情報と、その時間進展を追った時間情報を利用すれば、プラズマ中の波動に関する情報が得られるはずである。残念ながら、多くのプラズマの波動は高速カメラの撮影速度から見ると高周波で、現状ではとても見られない。しかしながら、MHD 波に代表されるような比較的周波数が低い波であれば、カメラで捕らえられる場合もある。

図1は、Heliotron J での SMBI の最近の実験の接線方向の画像である[2]。図2は、この元画像の時系列データに時間依存FFTを適用し、解析した結果である。磁気プローブ（場合によっては、静電プローブ）の周波数解析や、カメラに写っている明るい部分の適当な画素で周波数解析すると、ある低周波の周波数（ここでは、約 9 kHz）でピークを持った。そこで、時間依存FFTの結果から、各画素毎にこの周波数成分の位相（角度）を色で表し、成分の大きさに比例する輝度で画像を作成したものである。位相は波面を表し、同じ位相間の距離が波長となる。そして、この図をコマ送りすることにより、この周波数の波がどちら方向に向かっているかがわかる。また、各画素の輝度を常に一定で表示する方法などもあり、見やすくするためにいろいろな表示が考えられる[3-5]。

ところで、周波数を固定すると、波長は位相速度に比例する。すると、画像解析した結果は、ある特定周波数の 3

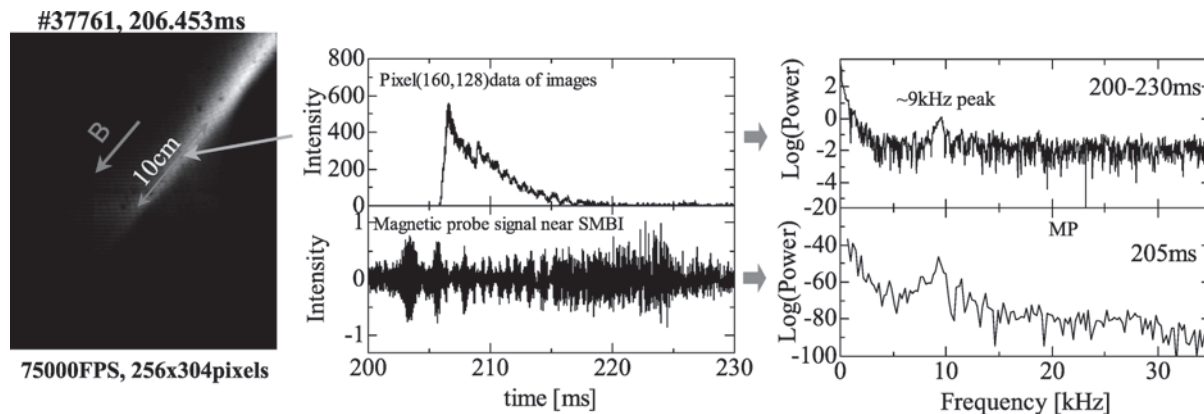


図1 Heliotron J プラズマにおける典型的な SMBI の画像
 左：接線ポートから見た SMBI によってできた帯状の明るい領域
 中：矢印に示した画素での時系列データと磁気プローブデータ
 右：中で示した信号の FFT によるスペクトル解析結果（9 kHz 付近にピークが見える）

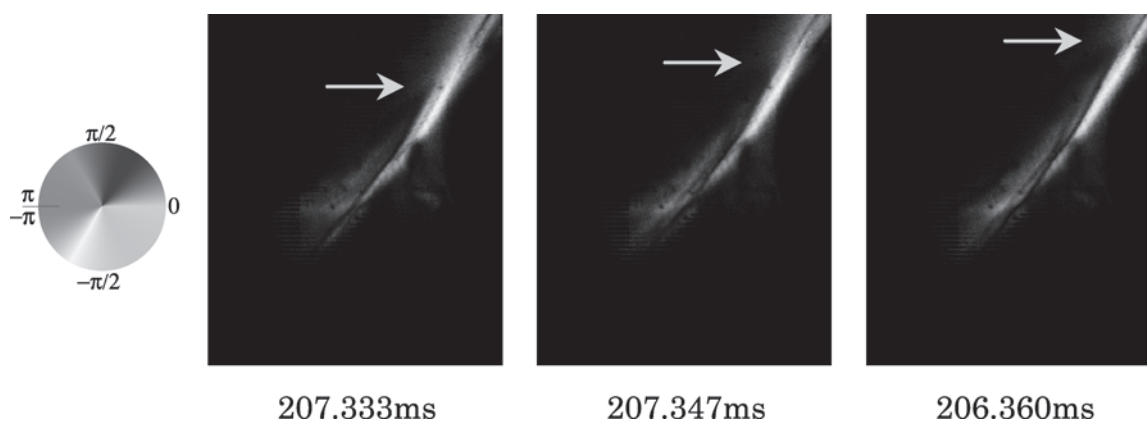


図2 Heliotron J プラズマにおける SMBI 時の 2 次元位相図
 原図はカラーで、色と角度の関係は最左図で示している。

次元の CMA ダイアグラムを 2 次元で可視化していることになる。実験で、CMA ダイアグラムを作成する方法としては有力な手法で、プラズマ波動を研究する上でもプラズマ計測としては強力な武器となりえる。ただし、圧力変動が光量の変動になっていることが重要で、圧力と光量に正の相関関係（負の相関関係は物理的に考えにくい）があれば、波の周波数や波長、移動の速さの情報は定量的に得られやすい。一方、光量に依存する波の振幅の情報は、センサー、アンプなどのカメラのハード性能、圧力と光量の関係などがわかっている必要があり、一般的には定量的な扱いは困難となる。

4.1.3 時間進展に関して必要な時間分解能と画像認識

時間進展している現象が画像に写っているとき、この現象の時間進展を正しく認識できるための時間分解能（カメラ的には FPS, Frame per second）は、いかほどであろうか？この質問には、サンプリング定理から現象の時間進展に含まれる最も高い周波数成分（ナイキスト周波数となる）の 2 倍であると答えることができる。今、画像内に波が写っているとすると、簡単のために、波の進む方向だけ（1 次元）に着目する。図 3 で、波が右方向に進んでいると人が認識するのは、波の見かけの頂点（あるいは、底）が 1 コマ毎にゆっくりと右に進んでいると見える場合である

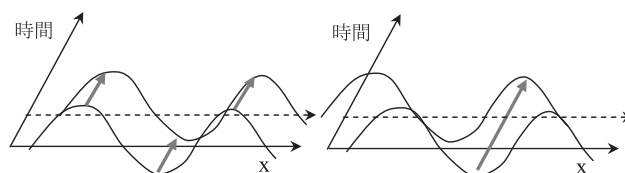


図3 画像中の波動の動き
 左：ゆっくり進んでいるように見える
 右：どちらに進んでいるかわからない

う（左の図）では、ゆっくり進むというのはどういう場合かといえ、その逆の速く進んでいる場合を考えればよい。前のコマに写っている波の頂点の場所が、一コマ進んだ次のコマでは、波の底の場所になっているとすると、一コマで波の位相が 180 度進んだ、あるいは、遅れたことになる（右の図）。他の情報がなければ、進んだのか遅れたのかを区別できない。すなわち、波の位相速度 V_ϕ とし、波長を λ とすると、波が半波長移動する時間 τ_s は、

$$\tau_s = \lambda / 2V_\phi$$

この時間より短い間隔でコマ取りしなければ、波がどちらに進んだか判定できない。よって、カメラに必要な時間分解能 τ は、 τ_s 以下であり、 f を波の周波数として

$$V_{\phi} = f\lambda$$

であることを考慮すると、

$$\tau_s = 1/2f$$

とサンプリング定理が出てくる。FPS では、 $2f$ となる。画像中の波の頂点の位置（の画素）が、次に底になるのだから、この画素の時系列データの時間変化に着目すると、やはり教科書的なサンプリング定理が出てくる。

実際にはサンプリング定理ぎりぎりの時間分解能では、どちらに進んでいるかという判定が厳しくなることから、ナイキスト周波数の 2 倍では不足で、その数倍は必要といわれる。しかし、定量的に決まった倍率はなく、データを見ながらその場で当たっている（その場の雰囲気！）ようである。よって、解析結果として第三者から信頼されるためには、サンプリング時間 τ は τ_s の数分の 1（典型的には $2 - 6$ 分の 1）をとる場合が多い。これを FPS で換算すると $4f - 12f$ となるため、高周波現象を捉えるのには結構厳しい条件となる。例えば、 $f = \text{FPS}/10$ までの現象が捉えていると仮定すると、 10 kHz の現象を測定するのに、 100 kHz の FPS が必要となり、現実的には光量的にかなり厳しい。筆者などは最もゆるい条件の $f \sim \text{FPS}/4$ 程度まで許容している。上記の Heliotron J の SMBI のように明るい場合でも 75 kHz の FPS で約 9 kHz の現象を見ている。これで、ようやく $8f$ 程度で、通常の放電では、光量的に $4f$ が限度なのである。くどいようだが、通常の画像は、低周波成分が多い場合が多く、高周波成分がうまく捉えられていない場合でも、画像としては不自然でない。単に、時間的な積分効果がかかっているだけである。普通のビデオカメラでは、1 章で示したフィラメント状揺動などは写らずに、単に明るくぼんやりとしたプラズマが写っているだけである。問題なのは、それが物理を反映している画像かどうかの判定ができるためには、時間分解能が十分必要ということである。注意すべき点は一様に輝いて見えるプラズマから導き出される何らかの物理量に関する情報は、多数のフィラメントが動いている乱流プラズマから導き出されるそれとはまったく異なり、物理の過程を無視した場合は、時間平均的な意味さえなくなる可能性もありえる。

また、上記の議論から、各画素の時系列データの時間に関するフーリエ変換から得られる周波数領域のデータと各画素間の空間情報の関係が容易に理解できるであろう。ある特定周波数の波が時間進展して移動する場合、その波の振幅と位相の情報は 1 枚の画像中に現れるが、同時に、それらの情報は、各画素の時系列データにも現れる。したがって、各画素の時系列データから得られた、特定周波数の波の位相を図示すれば、画面内で波の形状（波面）が把握できる。そして、波の振幅情報は各画素のデータの大きさ、または、変動の大きさとなっている。

最後に、これまでの議論は、画像を見る人（研究者）がその画像の中に写っている対象に対してなんらかの予備知識がない場合でも、解析した結果の意味づけが可能な事例

である。例えば、プラズマ中にペレットを入れる実験では、カメラの時間分解能が足りなくても、画像中に明るい部分があれば人（研究者）はそれをペレットと認識する。また、それら明るい領域がいくつにも分かれた場合、ペレットが分裂したと認識する。このように、もともと何が写っているかが、あるいは、何が写るべきかがわかっている時は、「これがそうです」と結論しても衆人も疑わないであろう。これは、画像に対する人（研究者）の認識がその人の知見に関わるということを示唆しており、筆者にとっては重要と思われる。プラズマ計測は多種多様に上り、高速カメラ計測といえども万能とは程遠い。カメラ計測のみではわからないことも他の計測との組み合わせにより、より物理に関する情報が増える。そして、物理に関しての理解が深まれば、同じ画像を見ても認識は変わりえる。すなわち、最初見たときには理解不能な画像が、ある時に理解できるようになることがあるということを意味するもので、まさに物理の進化は認識の進化であるといえる。

4.2 特異値分解を使った画像データ解析

4.2.1 はじめに

本節では 2 次元計測器で計測された揺動データを解析する手法について議論する。多点で計測された時系列データの解析法は、静電プローブ、磁気プローブの解析などで良く使われていてかなり確立されているといっても良い。各計測点での揺動信号をスペクトル解析し、他の計測点での信号との間で相互相関係数や、クロススペクトルを求めた上で揺動の相関長や伝播方向を推定するやり方である（たとえば文献[6]）。2 次元計測に対してもこの種の手法の適用は可能だが、あまり有効な手法とはいえない。2 次元計測器の計測データは多くの場合視線上での線積分値になっている。ある視線の信号と、他の視線の信号の位相差から揺動の伝播速度がわかったとしてもそれは物理量ではない。また、どの視線を選んで解析するかも問題になる。画面の中の多数のピクセル（ 256×256 の分解能では 6 万ピクセル以上）から有用な情報を含むピクセルを選ぶのも大変であるし、また、せっかく 2 次元のイメージという豊かな情報を得ているのに、限られた数のピクセルのデータ解析に集中するのは、大切な計測データを無駄にしているとさえいえる。ここでは特異値分解法を使って画像データを解析する手法について解説する。この方法では、画像データを時間方向、空間方向の直交関数展開を行う。こうすることで 2 次元の揺動データに含まれる主要な要素を分離することができ、揺動の周波数特性や、空間的な広がりを直感的に調べることができる。

4.2.2 特異値分解

特異値分解^{*1} (SVD: Singular value decomposition) [7] は最小二乗解の計算などに良く使われている行列の計算法で、信号処理の分野ではノイズ成分を除去する目的で使われてきた。核融合プラズマの揺動データの解析に特異値分解法を使うことは 1990 年台から盛んになり、JET トカマク

* 1 Bi-orthogonal decomposition とも呼ばれる

の磁気プローブのモード解析[8], JFT-2M トカマクの軟 X 線揺動データから振動成分を取り出すこと[9]など, トカマクプラズマの揺動解析に使われてその有効性が知られるようになった. 基本的には多チャンネルの時間変化する信号群から, 空間的な相関情報を引き出して, 共通する固有ベクトル (SVD 解析の用語では Topos という) と対応する固有値 (SVD では, 特異値 Singular value) を導くテクニックである.

$n \times m$ 行列 A は $A = UW^tV$ という単純な構造をもつ 3 つの行列の積に一意的に分解できる. ここで, W は対角行列で, 対角要素 $w_1 \geq w_2 \geq \dots \geq w_m$ を特異値という. U は左側特異ベクトル, V を右側特異ベクトルと呼び, $U^tU = V^tV = I$ の関係がある. 実対称行列の固有値分解 $A = UDU^t$ の拡張版と考えるとわかりやすい.

時系列データの信号処理に利用する場合行列 $A = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N)$ として揺動成分を含む多チャンネルの信号 (M : チャンネル数, N : 時系列データの長さ) をとり, U を Chronos, V は Topos と呼ぶ. i 番目のチャンネルの信号 $\mathbf{a}_i$ は $U = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_M)$ という互いに直行する時系列信号の成分 (chronos) $\mathbf{u}_i$ の和として書くことができる.

$$\mathbf{a}_i = w_1 \times v_{i1} \times \mathbf{u}_1 + w_2 \times v_{i2} \times \mathbf{u}_2 + \dots + w_m \times v_{im} \times \mathbf{u}_m. \quad (1)$$

i 番目の chronos の重みが w_i , その空間的な分布 (topos) が v_{ij} とみなせる.

特異値分解の手法は, 従来気象学等で広く使われてきた経験的直交関数展開[10, 11]*2 と呼ばれる処理と類似した手法である. 経験的直交関数展開はデータの持っている情報を直交関数で展開し, その少数の項で代表させることで, データを要約し理解を助ける方法である. 時系列データ x_i ($i = 0, 1, \dots, N$) を考えたとき, フーリエモードを用いるフーリエ展開では正弦波を直交関数として用いて展開するが, 経験的直交関数展開ではデータ自身から直交関数をきめる. 直交関数は最も大きなパワーを持つような関数を順に選び出して決める[10, 12].

e_m ($m = 1, \dots, M$) を $e_i^t e_j = \delta_{ij}$ の関係を満たす直交関数とする.

$$\sum_{i=0}^{N-1} (e_m x_i)^2, \quad (2)$$

を最大化することをめざすわけである. 時系列データを格納した配列 A より, 共分散行列 (covariance matrix) R を

$$R = A^t A, \quad (3)$$

と定義すれば, 式 (2) は以下になる.

$$\sum_{i=0}^{N-1} (e_m x_i)^2 = e_m A^t A e_m^t = e_m R e_m^t. \quad (4)$$

e_m の制約条件下で式 (4) を最大化するには Lagrange の未定常数 λ を使って,

$$\nabla (e_m R e_m^t) - \lambda \nabla (e_i^t e_i) = 0, \quad (5)$$

とかける. この関係は R が定義より対称行列であることを使えば,

$$R e_m = \lambda e_m, \quad (6)$$

となる. これは行列 R の固有値と固有ベクトルを求めることである. こうして求めた, 固有関数を使って共分散行列 R は以下のようにかける.

$$R = C \Lambda^t C. \quad (7)$$

ここで Λ は対角行列で, $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ は固有値である. 式 (7) は

$$R = c_1 \lambda_1 c_1^t + c_2 \lambda_2 c_2^t + \dots + c_M \lambda_M c_M^t, \quad (8)$$

となる. 例えば, m 番目のチャンネルの自己相関係数 r_{mm} は m 番目の信号の揺動のパワーに等しいが,

$$r_{mm} = \lambda_1 c_1(m)^2 + \lambda_2 c_2(m)^2 + \dots + \lambda_M c_M(m)^2, \quad (9)$$

となり, 各固有関数からの寄与が固有値の大きさに等しいことを意味する.

行列 A を直接 $A = UW^tV$ と SVD 分解すると,

$$R = A^t A = UW^t V V^t W^t U = U W^{2t} U, \quad (10)$$

となる. 式 (7) と比較して $W^2 = \Lambda$ であるから, 特異値分解法でいう特異値の 2 乗が経験的固有関数展開法の固有値に等しい. これは特異値の大きさからも, 揺動としてのパワーがどの固有値に配分されるかがわかることを意味する.

4.2.3 2次元データの特異値分解

画像データに特異値分解法に適応させた例を図 4 に示す. これは高速度接線 X 線カメラ[13]を使って TEXTOR トカマクの sawtooth を接線方向から軟 X 線を使って観測した例である[14]. ここで特異値分解を行う行列は, 各列に 2 次元データを 1 次元に整列させたものを格納して, 行方向に時間変化したものを並べたものである. 特異値の分布を図 4 (A) に, 特異値の大きい順に Chronos を図 4 (B0) - (B4) に, Topos を 2 次元像に再度並べなおしたものを図 4 (C0) - (C4) に示す.

まず特異値の分布 (図 4 (A)) を見ると, 大きさが変化しているのは大きいほうから 5 つぐらいであり, 残りは相対的に小さい特異値を持ちほとんど変化していないことがわかる. 特異値の小さい成分 (揺動のパワーが小さい成分) に対応する Topos あるいは Chronos はランダムな変化を示すことが多く, データ解析上のノイズ成分と考えられる. 揺動が少数の成分の和として表現できていることがわかる.

次に有意と思われる上位 5 つの成分を見てみる. 最初の成分 (B0, C0) は時間的に変化していない定常的なものであり, この時間ウィンドーでの画像の平均値を示している. 次の成分 Chronos (B1) をみると鋸歯状の時間変化を示

* 2 経験的直交関数展開の技法は気象学の分野では EOF: Empirical Orthogonal Functions, 流体力学では POD: Proper Orthogonal Decomposition, 統計学では PCA: Principal Component analysis と呼ばれる. 気象学では 2 つの物理量の直交関数展開によって相互作用を調べる技法を SVD 法と呼んでおり, 本稿で解説しているの特異値分解法とはまた異なった手法である.

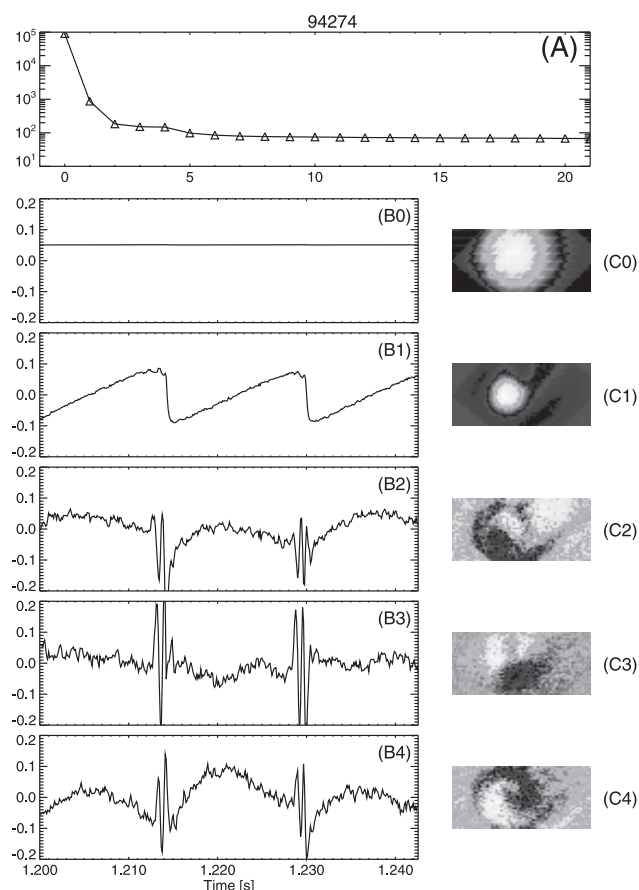


図4 画像データの特異値分解の例。文献[14]図2より引用。(A)に特異値 W_i を、(B0)-(B4)にChronos、(C0)-(C4)にToposの上位の5つの成分を示す。

して、この時間ウィンドー中には2つの崩壊が観測されているのがわかる。対応するTopos(C1)を見ると、(C0)と比べるとより内側のコア部で信号が大きく変化していることがわかる。sawtoothによって $q=1$ 面より内側の放射強度が大きく減少していることに対応し、コア部のプラズマが外に吐き出されている現象を観測しているわけである。(B2-4, C2-4)からsawtoothの崩壊の直前に振動現象がおきていることがわかる。C3, C4に明らかに、振動はコアを挟んで逆の位相をもち $m=1$ のモード構造を持っている。B2-B4のChronosは同じ周波数の揺動だが互いに異なる位相を持っている。画像中の揺動の回転を分解するために複数の成分として観測されている。定常的な回転現象であれば、成分は二つで表現できるはずだが、クラッシュに至るまでモードが成長をするため、3つの要素に分解されているものと思われる。一般に崩壊現象を観測すると前置振動は3つ程度の固有関数に分離されることが多い。C2-C4を動画像として再構成すれば、 $m=1$ の構造が崩壊に向かって振幅を大きくしていく様子が見える。

この例で示したように動画像の特異値分解を行うことにより揺動中に存在する振動現象をそのパワーの大きいほうから自動的に分離することができる。動画データの解釈を容易に行うことができることは大きなメリットである。また接線像から局所放射強度のトモグラフィ計算による再構成を行う時にもこの手法は大変有効である。特異値分解

と、視線上の線積分の変換は交換可能[9]なので、時間変化する動画像のトモグラフィを行う際には、Toposの逆変換像を使い、対応するChronosを使って再度足し合わせれば良い[14]。このことは視線数が多いために逆変換の計算量が大変多い2次元計測での大きなメリットとなる。Toposは動画像をChronosに対応する重みをつけて平均したことに相当するため、動画像の各フレームの像よりもノイズが抑えられる。これも不安定なことが多い逆変換の計算には大変助けになるといえる。

理由はよくわかっていないが、磁場揺動などの通常のマルチチャンネルのデータを解析するときよりも、画像データを解析したときの方が、固有関数の分離が良く解釈しやすい結果を与えることが多いという印象を持っている。

4.2.4 まとめ

SVDによる画像データの解析は万能とはいえないがいくつかの優れた点がある。揺動の周波数が周波数が時間的に変化する場合、たとえばsawtoothなどの崩壊現象に適用可能なことがあげられる。画像中に見えている巨視的で支配的な揺動を「自動的に」検出することも有用である。画像データを論文等の文書に引用するときに役立つという実用的な長所もある。画像解析から理解できたことを学会発表などで動画を見せつつ説明するのは容易だが、動きを示すことができない時に文章のみで表現するのはなかなか難しい。本稿で解説した特異値分解法を使えば主たる揺動成分の空間構造とその時間変化を図面として示すことができる。これは解析法の優劣とは関係ないが、大変有用な特徴である。ひとつ注意しなければならないのは特異値分解法で分解された成分は、それらがたがいに直交しているという以上の物理的な意味がないということがあげられる。解析時には各要素の意味を慎重に考察する必要がある。

TEXTORでの計測にご協力いただいたTEXTORチームに感謝する。特異値分解法による画像解析手法を示唆いただいたDr.G.Fuchsに深く感謝する。

参考文献

- [1] S.J. Zweben *et al.*, Nucl. Fusion **44**, 134 (2004).
- [2] N. Nishino *et al.*, to be published in J. Nucl. Mater.
- [3] N. Nishino *et al.*, J. Plasma Fusion Res. **1**, 035 (2006).
- [4] Y. Nakashima *et al.*, J. Nucl. Mater. **363**, 616 (2007).
- [5] N. Nishino *et al.*, J. Nucl. Mater. **390**, 432 (2009).
- [6] C.P. Ritz, E.J. Powers, T.L. Rhodes, R.D. Bengtson, K.W. Gentle, H. Lin, P.E. Phillips, A.J. Wootton, D.L. Brower, N.C. Luhmann Jr. *et al.*, Rev. Sci. Instrum. **59**, 1739 (1988).
- [7] T.D. de Wit, A.L. Pecquet, J.C. Vallet and R. Lima, Phys. Plasmas **1**, 3288 (1994).
- [8] C. Nardone, Plasma Phys. Contr. Fusion **34**, 1447 (1992).
- [9] G. Fuchs, Y. Miura and M. Mori, Plasma Phys. Contr. Fusion **36**, 307 (1994).
- [10] 日野幹夫：スペクトル解析（朝倉書店，1977）。
- [11] 辻義之：講座 流体乱流研究から診たプラズマ乱流データの解析 4 組織構造の定義とその抽出，J. Plasma Fusion Res. **11**, 774 (2009).
- [12] 鈴木義一郎：情報量基準による統計解析入門（講談社，1995）。

- [13] S. Ohdachi, K. Toi, G. Fuchs, S. von Goeler and S. Yamamoto, Rev. Sci. Instrum. **74**, 2136 (2003).
- [14] S. Ohdachi, K. Toi, G. Fuchs *et al.*, Plasma Sci. Technol. **8**, 45 (2006).