J. Plasma Fusion Res. Vol.85, No.11 (2009) 783‑792

講座 流体乱流研究から診たプラズマ乱流データの解析

5．流体およびプラズマ乱流の普遍性

辻　義之，田中宏彦，大野哲靖
名古屋大学大学院工学研究科

（原稿受付：2009年10月17日）

本章では流体乱流中に存在する普遍性に注目し，この解析手法を概説する．流体分野では一般的に知られるKolmogorov仮説を説明し，速度構造関数との関わりについて述べる．複雑な形状や統計量分布を定量化するフラクタル解析やマルチフラクタルについて触れ，最後にプラズマへの応用例を紹介する．

Keywords:
statistical analysis, turbulence, universality, Kolmogorov K41, scale invariant, intermittency, structure function, fractal, multi-fractal, extended self similarity, hurst exponent, fractional brownian motion

5.1　はじめに

流体乱流は流れの境界条件や初期条件によって，同じレイノルズ数でも異なった様相を呈することは広く知られている．例えば，後流（第4章，**図1**(a)）の円柱を，直径と同じ一辺をもつ四角柱に置き換えたり，表面に小さな突起をつけたりするだけで，カルマン渦列の配置は変化する．コーヒーにクリームを入れた際にも，スプーンのかき混ぜ方しだいで，クリームが作る模様が大きく変わることも日常経験として把握している．これは流体運動の“個性”と考えられるが，一方でどのような流体運動にも共通する“普遍”的性質が内在している．この普遍的性質が期待される物理的背景は，大きな渦が小さな渦へと徐々に崩壊していく過程が普遍であるという描像に基づいている．

流体乱流の普遍性を特徴づける統計的解析法がいくつか提案されている．これらの手法をプラズマ乱流に応用した場合に，どのような新たな知識を得ることができるか？これが本章のテーマである．もちろん，プラズマの普遍的性質にはそれを抽出するのに適した手法を用いる必要がある．流体乱流と同様の性質が内在していると仮定すると，これらの手法からプラズマ乱流の新たな一面が見いだせることが期待される．

5.2　流体乱流の普遍性と Kolmogorov 仮説

乱流の中には大きなスケールから小さなスケールまでさまざまな大きさの渦が混在している．イギリスの気象学者L.F.リチャードソンが彼の著書の中でJ.スイフトの詩をもじって次の散文詩を掲げている[1]．流体乱流に普遍性を期待する背景には，この詩を紹介することから始めたい．

Big whirls have little whirls（大きな渦は小さな渦を抱え）
That feed on their velocity（その速度を糧に生きている）
And little whirls have lesser whirls（小さな渦はより小さな渦を抱え）
And so on to viscosity.（そしてそれが粘性まで続く．）

大きな渦の周りにはたくさんの小さな渦があり，大きな渦の運動に従うように小さな渦は揺らいでいる（**図1**）．小さな渦の運動は大きな渦の運動からもたらされ，エネルギーが大きなスケールから小さなスケールへと伝わるイメージを与えてくれる．この過程はエネルギーカスケードと呼ばれる．小さな渦はより小さな渦を抱えて運動し，このような階層構造は粘性によって渦運動が熱に変わるスケールまで続いている．

Kolmogorovは1941年に，物理的直観（仮説）と次元解析から，波数空間でエネルギーカスケードを特徴づけるスペクトル型を提示した（以後，Kolmogorovの仮説を**K41**と略する）[2]．仮説は3つの部分から成り立つが，プラズ

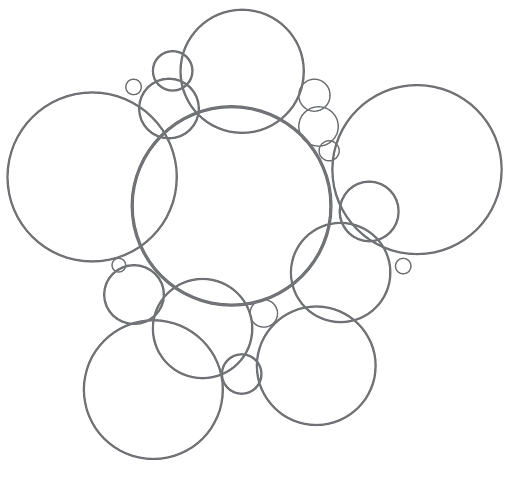

図1　乱流中の渦のイメージ．

5. Universality in Fluid and Plasma Turbulences
TSUJI Yoshiyuki, TANAKA Hirohiko and OHNO Noriyasu
corresponding author's e-mail: ohno@ees.nagoya-u.ac.jp

マデータの解析結果を理解する上でも有用と期待できるので，簡略に列挙する．文中で用いられるレイノルズ数とは，流体に働く二つの力の比：（慣性力）／（粘性力）で定義される無次元数で，その値が大きいほど，流体は変形をうけ乱れる，つまり強くスケールの大きな乱流となることを意味する．

［局所等方性仮説］ 十分に高いレイノルズ数において，乱流の小さなスケール（$\ell \ll \ell_0$）の運動は，統計的に等方的となる．ただし，スケール ℓ_0 は，エネルギーをもった大きな渦スケールとする．

［第一相似性仮説］ いかなる流れでも，十分に高いレイノルズ数において，小さなスケールの運動の統計的性質は普遍的となる．また，それらはエネルギー散逸率$\langle\varepsilon\rangle$と動粘性係数$\nu$から一意に決定され，特徴的長さ$\eta$，時間$\eta_t$，速さ$\eta_v$が定まる．$\eta=(\nu^3/\langle\varepsilon\rangle)^{1/4}, \eta_t=(\nu/\langle\varepsilon\rangle)^{1/2}, \eta_v=(\nu\langle\varepsilon\rangle)^{1/4}$.

［第二相似性仮説］ いかなる流れでも，十分に高いレイノルズ数において，小さなスケール（$\eta \ll \ell \ll \ell_0$）の運動の統計的性質は普遍的となる．それらは，粘性の影響を受けずにエネルギー散逸率$\langle\varepsilon\rangle$のみから定まる．

エネルギースペクトル $E(k)$（k は波数［1/m］，したがって $E(k)$ の次元は［$\mathrm{m^3/s^2}$］となる）の一般形は，

$$E(k)=\eta_v^2\times\eta\times f\left(\frac{L}{\eta},\frac{k^{-1}}{\eta}\right), \tag{1}$$

で与えられる[3,4]．ただし，$f(x,y)$ は無次元の関数である．Kolmogorov 仮説から，乱流の普遍性が期待される場合には，$E(k)$ は大きなスケールLにも粘性νにも依存しない．次元解析から，$f(x,y)=x^n y^m$ とおくと，$n=0$，$m=5/3$ となるので，

$$E(k)\simeq\langle\varepsilon\rangle^{2/3}k^{-5/3}, \tag{2}$$

とスケールされる．流体中のエネルギーは小さな波数k_0（大きなスケール）で注入され，大きな波数k_d（小さなスケール）で粘性によって散逸される．中間のスケールでは一定のエネルギーが小さなスケールに向かって流れ，スペクトルに$-5/3$乗があらわれる．この領域を慣性小領域と呼ぶ．**図2**には模式的にエネルギーの移行の様子を示した．第2章で示したスペクトルには，異なるいくつかの流れ場（境界層，噴流，後流，格子乱流，大気乱流）において，確かに$-5/3$乗領域が存在することがわかる．円柱の後ろにできる流れ（後流）と壁の上に発達する流れ（境界層）では，可視化された写真などを比較すると，流れの様相はまったく異なる．これは，大きなスケールの運動が境界条件の影響を受けているため，大きなスケールには流れの個性が反映されていると理解される．しかし，カスケードによって渦がより小さなスケールとなると，「個性」は薄れ，したがってそこには個性のない等方的な性質が現れる．「等方」とは，速度変動(u,v,w)の統計的性質が座標軸によらずに等しくなることである[4]．つまり，大きなスケールでは個性をもった運動があるにもかかわらず，カスケードを経て小さなスケールにいたると，個性を持たない等方的な運動が現れる．等方的な運動を期待できるのは，

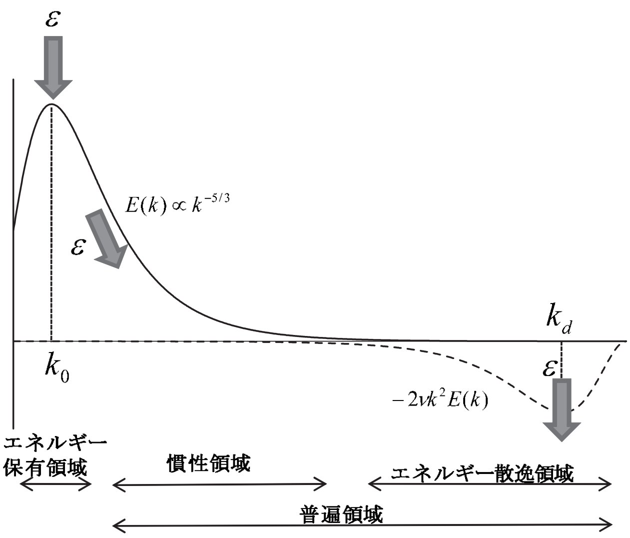

図2 エネルギースペクトル $E(k)$とエネルギー散逸スペクトル$-2\nu k^2 E(k)$．外部から注入されたエネルギーは，慣性領域をとおり散逸領域まで運ばれて，粘性により熱エネルギーとなって流体系からでていく．

局所的なスケール領域に限られるので，この状況が実現することを「局所等方性仮説」と呼んでいる[2]．

流体乱流に普遍性が期待できる背景には，流れ場の種類によらず，小さなスケールの運動が等方的になることがある．大きなスケールから伝播されるエネルギーは，最終的に流体の粘性によって散逸され熱エネルギーに変わる．従って，局所等方性が成り立つ波数領域において，現象を支配するパラメータは，平均のエネルギー散逸率$\langle\varepsilon\rangle$と流体の動粘性係数$\nu$と考えられる．エネルギースペクトルを$\langle\varepsilon\rangle$と$\nu$で無次元化した場合，流れ場の種類によらず1つになることを予測したものが，「第一相似性仮説」である．第2章の**図1**をみると，高波数$k\eta\sim1$ではレイノルズ数の大きさ，流れの種類によらず，スペクトルが互いに一致していることがわかる．レイノルズ数が高くなると，局所等方性が成り立つ波数領域において，粘性の影響を受けない領域が現れる．この領域においては，物理現象を支配するパラメータは$\langle\varepsilon\rangle$となり，スペクトルは次元解析から，式（2）に示すとおり，$-5/3$乗のベキ乗則を示す．第2章の**図1**においても，高いレイノルズ数では$-5/3$乗則が確かに存在することがわかる．「第二相似性仮説」は，このような状況を予測したものである．

プラズマ乱流のスペクトル構造にも，普遍的な型が存在することが期待されるであろう．その際には，Kolmogorov が与えたようなシンプルな物理的描写が与えられ，それらを特徴づけるスケール（長さ，時間）が一意に決まると興味深い．

5.3 流体乱流のスケール不変性と間欠性

Kolmogorov の第二相似性仮説が成り立つスケールは，物理空間ではどのように解釈できるのか．また，多くの実験で観測されるエネルギースペクトルは，わずかに$-5/3$乗からずれることが知られている．

5.3.1 速度構造関数

空間内に距離 r だけ離れた2点の速度差のモーメント $S_n(r)$ を定義する．これは速度構造関数と呼ばれ，乱流の速度変動の解析に広く用いられてきた[2]．$S_n(r)$ は慣性小領域で r のベキ依存性を持つことが予想されており，その指数 ζ_n の値が詳しく調べられている[3]．

$$S_n(r') = \langle [u(x+r') - u(x)]^n \rangle = C_n r'^{\zeta_n}, \tag{3}$$

$n=2$ の場合には，K41から $\langle u(x+r')^2 \rangle = \langle u(x)^2 \rangle$ を考慮すると，$S_2(r') \propto 1 - \langle u(x)u(x+r') \rangle$ となる．従って，自己相関関数 $C(r') = \langle u(x)u(x+r') \rangle$ と等価となる．つまり，$S_2(r')$ をフーリエ変換するとスペクトルが得られることとなる．Kolmogorov の次元解析に従えば，$\zeta_n = n/3$ となり，$S_2(r') \propto r'^{2/3}$ のベキ依存性が期待できる．速度変動のエネルギースペクトルに $-5/3$ 乗則が存在することと，速度構造関数に $2/3$ 乗則が存在することは，数学的には同じことではあるが，慣性小領域が無限に大きい場合にのみ成り立つ．実際の乱流では，慣性小領域の大きさは有限であるため，その関係を見出すことは難しい．特に構造関数のベキ乗領域は狭くなり，ベキ指数の値を特定することが困難となる．数学的に証明できるのか著者にはわからないが，速度構造関数よりもスペクトルを用いたほうがベキ依存性を明確に定めることができる．**図3**には，レイノルズ数の大きな大気乱流場で計測された速度構造関数の計算例を示した．二点間の距離 r' が小さな場合から急激に立ち上がり，ベキ乗則が成立する範囲が認められる．r' が十分に大きくなれば，乱流運動の相関はなくなるので，速度構造関数の値は一定値に近づく．また，次数 n が大きくなるとベキ領域が狭くなる傾向がある．一方，レイノルズ数が小さい場合には，ベキ乗領域はほとんど見出すことができない．そのような場合には，n 次の速度構造関数を3次の構造関数に対してプロットする方法がとられるが，これについては後述する．

速度構造関数は任意の指数 n に対して計算することができ，n を変えることによって速度差の大きい平均構造や小さい平均構造をベキ指数 ζ_n の変化として把握することができる．速度構造関数にベキ乗則が成り立つ範囲は，実空間での慣性領域に対応する．では，ベキ乗則が成り立つとは，何を意味しているのであろうか？

いま，カスケードにより渦サイズが次のように徐々に小さくなっていく場合を考える．

$$\ell_n = L_0 \delta_n, \quad \delta_n = \delta^{-n}, \tag{4}$$

ただし，$n = 0, 1, 2, 3, \cdots$，$\delta > 1$ とする．L_0 はエネルギーを保有する最大渦スケールである．渦サイズ ℓ_n が持つ単位質量あたりのエネルギーを

$$E_n = \int_{k_n}^{k_{n+1}} E(k)\,\mathrm{d}k = \frac{1}{2}\Delta u_n^2, \tag{5}$$

で定義する．Δu_n は，渦サイズ ℓ_n だけ離れた2点での速度差とする．したがって，時間スケールが $t_n = \ell_n / \Delta u_n$ となり，渦の特性時間となる．t_n は渦サイズ ℓ_n から ℓ_{n+1} にエネルギーを渡すまでの時間と解釈される．単位時間，単位質量あたりの輸送されるエネルギーは，

$$\varepsilon_n \sim \frac{E_n}{t_n} \sim \frac{(\Delta u_n)^3}{\ell_n}, \tag{6}$$

と見積もられる．

密度 ρ が一定の場合，流体運動の基礎方程式は，速度 $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$，圧力 p とすると，

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\vec{\nabla}p + \nu \nabla^2 \vec{u}, \tag{7}$$

となる．レイノルズ数が十分に大きい場合には，右辺第二項（粘性散逸項）は，他の項に比べて小さく無視することができる（厳密にはレイノルズ数が無限大となることを意味するが，ここではあまり深入りはしない）．このとき，長さ，時間，速度，圧力に関して次のようなスケール不変性を見出すことができる．

$$\vec{x} \to \lambda \vec{x}, \; t \to \lambda^{1-\alpha/3} t, \; \vec{u} \to \lambda^{\alpha/3} \vec{u}, \; p \to \lambda^{2\alpha/3} p. \tag{8}$$

上記の関係を用いると，

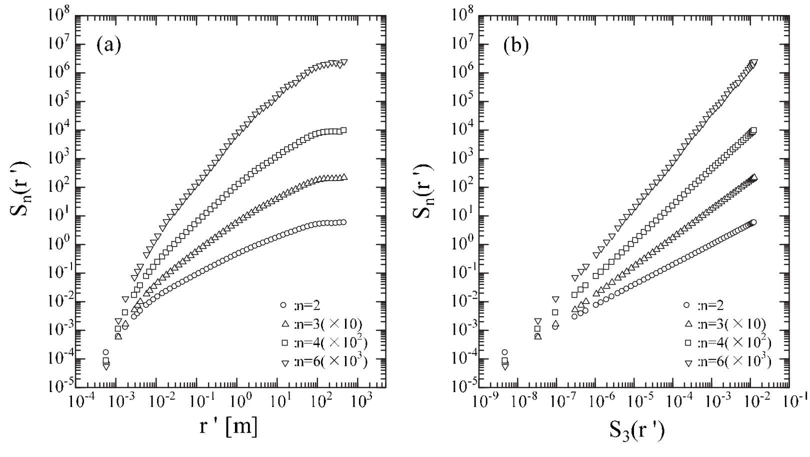

図3 (a)レイノルズ数の大きな大気乱流中で計測された速度信号を用いて計算された速度構造関数．グラフが重ならないように縦軸方向に移動してある．(b) n 次の速度構造関数を3次の構造関数に対してプロットした場合（ESS5.5.1を参照のこと）．

$$\frac{\Delta u_n}{\Delta u_0}=\delta_n^{\alpha/3},\quad \frac{\Delta p_n}{\Delta p_0}=\delta_n^{2\alpha/3},\quad \frac{\varepsilon_n}{\varepsilon}=\delta_n^{\alpha-1}. \tag{9}$$

ここで，式(3)との対応を考える．Δu_n は距離 δ_n 離れた2点間での速度差であるから，$r'=\delta_n$，$\Delta u_n=u(x+r')-u(x)$ とおけば，$\zeta_n=\langle\alpha\rangle n/3$ となる．つまり，エネルギースペクトルにベキ乗則が観測されるスケール範囲では，流体運動の構造にスケール不変性を期待できることになる．

5.3.2 流体乱流の間欠性

二点間での速度差を $\Delta u_{r'}\equiv u(x+r',t)-u(r',t)$ とおくと，$\Delta u_{r'}$ が時間的に揺らぐこと，したがって指数 α も本来は場所と時間に依存して変動することが予想される．$\Delta u_{r'}$ の揺らぎは，その確立密度関数型を調べることによって詳しいことが明らかとなる．指数 α の揺らぎは次章で説明する．$S_n(r')$ と PDF の関係は，

$$S_n(r')=\int(\Delta u_{r'})^n P(\Delta u_{r'})\,\mathrm{d}(\Delta u_{r'}), \tag{10}$$

となる．第3章でも触れたが，n を大きくすると $P(\Delta u_{r'})$ のすそ野が強調され構造関数に反映される．通常の室内実験では，指数$n=8$程度までが計算できる限界である．PDF型が r' によらずガウス分布で，かつ $\zeta_2=2/3$ を満足する場合には，指数$\zeta_n=n/3$が成り立つ．Kolmogorovが与えた描像は，エネルギーが空間的に一様に大きなスケールから小さなスケールへ流れるもので，式(9)からε_nが一定になること，すなわち $\alpha=1$（$\zeta_n=n/3$）に相当する．

その後，流体乱流に限れば速度構造関数は詳しく調べられ[5]，$\zeta_n\neq n/3$ となることが明らかになっている．**図4**には，**図3**に示した構造関数から計算されたζ_n を○印で示してある．実線が Kolmogorov のスケーリング$\zeta_n=n/3$であるが，n が大きくなると，両者は一致しなくなることがわかるであろう．このずれ$\zeta_n-n/3$ は乱流場の間欠性に起因するもので，K41 で仮定した一様なエネルギーの流れが時間空間的に起こっているわけではなく，間欠的に強い（大きな）エネルギーが分布していることを示唆している．つまり，式(9)における α が時間と場所によって大きく揺らぎ，この揺らぎこそが乱流の普遍的性質として重視されるようになった．Kolmogorov はこの間欠性を取り入れた新たな仮説を1962年に発表している[2]．それは，第3章でふれた対数正規分布に基づくもので，エネルギーカスケードをモデル化したものである．他にも間欠性を取り上げたモデルは多数提案されている[5]．K41との差は，n が大きくなるに従って増大していくことが明らかである．つまり，間欠性は$\Delta u_{r'}$ のPDFのすそ野の分布型が大きく影響していると考えられる．

5.4 普遍性を解析する方法

5.4.1 速度構造関数のベキ指数

速度構造関数は，流体乱流の2点間の速度差をもとに計算されているが，速度のみならず温度，圧力などについても同様なベキ乗領域が存在する．ベキ指数ζ_n を調べることは，変動する物理量の統計的性質を特徴づけるうえで，新たな情報を提示してくれる．

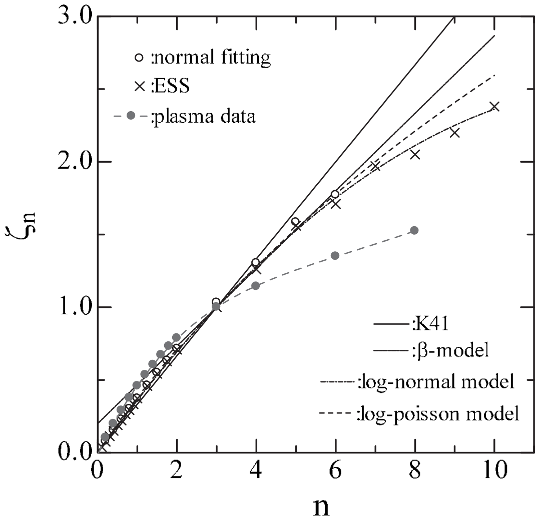

図4 速度構造関数のベキ指数 n に対する変化．間欠性を取り入れたモデルとの比較．ESS を用いた流体乱流（×印）とプラズマ乱流（●印）との比較．

流体乱流の普遍的性質として間欠性が挙げられ，速度構造関数（式(3)）のベキ指数ζ_n が詳しく調べられてきた．ベキ指数の変化を**図4**に示す（○印）．直線がK41に対応するが，n が大きくなるほど差異が大きくなる．このわずかなズレがおこる物理を理解することが，乱流の間欠性を理解することにつながると考え，多くのモデルが提示されている．Kolmogorov 自身が提示した対数正規モデルがあり，他に β-モデル，P-モデル，マルチフラクタルモデル，対数-ポアッソンモデルなどが報告されている[2,3,5]．これらはすべて，式(9)における α のゆらぎの統計性をモデル化したものである．**図4**にそれらの比較を示した．n が大きくなるに従って，K41 からのずれが大きくなっていく傾向がうかがえる．プラズマデータに関しても，構造関数のベキ指数を調べることは興味深いし，その変化を説明できるモデルを構築することも可能であろう．

5.4.2 フラクタル解析

第4章の**図1**(b)に示した複雑な流体界面の形を特徴づける方法として，フラクタル解析がある．自己相似性を有する幾何学的構造をフラクタルと呼ぶが，その相似性には数学的に厳密のものと統計的な相似性を対象にするものがある．実験データの解析では，フラクタルは後者の意味で用いられ，これはあるスケールの統計量とそれよりも小さなスケールでの統計量が同一則に従うことである．つまり，コッホ曲線のように細部に厳密に同一の形が存在するのではなく，統計的に見て同様の形が存在することをいう．統計的相似性には，必ずその相似性が成り立つ最小と最大スケールが存在する．それは実験装置，測定分解能，サンプリング時間といった外的要因から課される場合もあるし，最大渦スケールや最小渦スケール（コルモゴロフスケール）といった物理的根拠から決まる場合もある．実験データの解析では，フラクタル性の成立する範囲を明確にして相似構造の複雑さを評価するフラクタル次元を求める必要がある．**図5**には流体界面の模式図を示した．界面が

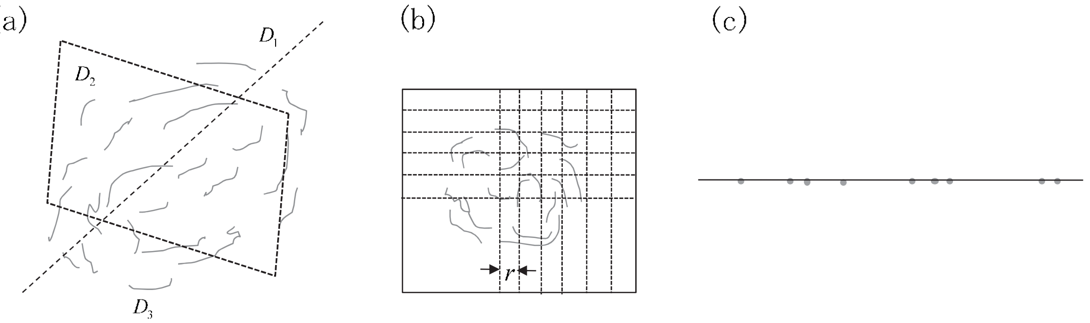

図 5　(a)流体界面の3次元的な模式図（フラクタル次元 $D^{(3)}$），(b)平面との交わり（フラクタル次元 $D^{(2)}$），(c)直線との交わり（フラクタル次元 $D^{(1)}$）によってできる図形．

平板（2次元）と交差した場合，直線（1次元）と交差した場合をあわせて示す．フラクタル次元を求めるためには，図形を含む領域を大きさ r のボックス（2次元図形の場合には正方形，3次元図形の場合には立方体）に等分割する．図形を含むボックスの数を $N(r)$ とする．r を変えながら $N(r)$ を求めて，両者の間に $N(r) \propto r^{-D}$ の関係がある時，図形はフラクタル構造を持っていることになり，D がフラクタル次元である[6,7]．この方法をボックスカウンテングという．D は一般には非整数となる．

図6は粘性指状体と呼ばれ，狭い隙間に高粘性流体を満たし，外部から低粘性流体を注入したとき，その置換によってできる形である．細部と全体が同じような形を示し，統計的相似性を有していることがわかる．ボックスカウンテングによって得られた，$N(r)$ と r の関係を**図6**(b)に示した．実線と破線の二つのベキ乗領域が観測される．実線のベキ指数は1.74で，これが指状体のフラクタル次元となる．次元が1と2の間になるのは，直線（一次元）よりも複雑であるが，平面（二次元）を覆い尽くすまでにはいたらないと理解できる．破線のベキ指数は1であり，このスケールでは各指状体はもはや滑らかな曲線でしかないことを表している．ボックスの大きさを逆に大きくしていけば，$N(r) \propto r^{-2}$ となる．つまり，このような大きなスケールでみれば平面と同一であると解釈される．

フラクタル図形を解析する上での注意点は2つある．まず，相似性の成立する最小と最大スケールを明確にすることである．最小スケールは，計測器の分解能から決まることもあるし，物理的な観点から定まる場合もある．最大スケールは，装置の大きさの制約をうけるであろう．これらの範囲を把握することによって，実験条件等が変わった場合にも，それに伴うフラクタル構造の変化を理解することができる．また，多くの実験では計測器の制約から1次元もしくは2次元のデータしか得られず，これらのデータを用いてフラクタル解析を行っている．3次元構造のフラクタル次元 $D^{(3)}$ を予測するときには，$D^{(3)} = D^{(2)} + 1 = D^{(1)} + 2$ の関係式を用いるが，これは一様等方なフラクタル構造についてのみ成立する厳しい条件である（ただし，$D^{(2)}$，$D^{(1)}$ は2次元，1次元空間での次元）．室内乱流場でこの条件を満たすことは難しく，また，容易に得られる時間信号から空間スケールへの変換（凍結乱流仮説）を用いた場合には，上記の関係式は必然的に満たさなくなることに注意すべきである．

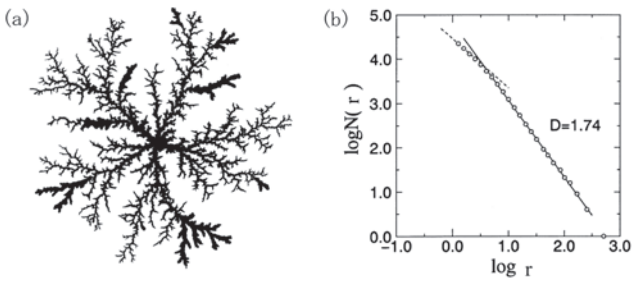

図 6　(a)狭い隙間内の高粘性流体を粘性の低い流体で置換した場合にできる構造（粘性指状体），(b)右図の指状体をボックスカウンテングで解析した結果．ベキ指数はフラクタル次元 $D^{(2)}$に相当する．

フラクタルの最大の効力は，複雑な形状や統計量の分布をフラクタル次元によって定量的に特徴づけられることにある．前者は乱流・非乱流の界面や等スカラー界面の形状（染料などの濃度がある一定値をもつ界面），後者は乱流エネルギー散逸率分布について多くの成果が得られている．発達した乱流・非乱流界面の形状は，噴流，境界層，格子乱流などその流れ場の性質によらず，普遍的にフラクタル次元 $D^{(2)} = 1.35$ を持ち，相似性の成り立つ範囲は最大渦と最小渦スケールとされる[8]．乱流が発達していない場合には，フラクタル次元はレイノルズ数の関数になり，レイノルズ数とともに増加し $D^{(2)} = 1.35$ に漸近する．等スカラー界面については，バチェラースケールとコルモゴロフスケールの範囲でフラクタル次元 $D^{(2)} = 1.36 \pm 0.05$ と報告されている[8]．乱流場にどうしてフラクタル構造があらわれるのか？今のところの解釈としては，非線形方程式に共通に備わっている相空間内での引き伸ばし，折りたたみ機構によって，自己相似的な構造が形成されていると考えられる．しかし，直観的なイメージとしては，リチャードソンの詩にあるよな渦のカスケードがわかりやすい．

5.4.3　マルチフラクタル解析

図7に流体乱流中で計測されたエネルギー散逸率（1次元）の分布を示した．縦軸はその平均値で無次元化されている．散逸率の分布は，非常に間欠的となっており限られた狭い領域に高い値が集中する．速度構造関数のベキ指数が**K41**からずれる理由はこの間欠的な分布に起因している．間欠性を特徴づける方法は，対数正規分布や対数ポアッソン分布などが提案されているが，本節ではマルチフ

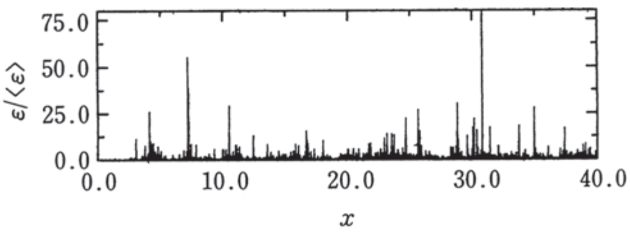

図7　大気乱流中で計測された1次元エネルギー散逸率の分布．縦軸は平均値で無次元化してある．

ラクタルの手法を用いる[6,7]．横軸を大きさrのボックスに等分割する．ボックス内で平均化された散逸エネルギーε_rを下記に定義する．

$$\varepsilon_r(x_i)=\frac{1}{r}\int_{x_i-r/2}^{x_i+r/2}\varepsilon(x')\,\mathrm{d}x'. \tag{11}$$

ここで，x_iは等分割されたi番目のボックスの中心位置を表す．いま，x_iを固定してボックスの大きさrを変化させた時，近似的に$\varepsilon_r\sim r^{\alpha}$の関係が見出されたとする．指数$\alpha$は特異性の強さと呼ばれる．指数$\alpha$の値は，ボックスごとに異なっている．しかし，同じ指数を持ったボックスが空間中にどのように分布するかを特徴づけられれば，全体のεの分布を知ることができる．指数αをもったボックスの分布がフラクタルになっている場合がこの手法の特徴であり，フラクタル次元$f(\alpha)$が与えられる．つまり，異なる指数αをもつボックスが各々次元$f(\alpha)$で分布しており，その集合体として全体が成り立っていると考えるわけである．

指数αがα'と$\alpha'+\mathrm{d}\alpha'$の間の値をとるボックスの数$N(\alpha')\mathrm{d}\alpha'$は，フラクタル分布の場合には，

$$N(\alpha')\mathrm{d}\alpha'\sim\mathrm{d}\alpha'\rho(\alpha')r^{-f(\alpha')}, \tag{12}$$

と与えられる[7]．$f(\alpha')$は，特異性指数α'の乗っている集合のフラクタル次元である．$f(\alpha')$は，一般化次元D_qを介して求められる．

$$D_q=\lim_{r\to 0}\frac{\ln\chi(q)}{\ln r},\qquad \chi(q)=\sum_i[\varepsilon_r(x_i)]^q. \tag{13}$$

qを変化させることは，いろいろな確率の分布を強調することに対応している．$q\gg 1$ならば確率の高い部分を，$q\to-\infty$ならば確率の小さな部分を強調することになる．式(13)のiについての和をα'についての積分と考え直して，

$$\chi(q)=\int\rho(\alpha)r^{-f(\alpha)+q\alpha'}\mathrm{d}\alpha', \tag{14}$$

と表わされる．いずれ必要となるrの小さなところで，非積分関数はrのベキ$-f(\alpha')+q\alpha'$が最小となるα'で鋭いピークを示す．このα'をqの関数としてα_qとする．つまり，$q=(\mathrm{d}f/\mathrm{d}\alpha')_{\alpha'=\alpha_q}$となる．よって，式(13)の一般化次元は

$$D_q=\lim_{r\to 0}\frac{q\alpha_q-f(\alpha_q)}{q-1}, \tag{15}$$

と導かれる．D_qが求められると$f(\alpha)$は，

$$f(\alpha_q)=q\alpha_q-(q-1)D_q,$$
$$\alpha_q=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}q}[(q-1)D_q]. \tag{16}$$

$q=1$のとき$\alpha(1)=f(\alpha(1))$，$q=0$のとき$f(\alpha(0))=D_0$となる．また，$f(\alpha(q))$が有界であることから，$q=\pm\infty$で$\alpha(\pm\infty)=D_{\pm\infty}$である．$D_q$に関してわかることは，$q'>q$ならば$D_{q'}\leq D_q$であることである．$D_0$は容量次元，$D_1$は情報次元，$D_2$は相関次元と呼ばれる[6,7]．実際に$f(\alpha)$を求めるには，実験データから一般化次元$D_q$を求めて，式(16)から数値微分によって得られる．

マルチフラクタル分布を簡単な例から考えてみたい．いま，長さ1の線分をℓ_1とℓ_2の長さに分割する．線分の上には一様な確率がのっており，その確率はp_1とp_2に分割される．ただし，$p_1+p_2=1$である．この操作をn回繰り返すと，線分はやがてまばらな点の分布となり，線分の一つの長さ$\ell_1^m\ell_2^{n-m}$に乗っている確率は$p_1^m p_2^{n-m}$となる（ただし，$m\leq n$，**図8**参照）．したがってこの区間のスケーリング指数は，$p=p_1^m p_2^{n-m}=(\ell_1^m\ell_2^{n-m})^{\alpha}$より，

$$\alpha=\frac{(m/n)\ln p_1+(1-m/n)\ln p_2}{(m/n)\ln\ell_1+(1-m/n)\ln\ell_2}, \tag{17}$$

となる．左端の線分では，$m=n$のため，$\alpha_L=\ln p_1/\ln\ell_1$であり，右端の線分では$m=0$のため$\alpha_R=\ln p_2/\ln\ell_2$となる．このように集合上のどの点を見るかによってスケーリング指数の値は異なる．一方，ℓ_1をm回，ℓ_2を$n-m$回とる組み合わせの個数は，${}_nC_m$なので，同じ指数αをもつ線分の個数は，

$$N(\alpha)={}_nC_m, \tag{18}$$

となる．nが十分に大きいとき，線分の長さℓに対するその個数の増加が，$N(\alpha)\sim\ell^{-f(\alpha)}$と見積もられると，スターリングの公式を用いて

$$f(\alpha)=\frac{(m/n)\ln(m/n)+(1-m/n)\ln(1-m/n)}{(m/n)\ln\ell_1+(1-m/n)\ln\ell_2}, \tag{19}$$

と表される[8]．nが十分に大きい時，m/nを変化させる

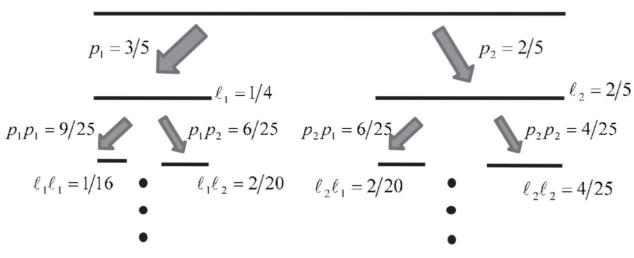

図8　初期条件として，長さ1の線分に一様の確率がのった場合を考える．長さを1/4と2/5に分割して，確率を3/5と2/5に分ける操作を繰り返す．十分な回数の操作をくりかえすと，間欠的に分布する点の集合が構成され，その点には高い確率から低い確率までがのった分布が構成される．

ことにより，さまざまな f と α の関係を見出すことができる．線分の上に確率がのった場合には，１つのフラクタル次元のみでは分布を特徴づけることができない．

図 9 (i)には，確率を $p_1=3/5$ と $p_2=2/5$ の比に，線分を $\ell_1=1/4$ と $\ell_2=2/5$ の比に分割した場合のマルチフラクタルスペクトルを示した．$f(\alpha)$ の最大値がフラクタル次元に相当する．つまり，点の集合はゼロ次元と 1 次元の間の次元をもつ．スペクトルは $f(\alpha)=\alpha$ の直線と接して，このときの $f(\alpha)$ の値が情報量次元 D_1 となる．式(13)から，q を変えることによって，確率の大きな部分と小さな部分を強調して取り出すことができる．確率の揺らぎの大きさは，α の変化する範囲として理解される．**図 9** (ii)には，確率と線分の分割の比を変えた場合の比較を示した．(a)と(b)は，線分の分割の比を同じにして確率の配分を変えた場合である．線分の分割の比が同じであることは，その点の分布がつくるサポートのフラクタル次元が同じになることに相当する．一方，確率 p_1 と p_2 の差が大きければ，その二項分布から作られる確率の積の分布は変化の大きなものとなり，したがって，(a)に比べて(b)の結果は α の変化する範囲が広くなる．(c)は分割の比を変えた場合で，１回の操作で残る線分の割合がより短くなる．これは，点の分布が疎になることに相当して，サポートのフラクタル次元も小さくなる．

5.5　プラズマ乱流への応用

構造関数やマルチフラクタル解析は，流体乱流の間欠性を特徴づける便利な手法として1990年代から広く用いられている．プラズマデータの解析においても，同様の解析が利用され始めている．本章では，具体的なデータの解析を通して，結果を解釈する上での注意事項をまとめる．

5.5.1　Extended Self Similarity

プラズマ乱流中で計測された密度変動 $\rho(t)$ を用いて，次式で定義される構造関数を計算した．その結果を**図10**(a)に示す．Δt はデータのサンプリング間隔である．

$$\rho_n(\tau)\equiv\langle|\rho(t+\tau\Delta t)-\rho(t)|^n\rangle\propto\tau^{\zeta_n}. \tag{20}$$

ここで，式(3)との相違は，増分の絶対値を用いていることである[9,10]．流体乱流の速度変動を解析する際には，$n=3$ の構造関数は負になることが理論的にわかっている．しかし，プラズマ乱流では必ずしもそのことは保障されていないため，絶対値を計算することとする．密度変動の大きさは有限であるため，τ が大きくなると構造関数の値は一定値となる．τ が小さな場合には，緩やかに増加する傾向が観察される．この領域は狭いが，ベキ乗関数で近似すると指数 ζ_n を得ることができる．構造関数の解析では，このベキ乗領域の範囲が狭いことがしばしば問題になる．つまり，正確にベキ指数を決められないのである．

流体乱流の解析では，レイノルズ数が小さいとベキ指数の範囲が狭くなり，構造関数自体も滑らかに増加する．このような場合には，構造関数を r' に対してプロットするのではなく，$S_3(r')$ に対してプロットする方法が用いられる．流体乱流の基礎方程式から，$S_3(r')\propto r'$ となることが

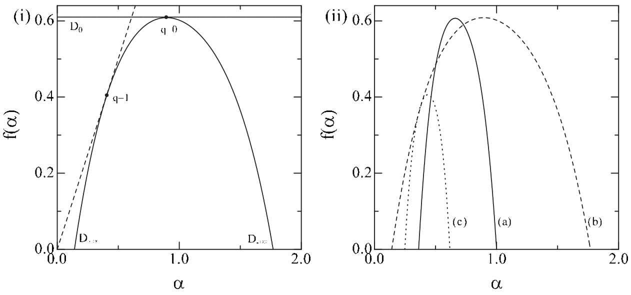

図 9　マルチフラクタルスペクトル．(i)確率を $p_1=4/5$ と $p_2=1/5$ の比に，線分を $\ell_1=1/4$ と $\ell_2=2/5$ の比に分割した場合のスペクトル．(ii)確率と線分の分割の比を変化させた場合．(a) $p_1=3/5$，$p_2=2/5$，$\ell_1=1/4$，$\ell_2=2/5$，(b) $p_1=4/5$，$p_2=1/5$，$\ell_1=1/4$，$\ell_2=2/5$，(c) $p_1=2/3$，$p_2=1/3$，$\ell_1=1/5$，$\ell_2=1/6$．

ある仮定のもとで導かれるので，構造関数を r' に対してプロットすることも，$S_3(r')$ に対してプロットすることも等価と考えられている．この方法（ESS: Extended Self Similarity）を用いると[3,5]，狭いベキ乗領域が拡張され，容易にベキ指数を決定することができる．流体乱流の解析では，ESS から求まる指数と構造関数から直接に求まる指数がよく一致することが確認されている．**図 3** (b)には，ESS による構造関数のプロットを示してある．このデータはレイノルズ数の大きな大気乱流データを用いているので，速度構造関数から直接にベキ指数を計算できる．両者から求められる ζ_n を**図 4** に示した（○：直接求めた場合，×：ESS）．確かに両者の一致は申し分ない．

図10 (b) には，流体乱流の解析に倣い，n 次構造関数を３次の構造関数に対してプロットした結果を示す．ベキ乗領域は拡大され，広い範囲にわたってきれいな直線領域が現れる．したがって，プラズマ乱流の変動データに関しても ESS を有効に用いることができる．**図 4** には，ESS から求まるベキ数を流体乱流の結果と比較したものである．n が大きくなると両者の差は拡大する．しかし，この結果の解釈には注意がいるので，以下にこの点について述べる．**図11** (a) は構造関数から直接求めたベキ指数をプラズマ中心からの距離 r に対してプロットしたものである．ζ_2 の変化に注目すると，$r=0$ mm では $\zeta_2=1$ であるが，外縁に向かうにしたがって減少し，$r=6$ mm で最小値を示してまた増加する．第２章の解析で明らかになったように，プラズマは準周期的に回転しており，半径方向への移動も存在する．$r=8$ mm 付近では回転の影響がもっとも顕著になる．ベキ指数が小さいということは，微小時間 τ 内における密度の変化が小さいことを表す．つまり，細かな構造による緩やかな変化が存在することを予測させる．一方，外縁に向かうと指数が増加するのは，微小時間内での急激な密度の変化が次第に多くなってくることに対応している．一様等方の乱流場では $\zeta_2\sim 2/3$ であるから，プラズマ密度の変動はそれに比べて活発な変動をしていると考えられる．一方，ESS から求まるベキ指数を**図11**(b)に示す．こちらは，r によらず，ほぼ一定の値を示す．流体乱流で ESS を用いることは，３次の速度構造関数が $S_3(r')\propto r'$，すなわち $\zeta_3=1$ となることが拠り所となっていた．しかし，プ

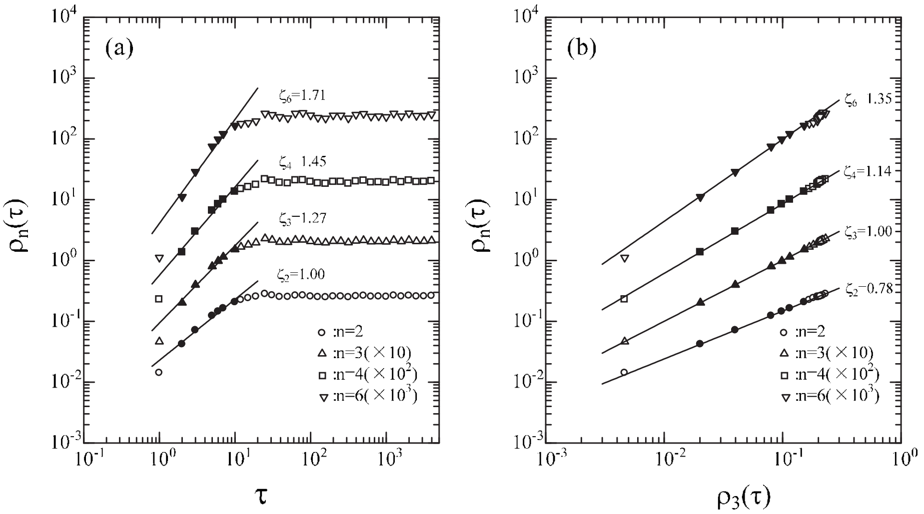

図10 (a)プラズマ中心（$r=0$）における密度変動のデータを用いて計算された構造関数．グラフが重ならないように縦軸方向に移動させてある．(b)同一データを ESS によりプロットした場合．

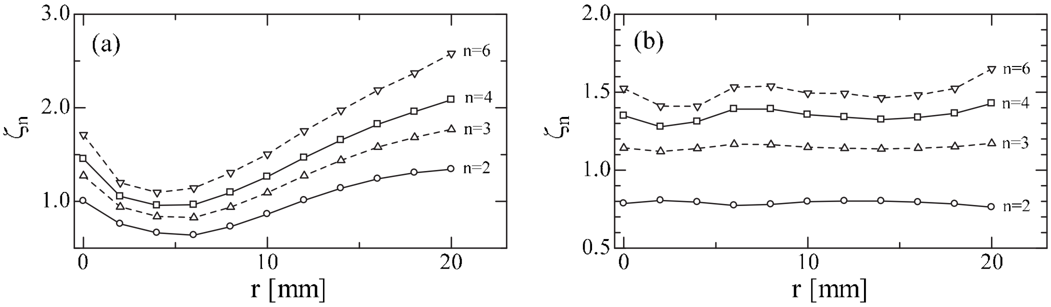

図11 プラズマ密度変動の構造関数におけるベキ指数半径方向への変化．(a)構造関数から直接求まる場合，(b)ESS を用いた場合．

ラズマ乱流では，必ずしも $\zeta_3=1$ とはならないので ESS から求まる指数は，速度構造関数のベキ指数を表すものではなくなってしまう．この点は，プラズマデータの解析に ESS を用いる場合には注意する必要がある．

文献[11]では，直線型プラズマ装置の半径断面内で計測された密度変動データが ESS によって解析されている．半径断面内では，プラズマは磁場の影響で強い2次元性を有するので，その性質を2次元の流体乱流と比較したものである．スケーリング指数は，$\zeta_p=p/3$ となることが報告されている．また，文献[12]では MHD 乱流（magneto-hydrodynamic flow）における散逸（定義は文献参照）の構造関数の指数を ESS で解析している．その結果が，**図4**に示した Log-Poisson 分布に従うことが報告されている．しかしながら，この ESS を用いた結果の解釈には，上述の議論を踏まえると，幾分の注意が必要であることを記しておきたい．

5.5.2 構造関数

大型ヘリカル装置（LHD）では，計測されたイオン飽和電流信号を用いて構造関数が計算されている（**図12**）[13]．$n=2$ の場合，2つのベキ乗領域が観測されている．2つの領域を「領域Ⅰ」,「領域Ⅱ」と便宜的に表すと，ベキ指数は，各々約 0.8，0.5 と見積もられる．（この論文では，構造関数の定義が異なっており，ベキ指数は後述のハースト指数と等価となる．詳しくは文献を参照のこと）．領域Ⅱの場合（τ が大きい場合）は，ブラウン運動と同一の指数となり，飽和電流の変動は互いに相関をもたないことになる．領域Ⅰ（τ が小さな場合）に観察される指数は，プラズマ変動の物理的性質に起因する結果である．2つの領域を分ける時間スケールは，プラズマの変動を特徴づけるタイムスケールであり，第2章で紹介したマイクロスケールや積分スケールとの関連づけができるかもしれない．また，興味深いのは，領域Ⅰにおける変動の確率密度関数型が，

$$p(x,a)=C_1\exp[(-x^{-a})/(x^{1+a})], \tag{21}$$

$$p(x,b)=C_2\exp[-b(x+e^{-x})], \tag{22}$$

でよく近似されることである（**図13**）．式（21）は Fréchet 分布，式（22）は Gumbel 分布と呼ばれ，a，b はフィッテングパラメータ，C_1，C_2 は規格化定数である．LHD プラズマのみならず，他のプラズマ現象でも同様の傾向が観測されていることは興味深い[14]．

さて，領域Ⅰにおいてベキ指数が 0.8 になることを簡単なモデルを用いて理解してみたい．フラクタルの概念を物理学一般に広めた Mandelbrot は，ブラウン運動の非整数回微分を定義して，非整数ブラウン運動を導入した[7,15]．非整数ブラウン運動 $B_H(t)$ は，ブラウン運動 $B(t)$ から次の式で計算される．

$$B_H(t)=\frac{1}{\Gamma(H+1/2)}\int_{-\infty}^{t}(t-t')^{H-1/2}\,\mathrm{d}B(t'). \tag{23}$$

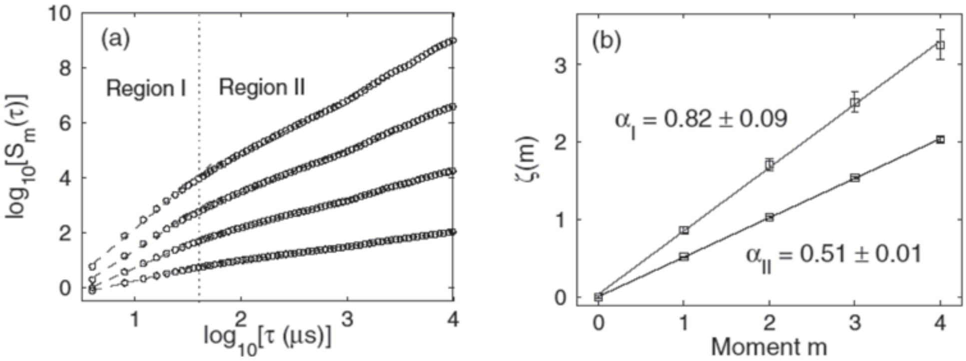

図12 (a)LHDで計測されたイオン飽和電流から構造関数を計算した一例($n=2$の場合).2つの領域でベキ指数が異なっている.(b)各領域におけるベキ指数の値をモーメントの次数に対してプロットした結果[13].

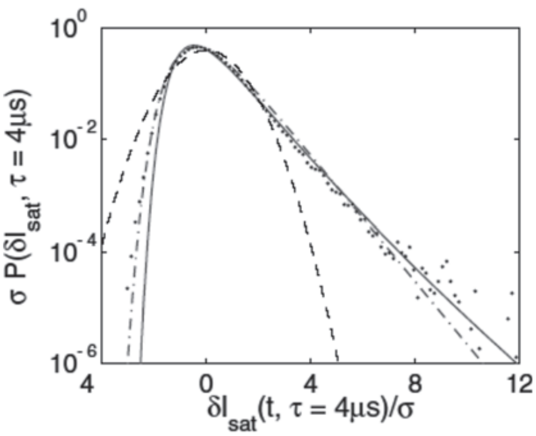

図13 LHDで計測されたイオン飽和電流の領域I(図12参照)における確率密度関数[13].波線はガウス分布,実線は式(21),式(22)によって最小二乗フィットさせた結果.

ここで,$\Gamma(x)$はガンマ関数,指数Hをハースト指数と呼ぶ(速度構造関数のベキ指数との関係は,$2H=\zeta_2$).$0<H<1$であり,ブラウン運動は$H=1/2$となる.この定義によれば,時刻tでの$B_H(t)$は,ブラウン運動$B(t)$の過去$t'<t$でのすべての変位$\mathrm{d}B(t')$に依存する.非整数ブラウン運動の構造関数は,

$$\langle [B_H(\Delta t)-B_H(0)]^2\rangle \sim |\Delta t|^{2H}, \tag{24}$$

と見積もられる.仮にLHDで観測された飽和電流の変動を非整数ブラウン運動で近似できるとすると,領域Iで$H=0.8$,領域IIで$H=0.5$となる.式(24)から,時刻tと$-t$での相関係数は,

$$\frac{\langle B_H(-t)B_H(t)\rangle}{\langle B_H(t)^2\rangle} = 2(1-2^{2H-1}), \tag{25}$$

と計算される.つまり,$H=\alpha_I=0.8$の場合には,負の相関となる.平均を差し引いた変動を考えた場合,過去との相関が負になるとは,平均値よりも小さな負の変動が急激に正の変動に変化する,もしくはその逆の過程が起こることを表している.つまり,短いタイムスケールでのバースト的な変動が活発に起こっていると予測できる.非整数ブラウン運動を数値的にシミュレーションする場合には,式(23)での積分範囲の下限$-\infty$を有限な値$-M$に置き換えることができる.Mは過去との相関の及ぶ範囲を規定しており,Mよりも過去においては,無相関,つまりブラウン運動的な振る舞いを示す.**図12**において,領域Iと領域IIを分けるタイムスケールをMに設定すれば,実験で観測された結果をモデル化することができる.構造関数という名前ではないが,古くからハースト指数は気温や河川の放水量,降水量,年輪の幅などの時間的変化を特徴づける統計量として用いられてきた[7].ハースト指数は,構造関数を計算することから求められるが,R/S解析と呼ばれる方法も用いられ,プラズマデータの診断に用いることができるので,興味のある方は文献[7]を参照されたい.

5.5.3 フラクタル解析

図14は,ヘリウムプラズマを用いてタングステン材料上に繊維状のナノ構造を形成し,単電極から放電を発生させたアークスポットの写真である.放電軌跡はナノ構造上をランダムウォークするかのように,フラクタル構造を形成する.詳しく見ると,小さなスケールでは,放電パターンは等方的に広がっているが,大きなスケールではある一定の方向(反$J\times B$方向)に伸びている.このようなフラクタルをセルフアフィンフラクタルと呼ぶ[18].小さなスケールでは,下地となるタングステン構造自体がスポットの動きに関与するが,大きなスケールでは磁場の影響が現れることを反映していると考えられる.前者ではフラクタル次元1.79,後者では1.20と見積もられている.小さなスケールでは,アークスポットがブラウン運動と類似することから,フラクタル次元は2.0に近づくことが期待される.しかし,過小評価する結果となっている.その理由は,有限時間の観測であるためか,磁場の影響が小さなスケールまで浸透していることなのか,今後の研究課題であろう.アークスポットの中間スケールの挙動は,フラクタル次元が1.49と見積もられる.このようなフラクタル構造にプラズマ装置に依存しない普遍性が期待できるのかは興味深い課題である.詳しい解析結果は文献[17]を参照されたい.

マルチフラクタル解析では,いくつかの異なる実験装置で計測されたイオン飽和電流を解析した結果が報告されている[19].プラズマ乱流の普遍性を調べる先駆けとして興味ある成果である.おそらく,現状のプラズマデータの解析には,ESSを併用するしかなく,その際の注意事項はすでに述べたとおりである.結果の物理的解釈には注意が必

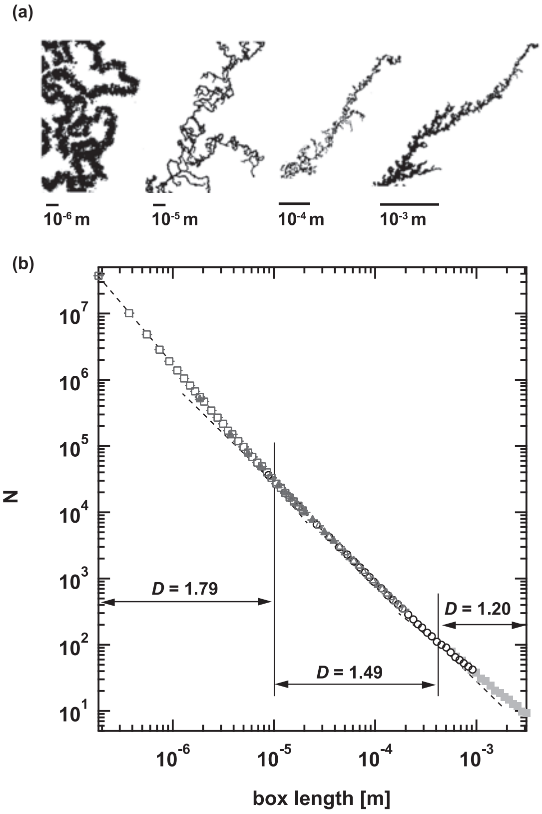

図14 ナノスケールの繊維状タングステン層に単極電極から放電を発生させた場合のアークの軌跡およびそのフラクタル解析の結果[16,17].

要であるとともに，なぜプラズマ乱流にマルチフラクタル性が生まれるのか，その物理的描写がより一層明らかになることを期待したい．また，スケール不変性という観点からは，太陽風プラズマの解析[20]などもあり，プラズマの多様性は尽きない．

最後に，波数スペクトルと周波数スペクトルについて触れておきたい．流体乱流の実験では，計測は空間に固定した数点で時系列データを取得する．したがって，ランダム信号は時間の関数として得られることになる．これらを基に計算されるのが，時間周波数 f [1/sec] に対する周波数スペクトルである．一方，Kolmogorov 仮説では，空間に局在する波，つまり波数 k [1/m]をもとに計算される波数スペクトルを用いる．しかしながら，実験や観測で周波数スペクトルを計算することは大変に難しい．そこで，大胆な仮説ではあるが，時間軸を空間軸に変換することを行う．つまり，$x = U_c \times t$ が成り立つとして，波数 $k = 2\pi f / U_c$ を計算する．ここで，U_c は対流速度である．この仮説を Taylor の凍結乱流仮説という．G.I. Taylor が考案したもので，速度変動はその大きさと方向を変えずに（凍結して），一定速度（U_c）で下流方向へ移動してプローブを通過することを意味する．瞬時の速度変動そのものには，凍結乱流仮説が成り立たないのは自明であるが，統計量に関してはよい近似になっていることが，多くの研究者により報告されている．プラズマデータの解析においても同様のことが問題になるだろう．

参 考 文 献

[1] L.F. Richardson, *Weather Prediction by Numerical Process* (Cambridge University Press, 1922).
[2] A.S. Monin and A.M. Yaglom, *Statistical Fluid Mechanics,* vol. I, vol. II (The MIT Press, Cambridge, MA 1975).
[3] 後藤俊幸：乱流理論の基礎（朝倉書店，1998）.
[4] P.A. Davidson, *Turbulence* (Oxford University Press, 2004).
[5] K.R. Sreenivasan and R.A. Antonia, Ann. Rev. Fluid Mech. **29**, 435-472 (1997).
[6] H. Takayasu, *Fractals in Physical Science* (Manchester University Press, New edition 1991).
[7] J. Feder, *FRACTALS* (Plenum Press, New York, 1988).
[8] K.R. Sreenivasan, Ann. Rev. Fluid Mech. **23**, 539-600 (1991).
[9] J.M. Dewhurst *et al.,* Plasuma Phys. Control. Fusion, **50**, 095013 (2008).
[10] N. Ohno, H. Tanaka *et al., 22nd Int. Conf. on Fusion Energy 2008 (Geneva, Switzerland 2008)* (Vienna: IAEA) CD-ROM file EX/P4-18 (2009).
[11] G.Y. Antar, Phys. Rev. Lett. **91**, 055002 (2003).
[12] J.A. Merrifield, W.-C. Muller, S.C. Chapman, R.O. Dendy, Phys. Plasmas **12**, 022301 (2005).
[13] J.M. Dewhurst, B. Hnat, N. Ohno, R.O. Dendy, S. Masuzaki, T. Morisaki and A. Komori, Plasma Phys. Control. Fusion **50**, 095013 (2008).
[14] J. Greenhough, S.C. Chapman, S. Chaty, R.O. Dendy and G. Rowlands, Astronomy and Astrophysics **385**, 693-700 (2002).
[15] B.B. Mandelbrot, and Van Ness, SIAM Rev. **10**, 422-437 (1968).
[16] S. Kajita, S. Takamura and N. Ohno, Nucl. Fusion **49**, 032002 (2009).
[17] S. Kajita, N. Ohno, S. Takamura and Y. Tsuji, Phys. Lett. A **373**, 4273 (in press) (2009).
[18] T. Vicsek, *Fractal Growth Phenomena* (World Scientific Pub. Co. Inc; 2 Sub 版, 1992).
[19] V.P. Budaev, S. Masuzaki, T. Morisaki, N. Ohno, N. Asakura, S. Takamura, H. Yamada and A. Komori, Plasma Fusion Res. **3**, S1019 (2008).
[20] B. Hnat, S.C. Chapman and G. Rowlands, Phys. Rev. E. **67**, 056404 (2003).