



講座 流体乱流研究から診たプラズマ乱流データの解析

4. 組織構造の定義とその抽出

辻 義之, 田中宏彦, 大野哲靖

名古屋大学大学院工学研究科

(原稿受付: 2009年10月14日)

本章では流体乱流中の組織構造に関して、その定義と抽出方法を紹介する。VITA 法, 四象限分割法, ウェーブレットなど計測データにすぐに応用できるものから, 経験的固有直交展開, 速度勾配テンソルなど詳細かつ膨大な計測データを必要とする方法も含まれている。理論と実験をつなぐ解析として位置づけた上で, プラズマ中で計測されたイオン飽和電流の時系列データに適用することから, より理解を深めることをめざしたい。

Keywords:

statistical analysis, turbulence, coherent structure, VITA, conditional sampling, four-quadrant analysis, wavelet, proper orthogonal decomposition, stochastic estimation, velocity gradient tensor

4.1 はじめに

流体乱流中には, 時間・空間的に秩序だった構造をもつ運動が存在する。これらは組織構造と呼ばれ, 長く乱流研究の重要課題であり続けてきた[1]。本章では計測データから組織構造を抽出する手法を紹介し, プラズマ流体中で計測されたデータへの適用を試みる。

図1(a)は円柱後流中に形成されたカルマン渦列の可視化写真である[2]。流体中には, このように明確に組織だった構造がある一方, 図1(b)に示した噴流中心断面での可視化画像[3]には, 明確には認識することはできないものの, 何らかの構造が存在することが予測される。後者のような組織構造をどのように抽出すればよいだろうか? この問いに答えることは, 容易ではない。なぜなら, 組織構造とは, 流体中を移動する組織だった構造(渦)とでも解釈すればよいが, その描写や定義は多種多様であり, 一意には定まらないからである。プラズマ乱流中の組織構造についても同様なことが予想される。しかし, 注意すべきは, 組織構造はその抽出方法によって, 逆に構造が定義されてしまうおそれがあることである。したがって, 抽出法は対象とする物理過程をよく理解した上で慎重に用いる必要がある。本章では, 乱流データの解析に用いられてきたいくつかの方法を紹介するとともに, 理論と実験をつなぐ解析と位置づけた上で, プラズマデータを実際に解析することによって, より理解を深めることをめざしたい。

4.2 組織構造の定義

しばらく前に報告された流体乱流に関する, Cantwell の膨大なレビューの中で, 彼は組織構造の定義として, “少なくとも一つの基本的な流れ場の変数(速度成分, 圧力, 濃度など)が, 流れ場の局所最小スケールよりも時間的・空間的に十分大きな領域にわたって, それ自身もしくは

は他の量と相関を示す三次元的な流れ場の領域をいう”としている[1]。図2には平板上に発達する乱流境界層流れにおける, Cantwell の模式図を示す。流れは左から右方向に壁面上に形成される。壁近くでは, 壁面との摩擦で流体は強く乱され乱流となる。一方, 壁から離れた場所では, 流れは壁の影響を受けずに, 乱れのきわめて少ない流れ(層流)として存在する。層流と乱流の境界は時間空間的に変動して, 一意に決めることは難しい。図中の滑らかな曲線は, その境界を模式的に示したものである。壁面に沿う流れを乱流境界層と呼ぶが, 境界層の中に様々な大きさをもった構造の存在が示唆されている。これらの構造は, いつも同じ位置に見出されるわけではなく, また同じ形で存在しているわけでもない。図1(b)のような状況が時々刻々と変化している状況を想定してもらえばよい。画像から構造(パターン)を認識するには, 人間の主観が入ることになり, したがって客観的な議論をすることができない。

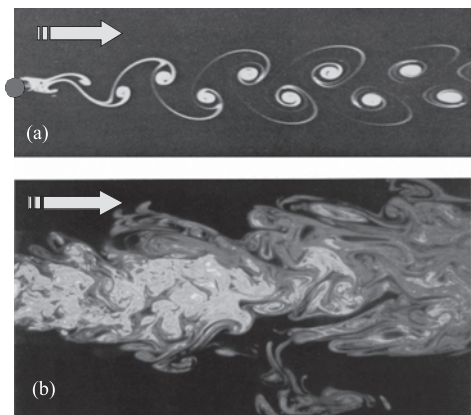


図1 乱流中の組織構造の可視化例。(a)円柱後流にみられる秩序立ったカルマン渦列[2]。(b)噴流(ジェット)断面内の組織構造[3]。

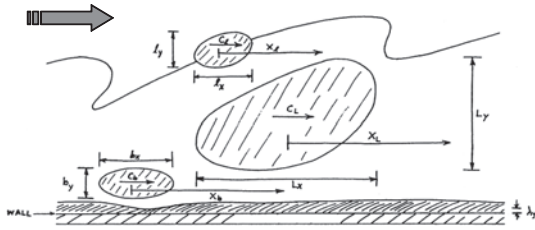


図2 Cantwell[1]が与えた壁面上の乱流(乱流境界層)中の組織構造の概念図。壁近くの低速な流体が放出される現象(バースト)、境界層中を移動する大きな構造、外縁の乱流と非乱流の界面あたりに存在する構造など、多様な構造が想定されている。

例えば、「認識とパタン」[4]には、どのような画像の中にも論理的な矛盾なく構造を定義して抽出できることが示されている。可視化画像のように空間的な情報が得られる場合にはまだよいが、プローブを用いた計測で1点もしくは数点の時系列情報のみしか得られない場合には、空間的な構造を予測することは難しい。この状況は、古代インドの「盲人と象の寓話(群盲象を撫でる)」¹⁾に例えて説明されることもある。この寓話は人間の認識力が如何に限られたものであるかを教えてくれる。

乱流中の組織構造として渦を定義し、それを抽出することが行われてきた。渦の中心が低圧になることから旋回を伴う構造を客観的に抽出する方法が提案されている[5]。また、流体運動の基礎方程式(Navier-Stokes 方程式)から、圧力に関するポアソン方程式；

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = \|\Omega\|^2 - \|S\|^2, \quad (1)$$

が得られる。速度場の局所的な空間構造は、速度勾配テンソル $w_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ (ただし、 u_i は x_i 方向の速度変動をあらわす) で特徴づけられ、その対称成分 $s_{ij} = (\partial u_j / \partial x_i + \partial u_i / \partial x_j) / 2 = S$ と反対称性成分 $\omega_{ij} = (\partial u_j / \partial x_i - \partial u_i / \partial x_j) / 2 = \Omega$ は特に変形速度テンソル、渦度テンソルと呼ばれる。乱流中には渦度が管状に集中した部分(渦管)とシート状に集中した部分(渦層)が観察され、各々が式(1)において $\|\Omega\|^2 \gg \|S\|^2$, $\|\Omega\|^2 \ll \|S\|^2$ という条件から抽出が可能となる[6]。この手法に関しては、後ほど触れることにしたい。

プラズマ乱流中にも組織構造の存在は観察されている。流体乱流と異なるのは、その媒質が電子の運動、イオンの運動、流体の運動、熱の輸送などマイクロやマクロの時空間スケールの異なる現象が含まれていることであろう。その物理特性は、スケール分離された階層構造を持っていることが知られている。従来の研究は、自己組織化現象を含め、階層領域を個別に対象とすることによって成果をあげてきた。しかし、実際に計測されるデータとは、これらの異なったスケールの運動が互いに相互作用した結果であり、そこから異なるスケールがつながった構造について何を取り出せるかが問題である。次章に紹介する方法が、いくら

かでもそのヒントになることを期待したい。

組織構造を扱う最近の進展は、数値計算を利用した動力学的な観点からの研究だろう。実空間内での構造をどのように抽出するのかが問題にするのではなく、基礎方程式の解の挙動を相空間で追跡することから、組織構造の運動を理解する試みである。この方法は、壁近くでの乱流が生成維持される機構の解明に寄与し、定常進行波解や周期解として、壁近傍の組織構造の理解を与えた[7, 8]。数値計算はレイノルズ数の低い範囲に限定されているが、今後はより高いレイノルズ数への進展が期待される。プラズマ乱流においても、この観点からの研究は期待されるものである。

4.3 組織構造の抽出法

本章では、流体乱流中の組織構造の抽出方法として古くから用いられている手法を説明する。その多くは、プローブを用いることによって乱流中の物理量を空間の1点もしくは数点で時系列として計測したデータをもとにしてなされてきた。近年では、2次元、3次元空間内での瞬時の速度分布が計測できるようになっているが、そこから組織構造を抽出するアイデアは、1次元の場合と基本的には変わらないようである[9]。

4.3.1 条件付き抽出法と集合平均

乱流中の組織構造が、ある時刻で検出プローブを通過したかどうかを判断する方法がいくつか考案されている。プローブから検出される時系列信号は、温度、速度、圧力などが考えられるが、最も広く利用されるのが、熱線風速計を用いた速度変動の計測である。組織構造の研究は、図2に示した壁にそって発達する乱流境界層において活発に行われてきたため、まず、速度信号を用いた個体壁近くの構造を抽出する方法を紹介する。

壁近くでは主流方向に回転軸を持つ縦渦が形成され、それによって低速の流体塊が壁近くから主流に放出される。同時に高速な流体塊が壁近くに流れ込む一連の過程が、1980年代に見出された(図3参照：当時は可視化技術や数値計算が発達しておらず、必ずしもこのような過程のみではなく、より複雑な現象が起こっていることが現在ではわかっている)。前者をエジェクション、後者をスweep、両者を合わせてバースト過程と呼ぶ。検出プローブでこの物理過程を抽出しようとする、信号波形が微小時間内に低速から高速に急激に変化する時間を見いだせばよいことになる(検出プローブは空間内に固定されて、流れが図中の左から右方向であるとする、まず低速信号が検出され引き続き高速信号が検出される)。

いま、主流方向(x 軸)の時間変動速度を $u(t)$ とする。微小時間 T の間の局所二乗平均と局所平均値を定義する。

$$\widehat{u^2}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u^2(t') dt', \quad \widehat{u}(t) = \frac{1}{T} \int_{t-T/2}^{t+T/2} u(t') dt'. \quad (2)$$

1 昔、インドパキスタン地方のある王様が6人の盲人に象を観察して報告するように言いました。盲人たちは、各々象の異なる部分に触りました。ある者は象の耳、ある者は鼻、というふうに足、尻尾、牙、横腹に触り、それぞれ異なる報告をしました。「象は団扇のようだ。」「象は蛇のようだ。」「象は木のようだ。」「象はロープのようだ。」「象は槍のようだ。」「象は壁のようだ。」と。

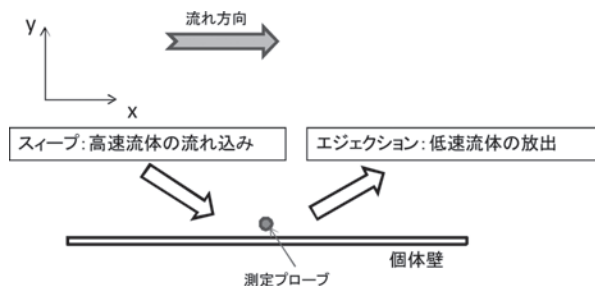


図3 壁近くでの高速流体の流れ込みと、低速流体の放出過程。

また、時間内の局所分散を

$$\widehat{\text{var}}(t) = \widehat{u^2(t)} - \{\widehat{u(t)}\}^2, \quad (3)$$

とする。局所分散が大きくなることは、限られた時間 (T) 内に速度が大きく変化する事象を抽出することに対応する。バーストが発生している領域を明確にするために、定義関数 $D(t)$ を次のように導入する。

$$D(t) = \begin{cases} 1 & \widehat{\text{var}}(t) \geq C_1 \times u_{rms}^2, \quad du(t')/dt'|_{t'=t} > 0 \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (4)$$

定義関数が1となる時間帯が、上述のバースト・スweep過程に相当する。また、 u_{rms}^2 は、 T を十分大きくしたときの分散値であり、 $u_{rms}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \widehat{\text{var}}$ から得られる。つまり、 C_1 はどれだけ強いバースト・スweep過程を抽出するのかを決める閾値パラメータとなる。また、積分時間 T は、バースト・スweep過程が観測される平均的な時間間隔であり、乱流境界層では壁変数 (摩擦速度 u_τ と動粘性係数 ν) で無次元化した $T^+ \equiv Tu_\tau/\nu$ が $T^+ \simeq 15$ となることが推奨されている。このように、ある条件を満たす事象を検出する手法を条件付き抽出法 (Conditional Sampling) という。特に上述した方法は VITA (Variable Interval Time Average) 法と呼ばれる [10-12]。

プラズマ乱流の場合には、速度変動をイオン飽和電流におきかえて同様の解析が可能である [13]。その際には、条件 $du(t')/dt'|_{t'=t} > 0$ の符号を逆にしたり、省略して、注目する現象を抽出すればよい。また、積分時間 T もプラズマ現象中の特徴的な時間スケールに一致させる必要がある。プラズマ乱流中で計測されたイオン飽和電流の時間波形 $I_{\text{sat}}(t)$ を対象に、局所分散値、定義関数を算出した。計測はプラズマ周辺位置で行っている。したがって、プラズマの回転に伴い、間欠的に大きな飽和電流が見出される。また、周辺プラズマの典型的な組織構造としてブロッブ (Blob) が注目されているが、それらとの関連も予想される。いま、積分時間を $T = 20 \mu\text{sec}$ とした。この時間は、時系列の自己相関関数から計算されるマイクロスケール (第2章参照) よりも大きく、積分時間スケールよりも小さい。閾値の定数を $C_1 = 1$ に設定して、VITA 法で解析した結果を図4に示す。もともと間欠的なスパイク波形を対象にしているが、局所の分散値を見ると、小さな変動は取り除かれていることがわかる。閾値の設定には、幾分の考慮が必要である。定義関数を見ると、間欠的な事象が発生する頻度が明らかとなる。定義関数は矩形波 (式(4)および図4

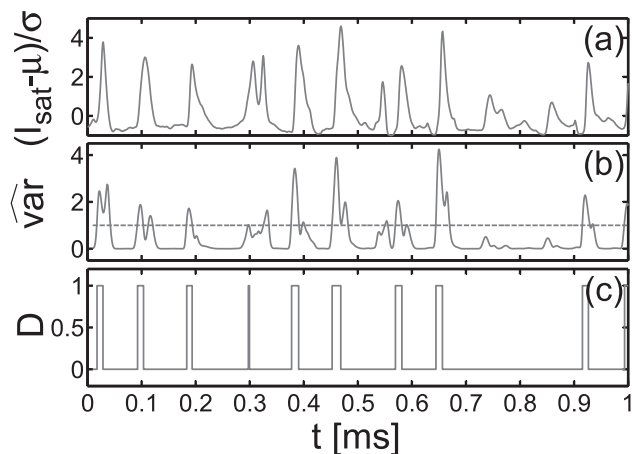


図4 プラズマ周辺で計測されたイオン飽和電流の時系列信号に VITA 法を適用した例。

参照) となり、各事象の継続時間が矩形波の大きさ (値が1である時間間隔) に対応する。 i 番目の矩形波の中心時間を t_i 、最初と最後の時間を各々 t_i^s , t_i^e と定義する。全計測時間 T_0 における、矩形波の個数を N とすると、事象 (ブロッブなど) の検出周波数は $f_B = T_0/N$ [Hz] となる。検出時間間隔を $\tau_i = t_{i+1} - t_i$ とすれば、 τ_i の確率分布を調べることは、事象の発生頻度を知る上での重要な情報となる。指数型の確率分布となれば、発生はポアソン過程に従い、互いに相関がないことを意味する。しかし、ベキ分布が確認されれば、ブロッブの発生が互いに何らかの関連を及ぼしていることを示唆する。

ブロッブの平均的な時間スケールは、 $\ell_i = t_i^e - t_i^s$ の平均値として与えられるであろう。また、ブロッブが通過した際の平均的な飽和電流の波形を知るため、次の集合平均波形を定義する。

$$\langle I_{\text{sat}}(\tau) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_{\text{sat}}(t_i + \tau). \quad (5)$$

ここで、 N は統計平均が安定するように大きな数とする。また、 τ は対象とする組織構造がもつ時間スケールの数倍をとればよい。図5に集合平均波形の計算結果を示した。集合平均波形は、間欠的な事象の平均的構図を表わしている。イオン飽和電流が急激に立ち上がり、緩やかに減少する様子がわかる。これは、一方向に回転するプラズマ

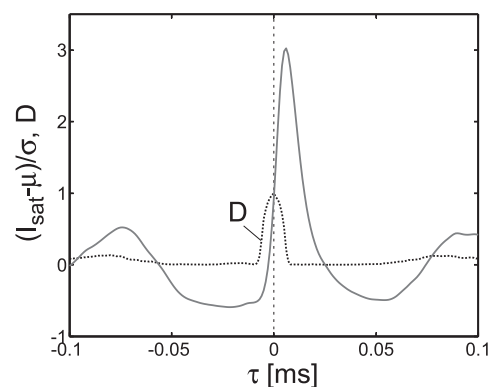


図5 VITA 法によって抽出されたイオン飽和電流の集合平均波形。

がプローブを通過した際には、急激に飽和電流が立ち上がり、プラズマの回転に伴い徐々に減少する傾向に対応している。

4.3.2 四象限分割法

流体の速度変動は3次元の成分を持つが、計測上の困難からそのすべてを同時に得ることはできない。通常は速度の1成分、もしくは2成分の同時計測が可能である。速度変動の積の時間平均はレイノルズ応力と呼ばれ、流体中の乱れの生成に重要な役割を果たすことがわかっている[14]。そのため、レイノルズ応力の生成を組織構造と関連させることが試みられてきた。 x 方向の速度変動を $u(t)$ 、 y 方向の変動を $v(t)$ とすると、両者の積 $r(t) = -u(t)v(t)$ は瞬時レイノルズ応力と呼ばれ、その時間平均値はレイノルズ応力に等しくなる。 $r(t)$ が急激に大きく変化し、レイノルズ応力へ寄与する構造から定義関数を構成することが行われる。

速度変動 $u(t)$ を横軸に速度変動 $v(t)$ を縦軸にとり、バースト過程を四象限に分けてより詳しく議論することがなされる。第二象限と第四象限は正のレイノルズ応力の生成に寄与する事象で、各々がエジェクションとスweepに対応する。各象限にどれくらいの事象が含まれるのかを各計測位置ごとに調べると、より詳細な情報が得られる。これを四象限分割法と呼ぶ[15, 16]。

NAGDIS-II (実験データの計測条件は、第2章付録を参照)におけるプラズマ密度の2点での同時計測データを用

いて四象限分割をおこなった。プラズマ中心から $r=18, 21$ mmに計測プローブを設置し、1chの出力を $I_1(t)$ 、2chの出力を $I_2(t)$ として、 (x, y) 平面内に時間変化を軌道としてプロットした(図6(a)参照)。ただし、各成分の平均値 μ を差し引いて標準偏差 σ で無次元化してある。第一象限と第三象限に軌道の多くが集まっていることがわかる。つまり、1chと2chの出力が同じ符号をもって変動する確率が高いことをあらわしているが、第三象限に比べて第一象限に大きな変化が見られる。これは、平均値よりも大きな(プラスの符号)変動がときたま通過することをあらわしている。プラズマの回転によって、外縁に間欠的な現象が生まれているのではないかと予想される。各象限に含まれる割合を、変動の大きさによって分類することができる。

$$(I_1(t) - \mu_1)(I_2(t) - \mu_2) > H\sigma_{12}, \quad (6)$$

ここで、 σ_{12} は $I_1(t)I_2(t)$ の標準偏差である。閾値 H を変化させることによって、大きな変動を取り出すことができ、その変動がどの象限に含まれるかを表したものが図6(b)である。 H が小さな場合には第三象限に含まれる事象が最も多いが、 H を大きくしていくと第一象限の割合が最大となる。この割合が逆転する閾値の大きさが、組織構造を抽出する指標になるかもしれない。VITA法と同様にして定義関数を構成し、発生頻度を H をパラメータとして集合平均波形を計算することができる。組織構造に基づく定義関数をいかに構成するかが、抽出方法の基本となる。どのような物理現象に注目してその検出基準を設け、計測データから注目した事象を抽出するのかを事前に見極めておくことが必要であろう。

4.3.3 ウェーブレット

ウェーブレット展開は、フーリエ展開と同様、現在では広く用いられている[17, 18]。両者には基底関数が波数空間全域にわたるか局在するかという相違点がある。乱流中の組織構造の抽出には、個々の大きさも強さもまちまちであるため、基底関数が局在しているウェーブレット展開を用いるほうが便利である。単に信号波形のパターンを抽出するだけでなく、各周波数のエネルギーを保存する観点から、マザーウェーブレットとしては直交基底を用いるほうがよい。離散ウェーブレット変換は、信号波形を時間・周波数領域に分解するもので、時間信号 $I_s(t)$ の級数展開は以下のように表される。ここで、指数 j (整数)は離散周波数、指数 k (整数)は離散時間を表す指標である。

$$I_s(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k^{(j)} \phi(2^j t - k), \quad (7)$$

$$d_k^{(j)} = 2^j \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(2^j t - k) I_s(t) dt. \quad (8)$$

$d_k^{(j)}$ はウェーブレット係数、 $\phi(t)$ はウェーブレット基底である。直交基底としては、Daubechies functionなどが扱いやすい[19]。図7にウェーブレット展開の一例を示す。流体乱流中で計測された速度変動の信号である。実験ではサンプリング周波数10 kHzで65536点の計測を行っている。したがって、指数 j は1から16までの有限な値をとる

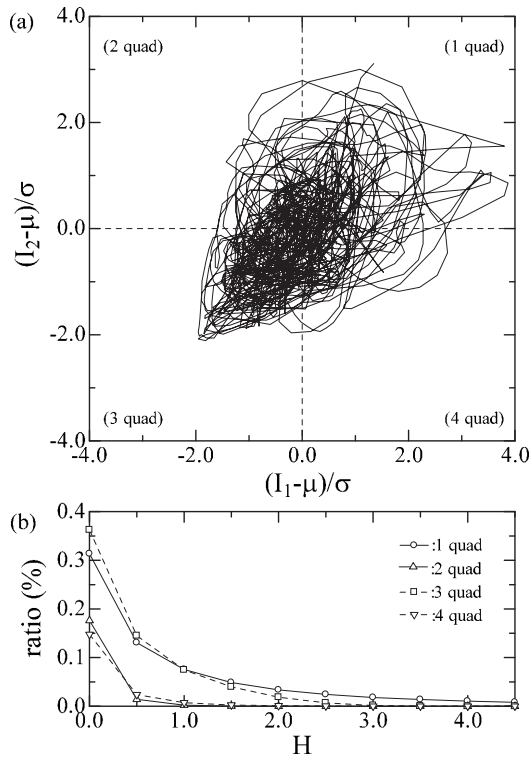


図6 計測プローブを $r=18, 21$ mmに設置してプラズマ密度の同時計測をおこなった。1chの出力を $I_1(t)$ 、2chの出力を $I_2(t)$ として、 (x, y) 平面内に時間変化をプロットしたもの(図(a))。四象限分割法での各象限に含まれる割合を変動の大きさを示すパラメータ H (式(6))の関数として表記した(図(b))。

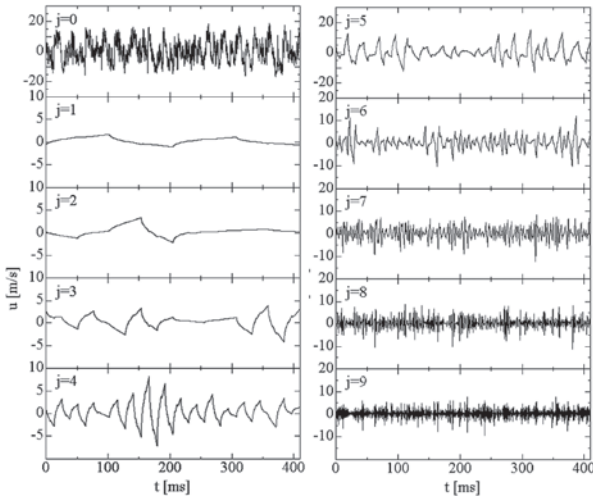


図7 流体乱流中で計測された速度信号をウェーブレット展開した一例。

ことになり、離散周波数は 2^j ($j = 0, 1, 2, 3, \dots$) となる。 j の値が大きくなるほど、高周波成分を表すことになる。フーリエ展開では、各周波数の波形は三角関数となるが、ウェーブレットでは時間的に変化していることがわかる。つまり、局在する構造を取り出すのに適しているといえる。ウェーブレットの利用として、フィルタリングの機能がある。式(7)において、特定の j を用いて信号を再構成すると、第2章でふれたローパス、ハイパスフィルタを構成できる。信号に大きなトレンドがある場合には、ウェーブレットを用いるほうがよい。プラズマデータ解析の例は多数報告されている。例えば、文献[20]が参考になる。発達乱流中の秩序渦の抽出としてウェーブレットは利用できるばかりではなく、情報量の縮約手法として実用化されている。近年の進展については[21]を参照されたい。

4.3.4 経験的固有直交展開

VITA法にしてもウェーブレットにしても、組織構造を抽出するためにはいくつかのパラメータを設定する必要があった。これは、裏を返せば、設定したパラメータによって抽出される構造が異なることに相当する。前述のように組織構造には一意的な定義を与えることは難しいが、解析をするうえで任意性は排除することが望まれる。そこで、主観的な情報を極力少なくして組織構造を抽出する方法として、経験的固有直交展開法を紹介する[22]。

直交固有関数分解 (Proper Orthogonal Decomposition, 以後 POD と略す) は、経験的直交関数系展開, Karhunen-Loève 展開とも呼ばれる。その名が示す通り直交展開の一種であり、与えられた任意関数 $f(x)$ を直交基底 $\phi(x)$ で展開する手法である[22]。直交展開としてよく用いられるフーリエ展開やチェビシェフ展開などでは、基底関数 $\phi(x)$ は既存関数として与えられるが、PODでは基底関数を対象領域 $\mathbf{I}$ の情報を反映させ決定するところに最大の特徴がある。その結果、少数の項数で関数 $f(x)$ を表現できる。いま、位置 x と時刻 t における変動速度を $u(x, t)$ とすると、直交基底 $\phi(x)$ を用いて以下のように展開できると仮定する。

$$u(x, t) = \sum_{i=1}^n a_i(t) \phi_i(x), \quad (9)$$

ここに係数 a_i は時間のみの関数とし、基底関数は空間のみの関数である。直交展開が最少の項数で元の関数を再構成できるという条件を課すことにより、基底関数 $\phi_i(x)$ が存在し、一意に定まることが証明される。詳細については参考文献[22, 23]に譲るが、結局のところ基底関数は以下の積分方程式の解として与えられる。

$$\int_{\mathbf{I}} \langle u(x) u^*(x') \rangle \phi(x') dx' = \lambda \phi(x), \quad (10)$$

基底関数が積分領域 $\mathbf{I}$ の流れ場の情報を反映していることは、上式の積分核が二点相関係数になっていることから理解できる。

さて、実験などでは速度 u を位置 x の連続関数として測定することは不可能であり、離散点でしかデータを得ることができない。そこで、二点相関係数を $R_{ij} = \langle u(x_i), u(x_j) \rangle$, $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$ とあらわすと、積分方程式は以下の固有値問題となる。

$$\begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi(x_1) \\ \phi(x_2) \\ \vdots \\ \phi(x_n) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \phi(x_1) \\ \phi(x_2) \\ \vdots \\ \phi(x_n) \end{pmatrix}. \quad (11)$$

ここで、 λ は固有値であり、その絶対値の大きい順に番号をつけ、 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ とし、それに対応する固有関数も $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ として大きき1に規格化しておく。このとき変動速度 u は、

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^n a_k(t) \phi_k(x), \quad a_k(t) = \int_{\mathbf{I}} u(x, t) \phi_k(x) dx, \quad (12)$$

とあらわされる。式(10)から展開係数は $\langle a_i a_j \rangle = \lambda_i \delta_{ij}$ となり (δ_{ij} はクロネッカーデルタ)、統計的に直交していることがわかる。また、領域 $\mathbf{I}$ での全エネルギーは、

$$E \equiv \int_{\mathbf{I}} \langle u^2(x) \rangle dx = \sum_{k=1}^n \lambda_k, \quad (13)$$

と計算され、固有値の和として表される。また、基底の直交性を利用し、 $\langle a_i^2 \rangle = \lambda_i$ を用いて変形すると、以下の関係が得られる。

$$\langle u^2(x) \rangle = \sum_{i=1}^N \lambda_i \phi_i(x)^2. \quad (14)$$

以上まとめると、PODの基底を得るためには、対象とする領域 $\mathbf{I}$ 内の離散点: $x_1, x_2, \dots, x_n$ において二点相関係数を計算し、固有値問題(式(11))における固有関数を求めることが必要である。また、一般に速度成分はベクトルとして考えるのが妥当であり、上記の方法は容易にベクトル場にも拡張できる。

図8はNAGDIS-IIの垂直断面内を高速度カメラで撮影し、その発光の揺動成分をPOD展開した結果である。

[24]. プラズマは高速で反時計回りに回転しており、その回転に寄与するモードを POD 基底で表現している。各モードが持つ固有値 (λ_i) の大きさは、輝度の変動の大きさに対応しており、便宜上これをエネルギーの大きさと呼ぶことにする。第一、第四基底 ($i = 1, 4$) は同心円に近く、第二、第三基底 ($i = 2, 3$) では正負で一对の構造、第五、第六基底 ($i = 5, 6$) では正負二対の構造が、あたかも回転している様子がうかがえる。以降、基底の番号 (i) が大きくなるにつれて、全エネルギー (E) に占める各モードの割合 (λ_i/E) は小さくなるものの、周辺部の構造細かな構造が構成されている。POD では組織構造を基底関数の形に結びつけて考える。番号の小さな基底は、対象としている領域内でのエネルギーに特に大きく寄与する構造の形と考えられる。その時間的な変化は、展開係数の時間変化から予測される。例えば、図 9 (b) には周波数スペクトルを示したが、 $i = 2, 3$ および $i = 5, 6$ では、同時に計測された静電プローブ信号と同じ周期変動をしていることがわかっている。POD の定義に従えば、組織構造は任意性が入ることなく抽出することができる。

流体乱流（特に固体壁近く）での解析では、第一基底が全乱れエネルギーに占める割合 λ_1/E は、約 60% にもおよび（この結果は、領域 I の大きさに依存する）、第三基底まで含めると 80% 近くが含まれる [22]。その他、円柱後流、混合層など多くの流れ場で、POD による解析がすすめられ、特徴的な渦構造の抽出に成功をおさめている。組織構造（つまり、基底関数 $\phi(x)$ ）は空間に固定された関数と考えることによって、変動速度は時間のみの関数 $a_k(t)$ と基底関数との積として表される（式 (12) 参照）。係数 $a_k(t)$ の変化は組織構造 $\phi_k(x)$ の時間的な変化を表していると解釈でき、その支配方程式が導かれれば、組織構造の運動を記述できることになる。これは式 (12) を Navier-Stokes 方程式に代入し、基底 $\phi(x)$ 上に射影することによってなされる。実はこのような試みは既にいくつか報告されており、レイノルズ数の変化に対する解の分岐やカオス挙動など興味深い話題が提供されている [22]。同様の解析はもちろんプラズマ乱流でも可能である。

4.3.5 確率的予測法

確率的予測法 (Stochastic Estimation) は、時刻 t 、位置 x での速度変動 $u(x, t)$ を同時刻での参照位置 x_r の情報 ($u(x_r, t)$) から予測する方法である [22]。以後、簡略化して時刻 t を省くと、最も簡単な場合には、 $u(x) = A(x, x_r)u(x_r)$ となる線形作用素としての行列 $A(x, x_r)$ を決めることが問題になる。POD を用いた解析では、確率的予測法を容易に取り扱えるので、簡単に紹介しておく。

確率的に高い事象とは、二点での相関の大きさに対応すると考えられる。したがって、行列 A は二点相関係数から $A(x, x_r) = \langle u(x)u(x_r) \rangle / \langle u(x_r)u(x_r) \rangle$ と与えるのが妥当であろう。式 (12)、(14) から行列 A を POD 基底を用いてあらわすと、

$$A(x, x_r) = \frac{\sum_{i=1}^N \lambda_i \phi_i^*(x_r) \phi_i(x)}{\sum_{j=1}^N \lambda_j |\phi_j(x_r)|^2}, \quad (15)$$

となる。即ち、POD 基底を用いることにより、最も起こる確率の高い事象を線形作用素として予測することができる。この手法を用いることにより、限られた点での計測データから広い空間にわたる統計量の分布を予測することが可能である。

4.3.6 速度勾配テンソルを用いる方法

旋回を伴う渦構造を抽出するために、速度勾配テンソル $w_{ij} = \partial u_i / \partial x_j$ を利用する方法が考案されている [25, 26]。ここでは、二次元の流れ場を想定して、この手法を簡略化して説明したい。流れの中の任意の流体粒子とそれから x_i だけ隔たった粒子の相対速度 $\dot{x}_i = dx_i/dt$ は速度勾配テンソルにより、

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial u_1 / \partial x_1 & \partial u_1 / \partial x_2 \\ \partial u_2 / \partial x_1 & \partial u_2 / \partial x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

と与えられる。微小時間内の軌道は、行列の固有値 (λ) と固有関数によって与えられる。非圧縮性を仮定すると、固有値の特性方程式は

$$\det |\lambda \delta_{ij} - w_{ij}| = \lambda^2 + Q_2 = 0, \quad (17)$$

となる。ただし、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタで Q_2 は以下で与えられる。

$$Q_2 = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial u_2}{\partial x_2} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (18)$$

λ が異なる実数解を持つ時、解曲線は双曲型となる。一方、共役複素数の場合には楕円となって、流体粒子は旋回運動を行う。一般に、前者は saddle、後者は focus と呼ばれ、流れ場の形態の分類として用いられている。固有値の判別式 D は、式 (17) から明らかなように、 $-Q_2$ に等しくなり、流体運動の方程式を介すると以下のようにまとめられる。

$$D = -Q_2 = -\frac{1}{2} \nabla^2 p. \quad (19)$$

ここで、 $\nabla^2 p$ は圧力のラプラシアンを表す。局所の圧力変動が流れの形態に関連していることは上式からも明らかであり、圧力の情報から渦を抽出することの妥当性を与えている。二次元では λ が複素共役解をもつ条件は、 $D < 0$ 、 $Q_2 > 0$ 、 $\nabla^2 p > 0$ となる。つまり、旋回を伴う流れが存在すれば、その領域内では圧力の極小値が存在する。これらの関係を表 1 にまとめた。ただし、三次元空間内では、これらの関係は一意的には定まらない。

渦構造の抽出基準として、渦度 $\omega (\equiv \nabla \times \mathbf{u})$ 、 Q_2 、圧力は有用な情報となることは明らかである。しかし、通常の室内実験で渦度を精度よく測ることは難しく、まして速度勾配テンソルを計測するには、多大な工夫と労力を必要と

表 1 流れ場の形態と速度勾配テンソルの固有値、 Q_2 、圧力との関係。

	λ	D	Q_2	$\nabla^2 p$
focus	complex	< 0	> 0	> 0
saddle	real	> 0	< 0	< 0

する．この手法をより簡略化して，実験データの解析に適用した例を紹介したい[27]．図1に示した円柱の後流においては，渦が周期的に放出される．その周期を T_w とする．空間の一点で速度を計測すると，その変動 $u(x, y, z, t)$ は周期 T_w で大きく揺らぎながら，小さな変動が重なっている．大きな変動はカルマン渦の放出によるもので，小さな変動は渦に含まれる不規則な乱流変動である．いま，測定点を固定して1周期ごとに速度変動を分割して考える．つまり，長時間の計測データから，時間 T_w で区切られた多数のデータセットを作ることができる．このデータセット内の速度変動を $u_i^{(k)}(x, y, z, t')$ とおく．ここで， $0 \leq t' \leq T_w$ ， k はデータセットの番号 $k = 1, 2, \dots, N$ である．次に各データセット内での時刻を固定してアンサンブル平均をとる．

$$\langle u_i(x, y, z) \rangle_T = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N u_i^{(k)}(x, y, z, t' = T). \quad (20)$$

このような集合平均を位相平均と呼ぶ．通常の計測では，時間周期を明確するために円柱近くに参照となる測定点において，その信号を時間の基準にとる．

位相平均は位置 (x, y, z) を変えながら，空間内の多数の点で計測することが可能である．この位相平均速度を式(16)における速度 u_i と置き換えて，渦構造を抽出した結果を図10に示す．位相平均速度から計算された渦度 (z 方向成分，図10(a)) から，カルマン渦が明確に捉えられていることがわかる．正の符号は反時計方向，負の符号は時計回りの回転をあらわす．渦度の等値面に圧力の位相平均を重ねた結果が図10(b)である．先に説明したように渦の中心では負圧になることがよく対応している．速度勾配テンソルの不変量 Q_2 を用いて渦構造を抽出した結果を図10(c)に示す．渦の中心では， $Q_2 > 0$ となり，渦構造の抽出に有効であることがわかる．

実験や観測などでは計測点に限りがあるので，速度勾配テンソルを厳密に求めることはできないが，ここで紹介した位相平均の方法を用いれば，プラズマ乱流中の渦構造を抽出することは可能である．速度勾配テンソルを用いて抽出される渦構造は，乱流中の微細な構造でその大きさは最小渦スケールの10倍程度と見積もられている．そのような微細渦は，バーガース渦と類似の速度分布を有し，乱流の種類（噴流，境界層，後流など）によらず，普遍的に存在することが予想されている[28]．微細な渦が集まり，クラスターを形成することが観察されており，乱流の種類の相違はクラスター形状の差異として理解されるのかもしれない．プラズマ乱流中に微細な渦構造を期待できるのかは不明であるが，流体乱流の解析で基礎となる渦構造の概念がプラズマ乱流の理解に役立つことを期待したい．

4.3.7 特異値分解法と独立成分分析

経験的固有直交展開の1つとしてPODについて説明した．手法は異なるが同様の考え方として，因子分析法，主成分分析法などがあり，これらも同様に経験的直交関数展開と呼ばれる．直交展開という観点からは，特異値分解法(SVD, Singular Value Decomposition)がある[29]．この手法は，任意の $M \times N$ 行列 A に対して次式のような分解が

一意に存在することを基本にしている．

$$A = U \Sigma V^T, \quad (21)$$

ここで， U, V は M, N 次の直交行列， Σ は $M \times N$ の行列で，対角成分以外がゼロとなる． Σ の対角成分は非負の実数で， $M < N$ のとき $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \geq \dots \geq \sigma_M \geq 0$ の順で並べられ特異値と呼ばれる．行列 U, V は直交行列（すなわち， $U^{-1} = U^T, V^{-1} = V^T$ ）となる．特異値分解とは，任意の行列 A を二つの直交行列によって一意に表現する手法である．いま，プラズマ乱流中の N 点で同時に計測された時系列データ $I_i(t_j)$ を考える．指数 i は測定点の位置で， $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ， t_j は離散化されたサンプリング時間で $j = 1, 2, 3, \dots, M$ とする． $M \times N$ の行列 A を次のように構成すると，

$$A = \begin{pmatrix} I_1(t_1) & I_2(t_1) & \dots & I_N(t_1) \\ I_1(t_2) & I_2(t_2) & \dots & I_N(t_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ I_1(t_M) & I_2(t_M) & \dots & I_N(t_M) \end{pmatrix}, \quad (22)$$

式(21)から直交行列 U と V が一意に決まる．多点の時系列データの分布を行列 U, V および特異値の分布から特徴づける方法で，すでにプラズマデータの解析に応用されている[29, 30]．

カクテルパーティ問題と呼ばれる例題がある．1つの部屋で3人が話をしており，各人の発する音声信号を $s_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) とする．部屋には3つのマイクロフォンが異なる位置に設置されており，そこから記録される信号を $x_i(t)$ とする．記録信号は各音声信号の荷重和であらわされ，以下の線形関係となる．

$$x_1(t) = a_{11}s_1(t) + a_{12}s_2(t) + a_{13}s_3(t) \quad (23)$$

$$x_2(t) = a_{21}s_1(t) + a_{22}s_2(t) + a_{23}s_3(t) \quad (24)$$

$$x_3(t) = a_{31}s_1(t) + a_{32}s_2(t) + a_{33}s_3(t). \quad (25)$$

録音された信号 $x_i(t)$ のみから音声信号が再現できるか？という例題である．この問題を解くために独立成分分析(ICA; Independent Component Analysis)が利用される．各人の音声信号を確率変数とみなすと，その統計的独立性（詳しくは第3章を参照）が成り立ち，確率分布関数が非ガウス分布となる場合には，この問題を解くことができる[31]．

4.3.8 三成分分解

複雑に変動する時系列信号 $I_s(t)$ から組織構造が抽出できたとして，その成分を三つの成分に分解することが可能となる．

$$I_s(t) = I_s^{\text{ave}} + I_s^c(t) + I_s^r(t). \quad (26)$$

ここで， I_s^{ave} は時間平均値 ($\langle I_s(t) \rangle$)， $I_s^c(t)$ は組織構造からの寄与， $I_s^r(t)$ はそれ以外の成分である．第二章で触れたが，この分解を三成分分解と呼ぶ[32, 33]．流体乱流の解析では三成分分解からレイノルズ応力，乱流エネルギーへの寄与を定量化することができる．円柱後流や噴流出口など渦構造が明確に抽出できる場合には，空間内のどの位置

で、乱流エネルギーが組織構造へ流れているかなどを明らかにすることができる。NAGDIS-II では、プラズマ乱流の準周期的な回転が観測されている。この周期変動を組織構造と考え、バンドパスフィルタを用いて組織構造の成分 $I_s^r(t)$ を抽出する。バンドパスフィルタの周波数帯は、第一ピーク（約 15 kHz）ならびに第二ピーク（約 30 kHz）とした。平面格子状での 2 点同時計測データ（第 2 章付録 A（2）参照）を用いて、各々の周波数帯から組織構造を抽出して、時空間相関を計算した結果を図 11 に示す [24]。第一ピークの相関は径方向に移動する構造の存在を予想させ

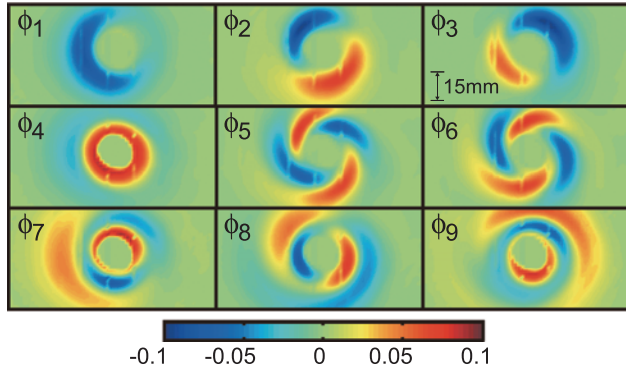


図 8 NAGDIS-II で可視化されたプラズマ変動の POD 解析。プラズマの回転に寄与するいくつかのモードを表している [24]。

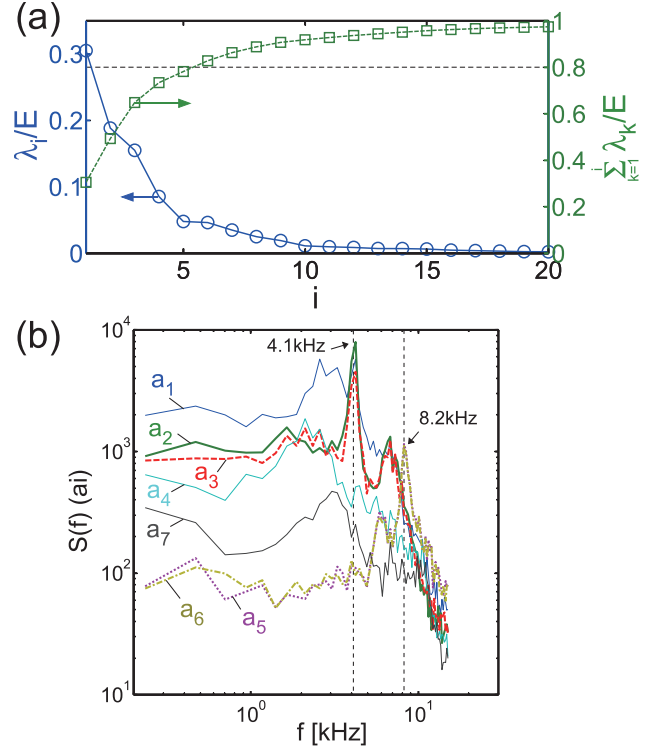


図 9 NAGDIS-II で可視化されたプラズマ変動の POD 解析 [24]。 (a) 図 8 における各モードがもつ固有値（エネルギー）の分布。 (b) POD 展開係数の時間周波数スペクトル。

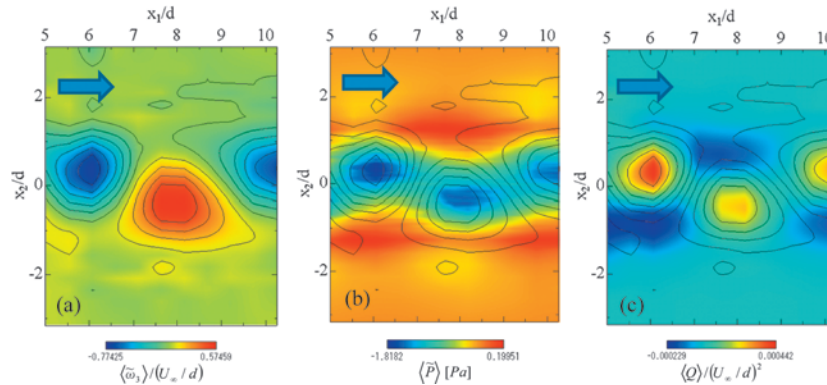
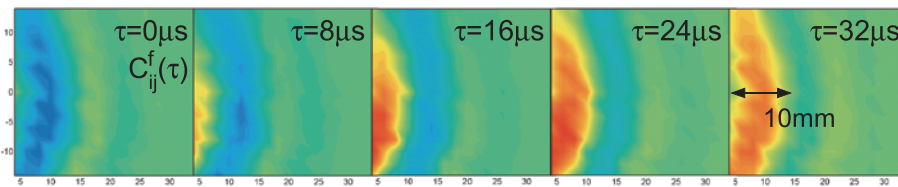


図 10 円柱後流における渦構造の抽出。(a) 渦度を用いた場合、(b) 圧力を用いた場合、(c) 速度勾配テンソルの第二不変量を用いた場合 [27]。

(a) $f_1 = [10, 20]$ kHz



(b) $f_2 = [25, 35]$ kHz

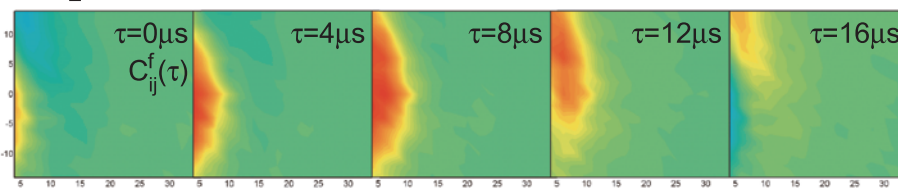


図 11 NAGDIS-II で計測されたイオン飽和電流の二点相関関数の分布。組織構造からの寄与を明らかにした結果。(a) 第一ピーク（約 15 kHz）の組織構造、(b) 第二ピーク（約 30 kHz）による組織構造からの寄与 [24]。

る。第二ピークの場合には、径方向ならびに周方向へ移動する運動の存在が示唆されている。また、固定プローブと移動プローブとの位相差から、各々の組織構造の平均移動速度を見積もることができる。PODを用いて組織構造を抽出した場合には、これら2つのモードの運動は、どちらも第一および第二基底でほぼ再現できることがわかっている。

4.4 プラズマ乱流中の組織構造

北欧の空に輝くオーロラがプラズマであることを知ったとき、流体乱流よりも複雑なプラズマ中に組織構造が形成されることに興味をもったことがある。プラズマ関連の学会の講演タイトルの中には、「プラズマ Blob」、「帯状流」、「プラズマ中の渦」、「非局所的輸送」、「磁気島」、「輸送障壁に関連した分布構造」、「プラズマトーチの巨視的構造」、「渦度構造」といったキーワードがあり、流体乱流の研究をしていれば詳細は理解できずとも、その構造の多様性に思いをはせることができる。流体乱流においても1990年代まで、繰り返し乱流構造に関する研究がなされてきた。自らも構造を抽出して、その統計性を議論したり物理過程を説明してきたが、どうしても「乱流」の理解が進んだとは思えなかった。今にして思えば、乱流組織構造とは、スケールで分離されたり、特定の手法で抽出されるべきものではなく、実空間で様々なスケールが影響しあいながら（流行りの言葉では階層構造か）、またそれがレイノルズ数により様相を変えながら存在するものなのだろう。

著者（辻）の個人的感想だが、いくつかの例外を除いて、発達乱流中の組織構造を追い求めた実験的研究は、乱流研究を足踏みさせたのではないと思う。今後、プラズマ乱流ではより活発に構造についての議論が進展していくと予想するが、流体乱流中での組織構造の研究の流れを眺めてみることはよい示唆を与えてくれるであろう。

数年前、九州大学応用力学研究所で乱流の研究集会を開いた際に、ある著名な先生から言われたことを思い出す。“……、そういったことは、風洞が変われば結果が変わるかもしれませんがね”。風洞が変われば結果が変わる？風洞には個性がある。同じ流れ場を作っても、風洞の個性が反映されれば、研究者によって結果が変わってくる。つきつめれば、過去の組織構造の研究には、このようなことまで考慮に入れないといけなかったのかもしれない。組織構造を理解する1つの指標は、「力学系による縮約」[34]ではないかと考える。層流から乱流への遷移や低レイノルズ数の流れの中の構造は、理解が進んでいる。しかし、発達した乱流の理解へは遠い道のりである。

参考文献

- [1] B.J. Cantwell, Ann. Rev. Fluid Mech. **13**, 457 (1981).
- [2] *Album of Fluid Motion* (Parabolic Press, 1982).
- [3] K.R. Sreenivasan, *Fractals in Physics: Essays in Honour of Mandelbrot* (North Holland, 1989).
- [4] 渡辺 慧：認識とパタン（岩波新書，1978）。
- [5] H. Miura and S. Kida, J. Phys. Soc. Japan **66**, 1331 (1997).
- [6] 木田重雄，柳瀬眞一郎：乱流力学（朝倉書店，1999）。
- [7] S. Toh and T. Itano, J. Fluid Mech. **481**, 67 (2003).
- [8] S. Toh and T. Itano, J. Fluid Mech. **524**, 249 (2005).
- [9] S.K. Robinson, Ann. Rev. Fluid. Mech. **23**, 601 (1991).
- [10] R.F. Blackwelder and J.H. Eckelmann, J. Fluid Mech. **94**, 577 (1979).
- [11] R.F. Blackwelder and R.E. Kaplan, J. Fluid Mech. **76**, 89 (1976).
- [12] Y.M. Yuan and M.R. Mokhtarzadeh-Dehghan, Phys. Fluids, **6**, 2038 (1994).
- [13] H. Tanaka, N. Ohno, N. Asakura, Y. Tsuji, H. Kawashima, S. Takamura, Y. Uesugi, and the JT-60U Team, Nucl. Fusion **49**, 065017 (2009).
- [14] 中村育雄：乱流現象（朝倉書店，1992）。
- [15] W.W. Willmarth and S.S. Lu, J. Fluid Mech. **55**, 65 (1972).
- [16] S.S. Lu and W. W. Willmarth, J. Fluid Mech. **60**, 481 (1973).
- [17] 山口昌哉，山田道夫監訳 ベネデット他編：ウエーブレット 理論と応用（シュプリンガー・フェアラーク東京，1995）。
- [18] 芦野隆一，山本鎮男：ウエーブレット解析（誕生・発展・応用）（共立出版，1997）。
- [19] *Numerical Recipes in FORTRAN* 77, 2nd Edition (Cambridge University Press, 1992).
- [20] N. Ohno, V.P. Budaev, K. Furuta, H. Miyoshi and S. Takamura, Contrib. Plasma Phys. **44**, 222 (2004).
- [21] 岡本直也：乱流の情報縮約手法の開発と乱流の普遍性の解明-ウエーブレットの視点から-，名古屋大学学位論文（2009）。
- [22] P. Holmes, J.L. Lumley and G. Berkooz, *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*, Cambridge Monographs on Mechanics, (Cambridge University Press, 1996).
- [23] 日野幹雄編集：スペクトル解析ハンドブック（朝倉書店，2004）。
- [24] H. Tanaka, N. Ohno, Y. Tsuji and S. Kajita, *submitted to Contrib. Plasma Phys.*
- [25] M.S. Chong, A.E. Perry and B.J. Cantwell, Phys. Fluids A **2**, 765 (1990).
- [26] A.E. Perry and M.S. Chong, Ann. Rev. Fluid Mech. **19**, 125 (1987).
- [27] 河合勇太，辻 義之，久木田 豊：日本機械学会論文集（B編）**72**, 3058-3065 (2006).
- [28] T. Miyauchi, Laser Diagnostics and DNS of Turbulent Premixed Flames, Invited lectures in proceedings of 5th International Symposium on Turbulence and Shear Flow Phenomena TU Munich, 27-29 August (2007).
- [29] 岩間尚文：プラズマ・核融合学会誌 **74**, 1310 (1998).
- [30] 大館 暁：大型ヘリカル装置における軟 X 線カメラを用いた MHD 現象の実験研究，名古屋大学学位論文（2002）。
- [31] A. Hyvarinen, J. Karhunen, E. Oja, （根本幾，川勝真喜訳），独立成分分析（東京電気大学出版局，2005）。
- [32] A.K.F.M. Hussain, K.B.M.Q. Zaman, J. Fluid Mech. **101**, 449 (1980).
- [33] 河合勇太，辻 義之，久木田 豊：日本機械学会論文集（B編）**72**, 915 (2006).
- [34] 京都大学数理解析研究所講究録1434，「乱流現象と力学系の縮約」（2005）。