



## 研究論文

# 開放端系ダイバータ磁場中のフルート揺動と輸送

片沼伊佐夫, PASTUKHOV Vladimir P.<sup>1)</sup>, 今井 剛, 市村 真, 假家 強,  
中嶋洋輔, 北條仁士, 南龍太郎, 山口裕資,

吉川正志, 赤尾英毅<sup>2)</sup>, 渡辺二太<sup>2)</sup>, HORTON Wendell<sup>3)</sup>

(筑波大学プラズマ研究センター, <sup>1)</sup>ロシア・クルチャトフ国立研究所, <sup>2)</sup>核融合科学研究所, <sup>3)</sup>米・テキサス大学)

(論文受付: 2007年11月21日 / 論文受理: 2008年3月27日)

磁気シアのない軸対称磁場配位で発生するフルート揺動を記述するための基礎方程式の導出を行った。この方程式系はMHD方程式から比較的振動数の高いシア・アルヴェン波, 磁気音波, 圧縮性音波を除外した, 非線形低周波流を記述するのに適した簡約方程式系である。この方程式系を用いて計算機シミュレーションコードを作成した。さらに, このコードを開放端系ダイバータ磁場配位に適用して, フルート揺動の計算機シミュレーションを実行した。初期の摂動はフルート不安定性を引き起こし, フルート揺動は線形成長領域から非線形領域に移行してやがて系は乱流状態になった。このとき大きな径方向異常輸送が発生するが, やがて系は再び臨界安定状態へ移行した。

### Keywords:

flute mode, interchange mode, divertor, transport, simulation

## 1. 序論

開放端系(特にミラー磁場)に設置するダイバータ磁場配位は図1に示されているように, ミラー磁場の中央周辺部で八の字を描いているような磁力線の存在する特徴がある。丁度磁力線が交差して見える点(x-point)では磁場強度が零になっている。図1はGAMMA10アンカー部の非軸対称極小ミラー磁場を軸対称磁場に置き換える為に設計したダイバータ磁場である[1]。このダイバータ磁場配位は巨視的安定性を確保した完全軸対称タンデムミラーの可能性を与える。

タンデムミラーではMITのTARAが最初にダイバータ磁場を中央ミラー部に設置して実験を行った[2]。当時はダイバータ磁場のフルートモードに対する安定化機構として, 電子の短絡効果が考えられていた。つまり, 図1の磁力線が交差するx-pointでは磁場が零であるので, 非磁化電

子はその零に沿って方位角方向へ自由に動けるであろうから高 $m$ モードは安定化されるだろうし,  $m=1$ のリジッドモードも変位がx-pointに到達したときには, やはりそこで安定化されるだろうと考えられていた。

理論的にもこの線に沿って解析が行われた。特にLane達[3]はx-point近傍でイオンと電子のnon-adiabatic layerを導入して解析を実行した。また図1にも見られるx-point近傍の大きな磁力線曲率の効果をイオンの運動に対する実効的遠心力の効果として取り入れた。つまりx-point近傍での電子の短絡による安定化効果とイオン軌道の実効的遠心力による安定化効果が取り入れられたことになる。

タンデムミラー実験ではTARAの実験に引き続いて, HIEI[4]でもダイバータ磁場でのフルートモードが安定化された事が報告されている。この中でフルートモードの安定化機構として, やはりx-point近傍での電子の非磁化による短絡効果が言及されている。

Pastukhovおよび笹川達はLane達の解析方法に対して磁力線曲率をより正確に解析に取り入れることで改良を行った[5,6]。つまり磁力線曲率を実効的遠心力に置き換えるのではなく, 磁力線の曲率半径で摂動展開をすることでより正確に磁力線曲率の効果を取り入れたわけである。この結果フルートモードに対する安定化機構として, 磁力線曲率の効果に起因するプラズマの圧縮による安定化の重要性が明らかになった。以下にこの効果について簡単に解説をする。

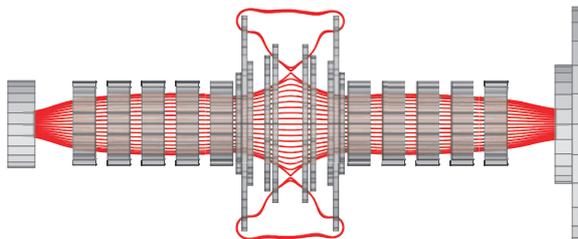


図1 ダイバータ磁場配位の模式図。

*Flute Modes and Transport in a Magnetic Divertor of an Open System*

KATANUMA Isao, PASTUKHOV Vladimir P., IMAI Tsuyoshi, ICHIMURA Makoto, KARIYA Tsuyoshi, NAKASHIMA Yousuke, HOJO Hitoshi, MINAMI Ryutarō, YAMAGUCHI Yusuke, YOSHIKAWA Masayuki, AKAO Hideki, WATANABE Tsuguhiko and HORTON Wendell

corresponding author's e-mail: katanuma@prc.tsukuba.ac.jp

教科書「プラズマ物理入門」[7]によると、プラズマ中の半径位置の異なる微小体積1と2が磁場のエネルギーを変えずに交換したときのプラズマのエネルギー変動量 $\delta Q_p$ は次式で与えられる。

$$\delta Q_p = \delta p \delta V + \gamma p \frac{(\delta V)^2}{V} \quad (1.1)$$

ここで $\delta p$ はプラズマ圧力の系の外側方向への変化量、 $\delta V$ は磁力線の微小体積のやはり系の外側方向への変化量である。また $\gamma$ は比熱比である。磁力管体積は磁束を $\Phi$ とすると $V = \int S dl = \Phi \int \frac{dl}{B}$ で与えられるので、磁力線の特性体積を $U = \int \frac{dl}{B}$  (および $\delta V = \Phi \delta U$ ) で定義する。ただし積分は磁力線に沿って実行される。通常の実験装置では $\delta p/p$ が $\delta U/U$ よりはるかに大きいので、(1.1)式の右辺第二項を無視することでフルートモードの安定条件の式

$$\delta p \delta U > 0 \quad (1.2)$$

が導かれる。通常のプラズマ閉じ込め実験装置では $\delta p < 0$ なので、フルートモードの安定化のためには $\delta U < 0$ 、つまり極小磁場を用いる必要性が出てくる。このため筑波大学プラズマ研究センターのGAMMA10では非軸対称極小磁場領域を装置内に含んでいる[8]。

しかし再び図1を眺めてみるとx-pointでは磁場強度が零であるので、その点を通過する磁力線の特性体積 $U$ は無限大になる。つまり(1.2)式の導出時に仮定した $|\delta p/p| \gg |\delta U/U|$ の条件が成り立たない。このとき(1.1)式の右辺第二項を無視しないときの安定化条件は

$$\delta(pU^\gamma) \delta U > 0 \quad (1.3)$$

で与えられ、臨界安定条件は径方向に対して

$$pU^\gamma = \text{const.} \quad (1.4)$$

となる。上記の安定化機構に関してはKadomtsevがプラズマの浮力に関連してわかりやすい解説をしている[9]。特に真空磁場では磁力線曲率ベクトル $\kappa$ は $\nabla_{\perp} B = \kappa B$ の関係があるので、後述する磁力管座標 $\psi$ を径方向座標として用いると $\frac{\partial U}{\partial \psi} = -2 \int \frac{\kappa_{\psi} dl}{B}$ と表すことができる。ここで軸対称磁場では $\kappa = \kappa_{\psi} \nabla \psi$ である事を用いた。この式からわかるように磁力線の特性体積と磁力線曲率は密接な関係がある。

実験装置内ではプラズマの境界で圧力 $p = 0$ になる必要があるが、図1のダイバータ磁場配位ではプラズマの境界にx-pointが来るようにすれば、その点を通る磁力線の特性体積が無限大になるので(1.4)式は全閉じ込め領域で満たされることになる。磁力線の特性体積がx-pointで無限大に発散することは、その近傍では(1.1)式の右辺第二項であるプラズマの圧縮の効果が重要になることを示している。

このプラズマの圧縮性によるフルートモードの安定化機構は、従来のx-point近傍での電子の短絡効果とは大きく異

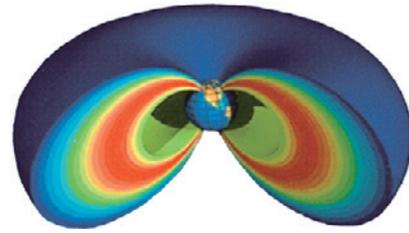


図2 地球磁気圏の模式図。

なった考え方であり、ダイバータ磁場配位の物理がより一般的な磁場へ適用できる可能性を示唆している。例えば図2に示すように地球の周りには磁気圏が広がっているが、磁気圏内に捕捉されているプラズマにとっては磁力線は悪い曲率(つまり $\delta U > 0$ )を持っている。このときのプラズマは(1.2)式ではなく(1.3)式または(1.4)式を満たすことでフルートモードが安定化されていると考えられる。図1のダイバータ磁場配位は図2の無限大の半径位置をx-pointの位置まで写像した配位であると考えられる。

装置内に磁場の零点が存在する実験装置は、プラズマの圧力分布が(1.4)式を満たすことでフルートモードが安定化されていると考えれば、多くの実験装置間で共通の物理(勿論速度シア等による安定化も共通の物理である)が存在することになる。例えば、図3はfield-reversed mirror[10]の模式図であるが、磁場零の点が存在している。この磁場配位はプラズマの内側に電流を流すことで実現して、図3中に矢印で方向を示した電流はプラズマの反磁性電流と高エネルギーの中性粒子ビーム入射によって生成される。このタイプの磁場配位は現在も逆磁場配位(FRC)(例えば参考文献[11])として実験が行われている。

また図4はダイポール磁場配位の模式図であるが、このタイプの磁場配位も実験が行われている[12]。この磁場配位はプラズマの内側に浮遊コイルを設けて電流を流すことで実現される。この場合、グラッド・シャフラノフ方程式で与えられる平衡[13-16](ここでは非等方圧力分布に対するグラッド・シャフラノフ方程式に関する論文を参考文献として挙げている)が実現する場合と、ベルトラミ条件で与えられる平衡[17-19]が実現する場合の二通りの実験条件がある。著者の勝手な考えでは、極端に大きな流れのな

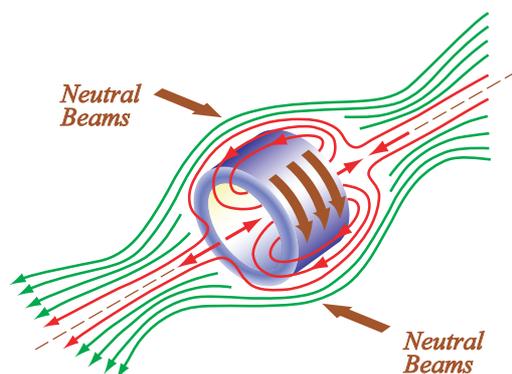


図3 field-reversed mirrorの模式図。

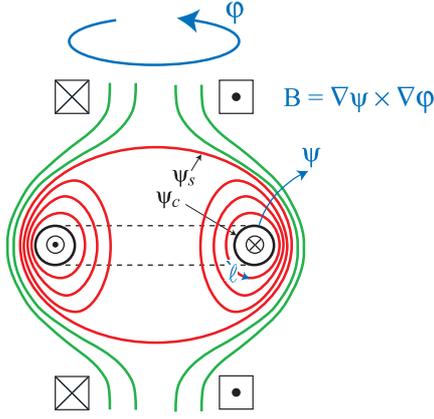


図4 ダイポール磁場の模式図.

い場合の平衡は図2と似たものになりそうである。

この節で紹介した磁場配位に共通することは、すべての磁場配位は軸対称で磁気シアが存在せず、かつプラズマ中心から外側へ磁力線の特性体積  $U$  が増加し、プラズマの外側の境界で  $U \rightarrow \infty$  になることである。これらの磁場配位では(1.4)式の臨界安定条件が成り立つような平衡配位が実現していると考えられる。しかし実際にはプラズマはクーロン衝突に起因する径方向拡散によって、(1.4)を満たす圧力分布からずれて(1.3)式の安定条件を満たさなくなる状況が発生するはずである。さらに図1のx-point近傍では磁場が零に近い値を持つために、イオンの径方向損失が増大する領域でもある。このためにx-point近傍での圧力分布は(1.4)式の臨界安定条件からずれて、フルートモードに対して不安定になる可能性がある。ではこのように臨界安定条件からわずかにずれた圧力分布を持つプラズマでは、フルート揺動が発生してどのようなプラズマの径方向輸送を引き起こすのであろうか。本論文ではこのような磁場配位を念頭において、フルート揺動の基礎方程式の導出とそれをを用いた計算機シミュレーション結果について述べる。

## 2. 基礎方程式

この節ではフルート揺動を記述する基礎方程式を導出するが、フルート揺動はすべての摂動量が磁力線に沿って一定である(つまり  $\xi$  の関数ではない)と仮定する。さらに平衡量(角変数  $\varphi$  の関数ではない量を平衡量として定義して添え字 '0' を付けて区別することにする)  $\rho_0$ ,  $v_0$ ,  $p_0$  はすべて磁力線に沿って一定の値であると仮定する。磁場に関しては軸対称磁場配位を仮定して、特に磁力線の特性体積  $U$  は流れ関数  $\psi$  と時間  $t$  のみの関数であると仮定する。 $U$  は系の散逸によって平衡状態が変化することにより、時間的に変化する。

ここでは(1.4)式で与えられる臨界安定状態にある(エントロピーを  $S = pU^\gamma$  で定義する)プラズマを考える。この臨界安定状態近傍でのフルート様モードによって引き起こされる非線形のプラズマ対流に関心を持つ。さらに

$$\beta \equiv \frac{8\pi p}{B^2} < \beta_{cr} \sim 1 \quad (\text{したがって非圧縮性アルヴェンモード}$$

は安定である) および臨界安定状態からの“ずれ”は  $\epsilon^2 \ll 1$  のオーダーで小さい(i.e.  $\nabla S \sim \epsilon^2 S/a$ ,  $a$  はプラズマ半径) という仮定の下に計算を進める。

この場合の対流運動の特性振動数は  $\omega \sim \epsilon k_\perp C_s$  であるので、安定な磁気音波 ( $\omega \sim k_\perp C_A$ ) や非圧縮性アルヴェン波 ( $\omega \sim k_\parallel C_A$ ) の特性振動数より非常に小さい。したがって、基礎方程式からこれらの波動の自由度を除外することができる。

出発となる基礎方程式を書き下すと

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \frac{1}{4\pi} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla p = -\gamma p (\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\gamma - 1) \nabla \cdot \mathbf{q} + (\gamma - 1) Q_E \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.4)$$

(2.1)式は通常の磁気流体(MHD)方程式である。また(2.3)式はBraginkiiの熱輸送方程式である[20]。

以下では上記のMHD方程式からアルヴェンモードと圧縮性モードを除外する方法を記述する。理想MHD流体近似でのLagrangianは

$$\mathcal{L} = \int d^3\mathbf{r} \left\{ \frac{\rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}{2} - \frac{p}{\gamma - 1} - \frac{B^2}{8\pi} \right\} \quad (2.5)$$

で与えられるが、この(2.5)式の変分をとると次のようになる。

$$\delta \mathcal{L} = \int d^3\mathbf{r} \left\{ \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v^2 - \frac{1}{4\pi} \mathbf{B} \cdot [\nabla \times [\boldsymbol{\xi}_\perp \times \mathbf{B}]] + \frac{1}{U^\gamma} \frac{\boldsymbol{\xi} \cdot \nabla S}{\gamma - 1} + \frac{\gamma p U}{\gamma - 1} \left( \nabla \cdot \frac{\boldsymbol{\xi}}{U} \right) \right\} \quad (2.6)$$

(2.6)式の右辺第3項は磁場の変動を引き起こす項で、第5項はプラズマの圧縮に関連した項である。後述するように、理想MHD方程式は(2.6)式が任意のプラズマの変位  $\boldsymbol{\xi} \sim \mathcal{O}(1)$  に対して  $\delta \mathcal{L} = 0$  になる要求から導出される。

ここでアルヴェンモードと圧縮性モードを除外するために、プラズマの断熱変位  $\boldsymbol{\xi}_a$  を  $\delta \mathcal{L}$  を極小にするように選ぶ。つまり

$$\nabla \times [\boldsymbol{\xi}_a \times \mathbf{B}] = 0, \quad \nabla \cdot \left( \frac{\boldsymbol{\xi}_a}{U} \right) = 0 \quad (2.7)$$

を満たすように  $\boldsymbol{\xi}_a$  を選ぶ。(2.7)式において  $\boldsymbol{\xi}_{a\perp}$  は第一式を満たすように決定して、 $\boldsymbol{\xi}_{a\parallel}$  は第二式を満たすように決定する。この場合  $\delta_a \mathcal{L}$  においてポテンシャルエネルギーからの寄与は  $\nabla S$  を含む項のみになるので、 $\delta_a \mathcal{L} \sim \epsilon^2$  である。この断熱変位  $\boldsymbol{\xi}_a$  は(2.6)式のLagrangianにおけるポテンシャルエネルギーの変化を引き起こさない意味においてフルート様モードに対してもっとも危険な変位である。

(2.7)を満たす変位  $\boldsymbol{\xi}_a$  は

$$\xi_a = \frac{1}{B^2} [\mathbf{B} \times \nabla \delta \alpha(\epsilon t, \psi, \varphi)] + \mathbf{B} \lambda \frac{\partial \delta \alpha(\epsilon t, \psi, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad (2.8)$$

$$\lambda = U \frac{\partial}{\partial \psi} \int_0^\zeta \frac{d\zeta}{UJ} + \frac{\nabla \psi \cdot \nabla \zeta}{r^2 B^2 J}$$

で与えられる。ここでは  $\mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \varphi$  で表示される  $(\psi, \varphi, \zeta)$  座標系を用いている。さらに系は  $\zeta = 0$  に関して対称であるとする、つまり磁場は  $\zeta$  に関して偶関数であると仮定する [単に (2.8) の第二式の積分領域を  $0 \sim \zeta$  にするためだけなので、特に仮定しなくてもよい]。また Jacobian  $J = \nabla \psi \times \nabla \varphi \cdot \nabla \zeta$  であり、軸対称磁場配位では  $\nabla \psi \cdot \nabla \varphi = 0$  であるが、 $\mathbf{B} \times \nabla \zeta \neq 0$  でもよい。さらに  $\nabla \psi \cdot \nabla \zeta \neq 0$  かつ  $\nabla \varphi \cdot \nabla \zeta = 0$  の性質がある。わかりやすく言うと  $2\pi\psi$  は  $\psi = \text{const.}$  の面内の磁束に対応して、 $\varphi$  は方位角方向の角度に相当している。さらに計算を進める上で便利なように  $\partial/\partial\psi$  と  $d\zeta$  の演算子が交換可能であるように  $\zeta$  座標を選ぶ。この場合  $\zeta$  軸として  $z$  軸を選んでよいし、また真空磁場 (または  $\text{low}\beta$ ) ならば  $d\zeta = B dl$  ( $l$  は磁力線に沿った距離に対応する座標) に選ぶこともできる [21]。

(2.8) 式において  $\xi_{a\perp} \times \mathbf{B} = \nabla \delta \alpha$  と置いている。つまり  $\delta \alpha$  は変位  $\xi$  に伴って発生する静電ポテンシャル  $\Phi(\epsilon t, \psi, \varphi)$  に相当している。このとき  $\Phi = \delta \alpha$  とすると、断熱速度  $v_a$  は次の関係式に従う。

$$v_a = \frac{1}{B^2} [\mathbf{B} \times \nabla \Phi(\epsilon t, \psi, \varphi)] + \mathbf{B} \lambda \frac{\partial \Phi(\epsilon t, \psi, \varphi)}{\partial \varphi} \sim \epsilon C_s \quad (2.9)$$

(2.9) 式に記述している  $v_a \sim \mathcal{O}(\epsilon)$  の評価に関しては、まず (2.6) 式の Lagrangian からラグランジの運動方程式が  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \delta L}{\partial \xi_{a\perp}} - \frac{\partial \delta L}{\partial \xi_{a\perp}} = 0$  で与えられる。したがって  $\rho \omega^2 \xi_{a\perp} \simeq k_{\perp} \xi_{a\perp} \epsilon^2 p/a$  つまり  $v_a^2 \simeq \frac{\omega^2}{k_{\perp}^2} \simeq \frac{\epsilon^2 C_s^2}{k_{\perp}^2 a}$  ( $C_s^2 = \gamma p/\rho$ ) となることがわかる。また同時に  $\omega^2 \simeq \frac{\epsilon^2 k_{\perp} C_s^2}{a}$  でもあるので  $\partial/\partial t \sim \mathcal{O}(\epsilon)$  と評価される (詳細は Appendix 1 を参照のこと)。

さて理想 MHD 方程式は「(A1.5) 式、(A1.6) 式または参考文献 [22] からわかるように」ハミルトンの原理から導出される。

$$\delta \mathcal{A} = \int dt \delta \mathcal{L} = \int dt d^3 r (\xi \cdot \{E_o M\}) \quad (2.10)$$

つまり (2.10) の時間に関する積分が停留をとるように運動が決まる。ただし  $\delta \mathcal{L}$  の表式は (2.6) 式で与えられ、 $\{E_o M\}$  は  $\delta \mathcal{L}$  の部分積分で得られる表式である。 $\xi$  が任意のプラズマ変位であるならば

$$\{E_o M\} = -\rho \frac{\partial v}{\partial t} - \rho v \cdot \nabla v - \nabla p - \frac{\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi} \quad (2.11)$$

である。(2.10) 式の  $\xi$  に対し (2.8) 式の  $\xi_a$  を用いて  $\delta \mathcal{A}$  を  $\delta \alpha(\epsilon t, \psi, \varphi)$  に関する変分として表すと次のように変形される。

$$\delta \mathcal{A} = \int dt d\psi d\varphi \delta \alpha(\epsilon t, \psi, \varphi)$$

$$\left( \int \frac{d\zeta}{J} \left\{ \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{B} \times \{E_o M\}}{B^2} \right) - \frac{\partial (\lambda \mathbf{B} \cdot \{E_o M\})}{\partial \varphi} \right\} \right) \quad (2.12)$$

したがってこの積分の第一変分が零になるためには (つまり任意の  $\delta \alpha$  に対して  $\delta \mathcal{A} = 0$  となるためには)

$$\int \frac{d\zeta}{J} \left\{ \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{B} \times \{E_o M\}}{B^2} \right) - \frac{\partial (\lambda \mathbf{B} \cdot \{E_o M\})}{\partial \varphi} \right\} = 0 \quad (2.13)$$

を満たす必要がある (散逸の効果が変分にどのように現れるかは Appendix 2 を参照のこと)。(2.13) 式が  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  のオーダーで求めたい運動方程式である。このとき Lagrangian は 3 次元ベクトル変数  $\xi_a$  からスカラー変数  $\delta \alpha$  に正準変換されている。(2.13) の関係式を用いて元の MHD 方程式を変形していく手続きを reduction (または Adiabatic Separation Method) と呼ぶ。

例えば運動量  $\rho v_a$  の reduction は次のようになる。

$$\begin{aligned} \mathcal{R}\{\rho v_a\} &\equiv \int \frac{d\zeta}{J} \left\{ \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{B} \times \{\rho v_a\}}{B^2} \right) - \frac{\partial (\lambda \mathbf{B} \cdot \{\rho v_a\})}{\partial \varphi} \right\} \\ &= - \int \frac{d\zeta}{J} \left\{ \nabla \cdot \left( \frac{\rho}{B^2} \nabla \Phi(\epsilon t, \psi, \varphi) \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \lambda^2 B^2 \rho \frac{\partial \Phi(\epsilon t, \psi, \varphi)}{\partial \varphi} \right) \right\} \\ &= -\dot{w} \equiv -U \langle w \rangle \end{aligned} \quad (2.14)$$

(2.14) 式中の  $\langle \dots \rangle$  は磁力管内の平均を表す記号

$$\langle A \rangle \equiv \frac{1}{U} \int \frac{A(\psi, \varphi, \zeta) d\zeta}{J(\psi, \zeta)}$$

であり、 $\hat{\mathcal{A}}$  は磁力管内で積分した記号  $\hat{\mathcal{A}} = \langle A \rangle U$  を表している。(2.14) 式の物理的な意味をここで述べる。(2.6)、(2.9) 式に着目すると  $\delta \mathcal{L}$  の中で  $\delta \alpha$  が現れるのはその中で運動エネルギーに対応する

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{K} &= \int dt \delta \mathcal{L} \Rightarrow \int dt \int d^3 r [\dot{\xi} \cdot \{\rho v\}] \\ &\Rightarrow \int dt \int d\psi d\varphi \delta \dot{\alpha}(\epsilon t, \psi, \varphi) \mathcal{R}\{\rho v\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

の項である。運動方程式はラグランジュの運動方程式より

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \delta \dot{\alpha}} - \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \delta \alpha} = 0 \quad (2.16)$$

で与えられることに注意すると、(2.14) 式は

$$P_a = \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \delta \dot{\alpha}} = -\dot{w}$$

となるので、正準座標  $\delta \alpha$  に共役な正準運動量が  $-\dot{w}$  であることがわかる。

(2.11)、(2.13) 式から運動方程式は次のようになる。

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\psi} \dot{w} + [\Phi, \dot{w}] - [\rho, \langle \frac{v_a^2}{2} \rangle] + \frac{1}{U^2} \frac{\partial U}{\partial \psi} \frac{\partial \langle \tilde{S} \rangle}{\partial \varphi} = \{DT\} + U Q_w^* \quad (2.17)$$

ただし  $\left. \frac{\partial}{\partial t} \right|_{\psi}$  は  $\psi$  を一定にした  $t$  に関する微分であることを

示す記号である。\$\bar{S}\$ はエントロピーの摂動成分 (\$S = S\_0 + \bar{S}\$) と分離したときの \$\varphi\$ 依存性を含む成分が \$\bar{S}\$ である。\$UQ\_w^\*\$ は特性動的渦 (specific dynamic vorticity) の実効的なソース項である。また \$\hat{w}\$ は (2.14) より

$$\hat{w} = \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \hat{\rho} \langle r^2 \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \hat{\rho} \left\langle \frac{1}{r^2 B^2} + \lambda^2 B^2 \right\rangle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right) \quad (2.18)$$

であり、磁力管内で積分した質量密度 \$\hat{\rho} (\equiv \rho U)\$ と静電ポテンシャル \$\Phi\$ の関数として表される。(2.17)式の左辺第二、第三項の記号は

$$[\Phi, \hat{w}] \equiv \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \varphi} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \psi} \quad (2.19)$$

で定義され、この表式は Poisson bracket として知られている。さらに

$$\langle v_\alpha^2 \rangle = \langle r^2 \rangle \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)^2 + \left\langle \frac{1}{r^2 B^2} + \lambda^2 B^2 \right\rangle \left( \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 \quad (2.20)$$

が \$v\_\alpha\$ の表式 (2.9) から直ちにわかる。また (2.17) 式の右辺の {DT} は散逸項を表す。(2.17) 式の運動方程式は \$\hat{w}\$ に対する方程式になっているが、この \$\hat{w}\$ の物理的意味は (2.18) 式が

$$\hat{w} = \int \left\{ \frac{\mathbf{B}}{B} \cdot \left[ \nabla \times \left( \rho \frac{\mathbf{B} \times \nabla \Phi}{B^2} \right) \right] \right\} \frac{d\xi}{J} + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \hat{\rho} \langle \lambda^2 B^2 \rangle \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)$$

のようにベクトル表示での積分形で書き表すことができることに注意すれば、\$\hat{w}\$ は質量流速に対する渦度を磁力管内で積分したものであることがわかる。

質量密度に関する時間発展方程式は、連続の式 (2.2) において \$\mathbf{v} = \mathbf{v}\_\alpha + \mathbf{v}\_s\$ と分離して [\$v\_s\$ は付録 (A2.4) 式を参照] 磁力管内で積分することで次の方程式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \Big|_\psi \hat{\rho} + [\Phi, \hat{\rho}] = 4\pi \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \hat{\rho} \langle r^2 D \rangle \frac{\partial p_0(\psi)}{\partial \psi} \right) + Q_\rho^* U \quad (2.21)$$

ここで \$p\_0(\psi)\$ はプラズマの平衡圧力であり、また

$$Q_\rho^* = \langle Q_\rho \rangle - \frac{1}{U} \rho u_{\parallel}^+ = \langle Q_\rho \rangle + \frac{1}{U} \left[ \frac{d\hat{\rho}}{dt} \right]_{\parallel} \quad (2.22)$$

は、プラズマのソース \$\langle Q\_\rho \rangle\$ と磁力線方向損失 (開放端系の場合) が含まれている。連続の式 (2.2) の reduction によって拡散項が現れる理由は、質量密度の時間微分の項を

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial \rho}{\partial t} \Big|_\psi + \dot{\psi} \frac{\partial \rho}{\partial \psi}$$

のように分離して、\$\dot{\psi}\$ に対して散逸による磁場の拡散項 (A2.5), (A2.9) 式を代入したためである。

最後に熱輸送方程式 (2.3) から \$\mathbf{v} = \mathbf{v}\_\alpha + \mathbf{v}\_s\$ と分離して磁力管内で積分することで次の温度に関する輸送方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Big|_\psi \hat{T} + [\Phi, \hat{T}] = & \\ & -(\gamma-1) \frac{U^\gamma}{\hat{\rho}} \left\{ \frac{1}{U} \frac{\partial \langle \mathbf{q} \cdot \nabla \psi \rangle}{\partial \psi} + \frac{\partial \langle \mathbf{q} \cdot \nabla \varphi \rangle}{\partial \varphi} \right\} \\ & + Q_T^* \frac{U^\gamma}{\hat{\rho}} + 4\pi d_M \left( \frac{\partial \hat{T}}{\partial \psi} \right) \langle r^2 \rangle \left( \frac{U^{\gamma-1}}{\hat{T}_0} \right)^{3/2} \frac{\partial p_0}{\partial \psi} \\ & + 4\pi d_M (\gamma-1) \hat{T} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \langle r^2 \rangle \left( \frac{U^{\gamma-1}}{\hat{T}_0} \right)^{3/2} \frac{\partial p_0}{\partial \psi} \right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

ここで

$$\begin{aligned} Q_T^* = (\gamma-1) \langle Q_E \rangle + \left[ \frac{d(2nT)}{dt} \right]_{\parallel} \\ - \frac{\hat{T}}{U^{\gamma-1}} \left( \langle Q_\rho \rangle + M_i \left[ \frac{dn}{dt} \right]_{\parallel} \right) \end{aligned} \quad (2.24)$$

は熱ソース \$\langle Q\_E \rangle\$ と磁力線方向損失 (開放端系の場合) の項を含んでいる。このとき \$\hat{T} = S/\hat{\rho}\$ で温度変数 \$\hat{T}\$ を定義した。\$S = pU^\gamma\$ であることを思い出せば、\$\hat{T} = (T\_e + T\_i) U^{\gamma-1}/M\_i\$ の関係のあることがわかる。ただし \$T\_e, T\_i, M\_i\$ はそれぞれ電子温度、イオン温度、イオン質量である。さらに (2.23) 式中の熱輸送の項は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{q} \cdot \nabla \psi \rangle = -X_M \rho^2 \langle r^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{p}{\rho} \right)^{1/2}, \\ \langle \mathbf{q} \cdot \nabla \varphi \rangle = -X_M \rho^2 \left\langle \frac{1}{r^2 B^2} \right\rangle \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} \right)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.25)$$

(2.25) 式の導出は Appendix 3 を参照されたい。さらに (2.23) 式の右辺第三項、第四項は \$\partial/\partial t = \partial/\partial t|\_\psi + \dot{\psi} \partial/\partial \psi\$ のように時間微分を分離したことによる \$\dot{\psi}\$ の項から現れる。これらの項中にある \$d\_M\$ の定義は (A3.10) 式で、また \$X\_M\$ の表式は (A3.7) 式で与えられている。

この節の最後として、(2.17) 式の右辺の散逸項 {DT} の具体的な表式は次のようになる [23, 24]。

$$\begin{aligned} \{DT\} = \frac{3X_M}{20} \left( \frac{T_i + T_e}{2T_i} \right) \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \hat{\rho} \langle r^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{1}{U^{2/3} \sqrt{\hat{T}_0}} \frac{a^2}{\langle r^2 \rangle} \hat{w} \right) \right) \right. \\ \left. + \frac{a^2}{\langle r^2 \rangle} \left\langle \frac{1}{r^2 B^2} \right\rangle \frac{\hat{\rho}}{U^{2/3} \sqrt{\hat{T}_0}} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \varphi^2} \right\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

ただし \$a\$ は特性空間長 \$a(\psi) = \sqrt{\langle r^4 \rangle / \langle r^2 \rangle}\$ であり、散逸項 (2.26) 式は古典的な流体力学の Navier-Stokes 方程式内の粘性項と同じ役割をする。特にその粘性項は高いレイノルズ数を持った流れ内に発生する微小サイズの渦の散逸を引き起こす役割をする。

また (2.17) 式における \$\bar{S}\$ は \$\mathcal{O}(\epsilon^2)\$ までの精度では

$$\bar{S} = \hat{\rho}_0 \tilde{T} + \hat{T}_0 \tilde{\rho} \quad (2.27)$$

のように表すことができる。ここで変数 \$\hat{w}, \hat{T}, \hat{\rho}\$ はすべて \$\hat{w} = \hat{w}\_0 + \tilde{w}, \hat{T} = \hat{T}\_0 + \epsilon^2 \tilde{T}, \hat{\rho} = \hat{\rho}\_0 + \epsilon^2 \tilde{\rho}\$ のように \$\varphi\$ に依存しない量 (0 の添え字付) と依存する量 (˜付) に分離して、

それぞれ平衡量と摂動量と呼ぶ。特に  $\hat{T}$  と  $\hat{\rho}$  に関しては平衡量 ( $\sim \mathcal{O}(1)$ ) に対して摂動量が  $\mathcal{O}(\epsilon^2)$  であると仮定している。

### 3. 数値解析

前節で求めた磁力管内で積分した質量密度 (2.21), 渦度 (2.17), 温度 (2.23) と静電ポテンシャルを求める式 (2.18) の連立方程式を数値的に解くことによって, ダイバータ磁場内でのフルート揺動とプラズマの径方向輸送に関して調べることができる。この節では粒子, 熱輸送に関しての比熱比を  $\gamma = 5/3$  とする。

以下では M の添え字は任意に選んだ位置 (例えば, ミラー中央面軸上) での初期値を表す。まず,  $\epsilon$  の正確な定義を次のように与える。

$$\epsilon^3 = \frac{\chi_M}{bc_{SM}} \left( \frac{2T_i}{T_i + T_e} \right)_M \quad (3.1)$$

ここで  $b \equiv \sqrt{\psi_b/B_M}$  であり,  $2\pi\psi_b$  は初期値でのプラズマの外部境界 (separatrix, cc-limiter, etc.) で囲まれた磁束である。この節の数値計算では  $\epsilon^2 = 10^{-2}$  に設定した。無次元 (規格化) 径方向座標  $x$  と無次元 (規格化) 時間  $\tau$  を次のように定義する。

$$x = \sqrt{\psi/\psi_b}, \quad x_s(t) = \sqrt{\psi_s(t)/\psi_b}, \quad \tau = \epsilon t c_{SM}/b \rightarrow t \quad (3.2)$$

このとき  $x_s(t)$  は時間的に (例えば有限  $\beta$  平衡で) 位置の変化する境界の位置座標 ( $x_s(0) = 1$ ) である。さらに規格化時間  $\tau$  を新たに  $t$  とする。

磁力線の特性体積内で積分した温度の平衡 (つまり  $\varphi$  の関数ではない遅い変動の) 成分は  $T_E = \hat{T}_0 \rho_M / \rho_M U_M^{2/3}$ , 温度の揺らぎ (つまり  $\varphi$  に依存する速い変動の) 成分は  $T_f = \hat{T} \rho_M / \epsilon^2 \rho_M U_M^{2/3}$  で規格化する。磁力線の特性体積内で積分したプラズマの質量密度の平衡 (つまり  $\varphi$  の関数ではない遅い変動の) 成分は  $D_E = \hat{\rho}_0 / \rho_M U_M$ , 質量密度の揺らぎ (つまり  $\varphi$  に依存する速い変動の) 成分は  $D_f = \hat{\rho} / \epsilon^2 \rho_M U_M$  で規格化する。静電ポテンシャルは  $\phi = b\Phi / \epsilon c_{SM} \psi_b$  で規格化し, 磁力線の特性体積内で積分した渦度 (vorticity) は  $w = \hat{w} \psi_b / \epsilon \rho_M U_M b c_{SM} = w_0 + w_f$  のように規格化して  $w_0$  成分と  $w_f$  成分に分離する。ここで  $w_0$  はシア流の特性動的渦度 [specific dynamic vorticity of sheared (zonal) flows] であり, したがって  $w$  の  $\varphi$  方向に一様な成分である。

時間発展の基礎方程式は  $\varphi$  方向にはフーリエ変換を行い, 時間  $t$  および  $x$  (つまり  $\psi$ ) 方向には 2 段階修正 Lax-Wenderoff スキーム [25] を用いて差分化をした。  $x = x_s$  での境界条件として  $\partial D_E / \partial x = 0$ ,  $\partial T_E / \partial x = 0$  を採用した。  $w_0$  に関しては, 境界からの流入出がないようにして全空間積分量  $\int_0^1 w_0 x dx$  が時間的に保存するようにした。摂動量に関しては  $D_E$ ,  $T_E$  と同様に  $x = x_s$  の境界上でその導関数が零である境界条件を用いた。しかし  $x \sim x_s$  近傍では  $\varphi$  方向へのドリフト速度と拡散が非常に大きいので, 摂動量は  $x = x_s$  ではその値はほぼ零になる。さらに以下の計算では  $80 \times 64$  のメッシュを用いて計算を実行した。

この節の計算機シミュレーションでは (3.3) 式のモデル

ダイバータ磁場配位を用いる。

$$\begin{aligned} B_z &= B_0 \left( 1 - \frac{1}{I_0 \left( \pi \frac{R_s}{L} \right)} I_0 \left( \pi \frac{r}{L} \right) \cos \left\{ \pi \frac{z}{L} \right\} \right), \\ B_r &= -B_0 \frac{1}{I_0 \left( \pi \frac{R_s}{L} \right)} I_1 \left( \pi \frac{r}{L} \right) \sin \left\{ \pi \frac{z}{L} \right\}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

ここで,  $I_0, I_1$  は修正ベッセル関数で, 記号  $R_s$  はミラー磁場の中央部軸上から磁場零の位置までの距離 (半径) である。(3.3) 式の磁場は  $z$  方向に周期  $2L$  の周期境界条件を満たしている。さらに,  $L = 100$  cm,  $R_s = 65$  cm と仮定した。図 5 にこのパラメータでのモデルダイバータ磁場配位をプロットした。

初期条件として  $T_E(x) = 1.0$ ,  $D_E(x) = 1.0$  の平衡状態に, (3.4) 式で与えられる  $T_f$  の摂動 (最大値が 1 であり, その空間分布を図 6 にプロット) を与えた。

$$T_f(x, \varphi) = \begin{cases} -\sin(3\pi(x-2/3)) \sin(10\varphi) & \text{in the region } 1 > x > \frac{2}{3} \text{ and } \frac{\pi}{10} > \varphi > 0 \\ 0 & \text{in other region} \end{cases} \quad (3.4)$$

この  $T_f$  の最大値は  $T_E$  に対して  $\epsilon^2$  だけ小さい事に注意が必要である。つまり平衡量  $T_E$  に対して最大値  $\epsilon^2$  の振幅の摂動を与えたことになる。この摂動はプラズマの圧力勾配が外部境界近傍で急峻 [つまり (1.3) 式において  $\partial(\rho U^r)/\partial \psi < 0$ ] になるためにフルートモードに対して不安定である。ここで念のために, 記号に関して整理する。(2.14) 式の下および (2.27) 式の下で文章で定義しているように, 質量密度  $\hat{\rho}_0 + \epsilon^2 \hat{\rho} = U(\rho)$ , 温度  $\hat{T}_0 + \epsilon^2 \hat{T} = U^{2/3} \langle T_e + T_i \rangle / M_i$ , および渦度  $\hat{w}_0 + \hat{w} = U(w)$  はそれぞれ磁力管に沿って積分した量である。つまりそれらの規格した量は  $D_E(x) + \epsilon^2 D_f(x, \varphi) \propto U(\rho)$ ,  $T_E(x) + \epsilon^2 T_f(x, \varphi) \propto U^{2/3} \langle T_e + T_i \rangle$ ,  $w_0(x) + w_f(x, \varphi) \propto U(w)$  のように各量に対して磁力管の特性体積  $U$  の積になっている。したがって上記の  $T_E(x) = 1.0$ ,  $D_E(x) = 1.0$  の平衡状

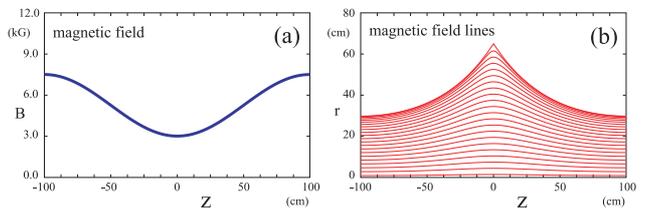


図 5 モデルダイバータ磁場配位。

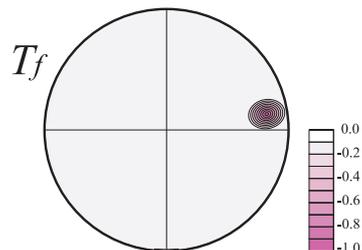


図 6 初期摂動。

態は実際は  $\langle T_e + T_i \rangle \propto 1/U^{2/3}$  および  $\langle \rho \rangle \propto 1/U$  の径方向依存性を持っている。また(3.4)式の初期摂動は実際の摂動温度としては  $\langle T_e + T_i \rangle \propto e^2 T_f(x, \varphi) / U^{2/3}$  のように  $U^{2/3}$  で割った摂動を加えていることに注意が必要である。

$w_0$  の初期値に関しては  $w_0(x) = -1$  と  $w_0(x) = +1$  の二種類の計算を行った。  $w_0(x) = \text{const.}$  の初期条件はプラズマが速度シアのない剛体回転をしていることに相当する。さらに  $w_0$  の正負でプラズマの回転方向が逆転する。このとき基礎方程式系からは必ずしも自明ではないが、物理的にはプラズマの初期の回転方向の正負によってその後のフルート揺動の時間発展には影響はないはずである。剛体回転を初期条件として選んだ理由は、開放端系実験装置の一つである GAMMA10 実験では径方向電場シアが比較的小さいことと、速度シアが存在することで現れる不安定性 (Kelvin-Helmholtz instability と同類) の発生を抑制してフルートモードのみが発生する初期条件下で計算を開始するためである。

計算を実行するときに時間ステップ  $\Delta t = 2 \times 10^{-4}$  の刻みで時間発展方程式を解いていった。図7と図8はそれぞれ  $w_0(x) = -1$  と  $w_0(x) = +1$  の初期条件から出発したときの、  $x = 0.8$  における  $\varphi$  方向のモード数  $m = 1 \sim 5$  の  $t = 0 \sim 20$  の振幅の時間変化をプロットした図である。温度の初期摂動に起因するフルート揺動はまず  $w_f$  が成長(つまり  $\phi$  も成長)を始め次に  $T_f$  が  $t \approx 4$  あたりから成長に転じていく。摂動温度  $T_f$  の振幅の時間発展は  $t \approx 10$  から非線形領域に入り、  $t \approx 12$  で  $m = 1$  モードの最初の急激な振幅の減少が発生する。フルート不安定性の線形領域 ( $t \leq 10$ ) および非線形領域 ( $10 \leq t \leq 20$ ) にかけて図7と図8は完全に一致して

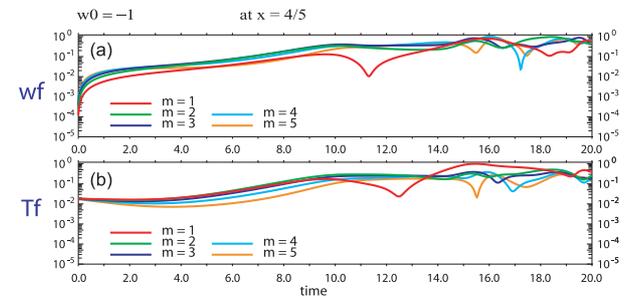


図7  $t = 20$  までの  $x = 0.8$  での摂動振幅 (モード数  $m = 1 \sim 5$ ) の時間発展 ( $w_0(x) = -1$  の初期条件). 全振幅中の最大値を1に規格化している。

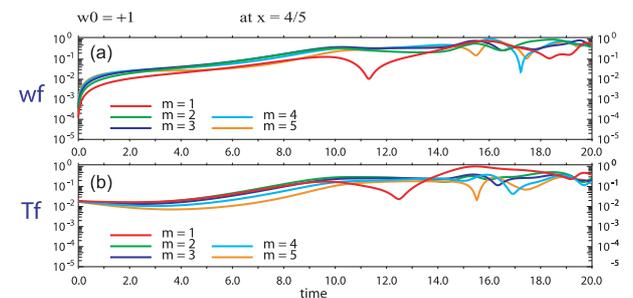


図8  $t = 20$  までの  $x = 0.8$  での摂動振幅 (モード数  $m = 1 \sim 5$ ) の時間発展 ( $w_0(x) = +1$  の初期条件). 全振幅中の最大値を1に規格化している。

いる。

フルート不安定性は流体力学のレイリー・テイラー不安定性と類似した不安定性であり、周辺プラズマの高温プラズマ中心部への突入が発生する特徴がある。図7と図8の  $t \sim 12$  における  $m = 1$  摂動温度振幅の大きな減少は、図9に示されるように周辺低温領域のプラズマが中心部へ侵入する事で起っている。図中の矢印の向きはプラズマの回転方向を示している、  $t = 12$  の時刻では丁度3回転が終わろうとしている。図6の初期摂動位置も  $t = 12$  までに図9中の矢印の方向に大体3回転して温度の低い領域上に位置している。この時刻での  $T_f$  (図中では  $\tilde{T} = T_f / U^{2/3}$ ) はレイリー・テイラー不安定性ではしばしば観察される傘を半開きにしたような等温度面を形成していることがわかる。  $t = 12$  以降は中心近傍に進入した低温領域は拡散によってやがて消失する。しかし  $x \sim 0.8$  の周辺領域では図7と図8の各モードの振幅の時間変化からもわかるように生き残っていく。つまり図6で与えられた初期摂動はずっと生き残って、繰り返しフルート不安定性を引き起こしては周辺の低温領域のプラズマの中心領域への侵入を繰り返させる。

図9は計算コードのテストも兼ねてプロットした図である。図9(a), (b)が  $w_0(x) = -1$  から図9(c), (d)が  $w_0(x) = +1$  の初期条件から出発した計算結果である。  $\phi$  は互いに符号が反転した反対称である一方、  $T_f$  は反対称でその反対称性の内部構造は細部まで一致している。  $w_0$  の初期値の符号の反転によって基礎方程式が完全に反対称で一致するわけではない。つまり数値誤差による違いの発生する余地が存在する。  $t = 20$  までの良い反対称性が保たれていることは、その時間発展において数値誤差が将来に増幅しない条件も存在しているからである。

図10, 11は  $t = 200$  までの  $x = 0.8$  における  $\varphi$  方向のモード数  $m = 1 \sim 5$  の振幅の時間変化をプロットした図である。この図より非線形領域ではフルート不安定性が大体  $\delta t \approx 6$  の周期で繰り返し発生していることがわかる。そして  $t = 180$  辺りから別の状態に移行している様子も見ること

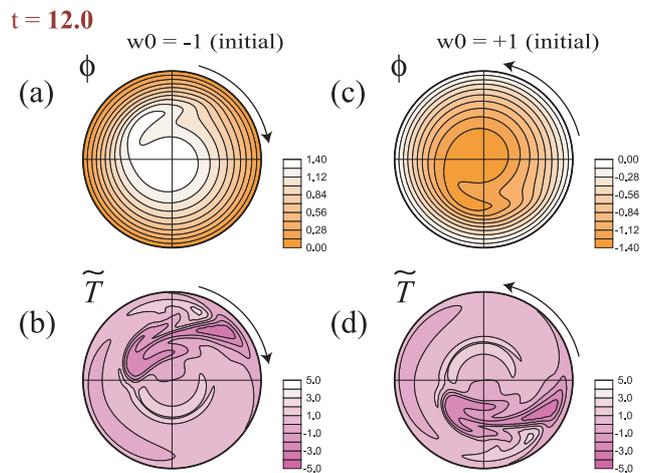


図9  $t = 12$  における  $\phi$  と  $\tilde{T} = T_f / U^{2/3}$  の等高線図。(a), (b)が  $w_0(x) = -1$ , (c), (d)が  $w_0(x) = +1$  の初期条件から出発したときの計算結果。

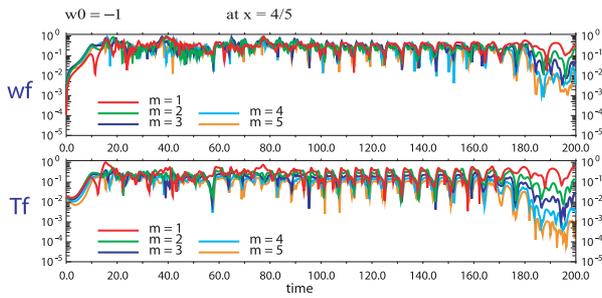


図10  $t = 200$  までの  $x = 0.8$  での摂動振幅(モード数  $m = 1 \sim 5$ )の時間発展 ( $w_0(x) = -1$  の初期条件), 全振幅中の最大値を 1 に規格化している.

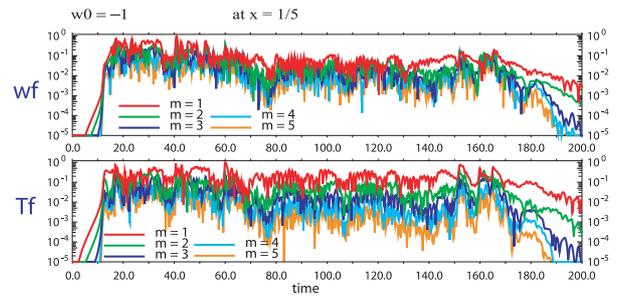


図12  $t = 200$  までの  $x = 0.2$  での摂動振幅(モード数  $m = 1 \sim 5$ )の時間発展 ( $w_0(x) = -1$  の初期条件), 全振幅中の最大値を 1 に規格化している.

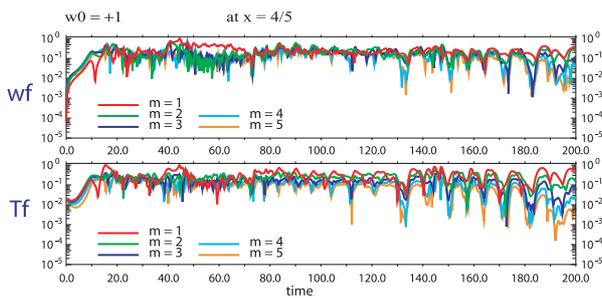


図11  $t = 200$  までの  $x = 0.8$  での摂動振幅(モード数  $m = 1 \sim 5$ )の時間発展 ( $w_0(x) = +1$  の初期条件), 全振幅中の最大値を 1 に規格化している.

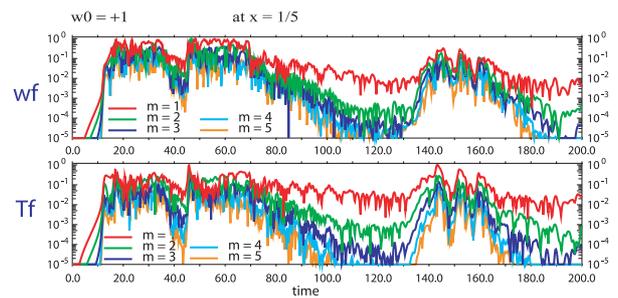


図13  $t = 200$  までの  $x = 0.2$  での摂動振幅(モード数  $m = 1 \sim 5$ )の時間発展 ( $w_0(x) = +1$  の初期条件), 全振幅中の最大値を 1 に規格化している.

ができる。  $t = 20 \sim 180$  の時刻での系の振る舞いで特徴的なことは図10と図11で振幅の一致が良くないことである。つまり小さな数値誤差が将来の時間発展に大きな影響を与えている領域である。しかし、不安定性の周期的な発生という規則性も見られる状態でもであるので、  $x \sim 0.8$  近傍は準乱流状態にあるといえる。

しかし同じ  $t = 20 \sim 180$  の時間帯でも  $x = 0.2$  の中心付近では各モードの振幅の振る舞いは少し違ったものになっている。図12, 13に  $x = 0.2$  での  $m = 1 \sim 5$  のモード振幅の時間変化の様子をプロットした。特徴的なことは  $x = 0.8$  の位置での振る舞いと異なって、  $x = 0.2$  ではまったく周期性が見られないことである。また図12と図13の振る舞いにも大きな差異が発生している。では中心近傍ではどんなことが起こっているのだろうか。

図14は  $t = 80, 82, 84$  の時刻における静電ポテンシャル  $\phi$  と摂動温度  $T_1$  の等高線図である。  $t = 80 \sim 82$  の時刻では図11の振幅の時間変化からわかるように、  $x = 0.8$  において丁度  $m = 2 \sim 5$  やもっと高次モードの振幅が極大になる時刻で、これは  $T_1$  の摂動がデルタ関数に近い(つまり初期条件のように温度の低い位置が  $\phi$  方向に局在している) ことに対応している。次に  $t = 82 \sim 84$  では  $m = 3 \sim 5$  のモードが極小値を持つ(つまり摂動振幅が  $\phi$  方向に広がっている) 時刻である。この時間帯でのフルート不安定性は  $t = 79$  から成長を開始して中心部へ低温度領域が進入を開始する。その不安定性の成長は  $t = 80$  で飽和して、準安定状態になったのが図14(b)に  $T_1$  の等高線で示した状態である。この時刻の静電ポテンシャル  $\phi$  の空間分布を図14(a)にプロットした。プラズマは  $E \times B$  ドリフトで流れていくので、

この電位分布は中心領域と周辺領域とで  $\phi$  方向のプラズマ流の方向が逆転していることを示している。図中の矢印は周辺領域のプラズマの回転方向を示していて、周辺領域のプラズマは  $t = 80 \sim 84$  の間に大体  $4/3$  回転(つまり  $t \leq 12$  の時刻より加速)している。さらに中心部に存在する逆向きの流れによって低温度領域の中心部へ侵入することが妨げられている様子が観測される。静電ポテンシャルのピーク点(最小点)位置も同じ矢印の方向に回転しているが、  $t = 80 \sim 84$  の間に大体  $1/2$  回転するだけである。準安定状態の低温度領域は  $t = 82$  から  $84$  にかけて静電ポテンシャルによって周辺部へ押し出される様子が図14(c)-(f)で見られる。このことから中心近傍では周辺部とは逆向きの流れを発生させる静電ポテンシャルの形成によって内部熱輸送障壁が形成されていると考えられる。図14(a)-(c)の過程は時間的に繰り返し発生する。

$t = 100 \sim 130$  の時間帯では図13, 15にプロットしたように振幅が非常に小さい状態が実現している。これは図15(a)の静電ポテンシャル  $\phi$  に見られるように中心近傍の軸対称等電位面が径方向に広がった状態になっている。このとき静電ポテンシャルの径方向極大位置が  $x \sim 0.7$  に存在して、やはり中心部と周辺部とでプラズマの流れの方向が逆転している。このために周辺で発生したフルート不安定性が中心近傍に侵入できないので、図15(b)の  $T_1$  のように揺動の小さい状態が維持されている。しかし  $\phi$  の値は図14に比べて全体的に小さくなっている一方、周辺部に局所的な低温度領域が依然存在しているので、突発的に大きなフルート不安定性が発生することがある。このとき  $\phi$  の値が小さくなっているために、低温度の領域が中心近傍まで進

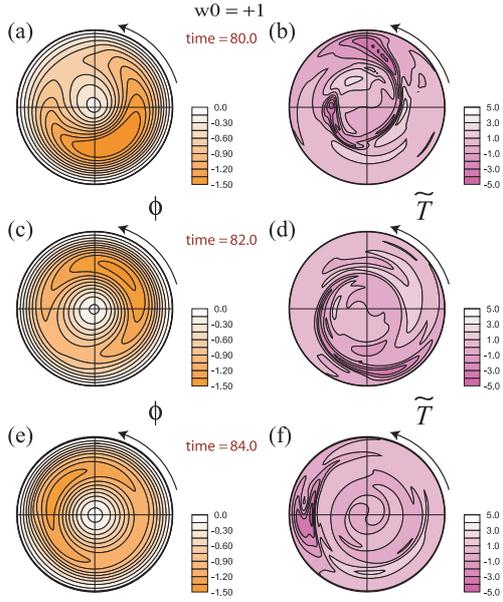


図14  $t = 80 \sim 84$  間の静電ポテンシャルと摂動温度の等高線図 ( $w_0(x) = +1$  の初期条件).

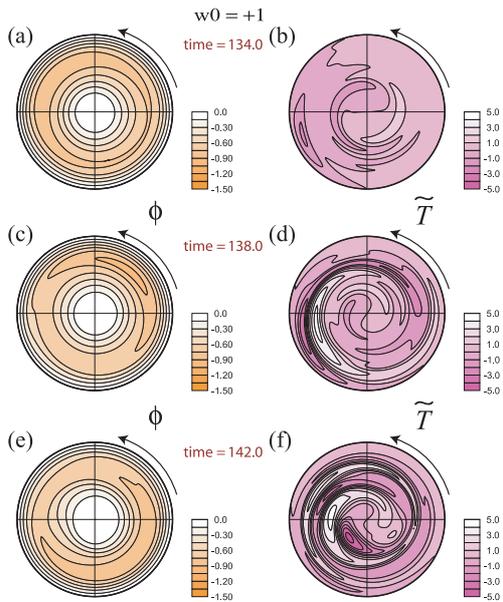


図15  $t = 134 \sim 142$  間の静電ポテンシャルと摂動温度の等高線図 ( $w_0(x) = +1$  の初期条件).

入できる。この様子を図15にプロットした。この様な突発的に大きなフルート不安定性が発生することによって図13の  $t = 140$  付近での振幅の上昇が起こっている。以上のことは  $t \approx 180$  でも繰り返される。

さて次にプラズマの径方向輸送に関して述べる。質量密度と温度の異常輸送量  $\Gamma_{\text{anorm}}^{\rho}$ ,  $\Gamma_{\text{anorm}}^T$  をそれぞれ次の式で定義する。

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{anorm}}^{\rho} &= -\frac{1}{2\pi U} \int_0^{2\pi} \left( \tilde{\rho} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) d\phi, \\ \Gamma_{\text{anorm}}^T &= -\frac{1}{2\pi U^{2/3}} \int_0^{2\pi} \left( \tilde{T} \frac{\partial \Phi}{\partial \phi} \right) d\phi \end{aligned} \quad (3.5)$$

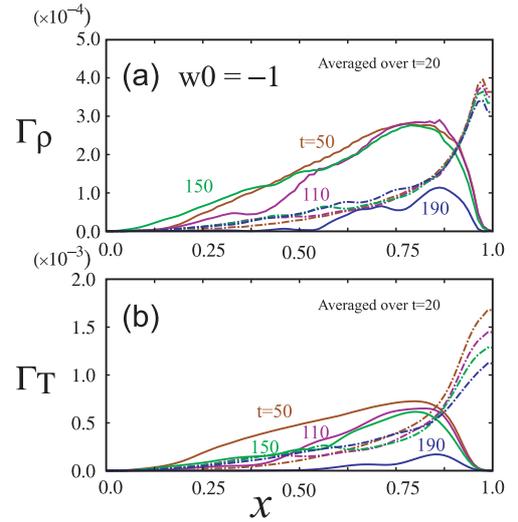


図16 径方向輸送量 ( $w_0(x) = -1$  の初期条件).

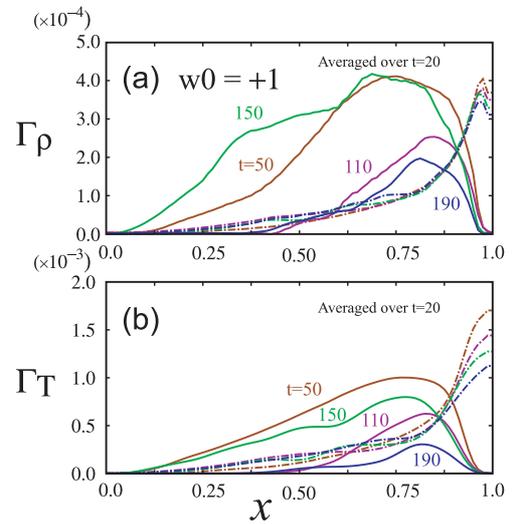


図17 径方向輸送量 ( $w_0(x) = +1$  の初期条件).

また質量密度と温度の古典輸送量  $\Gamma_{\text{class}}^{\rho}$ ,  $\Gamma_{\text{class}}^T$  をそれぞれ次の式で定義する。

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{class}}^{\rho} &= 4\pi d_M \frac{\hat{\rho}_0 \langle r^2 \rangle}{\hat{T}_0^{3/2}} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\hat{\rho}_0 \hat{T}_0}{U^{5/3}} \right), \\ \Gamma_{\text{class}}^T &= \frac{2}{3} X_M \frac{\hat{\rho}_0 \langle r^2 \rangle}{U} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{\sqrt{\hat{T}_0}}{U^{1/3}} \right) \end{aligned} \quad (3.6)$$

(3.5), (3.6)式で定義される輸送量は規格化する前の変数で記述した。図16と図17に計算機シミュレーションから得られた質量密度、温度を上式に代入して得られた輸送量を  $x$  の関数としてプロットした。古典輸送はダイバータ磁場配位では外側境界（磁場零点を通る磁力管）近傍では非常に大きな値を持っている。これは質量密度勾配と温度勾配が  $x \sim 1$  で非常に大きくなっているためである。しかし  $x \leq 0.9$  の領域に注目すると、フルート揺動に起因する異常輸送量が古典輸送量より大きくなっている。その異常輸送量の大きさと空間分布は図10, 図11, 図12および図13にプロットしている各モードの振幅の大きさととても良い相関

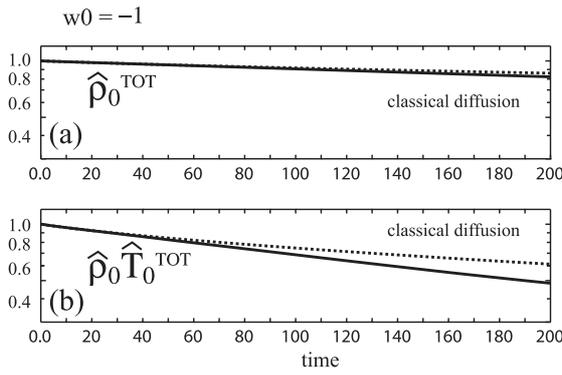


図18 全粒子数(a)と全エネルギー(b)の時間変化( $w_0(x)=-1$ の初期条件)

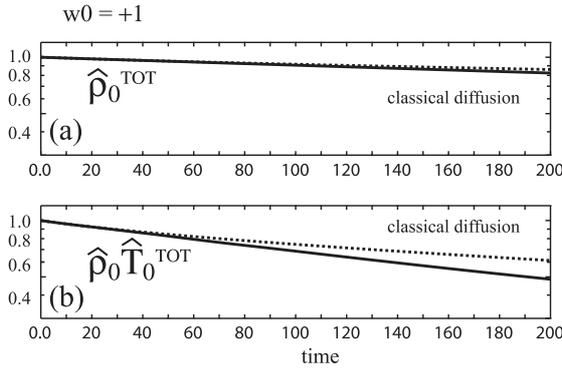


図19 全粒子数(a)と全エネルギー(b)の時間変化( $w_0(x)=+1$ の初期条件).

を持っている。

図18と図19に系内の全粒子数  $\hat{\rho}_0^{\text{TOT}} = \int_0^1 D_E x dx$  と全エネルギー量  $\hat{\rho}_0 \hat{T}_0^{\text{TOT}} = \int_0^1 D_E T_E x dx$  の時間変化を実線でプロットした。これら実線の勾配が系から  $x=1$  の境界を通過して逃げる損失率を表している。また系に  $T_f$  や  $\rho_f$  の揺らぎを除去した場合の計算機シミュレーション結果を点線でプロットしている。この点線はフルート揺動などの揺らぎのない時の全量の時間変化なので、古典輸送に起因する全粒子数と全エネルギー量の時間変化に相当している。図18と図19の実線はほぼ直線なので、系からの損失率は時間的に変化はなく、また  $w_0(x)=-1$  の初期条件から出発した場合と  $w_0(x)=1$  の場合とで損失率の差はほとんど見られない。

次に  $t=200$  の時刻における  $D_E$  と  $T_E$  の径方向分布を図20と図21にプロットした。初期条件  $w_0$  の正負にほとんど依存しない分布になっている。揺動を除去した古典輸送のみの計算機シミュレーション結果を点線でプロットしている。古典輸送のみの計算では  $x \sim 1$  付近で磁力線の特異体積内で積分した質量密度勾配および温度勾配の両方が急峻になっている。これは図16、図17の古典輸送量を反映している。これらの結果からわかることは、図20と図21に破線でプロットしているように、古典拡散が  $\hat{\rho}_0$  や  $\hat{T}_0$  に対して径方向に大きな勾配を引き起こし(1.3)の安定条件を破る傾向があるのに対して、フルート揺動は実線でプロットしているように(1.4)の臨界安定状態に緩和させる傾向を持っている。つまりフルート揺動は系の臨界安定条件からわずかにずれた状態を再び臨界安定状態に緩和させる役割

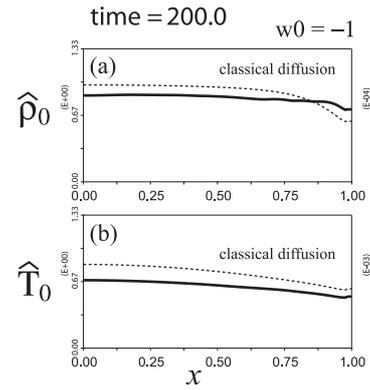


図20 径方向プロファイル ( $w_0(x)=-1$ の初期条件).

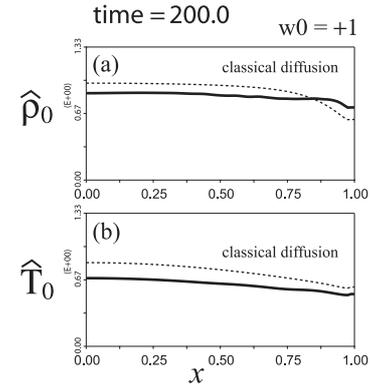


図21 径方向プロファイル ( $w_0(x)=+1$ の初期条件).

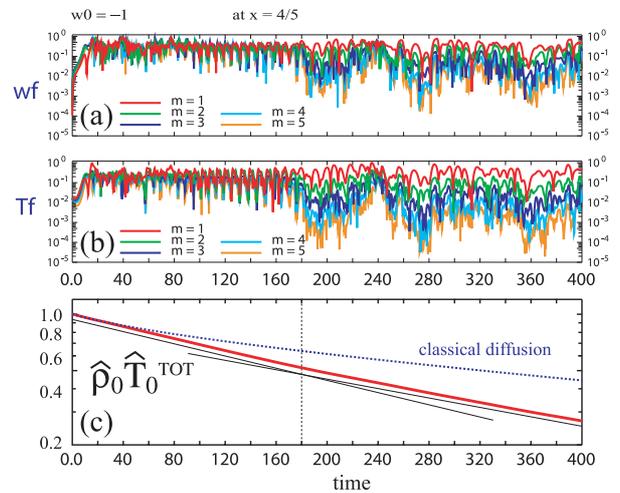


図22  $t=400$  までの  $x=0.8$  での摂動振幅の時間発展 ( $w_0(x)=-1$ の初期条件).

を演じていると言える。

最後に  $w_0(x)=-1$  の初期条件から出発した場合の長時間つまり  $t=400$  まで計算したときの  $x=0.8$  における摂動振幅の時間変化を図22にプロットした。  $t \leq 180$  の時刻において周期的なフルート不安定性の発生が観測されているのに対して、  $t \geq 180$  ではまったく規則性が見えなくなっている。しかし  $t \geq 180$  でも小規模のフルート不安定性が発生消滅を繰り返して、さらに時々大きな不安定が発生して周辺領域の低温度領域のプラズマが中心近傍に突入している。全体としてみると摂動振幅は小さくなっている。こ

れに対応して図22(c)にプロットした $\hat{\rho}_0 \hat{T}_0$ の時間変化の割合は $t \geq 180$ の領域では $t \leq 180$ に比べて小さくなっていることがわかる。

#### 4. まとめ

本論文において Adiabatic Separation Method を用いて、非線形低周波 MHD プラズマ対流とその結果発生する輸送過程を軸対称磁場内に弱い散逸のあるプラズマにおいて記述するために、断熱的に簡約した運動方程式系を導出した。この方程式はプラズマが圧力勾配駆動フルート交換型モードに対する臨界安定状態近傍で維持されている仮定の下で導出された。さらにプラズマはその圧力がアルヴェンモードが不安定になるしきい値以下 ( $\beta < \beta_{cr} \sim 1$ ) であることも仮定している。これらの仮定の下でシア・アルヴェン波、磁気音波、縦の音波の振動に対応した比較的高周波の安定集团的自由度を方程式系から除外した。残りの非線形低周波流 (low-frequency convection) がフルート交換型不安定性 (Rayleigh-Taylor instability と同類) と非一様プラズマ流が存在することで現れる 2 次的な不安定性 (Kelvin-Helmholtz instability と同類) の発達の結果として自己無同着に発生する。この簡約方程式系は基礎的な理想 MHD 方程式の不変特性を保存するのでプラズマの長期的な発展を追跡するために使うことが可能である。

さらに簡約方程式系をダイバータ磁場配位に適用した計算機シミュレーションを実行した。初期の線形領域から非線形領域の入り口にかけては系は非常に規則的な時間発展を行い、最初の大きなフルート不安定性が発生した。この初期の線形領域では  $w_0 = -1$  から出発したときと  $w_0 = +1$  から出発したときの初期条件の違いによって  $\phi$  と  $w_f$  は符号が反転した空間反対称になり、 $T_f$  と  $n_f$  も空間反対称になった。特に空間の細部までこれらの反対称性は一致した。これはプラズマの初期の回転方向の正負が、物理的にフルート揺動の時間発展に影響しないことと矛盾しない。非線形領域では小さな数値誤差が将来の時間発展に大きな影響を及ぼすフルート乱流の状態への移行が観測された。この状態ではフルート不安定性が時間的に繰り返して発生して対流的異常輸送を引き起こした。

理想 MHD モードであるフルート不安定性は一度発生すると真空とプラズマが完全に入れ替わってしまう飽和レベルのない大変危険な不安定性である。本論文では  $w_0 = \pm 1$  のプラズマが剛体回転している初期条件からの計算結果に関して述べてきたが、 $w_0 = 0$  の初期条件から出発した計算も実行してみた。この初期条件は上記の真空とプラズマが完全に入れ替わるような大きなフルート不安定性を発生させて、簡約方程式を導出したときの仮定である  $\epsilon^2 \simeq a(\nabla S)/S \ll 1$ , ( $a$ : プラズマ半径) の条件が破れてしまった。初期条件として  $w_0 \neq 0$  のプラズマに回転がある場合はフルート不安定性に対して一定の飽和レベルが存在していることが、この計算機シミュレーションから明らかになった。

序論で述べたようにダイバータ磁場配位がフルートモードに対して安定化に寄与しているかどうかに関して述べ

る。本計算結果から明らかになったことは、例えば図20と図21に破線でプロットしているように、古典拡散が  $\hat{\rho}_0$  や  $\hat{T}_0$  に対して径方向に大きな勾配を引き起こし(1.3)式の安定条件を破る傾向があるのに対して、フルート揺動は図20と図21に実線でプロットしているように(1.4)式の臨界安定状態に緩和させる傾向を持っていることが明らかになった。つまりダイバータ磁場配位では臨界安定条件からわずかにずれた圧力分布に対しては再び臨界安定状態に緩和させる機構が存在し、その役割をフルートモードが演じているわけである。

#### 付録 1 (Appendix 1)

この節ではオーダーリングに関して記述する。(2.10)式を次のように書く。

$$\delta \mathcal{A} = \int dt \delta \mathcal{L} = \int dt \int d^3r (\xi_\alpha + \xi_s) \cdot \{E_0 M\} \quad (\text{A1.1})$$

系が平衡状態にあり、 $S \equiv pU^r$  のエントロピーは磁力線を横切る径方向  $U(\phi)$  に対して一定であると仮定する。この状況下で、プラズマが平衡位置から  $\xi_\alpha + \xi_s$  だけ変位したと仮定する。ここで、非線形状態のフルート渦乱流を考慮に入りたいので  $\xi_\alpha \sim O(1)$  と評価して  $\xi_\alpha$  が零次のオーダーの変位であるとする。さらに  $\xi_\alpha$  は(2.7)の関係式を満たすように決められる。つまり磁場の変動を引き起こさなく、かつプラズマの圧縮によるエントロピー  $S$  の変動を引き起こさない。また  $\xi_s$  はプラズマの散逸過程に起因する位置の変位である。

ここで、微小パラメータを  $\epsilon$  と定義して  $O(\epsilon^2)$  のオーダーで運動方程式系を導出する。本論文ではハミルトンの原理を利用して Lagrangian の第一変分から運動方程式を導出しようとしているが、Lagrangian の積分核は(A1.1)式からわかるように  $(\xi_\alpha + \xi_s) \cdot \{E_0 M\}$  の形式を持っている。 $\{E_0 M\}$  が  $O(\epsilon^2)$  のオーダーの求めたい運動方程式であり、平衡状態の方程式 (グラッド・シャフラノフ方程式) を含んでいる。平衡状態の方程式を  $O(1)$  とすると、 $(\xi_\alpha + \xi_s) \cdot \{E_0 M\} = \xi_\alpha \cdot \{E_0 M\} + \xi_s \cdot \{\text{平衡方程式}\}$  と分離できる。 $\{\text{平衡方程式}\} = \{\text{グラッド・シャフラノフ方程式}\}$  が  $O(1)$  の量として Lagrangian 中に入る。したがって  $\xi_s \sim O(\epsilon^2)$  と評価する。次に(2.6)式からわかるように  $\xi_\alpha$  の変分に対して Lagrangian のポテンシャルエネルギーの変分は  $\delta \mathcal{L} \propto U^{-\gamma} \xi_\alpha \cdot \nabla S \sim U^{-\gamma} \xi_\alpha \cdot \hat{e}_\perp \epsilon^2 S/a$ 。一方 Lagrange の運動方程式は  $\frac{d}{dt} \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \dot{\xi}_\alpha} - \frac{\partial \delta \mathcal{L}}{\partial \xi_\alpha} = 0$  から  $\rho \dot{\xi}_\alpha \sim \hat{e}_\perp \epsilon^2 U^{-\gamma} S_0/a$  と評価できるので  $\partial/\partial t \sim O(\epsilon)$  である。

まず出発は  $\nabla S \sim \epsilon^2 S/a \sim O(\epsilon^2)$  であると仮定する。このとき  $w \sim \epsilon(k_\perp a)^{1/2} C_s \sim O(\epsilon)$ ,  $v_\alpha \sim \epsilon C_s \sim O(\epsilon)$  であることが本文中で述べられている。ところで(2.2), (2.3), (2.4)式の変分を取ると正確に(線形化することなく)次のように書ける。

$$\begin{aligned} \delta \rho &= -\nabla \cdot (\rho \xi) \\ \delta p &= -\xi \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \xi \\ \delta \mathbf{B} &= \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (\text{A1.2})$$

$$\begin{aligned} \delta S &= -\xi \cdot \nabla S = U^\gamma \delta p + \gamma p U^{\gamma-1} \delta U \\ \delta \mathbf{v} &= \frac{\partial \xi}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \xi - (\xi \cdot \nabla) \mathbf{v} \end{aligned} \quad \left. - \frac{\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi} - \nabla p \right\} \quad (\text{A1.7})$$

ここで  $S = pU^\gamma$  に注意して  $S$  に関しての変分および変分  $\delta \mathbf{v} = \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{v}_s$  に関する表式も書いている。  $\delta \mathbf{v}$  の leading-order が  $\mathbf{v}_\alpha$  なので  $\xi_\alpha \sim O(1)$  である。ただし  $\mathbf{v}_\alpha$  は (2.9) 式で定義されていて、  $\xi_\alpha$  が (2.7) 式を満たすように  $\mathbf{v}_\alpha$  は

$$[\nabla \times [\mathbf{v}_\alpha \times \mathbf{B}]] = 0, \quad \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{v}_\alpha}{U} \right) \right] = 0 \quad (\text{A1.3})$$

を満たす。つまり (A1.3) 式は  $O(\epsilon)$  のオーダーで零である。また  $\delta p$  は (A1.2) 式の  $\delta p$  と  $\delta S$  の式を用いると

$$\delta p = -\frac{1}{U^\gamma} \left[ \xi \cdot \nabla S + \gamma p U^{\gamma+1} \nabla \cdot \left( \frac{\xi}{U} \right) \right]$$

と書けるので、  $\delta p \sim O(\epsilon^2)$  である。

まとめると

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_\alpha + \xi_s, & \xi_\alpha &\sim O(1), & \xi_s &\sim O(\epsilon^2), \\ \delta \mathbf{v} &= \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{v}_s, & \mathbf{v}_\alpha &\sim O(\epsilon), & \mathbf{v}_s &\sim O(\epsilon^3), \\ [\nabla \times [\delta \mathbf{v} \times \mathbf{B}]] &\sim [\nabla \times [\mathbf{v}_s \times \mathbf{B}]] \sim O(\epsilon^3), \\ \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\delta \mathbf{v}}{U} \right) \right] &\sim \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\mathbf{v}_s}{U} \right) \right] \sim O(\epsilon^3), \\ [\nabla \times [\xi \times \mathbf{B}]] &\sim [\nabla \times [\xi_s \times \mathbf{B}]] \sim O(\epsilon^2), \\ \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\xi}{U} \right) \right] &\sim \left[ \nabla \cdot \left( \frac{\xi_s}{U} \right) \right] \sim O(\epsilon^2), \\ \delta p &\sim O(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (\text{A1.4})$$

とオーダーリングされる。

次に Lagrangian の第一変分から MHD 方程式が導出されることを以下に示す。(A1.2) 式を利用して (2.5) 式の変分を計算すると

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L} &= \int d^3 \mathbf{r} \left\{ \rho \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{v} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \delta \rho}{2} - \frac{\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{B}}{4\pi} - \frac{\delta p}{\gamma - 1} \right\} \\ &= \int d^3 \mathbf{r} \left\{ \frac{\partial \xi \cdot \rho \mathbf{v}}{\partial t} - \xi \cdot \left( \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi} + \nabla p \right) \right. \\ &\quad \left. + \nabla \cdot \left( \frac{\rho \mathbf{v}^2 \xi}{2} + \rho \mathbf{v} \times [\xi \times \mathbf{v}] + \frac{B^2 \xi_\perp}{4\pi} + \frac{\gamma p \xi}{\gamma - 1} \right) \right\} \quad (\text{A1.5}) \end{aligned}$$

となる。したがって (A1.5) 式の第一変分が零である条件より

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} + \frac{[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})]}{4\pi} + \nabla p = 0 \quad (\text{A1.6})$$

のように MHD 方程式が導出される。

さて (A1.1), (A1.5) 式より

$$\delta \mathcal{A} = \int dt \delta \mathcal{L} = \int dt \int d^3 \mathbf{r} \left\{ \xi \cdot \left( -\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} \right. \right.$$

と表される。ただし (A1.4) 式より

$$\xi = \xi_\alpha + \xi_s, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}_\alpha + \mathbf{v}_s$$

である。  $O(\epsilon^2)$  のオーダーでは  $\delta \mathcal{A}$  は次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{A} &\simeq \int dt \int d^3 \mathbf{r} \left\{ (\xi_\alpha + \xi_s) \cdot \left( -\rho \frac{\partial \mathbf{v}_\alpha}{\partial t} - \rho [\mathbf{v}_\alpha \cdot \nabla] \mathbf{v}_\alpha \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \rho [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} - \frac{\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi} - \nabla p \right) \right\} \quad (\text{A1.8}) \end{aligned}$$

なお、本文中の式 (2.6) は (2.5) 式の Lagrangian の変分に対し (A1.2) 式を用いることで導出される。

## 付録 2 (Appendix 2)

(2.7), (2.8) 式において断熱変位  $\xi_\alpha$  を導入したが、  $\xi_\alpha$  とこれに対応する断熱速度  $\mathbf{v}_\alpha$  は微小補助変位  $\xi_s$ , ( $\xi_s \sim \epsilon^2 \xi_\alpha$ ) を伴う。そしてそれに対応する速度場 ( $\mathbf{v}_s \sim \epsilon^2 \mathbf{v}_\alpha$ ) は以下の形式を持つ。

$$\xi_s = \frac{1}{B^2} [f_\psi (\mathbf{B} \times \nabla \psi) + f_\varphi (\mathbf{B} \times \nabla \varphi)] + \frac{\mathbf{B}}{B} \xi_{s\parallel} \quad (\text{A2.1})$$

ここで  $f_\psi, f_\varphi, \xi_{s\parallel}$  は任意関数である。  $\mathbf{v}_s$  は主に散逸過程による準安定プラズマパラメータの slow inertia-less drift の原因になる。そして時間的にはゆっくりと変動する ( $\partial \mathbf{v}_s / \partial t \sim \epsilon^3 k C_s \mathbf{v}_s$ )。

$\mathbf{v}_\alpha$  は磁場を変動させないので、磁場に対する散逸方程式は以下のようなになる。

$$\frac{\delta \mathbf{B}}{\delta t} = \nabla \times (\mathbf{v}_s \times \mathbf{B} - D \nabla \times \mathbf{B}), \quad D = c^2 / 4\pi \sigma \quad (\text{A2.2})$$

このとき  $\mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \varphi$  と表される関数  $\psi(t), \varphi(t)$  を適切に選ぶことによって対流運動と散逸が存在するときの系の時間変化を記述するのが便利である。磁場  $\mathbf{B}$  の軸対称性の保存から次のように  $\psi, \varphi$  を選ぶことができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\mathbf{v}_s \cdot \nabla \varphi = 0, \\ \frac{\partial \psi}{\partial t} &= -\mathbf{v}_s \cdot \nabla \psi + D r^2 (\nabla \cdot (\nabla \psi / r^2)) \end{aligned} \quad (\text{A2.3})$$

さらに  $\partial \xi / \partial t = 0$  になるよう  $\xi$  軸を選ぶと、

$$\mathbf{v}_s = u_\psi (\epsilon^3 t, \psi, \xi) \nabla \psi + u_\parallel (\epsilon^3 t, \psi, \xi) \mathbf{B} \quad (\text{A2.4})$$

と表すことができ、その結果として (A2.3) 式は次のような  $u_\psi$  に対する方程式になる。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -r^2 B^2 u_\psi + D r^2 (\nabla \cdot (\nabla \psi / r^2)) \equiv -r^2 B^2 u_\psi + D \Delta^* \psi \quad (\text{A2.5})$$

本論文の計算においては微小展開パラメータ  $\epsilon^2$  (臨界安定状態からの“ずれ”に対応している) は散逸過程 (熱伝

導率  $\chi$ , 粘性係数  $\eta$ , 抵抗性拡散係数  $D$ ) と関連しており, 次のオーダーの量であることを仮定している.

$$\epsilon \sim (\chi/aC_s)^{1/3} \ll 1 \quad (\text{A2.6})$$

次に(2.10)のハミルトニアン の原理から出てくる変分  $\delta\mathcal{A}$  は  $\xi = \xi_\alpha + \xi_s$  を用いると

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \delta\mathcal{A}_\alpha + \delta\mathcal{A}_s = \int dt d^3r \{ (\xi_\alpha + \xi_s) \cdot \{E_0 M\} \\ &= \int dt \int d^3r \left\{ (\xi_\alpha + \xi_s) \cdot \left( -\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \rho [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})}{4\pi} - \nabla p \right) \right\} \quad (\text{A2.7}) \end{aligned}$$

と  $\delta\mathcal{A}_\alpha$  と  $\delta\mathcal{A}_s$  に分離することができる. (A2.1) を用いて  $\delta\mathcal{A}_s$  に  $\xi = \xi_s [\sim O(\epsilon^2)]$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\alpha [\sim O(\epsilon)] + \mathbf{v}_s [\sim O(\epsilon^3)]$ ,  $\partial/\partial t \sim O(\epsilon)$  を代入して  $O(\epsilon^2)$  のオーダーの量までを計算すると

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A}_s &= -\int d^3r \xi_s \cdot \left\{ \left( \rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho [\mathbf{v} \cdot \nabla] \mathbf{v} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})]}{4\pi} + \nabla p \right\} \\ &\simeq -\int d^3r \xi_s \cdot \left\{ \frac{[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})]}{4\pi} + \nabla p \right\} \\ &= -\int d^3r \left\{ \frac{1}{B^2} [f_\psi (\mathbf{B} \times \nabla \psi) + f_\varphi (\mathbf{B} \times \nabla \varphi)] + \frac{\mathbf{B}}{B} \xi_{s\parallel} \right\} \\ &\quad \cdot \left\{ \frac{[\mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{B})]}{4\pi} + \nabla p \right\} \quad (\text{A2.8}) \end{aligned}$$

となる. (A2.8)式が任意の微小変位  $f_\psi$ ,  $f_\varphi$ ,  $\xi_{s\parallel}$  に対して  $\delta\mathcal{A}_s = 0$ , つまり  $\mathcal{A}_s$  が停留値を持つとき,

$$\frac{r^2 B^2}{4\pi} \nabla \cdot (r^{-2} \nabla \psi) + r^2 \frac{\partial p(\psi)}{\partial \psi} = 0 \quad (\text{A2.9})$$

を満たす必要がある. (A2.9)式は等方圧力のグラッド・シャフラノフ方程式[13-16]に等しい. ただし(A2.9)式の導出において  $\nabla \psi \cdot \nabla \varphi = 0$  の軸対称磁場配位の条件を用いた.

理想一流体のMHD方程式はHamiltonの原理から導出される.

$$\delta\mathcal{A} = \int dt \delta\mathcal{L} = \int dt d^3r (\xi \cdot \{E_0 M\}) \quad (\text{A2.10})$$

$\delta\mathcal{L}$  の表式は(2.6)式で与えられている. また  $\{E_0 M\}$  は  $\delta\mathcal{L}$  の部分積分で得られる表式である. 任意の  $\xi$  の変位について(A2.10)式が成り立つためには  $\{E_0 M\} = 0$  が要求される. 簡約方程式を求めるために, 完全に任意の変位  $\xi$  の代わりに任意関数  $f_\psi$ ,  $f_\varphi$ ,  $\xi_{s\parallel}$ ,  $\delta\alpha(\epsilon t, \psi, \varphi)$  を持つ  $\xi = \xi_\alpha + \xi_s$  を用いる必要がある.

$\xi_s \sim O(\epsilon^2)$  であることを思い出すと ( $\xi_s \sim \epsilon^2 \xi_\alpha$  を仮定して  $\xi_s$  を導入している)  $f_\psi$ ,  $f_\varphi$ ,  $\xi_{s\parallel}$  に関する変分については  $\epsilon$  の最低次の量のみ取り出せば良い. (2.9)式に従うと,

慣性項 ( $\propto \rho v_\alpha^2$ ) は  $\epsilon^2$  のオーダーの量であるべきである. 臨界安定状態の近傍ではエントロピーは  $S = S_0 + \bar{S}$  の和として表される. ただし  $S_0$  は平衡状態の量で, これに  $\bar{S} \sim \epsilon^2 S_0$  の摂動が加わった状態を考えている. したがってこれらの変動に従う運動方程式において慣性項や圧力揺動は零次の量においては無視する. その結果として零次の圧力  $p_0$  は準定常状態では次の力の釣り合いの式を得る.

$$\Delta^* \psi + 4\pi r^2 \frac{\partial p_0(t, \psi)}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial p_0}{\partial \varphi} = 0, \quad \mathbf{B} \cdot \nabla p_0 = 0 \quad (\text{A2.11})$$

(A2.11)式の第一項はグラッド・シャフラノフ方程式の構造を持っている(注として,  $\psi$  の満たす方程式は  $\epsilon$  のオーダーまでは慣性項とエントロピーの変化量  $\bar{S}$  は無視できる). したがってまさにグラッド・シャフラノフ方程式を導出したときの仮定つまり圧力バランスが成り立つ. このとき  $p_0 = S_0(t, \psi)/U^2$  であり, 輸送方程式に従って時間的にゆっくりと変化する. (A2.11)式は  $\psi$  の時間および空間の依存性を与える式である. この理由から(A2.11)式を(A2.5)式に代入して  $\dot{\psi}$  を決定する.

### 付録3 (Appendix 3)

圧力に関する輸送方程式は(2.3)式に記述されている. 開放端系では熱流速  $\mathbf{q}$  の磁力線方向成分は端損失として組み込むことができる. 垂直方向成分はBraginskii[20]の教科書から, 電子に関しては

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_e &= -\kappa_{\parallel}^e \nabla_{\parallel} T_e - \kappa_{\perp}^e \nabla_{\perp} T_e - \frac{5}{2} \frac{c n_e T_e}{e B} \hat{e}_{\parallel} \times \nabla T_e, \\ \kappa_{\perp}^e &= 4.66 \frac{n_e T_e}{m_e \omega_{ce}^2 \tau_e} \propto n_e n_i m_e^{1/2} T_e^{-1/2} B^{-2} \quad (\text{A3.1}) \end{aligned}$$

で与えられ, 一方イオンに関しては

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_i &= -\kappa_{\parallel}^i \nabla_{\parallel} T_i - \kappa_{\perp}^i \nabla_{\perp} T_i + \frac{5}{2} \frac{c n_i T_i}{e B} \hat{e}_{\parallel} \times \nabla T_i, \\ \kappa_{\perp}^i &= 2 \frac{n_i T_i}{m_i \omega_{ci}^2 \tau_i} \propto n_i^2 m_i^{1/2} T_i^{-1/2} B^{-2} \quad (\text{A3.2}) \end{aligned}$$

で与えられる. 電子とイオンの温度比が系全体にわたって一定である場合は(A3.1), (A3.2)式からわかるように  $\kappa_{\perp}^i \gg \kappa_{\perp}^e$  である. したがって

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_i + \mathbf{q}_e \simeq \mathbf{q}_{\parallel} - \kappa_{\perp}^i \nabla_{\perp} T_i \quad (\text{A3.3})$$

であるので

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \nabla \psi &= -\nabla \psi \cdot \nabla \psi \kappa_{\perp}^i \frac{\partial T_i}{\partial \psi} = -r^2 B^2 \kappa_{\perp}^i \frac{\partial T_i}{\partial \psi} \\ \mathbf{q} \cdot \nabla \varphi &= -\nabla \varphi \cdot \nabla \varphi \kappa_{\perp}^i \frac{\partial T_i}{\partial \varphi} = -\frac{1}{r^2} \kappa_{\perp}^i \frac{\partial T_i}{\partial \varphi} \quad (\text{A3.4}) \end{aligned}$$

となる. ここで  $\rho = m_i n_i + m_e n_e \simeq m_i n_i$ ,  $p = p_i + p_e = n_i T_i + n_e T_e = n(T_i + T_e)$  であることを念頭において  $\kappa_{\perp}^i \propto \rho^{5/2} \rho_i^{-1/2} m_i^{-2} B^{-2}$  であることに注意すると

## 参考文献

$$\begin{aligned}\kappa_{\perp}^i \frac{\partial T_i}{\partial \psi} &= \rho \chi_{\perp} \frac{2T_i}{T_i + T_e} \frac{\partial p}{\partial \psi} \frac{1}{\rho} = \frac{\rho^2}{B^2} X_M \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{p}{\rho} \right)^{1/2} \\ \kappa_{\perp}^i \frac{\partial T_i}{\partial \varphi} &= \frac{\rho^2}{B^2} X_M \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} \right)^{1/2}\end{aligned}\quad (\text{A3.5})$$

と表すことができる。ただし

$$\begin{aligned}X_M &= \chi_{\perp} \frac{B^2}{\rho} \frac{4T_i}{T_i + T_e} \left( \frac{p}{\rho} \right)^{1/2}, \\ \chi_{\perp} &= \frac{\kappa_{\perp}^i}{2n_i} = \frac{T_i}{m_i \omega_{ci}^2} \propto n_i m_i^{1/2} T_i^{-1/2} B^{-2}\end{aligned}\quad (\text{A3.6})$$

と定義されているので  $X_M$  は無次元量である。よって

$$X_M \equiv \chi_M \frac{B_M^2}{\rho_M} \left( \frac{4T_i}{T_i + T_e} \right)_M \left( \frac{p_M}{\rho_M} \right)^{1/2} = \text{const.}\quad (\text{A3.7})$$

で与えられる  $X_M$  を定義すると (ただし添え字 M はある任意に選んだ位置での値である),

$$\langle \mathbf{q} \cdot \nabla \psi \rangle = - \left\langle r^2 B^2 \rho \chi_{\perp} \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{p_i}{\rho} \right) \right\rangle = -X_M \rho^2 \langle r^2 \rangle \frac{\partial}{\partial \psi} \left( \frac{p}{\rho} \right)^{1/2} \Rightarrow (2.25)$$

$$\langle \mathbf{q} \cdot \nabla \varphi \rangle = - \left\langle \frac{\rho \chi_{\perp}}{r^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p_i}{\rho} \right) \right\rangle = -X_M \rho^2 \left\langle \frac{1}{r^2 B^2} \right\rangle \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{p}{\rho} \right)^{1/2}$$

となって (2.25) が導出される。

古典衝突拡散係数  $D$  は (ここで  $D$  は  $T_e^{-3/2}$  にのみ比例するので磁力線に沿っては一定になるが) 定数係数  $d_M$  を導入することで以下のように都合よく繰り込むことができる。Braginskii の教科書より, 電位伝導率  $\sigma$  は

$$\sigma = \frac{2e^2 n_e \tau_e}{m_e} = \frac{\sqrt{2} e^2 n_i \tau_i}{m_e} \frac{m_e^{1/2} T_e^{3/2}}{m_i^{1/2} T_i^{3/2}}\quad (\text{A3.8})$$

で与えられるので, (A2.2), (A3.6), (A3.7) 式より

$$\begin{aligned}D &= \frac{c^2}{4\pi\sigma} = \frac{B^2}{4\sqrt{2}\pi n_i} \frac{m_e^{1/2} T_i^{1/2}}{m_i^{1/2} T_e^{3/2}} \chi_{\perp} \\ &= \frac{m_e^{1/2} (T_i + T_e) T_i^{1/2}}{\sqrt{2} m_i^{1/2} T_e^{3/2}} \left( \frac{\rho}{p} \right)^{3/2} \left( \frac{B^2}{4\pi\rho} \left( \frac{p}{\rho} \right)^{1/2} \chi_{\perp} \right)\end{aligned}\quad (\text{A3.9})$$

ここで  $\left( \frac{B^2}{4\pi\rho} \left( \frac{p}{\rho} \right)^{1/2} \chi_{\perp} \right)$  が無次元量であることに注意すると

$$\begin{aligned}D &= d_M \left( \frac{\rho}{p} \right)^{3/2} \quad \text{ただし} \\ d_M &\equiv \frac{m_e^{1/2} (T_i + T_e) T_i^{1/2}}{\sqrt{2} m_i^{1/2} T_e^{3/2}} \left( \frac{B^2}{4\pi\rho} \left( \frac{p}{\rho} \right)^{1/2} \chi_{\perp} \right) = \text{const.}\end{aligned}\quad (\text{A3.10})$$

となる。この拡散係数  $D$  の表式は (2.23) 式と (2.21) 式に利用される。

- [1] I. Katanuma, H. Saimaru, Y. Mizoguchi, K. Yashiro, T. Cho and V.P. Pastukhov, *Trans. Fusion Sci. Technol.* **51**, 122 (2007) (19R04). (*6th International Conference on "Open Magnetic systems for Plasma Confinement", Tsukuba, JAPAN, JULY 17-21, 2006*).
- [2] J.A. Casey, B.G. Lane, J.H. Irby, K.L. Brau, S.N. Golovato, W.C. Guss, J. Kesner, P.S. Post, E. Sevillano and J. Zielinski, *Phys. Fluids* **31**, 2006 (1988).
- [3] B. Lane, R.S. Post and J. Kesner, *Nucl. Fusion* **27**, 277 (1987).
- [4] Y. Yasaka, M. Takano and H. Takeno, *Trans. Fusion Technol.* **39**, 350 (2001).
- [5] V.P. Pastukhov and A.Yu. Sokolov, *Sov. J. Plasma Phys.* **17**, 603 (1991).
- [6] Y. Sasagawa, I. Katanuma, Y. Mizoguchi, T. Cho and V. P. Pastukhov, *Phys. Plasmas* **13**, 122506 (2006).
- [7] 宮本健郎: プラズマ物理入門 (岩波書店, 1994) 第2刷.
- [8] 三好昭一: ミラー型核融合装置 (アイピーシー, 1995).
- [9] B.B. Kadomtsev, in *Reviews of Plasma Physics* Ed. by M. A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1966), Vol.2.
- [10] *Status of Mirror Fusion Research 1980* Ed. by B.I. Cohen, (LLNL Report, UCAR 10049-80-Rev.1, 1980) Sec.4.
- [11] T. Asai, T. Matsuzawa, N. Yamamoto, K. Sakuraba, T. Kiguchi *et al.*, *17th International Toki Conference on Physics of Flows and Turbulence in Plasmas and 16th International Stellarator/Heliotron Workshop 2007, Ceratopia Toki, Gifu, Japan, October 15-19, 2007*, P1-015.
- [12] Z. Yoshida, Y. Ogawa, J. Morikawa, S. Watanabe, Y. Yano *et al.*, *Plasma Fusion Res.* **1**, 008 (2006).
- [13] H. Grad, *Phys. Fluids* **10**, 137 (1967).
- [14] G.O. Spies and D.B. Nielson, *Phys. Fluids* **17**, 1879 (1974).
- [15] T. Takeda and S. Tokuda, *J. Comp. Phys.* **93**, 1 (1991).
- [16] I. Katanuma, Y. Sasagawa, Y. Tatematsu, Y. Nakashima, T. Cho and V.P. Pastukhov, *Nucl. Fusion* **46**, 608 (2006).
- [17] J.B. Taylor, *Phys. Rev. Lett.* **33**, 1139 (1974).
- [18] L.C. Steinhauer and A. Ishida, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3423 (1997).
- [19] S.M. Mahajan and Z. Yoshida, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 4863 (1998).
- [20] S.I. Braginskii, *Reviews of Plasma Physics*, ed. A.M.A. Leontovich (Consultants Bureau, New York, 1965) Vol. 1.
- [21] D.D. Ryutov and G.V. Stupakov, *Sov. J. Plasma Phys.* **12**, 815 (1986).
- [22] R.D. Hazeltine and J.D. Meiss, *Plasma Confinement* (Dover Publications, INC., Mineola, New York, 2003).
- [23] V.P. Pastukhov, *Plasma Phys. Reports* **31**, 628 (2005).
- [24] V.P. Pastukhov and N.V. Chudin, *Plasma Phys. Reports* **27**, 907 (2001).
- [25] 花輪知幸, 町田正博 編著: 数値天文学 テクニカルマニュアル (2004) [http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/netlab/summer-school\\_2004/advanced-course/index.html](http://www.astro.phys.s.chiba-u.ac.jp/netlab/summer-school_2004/advanced-course/index.html).