J. Plasma Fusion Res. Vol.83, No.1 (2007) 62‐65

講座 高速プラズマ流と衝撃波の研究事始め

1．プラズマ衝撃波の基礎物理

1.2　通常気体中の高速流と衝撃波の基礎

犬竹正明
東北大学工学研究科

（原稿受付：2006年11月13日）

Keywords: isentropic flow, Laval nozzle, supersonic flow, subsonic flow, choking, Bernoulli's equation, shock wave, Rankine-Hugoniot's relation, Knudsen number, Reynolds number, similarity law

1.2.1　等エントロピー流とベルヌーイの定理

通常気体の高速流れと衝撃波の基礎について簡単に復習しておく[1-3]．粘性も熱伝導もない気体の連続の式，運動方程式，状態方程式，および等エントロピー変化は，密度をρ，速度を$\boldsymbol{v}$，単位質量あたりのエントロピーをSとすると，次式のようになる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0 \quad (1),\quad \rho\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right\}=-\nabla p \quad (2),$$

$$\frac{DS}{Dt}=0 \quad (3),\quad p=K\rho^{\gamma}\exp\left(\frac{S-S_0}{c_{\mathrm{v}}}\right) \quad (4).$$

ここで，比熱比$\gamma=\dfrac{c_{\mathrm{p}}}{c_{\mathrm{v}}}$，$K$は定数である．

理想気体では，状態方程式$\dfrac{p}{\rho}=RT$，内部エネルギー$\varepsilon=c_{\mathrm{v}}T$，エンタルピー$i=c_{\mathrm{p}}T$，$c_{\mathrm{p}}-c_{\mathrm{v}}=R$が成立するので次式が得られる．

$$i=\varepsilon+\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho} \quad (5).$$

また，$\mathrm{d}i=\mathrm{d}\varepsilon+p\,\mathrm{d}\left(\dfrac{1}{\rho}\right)+\dfrac{\mathrm{d}p}{\rho}=T\mathrm{d}S+\dfrac{\mathrm{d}p}{\rho}$であるから次式が得られる．

$$\nabla i=T\nabla S+\frac{\nabla p}{\rho} \quad (6).$$

また，$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}=\nabla\left(\dfrac{v^2}{2}\right)-\boldsymbol{v}\times\nabla\times\boldsymbol{v}$であり，渦度$\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{v}$を用いると，（2）式は次のように書き換えられる．

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-\nabla\left(\frac{v^2}{2}\right)+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}$$

$$=-\nabla\left(\frac{v^2}{2}+i\right)+T\nabla S+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega} \quad (7).$$

（i）定常な流れ（$\dfrac{\partial}{\partial t}=0$）では，（3）から$(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)S=0$であるから，流線に沿って$S=\mathrm{const}$となる．さらに，（7）と$\boldsymbol{v}$の内積を作ると$\boldsymbol{v}\cdot(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega})=0$であるので，$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\left(\dfrac{v^2}{2}+i\right)=0$が得られる．したがって，流線に沿って次式が成立する．

$$H=\frac{v^2}{2}+i=\mathrm{const} \quad (8).$$

これがベルヌーイの定理であり，Hは澱み点エンタルピーとよばれる．（8）式は，（5）式を用いて（9）式のように，また，音速$c=\sqrt{\gamma\dfrac{p}{\rho}}$を用いて(10)式のように表される．

$$H=\frac{v^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\mathrm{const} \quad (9),$$

$$H=\frac{v^2}{2}+\frac{c^2}{\gamma-1}=\mathrm{const} \quad (10).$$

一様な流れ場中ではHは一本の流線上のみならず流れの全域で一定値を取る．一様流が超音速の場合には流れの中の物体前方に衝撃波があらわれ，流速，密度，エントロピーなどはジャンプするが，エネルギー保存を表すHは連続である．

定常で一様なエネルギー流では，（7）式から次式が成り立つ．

$$\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{\omega}=-T\nabla S \quad (11).$$

したがって，流れが渦なし（$\boldsymbol{\omega}=0$）であるか，渦線が流線に平行（$\boldsymbol{v}/\!/\boldsymbol{\omega}$）（ベルトラミ流とよぶ）であればエントロピー$S$は流れの全域で一定になる．

（ii）非定常流（$\dfrac{\partial}{\partial t}\neq 0$）で，かつ，渦なし（$\boldsymbol{\omega}=0$）の場合には速度ポテンシャル$\Phi$が存在し，$\boldsymbol{v}=\nabla\Omega$と表わせるか

1. Physics of Plasma Shock Waves　1.2 Elements of Flow and Shock in Conventional Gasdynamics

INUTAKE Masaaki　　*author's e-mail: inutake@ecei.tohoku.ac.jp*

ら，（7）式から次式が得られる．

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}+\frac{v^2}{2}+\int\frac{\mathrm{d}p}{\rho}=K(t) \quad (12).$$

この式は圧力方程式とよばれる．

1.2.2　一次元等エントロピー流れと音速特異点

断面積 A が緩やかに変化する収束 - 発散型ノズル（Laval nozzle とよぶ）内を通過する定常一次元等エントロピー（isentropic）流れを考える．連続の式，運動方程式，および可逆的断熱変化（等エントロピー変化）の式は以下のようになる[1-3]．

$$\rho v A = Q \quad (13), \qquad \frac{v^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}=\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_0}{\rho_0}=H \quad (14),$$

$$\frac{p}{\rho^\gamma}=\frac{p_0}{\rho_0^\gamma} \quad (15).$$

(13)式と(15)式から p と ρ を v で表し，(14)に代入すると，ノズルの形 $A(x)$，流量 Q，澱み点密度 ρ_0，音速 c_0 が与えられた時の流速 v が以下の式から決定される．

$$v\left(1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right)^{1/(\gamma-1)}=\frac{Q}{\rho_0 A} \quad (16).$$

v が求まると，他の物理量は(14)，(15)式および，音速 $c^2=\gamma p/\rho$，状態式 $p=\rho RT$ から求まる．例えば，温度とマッハ数は以下のようになる．

$$\frac{T^2}{T_0^2}=\frac{c^2}{c_0^2}=1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2} \quad (17),$$

$$M^2=\frac{v^2}{c^2}=\frac{v^2}{c_0^2}\left(1-\frac{\gamma-1}{2}\frac{v^2}{c_0^2}\right)^{-1} \quad (18).$$

ノズルスロートで流速が音速になる時，すなわちマッハ数 $M=1$ のとき，流量 Q は最大となる．これを閉塞状態（choking），あるいは閉塞流れ（choked flow）と呼ぶ．また，最大流速は温度がゼロまで減少したときに得られ，次式で与えられる．

$$v_{\max}=\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/2}c_0 \quad (19).$$

収束―膨張ノズル内の流れの振る舞いは，(13)，(14)，(15)式を対数微分して得られる次式から，定性的に知ることができる．

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}+\frac{\mathrm{d}v}{v}+\frac{\mathrm{d}A}{A}=0 \quad (20),$$

$$v\,\mathrm{d}v+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p}{\rho}\left(\frac{\mathrm{d}p}{p}-\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}\right)=0 \quad (21),$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}-\gamma\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=0 \quad (22).$$

上式から断面積の微小変化 dA と流れ諸量の変化との関係式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{1}{(M^2-1)}\frac{\mathrm{d}A}{A} \quad (23),$$

$$\frac{\mathrm{d}p}{p}=\gamma\frac{\mathrm{d}\rho}{\rho}=-\frac{\gamma M^2}{(M^2-1)}\frac{\mathrm{d}A}{A} \quad (24),$$

$$\frac{\mathrm{d}T}{T}=\frac{2\mathrm{d}c}{c}=-\frac{(\gamma-1)M^2}{(M^2-1)}\frac{\mathrm{d}A}{A} \quad (25),$$

$$\frac{\mathrm{d}M}{M}=\frac{1+\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)M^2}{(M^2-1)}\frac{\mathrm{d}A}{A} \quad (26).$$

マッハ数 $M=1$ は特異点であり，マッハ数が 1 以下か以上により流れの振る舞いが逆転する．例えば，亜音速流（$M<1$）がラバールノズルに流入した場合，収束ノズル部（d$A<0$）では流速が増す（d$v>0$）とともに温度が減少（d$T<0$）し，ノズルスロートで $M=1$ となり，発散ノズル部（d$A>0$）で超音速流へ（d$M>0$，d$v>0$）と遷移させることができる．

一定断面の定常チャンネル流でも，外部から局所的に加熱したり，冷却したりすると，等価的に収束あるいは膨張するチャンネルと同様の効果が現れる[3,6]．外部からの局所的エネルギー流入量を dW とすると，以下の式が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}v}{v}=\frac{1}{(M^2-1)}\frac{(\gamma-1)\mathrm{d}W}{\rho v c^2} \quad (27).$$

この式と（23）式を比較すると，$M<1$ では，加熱する（d$W>0$）ことは，断面積を狭める（d$A<0$）ことと同じ効果を持ち，加速（d$v>0$）される．$M<1$ では逆になることがわかる．

1.2.3　垂直衝撃波とランキン－ユゴニオの関係式

音速より速い流れでは，圧力や密度の不連続的変化すなわち衝撃波が現れる．非線形効果による波の突っ立ちと散逸効果による波の拡散がつりあった状態で衝撃波が現れる．衝撃波の構造を議論する場合，粘性や熱伝導などの散逸過程の特性長より十分長いスケールで見る連続流体的取り扱いと，散逸過程の特性長と同程度のスケールで見る分子運動論的取り扱いがある．前者は衝撃波を不連続面とみなし，後者は衝撃波を境界層と捉えてその構造を議論する．詳細は文献[4-6]に譲るが，ここでは衝撃波の跳び条件（ランキン－ユゴニオの関係式）についてのみ述べる．

流れに垂直な衝撃波の場合，波面の上流（添字 1）下流（添字 2）を含む薄い領域について，質量，運動量，エネルギーの保存則を考えると，

$$\rho_1 v_1=\rho_2 v_2=Q \quad (28), \qquad Q v_1+p_1=Q v_2+p_2 \quad (29),$$

$$\frac{v_1^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_1}{\rho_1}=\frac{v_2^2}{2}+\frac{\gamma}{\gamma-1}\frac{p_2}{\rho_2}=H \quad (30).$$

まず，(28)，(29)から速度を消去すると次式となる．

$$p_2-p_1=Q^2\left(\frac{1}{\rho_1}-\frac{1}{\rho_2}\right) \quad (31).$$

$M_1^2=\frac{v_1^2}{c_1^2}$，$c_1^2=\gamma\frac{p_1}{\rho_1}$ であるから，次式を得る．

$$\frac{p_2}{p_1}-1=\gamma M_1^2\left(1-\frac{\rho_1}{\rho_2}\right) \quad (32).$$

質量と運動量保存則のみから得られるこの式をレイリーの関係式とよぶ．

つぎに，(31)式の両辺に $\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)$ を掛けると，

$(p_2-p_1)\left(\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}\right)=Q^2\left(\frac{1}{\rho_1^2}-\frac{1}{\rho_2^2}\right)=v_1^2-v_2^2$ が得られる．これとエネルギー保存則 (30) から $v_1^2-v_2^2$ を消去すると，次のランキン－ユゴニオの関係式(Rankine-Hugoniot's relations) が得られる．

$$\left(\frac{p_2}{p_1}+\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}-\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)=\frac{4\gamma}{(\gamma+1)^2} \quad (33).$$

レイリーの式(32)とランキン－ユゴニオの式(33)から，衝撃波前後の速度，密度，圧力，温度の比が以下のように求まる．

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\rho_1}{\rho_2}=1-\frac{2(M_1^2-1)}{(\gamma+1)M_1^2} \quad (34),$$

$$\frac{p_2}{p_1}=1+\frac{2\gamma}{\gamma+1}(M_1^2-1) \quad (35),$$

$$\frac{T_2}{T_1}=\frac{c_2^2}{c_1^2}=1+\frac{2(\gamma-1)(\gamma M_1^2+1)(M_1^2-1)}{(\gamma+1)^2M_1^2} \quad (36),$$

$$M_2^2=1-\frac{(\gamma+1)(M_1^2-1)}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)} \quad (37).$$

$M_1^2\to 1$ のとき，跳び比はすべて 1 に近づく．一方，$M_1^2\to\infty$ のとき，圧力比，温度比は無限大になるが，速度比や密度比，下流のマッハ数は以下のように有限にとどまる．

$$\frac{v_2}{v_1}=\frac{\rho_1}{\rho_2}\to\frac{(\gamma-1)}{(\gamma+1)} \quad (38), \qquad M_2^2\to\frac{\gamma-1}{2\gamma} \quad (39).$$

しかし，強い衝撃波では，分子の解離，電離，輻射などのため，このような簡単な議論はあてはまらなくなる．

熱力学第 2 法則より衝撃波前後でエントロピーは増大しなければならないので，衝撃波は常に圧縮性であり，密度と温度は上昇し，かつ超音速 ($M_1>1$) から亜音速 ($M_2<1$)への遷移のみ許される．非常に弱い衝撃波の極限では等エントロピー変化となり，音波になる．

衝撃波が流れに斜めになっている場合，波面に垂直な速度成分に関して上式がそのまま成立し，平行成分は変化しない．したがって，流れの向きは衝撃波を通過するとき不連続的に変化する．

また，燃焼ガスなどの発熱反応を伴う衝撃波の場合，通常二つの解があり，一方は圧縮波でありデトネーション (detonation)，他方は膨張波でありデフラグレーション (deflagration) とよばれる．($p_2/p_1-\rho_1/\rho_2$) 平面上で，ランキン－ユゴニオの関係式(33) (発熱量を考慮した変形式) を満たす曲線にレイリーの関係式(32)を満たす直線が接する点はチャップマン－ジュゲの点 (Chapman-Jouguet point) とよばれ，この点を境に圧縮波と膨張波はさらに分類され，それぞれの解の安定性が決まる[1,3,5,6]．

1.2.4 流れを支配する無次元量とレイノルズの相似則

気体分子の平均自由行程を λ，流れ場の特性長を L とすると，その比 λ/L をクヌッセン数 (Knudsen number) Kn とよぶ．$Kn=\lambda/L$ が 1 程度かそれ以上となった気体 (希薄気体とよぶ) に対しては，巨視的な連続流体的取り扱いでなく，微視的な分子運動論や統計力学的取り扱いが必要となる[4-6]．1 気圧で常温の空気中の平均自由行程λはおおよそ 0.2 μm と短く，$L=0.2m$ とすると，Kn は10^{-6}と極めて小さくなる．大気圧中の衝撃波厚さは λ 程度であり，衝撃波を不連続面として扱うことがうなずける．

解離や電離が始まり弱電離気体となると，中性粒子とイオン・電子の相互作用が関与するため非常に複雑な挙動を示す．電離度が高くなり中性粒子との衝突やクーロン衝突が無視できる薄いプラズマは無衝突プラズマとよばれる．しかし，地球前面のバウショックなどは，電場，磁場を介した荷電粒子の相互作用があるため連続流体に類似の振る舞いをする．宇宙・天体プラズマでは流れ場のスケール長 L が非常に大きいために連続体モデルが適用できるケースが多い．

粘性が効いてくると気体の流れは次のナビエ－ストークスの方程式 (Navier-Stokes equation) に従う[1,2]．簡単のために，圧力は等方的で，粘性率 μ は一定であるとする．

$$\rho\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}\right\}=-\nabla p+\mu\nabla^2\boldsymbol{v} \quad (40).$$

流れの特性長を L，代表的速度を U とし，時間を L/U で，圧力をρU^2で規格化する．規格化した速度，距離，時間，圧力，微分演算子をダッシュを付けて表すと，次式が得られる．

$$\left\{\frac{\partial \boldsymbol{v}'}{\partial t'}+(\boldsymbol{v}'\cdot\nabla')\boldsymbol{v}'\right\}=-\nabla' p'+\frac{\mu}{\rho UL}\nabla'^2\boldsymbol{v}' \quad (41).$$

ここで，レイノルズ数(Reynolds number)R は以下の無次元量で表される．

$$R=\frac{\rho UL}{\mu}=\frac{UL}{\nu} \quad (42).$$

ここで，動粘性率$\nu=\frac{\mu}{\rho}$である．

幾何学的に相似な境界条件における流れが力学的にも相似であるためには，流れを特長づけるレイノルズ数が同じ値をとることが必要である．これをレイノルズの相似則 (Reynolds's law of similarity) という．(42)式から，流れの振る舞いを決定する上で，特性長が長いこと，流速が速いこと，密度が高いことは，粘性が小さいことと同等の効果をもつことがわかる．

電磁流体の場合には，ローレンツ力が体積力として加わり，また，圧力も非等方となるため極めて複雑になる．ホール係数，ベータ値，アルヴェンマッハ数，磁気音波マッハ数や，磁気レイノルズ数，ルンキスト数など新たに

多くの無次元量が関与してくる[7]．宇宙・天体プラズマの現象を実験室で模擬する場合には，これらの無次元量をすべて同一にはできないので，どのような現象を模擬するかによって重要な無次元量を選別する必要がある．

参 考 文 献

［1］L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Fluid Mechanics* (Pergamon Press, 1959).

［2］今井　功：流体力学，岩波全書275（岩波書店，1970）．
谷　一郎：流れ学，岩波全書136（岩波書店，1963）．

［3］A.H. Shapiro, *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow,* Vol.1 (Ronald Press Co., New York, 1953).

［4］H.W. Liepman and A. Roshko, *Elements of Gasdynamics* (John-Wiley, 1956)；玉田洸訳：気体力学（吉岡書店，1960）．

［5］Ya.B. Zeldovich and Yu.P. Raizer, *Elements of Gasdynamics and Classical Theory of Shock Waves* (Academic press, New York, 1968).

［6］森岡茂樹：気体力学（朝倉書店，1982）．

［7］A.B. Cambel, *Plasma Physics and Magnetohydrodynamics* (McGraw-Hill Inc., New York, 1963)；橘　藤雄監修：プラズマ物理学と電磁流体力学（好学社，1966）．